

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>Банников А. С.</i> Уклонение от группы нестационарных инерционных объектов	3
<i>Бурлаков Е. О., Жуковский Е. С.</i> О корректности краевых задач и непрерывной зависимости периодических решений управляемых систем от параметров	11
<i>Зайцев В. А.</i> Согласованность линейных стационарных управляемых систем с наблюдателем специального вида	22
<i>Иванко Е. Е.</i> Достаточные условия устойчивости оптимального маршрута в задаче коммивояжера при добавлении новой вершины и при удалении существующей	48
<i>Ильчуков А. С., Тимофеев А. Ю.</i> Задача Дирихле для голоморфных функций в пространствах, описываемых поведением модуля непрерывности	58
<i>Ларионов А. С.</i> Разрешимость квазилинейных краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений	66
<i>Попова С. Н.</i> О достаточных условиях глобальной достижимости линейных управляемых систем	73
<i>Сахаров Д. В.</i> Об одной дифференциальной игре преследования со многими участниками	81
<i>Ченцов А. Г., Шапарь Ю. В.</i> Конечно-аддитивные меры и расширения игровых задач с ограничениями асимптотического характера	89
<i>Яшин А. Д.</i> Алгебраическая модель трёхмерной синхронной переключающей схемы	112

КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

<i>Копысов С. П., Новиков А. К., Тонков Л. Е., Береснев Д. В.</i> Методы привязки параллельных процессов и потоков к многоядерным узлам вычислительных систем ...	123
---	-----

ХРОНИКА

Василий Яковлевич Дерр. К юбилею	133
--	-----

ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Ежеквартальный журнал Удмуртского государственного университета и ИММ УРО РАН

Редакционная коллегия серии «МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ»

Главные редакторы:

Тонков Евгений Леонидович

д.ф.-м.н. профессор,
Удмуртский государственный университет,
Кафедра дифференциальных уравнений, Ижевск
Математика. Теория управления

Борисов Алексей Владимирович

д.ф.-м.н. профессор,
Удмуртский государственный университет,
Институт компьютерных исследований, Ижевск
*Механика. Математическая физика.
Компьютерные науки*

Редакционная коллегия:

В.А. Зайцев, к.ф.-м.н., доцент, зам. главного редактора – математика, теория управления (Ижевск)
Н.Н. Красовский – академик РАН (Екатеринбург)
В.И. Бердышев – член-корреспондент РАН (Екатеринбург)
А.А. Грызлов – д.ф.-м.н., профессор (Ижевск)
В.Я. Дерр – д.ф.-м.н., профессор (Ижевск)
Б.П. Кондратьев – д.ф.-м.н., профессор (Ижевск)
А.В. Летчиков – д.ф.-м.н., профессор (Ижевск)
В.П. Максимов – д.ф.-м.н., профессор (Пермь)
Н.Н. Петров – д.ф.-м.н., профессор (Ижевск)
С.Н. Попова – д.ф.-м.н., профессор (Ижевск)
В.И. Сумин – д.ф.-м.н., профессор (Нижний Новгород)
В.Н. Ушаков – член-корреспондент РАН (Екатеринбург)
А.Г. Ченцов – член-корреспондент РАН (Екатеринбург)

И.С. Мамаев – д.ф.-м.н., профессор, зам. главного редактора – механика, теоретическая физика, компьютерные науки (Ижевск)
В.В. Козлов – академик РАН (Москва)
С.М. Рамоданов – к.ф.-м.н. (Москва)
В.В. Васькин – к.ф.-м.н., профессор (Ижевск)
П.К. Галенко – д.ф.-м.н., профессор (Ижевск)
Р.Ф. Ганиев – академик РАН (Москва)
Д.В. Георгиевский – д.ф.-м.н., профессор (Москва)
А.П. Бельтюков – д.ф.-м.н., профессор (Ижевск)
В.В. Васин – член-корреспондент РАН (Екатеринбург)
Г.Г. Исламов – д.ф.-м.н., профессор (Ижевск)
А.И. Карпов – д.ф.-м.н., профессор (Ижевск)
А.А. Килин – д.ф.-м.н., доцент (Ижевск)
Н.Н. Непейвода – д.ф.-м.н., профессор (Ижевск)

Адрес редакции:

426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4.

Математика. Теория управления. – Кафедра дифференциальных уравнений,
ком. 236, тел. +7(3412)916092, E-mail: imi@uni.udm.ru

Механика. Теоретическая физика. Компьютерные науки. – Институт компьютерных исследований,
ком. 211, тел. +7(3412)500295, E-mail: mail@rcd.ru, editorial@rcd.ru

Официальный сайт Вестника Удмуртского университета: <http://vestnik.udsu.ru>

Сайт журнала «Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки»:
<http://vst.ics.org.ru/>

УДК 517.977.1 + 517.926

© В. А. Зайцев

СОГЛАСОВАННОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С НАБЛЮДАТЕЛЕМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Рассматривается линейная стационарная управляемая система с наблюдателем. Исследуется свойство согласованности этой системы в случае, когда коэффициенты имеют специальный вид, при котором условие согласованности является достаточным условием глобальной управляемости спектра собственных значений замкнутой системы. Установлено, что для систем специального вида необходимое условие согласованности не является достаточным для размерностей больших чем 5. Найдено новое достаточное условие согласованности для таких систем.

Ключевые слова: управляемая система, неполная обратная связь, согласованность, управление спектром.

Введение

Настоящая статья продолжает исследования [1]. Рассмотрим линейную стационарную управляемую систему с наблюдателем

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = C^*x, \quad (x, u, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k, \quad (1)$$

$A \in M_n$, $B \in M_{n,m}$, $C \in M_{n,k}$, ($M_{n,m}$ — это пространство вещественных $n \times m$ -матриц, $M_n := M_{n,n}$), $*$ означает операцию транспонирования матрицы (или вектора). Управление в системе (1) строится по принципу линейной неполной обратной связи и имеет вид $u = Uy$, $U \in M_{m,k}$ — постоянная матрица. Замкнутая система имеет вид

$$\dot{x} = (A + BUC^*)x, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

В работе [1] исследовалось свойство согласованности системы (1) в связи с задачей о глобальном управлении спектром собственных значений матрицы системы (2) (или просто спектром системы (2)). Говорят, что *спектр системы (2) глобально управляем*, если для любого многочлена $p(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \dots + \gamma_n$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$ найдется матрица $U \in M_{m,k}$, такая что $\chi(A + BUC^*; \lambda) = p(\lambda)$ (здесь $\chi(F; \lambda)$ — характеристический многочлен матрицы F). Согласованность системы (1) означает полную управляемость «большой системы» [1, теорема 3]

$$\dot{z} = Pz + Qv, \quad z \in \mathbb{R}^{n^2}, \quad v \in \mathbb{R}^{mk},$$

где $P = A \otimes I - I \otimes A^* \in M_{n^2}$, $I \in M_n$ — единичная матрица, $Q = B \otimes C \in M_{n^2, mk}$, $\otimes$ — прямое произведение матриц [2, с. 235].

Предположим, что коэффициенты системы (1) имеют специальный вид: матрица A имеет форму Хессенберга, первые $p-1$ строк матрицы B и последние $n-p$ строк матрицы C равны нулю ($p \in \{1, \dots, n\}$), то есть

$$\begin{aligned} A &= \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n, \quad a_{i,i+1} \neq 0, \quad i = \overline{1, n-1}; \quad a_{ij} = 0, \quad j > i+1; \\ B &= \{b_{ij}\}, \quad C = \{c_{is}\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad s = \overline{1, k}; \\ b_{ij} &= 0, \quad i = \overline{1, p-1}, \quad j = \overline{1, m}; \quad c_{is} = 0, \quad i = \overline{p+1, n}, \quad s = \overline{1, k}; \quad p \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (3)$$

В работе [1] было доказано (теорема 10), что если коэффициенты системы (1) имеют вид (3), то спектр системы (2) глобально управляем тогда и только тогда, когда матрицы

$$C^*B, \quad C^*AB, \quad \dots, \quad C^*A^{n-1}B \quad (4)$$

линейно независимы. Было также доказано [1, теорема 7], что если матрица A — циклическая (то есть характеристический многочлен $\chi(A; \lambda)$ матрицы A совпадает с минимальным аннулирующим многочленом $\psi(A; \lambda)$ матрицы A), а B и C — произвольные, то из согласованности системы (1) следует линейная независимость матриц (4). Поскольку матрица Хессенберга является циклической, то для системы (1), (3) имеет место утверждение [1, теорема 13]:

Утверждение 1. Пусть дана система (1) с матрицами (3). Пусть даны следующие утверждения:

- (a) система (1) согласованна;
- (b) матрицы $C^*B, C^*AB, \dots, C^*A^{n-1}B$ линейно независимы;
- (c) спектр системы (2) глобально управляем.

Имеет место следующая цепочка импликаций:

$$(a) \implies (b) \iff (c).$$

На вопрос о справедливости импликации $(b) \implies (a)$ был дан следующий ответ. Если $n < 6$, то утверждение $(b) \implies (a)$ верно [1, теорема 12]. Если $n = 6$, то утверждение $(b) \implies (a)$ в общем случае неверно, то есть существуют матрицы A, B, C вида (3), такие, что матрицы (4) линейно независимы, но система (1) не является согласованной [1, пример 5]. В настоящей работе доказано, что утверждение $(b) \implies (a)$ в общем случае неверно для любого $n \geq 6$.

Далее, пусть $\tilde{m} = \text{rank } B$, $\tilde{k} = \text{rank } C$. Вычеркнем в матрицах B и C линейно зависимые столбцы, обозначим полученные матрицы через $\tilde{B} \in M_{n, \tilde{m}}$ и $\tilde{C} \in M_{n, \tilde{k}}$ и перейдем в системе (1) от матриц A, B, C к матрицам $A, \tilde{B}, \tilde{C}$. Легко видеть, что при этом каждое из свойств (a), (b), (c) сохраняется. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $m \leq n$, $k \leq n$ и матрицы B и C имеют полный ранг: $\text{rank } B = m$, $\text{rank } C = k$. Из вида (3) матриц B и C следует, что $n - p + 1 \geq m$, $p \geq k$. Отсюда, в частности, следует, что $m + k \leq n + 1$.

В работе [1] была выдвинута гипотеза о том, что в случае, если $m + k$ достигает максимального возможного значения, то есть $m + k = n + 1$, то система согласованна (это утверждение фактически было доказано перебором в работе [1] для всех $n \leq 5$). В настоящей работе эта гипотеза доказана для произвольного n . Поскольку условие согласованности для системы (1), (3) в силу утверждения 1 является достаточным условием глобальной управляемости спектра, то отсюда будет следовать достаточное условие $m + k = n + 1$ глобальной управляемости спектра системы (2) для всех матриц A, B, C вида (3). Этот результат уточняет результаты, следующие из работ [3, 4], о том, что условие $m + k \geq n + 1$ является достаточным условием глобальной управляемости спектра системы (2) в типическом случае (то есть для почти всех матриц A, B, C , см. [5, с. 180]).

§ 1. Импликация $(b) \implies (a)$ в общем случае неверна при $n \geq 6$

Введем обозначения: пусть $e_1, \dots, e_n$ — канонический базис в $\mathbb{R}^n$, то есть $e_1 = \text{col}(1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = \text{col}(0, \dots, 0, 1)$; если не оговорено противное, греческими буквами будем обозначать вектор-строки, латинскими — вектор-столбцы; если $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор-столбец, то $x^* \in \mathbb{R}^{n*}$ — вектор-строка; $E_{ij} := e_i e_j^* \in M_n$, $i, j = \overline{1, n}$; J — первый единичный косоый ряд, то есть

$J := \sum_{i=1}^{n-1} e_i e_{i+1}^* \in M_n$. Обозначим через $\text{vect} : M_{n, m} \rightarrow \mathbb{R}^{nm}$ отображение, которое «разворачивает» матрицу $H = \{h_{ij}\}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ по столбцам в вектор-столбец $\text{vect } H := \text{col}(h_{11}, \dots, h_{n1}, \dots, h_{1m}, \dots, h_{nm})$. Обозначим через $[P, Q] := PQ - QP$ коммутатор матриц P и Q , а через $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ — линейную оболочку элементов $a_1, \dots, a_n$ линейного пространства.

Предположим, что $n \geq 6$. Построим матрицы

$$A = J + e_n \psi \in M_n, \quad B = [e_{n-2}, e_n] \in M_{n, 2}, \quad C = [e_1, e_3, e_4, \dots, e_{n-2}] \in M_{n, n-3}, \quad (5)$$

где $J \in M_n$, $\psi = (0, \dots, 0, -d^2, 2d) \in \mathbb{R}^{n*}$, $e_i \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}$ — любое число такое, что $d \neq 0$. Матрицы (5) имеют вид (3), здесь $p = n - 2$. Покажем, что система (1) с матрицами (5)

не является согласованной. Для доказательства воспользуемся утверждением теоремы 4 [1] о том, что *система (1) не является согласованной тогда и только тогда, когда существует ненулевая матрица $H \in M_n$ такая, что для всех $\nu = \overline{0, n^2 - 1}$ выполнены равенства $C^* N_\nu B = 0$, где $N_0 = H$, $N_\nu = [A, N_{\nu-1}]$, $\nu = \overline{1, n^2 - 1}$.*

Построим матрицу

$$H = \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{vmatrix} \in M_n, \quad \text{где} \quad H_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -d & 1 \end{vmatrix} \in M_2,$$

$H_{11} = 0 \in M_{2,n-2}$, $H_{21} = 0 \in M_{n-2}$, $H_{22} = 0 \in M_{n-2,2}$. Тогда $H \neq 0$. Представим матрицу A из (5) в блочном виде

$$A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \in M_n, \quad \text{где} \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -d^2 & 2d \end{vmatrix} \in M_2,$$

$A_{11} = J_1 \in M_{n-2}$; $A_{12} = e_{n-2}e_1^* \in M_{n-2,2}$, $e_{n-2} \in \mathbb{R}^{n-2}$, $e_1^* \in \mathbb{R}^{2*}$; $A_{21} = 0 \in M_{2,n-2}$. Построим матрицу $P = HA \in M_n$. Тогда

$$\begin{aligned} P = HA &= \begin{vmatrix} H_{11}A_{11} + H_{12}A_{21} & H_{11}A_{12} + H_{12}A_{22} \\ H_{21}A_{11} + H_{22}A_{21} & H_{21}A_{12} + H_{22}A_{22} \end{vmatrix} =: \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{vmatrix}, \\ P_{11} &= H_{11}A_{11} + H_{12}A_{21} = 0 \in M_{2,n-2}, \quad \text{поскольку} \quad H_{11} = 0, \quad A_{21} = 0; \\ P_{12} &= H_{11}A_{12} + H_{12}A_{22} = H_{12}A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -d^2 & d \end{vmatrix} \in M_2; \\ P_{21} &= H_{21}A_{11} + H_{22}A_{21} = 0 \in M_{n-2}, \quad \text{поскольку} \quad H_{21} = 0, \quad A_{21} = 0; \\ P_{22} &= H_{21}A_{12} + H_{22}A_{22} = 0 \in M_{n-2,2}, \quad \text{поскольку} \quad H_{21} = 0, \quad H_{22} = 0. \end{aligned}$$

Далее построим матрицу $Q = AH \in M_n$. Для этого представим матрицу A в следующем блочном виде:

$$A = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix}, \quad \text{где} \quad T_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \in M_2,$$

$T_{12} = e_2e_1^* \in M_{2,n-2}$, $e_2 \in \mathbb{R}^2$, $e_1^* \in \mathbb{R}^{n-2*}$; $T_{21} = 0 \in M_{n-2,2}$; $T_{22} = J + e_{n-2}\psi_1 \in M_{n-2}$, $J \in M_{n-2}$, $e_{n-2} \in \mathbb{R}^{n-2}$, $\psi_1 = (0, \dots, 0, -d^2, 2d) \in \mathbb{R}^{n-2*}$. Тогда

$$\begin{aligned} Q = AH &= \begin{vmatrix} T_{11}H_{11} + T_{12}H_{21} & T_{11}H_{12} + T_{12}H_{22} \\ T_{21}H_{11} + T_{22}H_{21} & T_{21}H_{12} + T_{22}H_{22} \end{vmatrix} =: \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{vmatrix}, \\ Q_{11} &= T_{11}H_{11} + T_{12}H_{21} = 0 \in M_{2,n-2}, \quad \text{поскольку} \quad H_{11} = 0, \quad H_{21} = 0; \\ Q_{12} &= T_{11}H_{12} + T_{12}H_{22} = T_{11}H_{12} = \begin{vmatrix} -d & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \in M_2; \\ Q_{21} &= T_{21}H_{11} + T_{22}H_{21} = 0 \in M_{n-2}, \quad \text{поскольку} \quad H_{11} = 0, \quad H_{21} = 0; \\ Q_{22} &= T_{21}H_{12} + T_{22}H_{22} = 0 \in M_{n-2,2}, \quad \text{поскольку} \quad T_{21} = 0, \quad H_{22} = 0. \end{aligned}$$

Построим матрицу $Q - P = AH - HA$, получим

$$Q - P = \begin{vmatrix} 0 & Q_{12} - P_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{где} \quad Q_{12} - P_{12} = \begin{vmatrix} -d & 0 \\ d^2 & -d \end{vmatrix}.$$

Таким образом, $AH - HA = (-d)H$. Положим $N_0 := H$, $N_\nu := [A, N_{\nu-1}]$, $\nu \in \mathbb{N}$. Тогда $N_1 = (-d)H$, $N_2 = [A, N_1] = [A, (-d)H] = (-d)[A, H] = (-d)^2H$, и так далее, $N_\nu = (-d)^\nu H$.

Имеем $HB = H[e_{n-2}, e_n] =: [l_1, l_2] \in M_{n,2}$, $l_1 = 0 \in \mathbb{R}^n$, $l_2 = e_2 \in \mathbb{R}^n$. Тогда $C^*HB =$

$$\begin{bmatrix} e_1^* \\ e_3^* \\ \vdots \\ e_{n-2}^* \end{bmatrix} \cdot [0, e_2] = 0 \in M_{n-3,2}. \quad \text{Следовательно, для всех } \nu = \overline{0, n^2 - 1} \text{ выполнено равенство}$$

$C^*N_\nu B = (-d)^\nu C^*HB = 0$. Таким образом, система (1) с матрицами (5) не является согласованной.

Покажем теперь, что для матриц (5) матрицы (4) линейно независимы.

Пусть $[l_1^0, l_2^0] := B = [e_{n-2}, e_n]$, $e_{n-2}, e_n \in \mathbb{R}^n$. Положим $[l_1^s, l_2^s] := A^s B$, $s = \overline{0, n-1}$. Тогда $l_1^s = A^s l_1^0 = A^s e_{n-2}$, $l_2^s = A^s l_2^0 = A^s e_n$. Поскольку $\psi e_j = 0$ для всех $j = \overline{1, n-2}$, то мы имеем

$$\begin{aligned} l_1^0 &= e_{n-2}, \\ l_1^1 &= Ae_{n-2} = (J + e_n \psi) e_{n-2} = Je_{n-2} + e_n \psi e_{n-2} = Je_{n-2} = e_{n-3}, \\ l_1^2 &= Ae_{n-3} = (J + e_n \psi) e_{n-3} = Je_{n-3} + e_n \psi e_{n-3} = Je_{n-3} = e_{n-4}, \end{aligned}$$

и так далее, $l_1^s = e_{n-2-s}$, $s = \overline{0, n-3}$, $l_1^{n-2} = l_1^{n-1} = 0 \in \mathbb{R}^n$.

Далее, найдем l_2^s , $s = \overline{0, n-1}$. Имеем $l_2^0 = e_n$,

$$\begin{aligned} l_2^1 &= Ae_n = (J + e_n \psi) e_n = Je_n + e_n \psi e_n = e_{n-1} + e_n \cdot 2d = \text{col}(0, \dots, 0, 1, 2d) \in \mathbb{R}^n, \\ l_2^2 &= Al_2^1 = (J + e_n \psi)(e_{n-1} + 2de_n) = Je_{n-1} + 2dJe_n + e_n \psi e_{n-1} + 2de_n \psi e_n = \\ &= e_{n-2} + 2de_{n-1} + e_n(-d^2) + 2de_n \cdot 2d = e_{n-2} + 2de_{n-1} + 3d^2 e_n = \text{col}(0, \dots, 0, 1, 2d, 3d^2) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Покажем, что для всех $s = \overline{0, n-1}$ имеет место формула

$$l_2^s = \sum_{i=0}^s (i+1)d^i e_{n-s+i} = \text{col}(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-s-1}, 1, 2d, 3d^2, \dots, (s+1)d^s) \in \mathbb{R}^n. \quad (6)$$

Доказательство проведем по индукции. Для $s = 0, 1, 2$ эта формула верна. Пусть формула (6) верна для $s = \nu$. Покажем, что она верна для $s = \nu + 1$. Имеем

$$\begin{aligned} l_2^{\nu+1} &= Al_2^\nu = (J + e_n \psi) \sum_{i=0}^{\nu} (i+1)d^i e_{n-\nu+i} = \sum_{i=0}^{\nu} (i+1)d^i Je_{n-\nu+i} + e_n \sum_{i=0}^{\nu} (i+1)d^i \psi e_{n-\nu+i} = \\ &= \sum_{i=0}^{\nu} (i+1)d^i e_{n-\nu+i-1} + e_n(\psi e_n(\nu+1)d^\nu + \psi e_{n-1}\nu d^{\nu-1}) = \sum_{i=0}^{\nu} (i+1)d^i e_{n-(\nu+1)+i} + \\ &+ e_n(2d(\nu+1)d^\nu - d^2 \cdot \nu d^{\nu-1}) = \sum_{i=0}^{\nu} (i+1)d^i e_{n-(\nu+1)+i} + (\nu+2)d^{\nu+1} e_n = \sum_{i=0}^{\nu+1} (i+1)d^i e_{n-(\nu+1)+i}. \end{aligned}$$

Таким образом, формула (6) доказана. Построим матрицы (4). Имеем

$$C^*B = [C^*l_1^0, C^*l_2^0], \quad C^*AB = [C^*l_1^1, C^*l_2^1], \quad \dots, \quad C^*A^{n-1}B = [C^*l_1^{n-1}, C^*l_2^{n-1}]. \quad (7)$$

Применим к матрицам (7) отображение vect и составим из полученных векторов матрицу

$$V = [\text{vect}(C^*B), \text{vect}(C^*AB), \dots, \text{vect}(C^*A^{n-1}B)] \in M_{2(n-3), n}.$$

Линейная независимость матриц (7) равносильна тому, что $\text{rank } V = n$. Имеем $V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$,

где $V_1 = [C^*l_1^0, C^*l_1^1, \dots, C^*l_1^{n-1}] \in M_{n-3, n}$, $V_2 = [C^*l_2^0, C^*l_2^1, \dots, C^*l_2^{n-1}] \in M_{n-3, n}$. Построим матрицы $Q_1 = [l_1^0, \dots, l_1^{n-1}] \in M_n$, $Q_2 = [l_2^0, \dots, l_2^{n-1}] \in M_n$. Тогда $V_1 = C^*Q_1$, $V_2 = C^*Q_2$. В матрице Q_2 «побочная» диагональ (диагональ, идущая от левого нижнего угла матрицы к правому верхнему углу) состоит из единиц, элементы s -й побочной поддиагонали (то есть диагонального ряда, параллельного побочной диагонали и расположенного на s рядов ниже побочной диагонали) равны $(s+1)d^s$, а элементы выше побочной диагонали равны нулю. В матрице Q_1 вторая побочная наддиагональ (то есть диагональный ряд, параллельный побочной диагонали и расположенный на два ряда выше побочной диагонали) состоит из единиц, остальные элементы равны нулю. Из вида (5) матрицы C следует, что при умножении матрицы

C^* слева на некоторую матрицу (Q_1 или Q_2) в этой матрице (Q_1 или Q_2) вычеркиваются две последние строки и вторая строка. Таким образом, матрицы $V_1, V_2 \in M_{n-3,n}$ имеют вид

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 2d & 3d^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 2d & 3d^2 & 4d^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 2d & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Покажем, что $\text{rank } V = n$. Выберем матрицу $\tilde{V} \in M_n$, состоящую из первых n строк и n столбцов матрицы V . Для этого надо взять матрицу V_1 и приписать снизу первые три строки матрицы V_2 . Вычислим $\det \tilde{V}$. В каждом из первых $n-4$ столбцов матрицы $\tilde{V}$ находится лишь одна единица, остальные элементы равны нулю. Раскладывая $\det \tilde{V}$ по первому столбцу, затем по второму и так далее до $n-4$ -го, получим

$$\det \tilde{V} = (-1)^{(n-3)+1} \cdot (-1)^{(n-2)+1} \cdot \dots \cdot (-1)^{2+1} \cdot \det \hat{V},$$

где

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2d & 3d^2 \\ 1 & 2d & 3d^2 & 4d^3 \end{pmatrix}.$$

Имеем $\det \hat{V} = 2d$, следовательно, $|\det \tilde{V}| = 2d \neq 0$. Таким образом, $\text{rank } V = n$, и, следовательно, матрицы (7) линейно независимы.

Таким образом, мы доказали, что утверждение $(b) \implies (a)$ в общем случае неверно при $n \geq 6$. Это утверждение верно в некоторых частных случаях (например, когда $\text{rank } B = n$ или $\text{rank } C = n$, или $A = J$, см. [1, теорема 13]).

§ 2. Некоторые свойства векторов биномиальных коэффициентов

Введем обозначения: для каждого $n \in \mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$ и для каждого $m = \overline{0, n}$ положим $b_n^m := C_n^m$, $a_n^m := (-1)^m b_n^m$, где $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ — биномиальные коэффициенты. Числа b_n^m образуют арифметический треугольник, или треугольник Паскаля (обозначим его Δ_+), а числа a_n^m — знакопеременный арифметический треугольник (обозначим его буквой Δ). Дополним треугольник Δ (Δ_+) до полосы $\Pi = \{a_n^m\}$, ($\Pi_+ = \{b_n^m\}$), $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}$, ограниченной сверху и неограниченной вправо, влево и вниз, следующим образом. Элементы, расположенные выше левой и правой боковых сторон треугольника Δ (Δ_+), приравняем к нулю, то есть положим $a_n^m := 0$, ($b_n^m := 0$), $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in (-\mathbb{N})$; $a_n^m := 0$, ($b_n^m := 0$), $n \in \mathbb{N}_0$, $m > n$.

$$\begin{array}{cccccccccc} \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \\ \dots & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & -1 & 0 & 0 & \\ \dots & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ & 0 & 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & -1 & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{array} \quad (8)$$

Полоса Π имеет вид (8), полоса Π_+ имеет аналогичный вид, ее элементы $b_n^m = |a_n^m|$. Горизонтальным рядом (или просто рядом) полосы Π (Π_+) будем называть бесконечную в обе стороны последовательную совокупность элементов a_n^i , (b_n^i), $i \in \mathbb{Z}$. Ряд характеризуется своим номером

$$b_{n+1}^m = b_n^m + b_n^{m-1}, \quad a_{n+1}^m = a_n^m - a_n^{m-1}. \quad (9)$$
$$\begin{aligned}\psi(m, l, k) &:= (a_m^{m+1-k}, \dots, a_m^{m+l-k}) \in \mathbb{R}^{l*}, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \varphi(m, l, k) &:= (b_m^{m+1-k}, \dots, b_m^{m+l-k}) \in \mathbb{R}^{l*}, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}\tag{10}$$
[illegible]
$$A(m, l) = \left\| \begin{array}{c} \psi(m, l, 1) \\ \psi(m, l, 2) \\ \dots\dots\dots \\ \psi(m, l, m+l) \end{array} \right\| \in M_{m+l, l}, \quad B(m, l) = \left\| \begin{array}{c} \varphi(m, l, 1) \\ \varphi(m, l, 2) \\ \dots\dots\dots \\ \varphi(m, l, m+l) \end{array} \right\| \in M_{m+l, l}.$$

Доказательство теоремы 2. Теорема 2 следует из теоремы 1. Покажем это. Выберем в матрице $A(m, l)$ любые l различных строк $\psi(m, l, i_\nu)$, $1 \leq i_\nu \leq m + l$, $\nu = \overline{1, l}$, $i_j \neq i_\nu$, $j \neq \nu$. Составим из них матрицу $\Psi = \begin{vmatrix} \psi(m, l, i_1) \\ \dots\dots\dots \\ \psi(m, l, i_l) \end{vmatrix}$. Имеем

$$\psi(m, l, i_\nu) = ((-1)^{m+1-i_\nu} b_m^{m+1-i_\nu}, \dots, (-1)^{m+l-i_\nu} b_m^{m+l-i_\nu}), \quad \nu = \overline{1, l}.$$

В каждой строке $\psi(m, l, i_\nu)$, $\nu = \overline{1, l}$ знаки ненулевых элементов чередуются. Домножим строку $\psi(m, l, i_\nu)$ на $(-1)^{m+i_\nu}$ для всех $\nu = \overline{1, l}$. Полученную матрицу обозначим Ψ_1 . Тогда $\det \Psi_1 = \pm \det \Psi$ и в матрице Ψ_1 в каждом столбце ненулевые элементы будут иметь один и тот же знак:

в нечетных столбцах — минус, в четных — плюс. Далее, домножим нечетные столбцы матрицы Ψ_1 на (-1) . Получим матрицу Φ , составленную из строк $\varphi(m, l, i_\nu)$, $\nu = \overline{1, l}$. Следовательно, $\det \Psi_1 = \pm \det \Phi$. По теореме 1 строки $\varphi(m, l, i_\nu)$, $\nu = \overline{1, l}$ линейно независимы, следовательно, $\det \Phi \neq 0$. Значит, и $\det \Psi \neq 0$, отсюда следует линейная независимость строк $\psi(m, l, i_\nu)$, $\nu = \overline{1, l}$. Теорема 2 доказана. $\square$

Для доказательства теоремы 1 рассмотрим для любых $m \in \mathbb{N}_0$ и $l \in \mathbb{N}$ всевозможные упорядоченные размещения без повторений $[i_1, \dots, i_l]$ из $m + l$ элементов $\{1, \dots, m + l\}$ по l элементов: $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq m + l$. Назовем такое размещение допустимым. Общее число таких размещений равно C_{m+l}^l . Каждому такому упорядоченному размещению поставим в соответствие матрицу

$$P(m, l, [i_1, \dots, i_l]) = \begin{vmatrix} \varphi(m, l, i_1) \\ \dots\dots\dots \\ \varphi(m, l, i_l) \end{vmatrix} \in M_l.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. Для любых $m \in \mathbb{N}_0$ и $l \in \mathbb{N}$ и для любого упорядоченного размещения без повторений $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq m + l$ имеет место неравенство

$$\det P(m, l, [i_1, \dots, i_l]) > 0. \quad (11)$$

Теперь теорема 1 очевидным образом вытекает из теоремы 3. Остается доказать теорему 3. Выпишем сначала некоторые свойства вектор-строк $\varphi(m, l, k)$.

Свойство 1. Для любых $m \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \varphi(m, l, 1) &= \varphi(m - 1, l, 1) = e_1^* \in \mathbb{R}^{l*}, \\ \varphi(m, l, k) &= \varphi(m - 1, l, k - 1) + \varphi(m - 1, l, k), \quad k \in \{2, \dots, m + l - 1\}, \\ \varphi(m, l, m + l) &= \varphi(m - 1, l, m + l - 1) = e_l^* \in \mathbb{R}^{l*}. \end{aligned} \quad (12)$$

Свойство 2. Для любых $m \in \mathbb{N}_0$, $l = 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} \varphi(m, l, k) &= (b_m^{m+1-k}, b_m^{m+1-(k-1)}, \dots, b_m^{m+(l-1)-(k-1)}) = \\ &= (b_m^{m+1-k}, \varphi(m, l - 1, k - 1)), \quad k \in \{2, \dots, m + l\}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \varphi(m, l, k) &= (b_m^{m+1-k}, \dots, b_m^{m+(l-1)-k}, b_m^{m+l-k}) = \\ &= (\varphi(m, l - 1, k), b_m^{m+l-k}), \quad k \in \{1, \dots, m + l - 1\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Эти свойства вытекают из определения вектора $\varphi(m, l, k)$ и свойства (9) компонент вектора $\varphi(m, l, k)$. Свойство 1 говорит о том, как выражается ненулевая вектор-строка φ длины l , лежащая в m -м ряду полосы Π_+ , через ненулевые вектор-строки той же длины, лежащие в $m - 1$ -м ряду. Свойство 2 говорит о том, как связана ненулевая строка φ длины l в m -м ряду с ненулевой строкой длины $l - 1$ в том же ряду. Эти свойства ненулевых строк используются при доказательстве теоремы 3 для проведения индукции по m и по l . Очевидно, что для нулевых строк эти свойства также выполнены.

Свойство 3. (Свойство «сдвига вверх»). Пусть дана вектор-строка $\varphi(m, l, k)$ длины l в m -м ряду полосы Π_+ , ($k \in \mathbb{Z}$). Если двигаться из вектора $\varphi(m, l, k)$, поднимаясь в полосе Π_+ на один ряд вверх и влево (то есть в направлении, параллельном правой боковой стороне треугольника Δ_+), то мы придем к вектору $\varphi(m - 1, l, k)$ (то есть третий аргумент k остается таким же), а если подниматься на один ряд вверх и вправо (то есть параллельно левой стороне треугольника Δ_+), то придем к вектору $\varphi(m - 1, l, k - 1)$, то есть k уменьшается на 1. То же самое справедливо для векторов $\psi(m, l, k)$. Это свойство очевидно вытекает из определения векторов φ и ψ .

Свойство 4. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}_0$, $l \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$. Рассмотрим $m + r$ -й ряд полосы Π и вектор-строки длины l в этой полосе. Выразим их через вектор-строки предыдущего ряда. Имеем для любого $k \in \mathbb{Z}$

$$\psi(m + r, l, k) = \psi(m + r - 1, l, k - 1) - \psi(m + r - 1, l, k).$$

$$\psi(m+r, l, k) = \psi(m+r-2, l, k-2) - 2\psi(m+r-2, l, k-1) + \psi(m+r-2, l, k).$$
$$\begin{aligned} \psi(m+r, l, k) &= \psi(m+r-3, l, k-3) - 3\psi(m+r-3, l, k-2) + \\ &\quad + 3\psi(m+r-3, l, k-1) - \psi(m+r-3, l, k), \\ &\quad \dots\dots\dots \\ \psi(m+r, l, k) &= a_r^0 \psi(m, l, k-r) + a_r^1 \psi(m, l, k-r+1) + \dots \\ &\quad + a_r^{r-1} \psi(m, l, k-1) + a_r^r \psi(m, l, k) = \sum_{i=0}^r a_r^i \psi(m, l, k-r+i). \end{aligned}$$
$$\varphi(m+r, l, k) = \sum_{i=0}^r b_r^i \varphi(m, l, k-r+i), \quad m \in \mathbb{N}_0, \quad l \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{N}_0, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (15)$$
$$\det P(m, 1, [i_1]) = \det \|\varphi(m, 1, k)\| = C_m^{m-(k-1)} > 0.$$

Будем проводить доказательство теоремы индукцией по m . Пусть $m = 0$, $l \in \mathbb{N}$ — любое. Тогда имеем $\varphi(0, l, k) = e_k^* \in \mathbb{R}^{l^*}$, $k \in \{1, \dots, l\}$. Существует лишь одно допустимое размещение: $[i_1, \dots, i_l] = [1, \dots, l]$. Имеем

$$P(0, l, [1, \dots, l]) = I \in M_l, \quad \det P(0, l, [1, \dots, l]) = 1 > 0.$$

$$B(1, l) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{l+1, l}.$$

Пусть $m = s$. Проведем индукцию по l . Если $l = 1$, то, как было показано выше, неравенство (11) верно для любого $m \in \mathbb{N}_0$. Проведем доказательство для $l = 2$. Рассмотрим произвольное размещение $[i_1, i_2]: 1 \leq i_1 < i_2 \leq s + 2$. Построим по нему матрицу $P(s, 2, [i_1, i_2]) = \begin{bmatrix} \varphi(s, 2, i_1) \\ \varphi(s, 2, i_2) \end{bmatrix}$.

Если $i_1 = 1$, то $\varphi(s, 2, i_1) = \varphi(s, 2, 1) = (1, 0)$. Далее, $i_2 > i_1 = 1$, следовательно, $2 \leq i_2 \leq s + 2$. Тогда в силу (13)

$$\varphi(s, 2, i_2) = (b_s^{s+1-i_2}, \varphi(s, 1, i_2 - 1)) = (b_s^{s+1-i_2}, C_s^{s-(i_2-2)})$$

и, значит, $\det P(s, 2, [i_1, i_2]) = C_s^{s-(i_2-2)} > 0$.

Если $i_2 = s + 2$, то $\varphi(s, 2, i_2) = \varphi(s, 2, s + 2) = (0, 1)$. Далее, $i_1 < s + 2$, следовательно, $1 \leq i_1 \leq s + 1$. Тогда в силу (14)

$$\varphi(s, 2, i_1) = (\varphi(s, 1, i_1), b_s^{s+2-i_1}) = (C_s^{s-(i_1-1)}, b_s^{s+2-i_1})$$

и, значит, $\det P(s, 2, [i_1, i_2]) = C_s^{s-(i_1-1)} > 0$.

Далее, будем считать, что $i_1 > 1$ и $i_2 < s + 2$. По свойствам (12) имеем

$$P(s, 2, [i_1, i_2]) = \begin{vmatrix} \varphi(s, 2, i_1) \\ \varphi(s, 2, i_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi(s-1, 2, i_1-1) + \varphi(s-1, 2, i_1) \\ \varphi(s-1, 2, i_2-1) + \varphi(s-1, 2, i_2) \end{vmatrix}.$$

По свойствам определителя получим, что

$$\begin{aligned} \det P(s, 2, [i_1, i_2]) &= \det \begin{vmatrix} \varphi(s-1, 2, i_1-1) \\ \varphi(s-1, 2, i_2-1) \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} \varphi(s-1, 2, i_1-1) \\ \varphi(s-1, 2, i_2) \end{vmatrix} + \\ &+ \det \begin{vmatrix} \varphi(s-1, 2, i_1) \\ \varphi(s-1, 2, i_2-1) \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} \varphi(s-1, 2, i_1) \\ \varphi(s-1, 2, i_2) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (16)$$

Обозначим матрицы в разложении (16) через T_1, T_2, T_3, T_4 соответственно. Имеем $T_1 = \begin{vmatrix} \varphi(s-1, 2, i_1-1) \\ \varphi(s-1, 2, i_2-1) \end{vmatrix}$. Поскольку $1 < i_1 < i_2 < s + 2$, то $1 \leq i_1 - 1 < i_2 - 1 < s + 1$, следовательно, $[i_1 - 1, i_2 - 1]$ — это допустимое размещение (то есть упорядоченное и без повторений) из $(s-1) + 2$ элементов по 2. Значит, T_1 совпадает с $P(s-1, 2, [i_1-1, i_2-1])$. По предположению индукции (по m) $\det P(s-1, 2, [i_1-1, i_2-1]) > 0$, следовательно, $\det T_1 > 0$.

Далее, из неравенства $1 \leq i_1 - 1 < i_2 \leq s + 1$ следует, что $[i_1 - 1, i_2]$ образует допустимое размещение из $s + 1$ по 2. Следовательно, матрица $T_2 := \begin{vmatrix} \varphi(s-1, 2, i_1-1) \\ \varphi(s-1, 2, i_2) \end{vmatrix}$ совпадает с матрицей $P(s-1, 2, [i_1-1, i_2])$. По предположению индукции (по m) $\det P(s-1, 2, [i_1-1, i_2]) > 0$, следовательно, $\det T_2 > 0$.

Далее, из неравенства $1 < i_1 < i_2 < s + 2$ следует, что $1 \leq i_1 < i_2 \leq s + 1$, значит, $[i_1, i_2]$ — допустимое размещение из $s + 1$ по 2. Следовательно, $T_4 := \begin{vmatrix} \varphi(s-1, 2, i_1) \\ \varphi(s-1, 2, i_2) \end{vmatrix}$ совпадает с матрицей $P(s-1, 2, [i_1, i_2])$. По предположению индукции (по m) $\det P(s-1, 2, [i_1, i_2]) > 0$, следовательно, $\det T_4 > 0$.

Рассмотрим матрицу $T_3 := \begin{vmatrix} \varphi(s-1, 2, i_1) \\ \varphi(s-1, 2, i_2-1) \end{vmatrix}$. Если $i_2 = i_1 + 1$, то строки матрицы T_3 совпадают, и тогда $\det T_3 = 0$. В этом случае в сумме (16) остаются 3 слагаемых, и все они положительны, следовательно, $\det P(s, 2, [i_1, i_2]) > 0$.

Если же $i_2 > i_1 + 1$, то $1 < i_1 < i_2 - 1 < s + 1$ и $[i_1, i_2 - 1]$ — допустимое размещение из $s + 1$ по 2. Следовательно, T_3 совпадает с $P(s-1, 2, [i_1, i_2 - 1])$. По предположению индукции (по m) $\det P(s-1, 2, [i_1, i_2 - 1]) > 0$, следовательно, $\det T_3 > 0$.

Случай $i_2 < i_1 + 1$ невозможен, так как в этом случае $i_2 \leq i_1$, что противоречит допустимости размещения $[i_1, i_2]$ из $s + 2$ по 2.

Таким образом, раскладывая определитель по формуле (16), мы получаем сумму четырех (или трех) положительных слагаемых, а именно: если индекс i_2 непосредственно следует за i_1 , то есть $i_2 = i_1 + 1$, то останется сумма трех положительных слагаемых ($\det T_3$ обратится в ноль), а если $i_2 > i_1 + 1$, то получаем сумму четырех слагаемых, каждое из которых положительно

по предположению индукции, поскольку является определителем матрицы, соответствующей допустимому размещению при $m = s - 1$.

Шаг индукции по l . Предположим, что неравенство (11) справедливо при $m = s$ для всех $l = 1, \dots, p - 1$ и для всех допустимых размещений $1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq m + l$. Докажем, что оно справедливо для $l = p$ (идея доказательства будет такой же, как для $l = 2$). По индукции (по l) отсюда будет следовать справедливость неравенства (11) при $m = s$ для всех $l \in \mathbb{N}$. По индукции (по m) теорема 3 будет доказана.

Пусть $l = p$. Рассмотрим произвольное допустимое размещение $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq s + p$.

Построим по нему матрицу $P(s, p, [i_1, \dots, i_p]) = \begin{vmatrix} \varphi(s, p, i_1) \\ \dots \\ \varphi(s, p, i_p) \end{vmatrix}$.

Если $i_1 = 1$, то $\varphi(s, p, i_1) = \varphi(s, p, 1) = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{p*}$. Далее, $i_\nu > i_1 = 1$, $\nu = \overline{2, p}$, следовательно, $2 \leq i_\nu \leq s + p$, $\nu = \overline{2, p}$. Тогда в силу (13)

$$\varphi(s, p, i_\nu) = (b_s^{s+1-i_\nu}, \varphi(s, p-1, i_\nu-1)), \quad \nu = \overline{2, p}.$$

Из неравенств $1 \leq i_2 - 1 < \dots < i_p - 1 \leq s + p - 1$ следует, что $[i_2 - 1, \dots, i_p - 1]$ образует допустимое размещение из $s + p - 1$ по $p - 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \det P(s, p, [i_1, \dots, i_p]) &= \det \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_s^{s+1-i_2} & \varphi(s, p-1, i_2-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_s^{s+1-i_p} & \varphi(s, p-1, i_p-1) \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} \varphi(s, p-1, i_2-1) \\ \dots \\ \varphi(s, p-1, i_p-1) \end{vmatrix} = \\ &= \det P(s, p-1, [i_2-1, \dots, i_p-1]) > 0 \end{aligned}$$

в силу предположения индукции (по l).

Если $i_p = s + p$, то $\varphi(s, p, i_p) = \varphi(s, p, s + p) = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{p*}$ в силу (12). Далее, $i_\nu < i_p = s + p$, $\nu = \overline{1, p-1}$, следовательно, в силу (14)

$$\varphi(s, p, i_\nu) = (\varphi(s, p-1, i_\nu), b_s^{s+p-i_\nu}), \quad \nu = \overline{1, p-1}.$$

Из неравенств $1 \leq i_1 < \dots < i_{p-1} \leq s + p - 1$ следует, что $[i_1, \dots, i_{p-1}]$ образует допустимое размещение из $s + p - 1$ по $p - 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \det P(s, p, [i_1, \dots, i_p]) &= \det \begin{vmatrix} \varphi(s, p-1, i_1) & b_s^{s+p-i_1} \\ \dots & \dots \\ \varphi(s, p-1, i_{p-1}) & b_s^{s+p-i_{p-1}} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} \varphi(s, p-1, i_1) \\ \dots \\ \varphi(s, p-1, i_{p-1}) \end{vmatrix} = \\ &= \det P(s, p-1, [i_1, \dots, i_{p-1}]) > 0 \end{aligned}$$

в силу предположения индукции (по l).

Далее будем считать, что $1 < i_1 < \dots < i_p < s + p$. По свойствам (12) имеем

$$P(s, p, [i_1, \dots, i_p]) = \begin{vmatrix} \varphi(s, p, i_1) \\ \dots \\ \varphi(s, p, i_p) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi(s-1, p, i_1-1) + \varphi(s-1, p, i_1) \\ \dots \\ \varphi(s-1, p, i_p-1) + \varphi(s-1, p, i_p) \end{vmatrix}.$$

По свойствам определителя получим, что

$$\det P(s, p, [i_1, \dots, i_p]) = \sum_{j_\nu \in \{i_\nu-1, i_\nu\}, \nu=\overline{1, p}} \det \begin{vmatrix} \varphi(s-1, p, j_1) \\ \dots \\ \varphi(s-1, p, j_p) \end{vmatrix}. \quad (17)$$

Сумма (17) состоит из 2^p слагаемых. Рассмотрим по отдельности каждое слагаемое $\det T_r$, $r = \overline{1, 2^p}$ в сумме (17). Матрица T_r соответствует некоторому (не обязательно допустимому)

размещению $\omega_r = [j_1, \dots, j_p]$, где каждый индекс j_ν может принимать одно из двух значений $\{i_\nu - 1, i_\nu\}$, $\nu = \overline{1, p}$. Зафиксируем размещение $\omega_r = [j_1, \dots, j_p]$. В силу предположений $i_1 > 1$ и $i_p < s + p$ получаем, что для размещения ω_r выполнены неравенства

$$1 \leq j_1, \quad j_p \leq s + p - 1. \quad (18)$$

Поскольку для всех $\nu = \overline{1, p-1}$ выполнено $i_\nu < i_{\nu+1}$, то для всех $\nu = \overline{1, p-1}$ имеем неравенство $i_\nu \leq i_{\nu+1} - 1$. Следовательно, $j_\nu \leq j_{\nu+1}$ для всех $\nu = \overline{1, p-1}$. Таким образом, для размещения ω_r выполнены неравенства

$$1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_p \leq s + p - 1.$$

Возможны только два случая: 1) для всех $\nu = \overline{1, p-1}$ $j_\nu < j_{\nu+1}$; 2) существует $\nu \in \overline{1, p-1}$ такое, что $j_\nu = j_{\nu+1}$. В первом случае в силу неравенств (18) размещение $\omega_r = [j_1, \dots, j_p]$ является допустимым размещением из $(s-1) + p$ элементов по p . Следовательно, T_r совпадает с $P(s-1, p, [j_1, \dots, j_p])$. В силу предположения индукции (по m) $\det P(s-1, p, [j_1, \dots, j_p]) > 0$, следовательно, $\det T_r > 0$. Во втором случае ν -я и $\nu+1$ -я строки матрицы T_r совпадают. Следовательно, $\det T_r = 0$. Таким образом, каждое слагаемое в сумме (17) либо положительно, либо равно нулю. Существует по крайней мере одно положительное слагаемое в сумме (17) — это определитель матрицы T_r , отвечающей размещению $\omega_r = [j_1, \dots, j_p]$, где $j_\nu = i_\nu$, $\nu = \overline{1, p}$. Следовательно, $\det P(s, p, [i_1, \dots, i_p]) = \sum_r \det T_r > 0$. Теорема 3 доказана. $\square$

Зафиксируем $m \in \mathbb{N}_0$ и $l \in \mathbb{N}$. Для каждого $k \in \{1, \dots, m+1\}$ выберем l подряд идущих строк $\psi(m, l, k+i)$ ($\varphi(m, l, k+i)$), $i = \overline{0, l-1}$ матрицы $A(m, l)$ ($B(m, l)$) и составим из них $l \times l$ -матрицы

$$R(m, l, k) = \begin{vmatrix} \psi(m, l, k) \\ \dots\dots\dots \\ \psi(m, l, k+l-1) \end{vmatrix}, \quad T(m, l, k) = \begin{vmatrix} \varphi(m, l, k) \\ \dots\dots\dots \\ \varphi(m, l, k+l-1) \end{vmatrix}. \quad (19)$$

Следствие 1. Для любых $m \in \mathbb{N}_0$ и $l \in \mathbb{N}$ и для каждого $k \in \{1, \dots, m+1\}$ матрица $R(m, l, k)$ ($T(m, l, k)$) невырождена.

Это утверждение очевидным образом вытекает из теоремы 2 (теоремы 1), поскольку строки матрицы $R(m, l, k)$ ($T(m, l, k)$) линейно независимы.

Далее, зафиксируем $m \in \mathbb{N}_0$ и $l \in \mathbb{N}$. Положим $n := m + l - 1$. Тогда $n \in \mathbb{N}_0$ и $n \geq m$. Рассмотрим горизонтальную полосу $\Pi_{n,m}$ в полосе Π , которая состоит из горизонтальных рядов полосы Π с m -го по n -й (всего таких рядов l). Проведем прямую, параллельную левой наклонной стороне треугольника Δ , между наклонными рядами a_k^n , $k \in \mathbb{N}_0$ и a_k^{n+1} , $k \in \mathbb{N}_0$. Далее, проведем прямую, параллельную правой наклонной стороне треугольника Δ , между наклонными рядами a_k^{k-n-1} , $k \in \mathbb{N}_0$ и a_k^{k-n} , $k \in \mathbb{N}_0$. Эти две прямые ограничивают в полосе $\Pi_{n,m}$ числовую трапецию $T_{n,m}$. Горизонтальным рядом (или просто рядом) трапеции $T_{n,m}$ будем называть конечную совокупность элементов соответствующего ряда полосы $\Pi_{n,m}$, заключенную между наклонными прямыми. Высота трапеции $T_{n,m}$ равна l рядов. Пронумеруем ряды трапеции сверху вниз номерами с 1 по l , тогда k -й ряд трапеции $T_{n,m}$ лежит в $m+k-1$ -м ряду полосы Π , $k = \overline{1, l}$. В нижнем основании (то есть в l -м ряду) трапеции находится $n+1$ чисел $(a_n^0, \dots, a_n^n)$, все они не равны нулю; в верхнем основании (то есть в первом ряду) находится $(n+l)$ чисел $(0, \dots, 0, a_m^0, \dots, a_m^m, 0, \dots, 0)$.

Рассмотрим горизонтальные ряды трапеции $T_{n,m}$. Будем выбирать вектор-строки длины l в этих рядах. В l -м ряду трапеции $T_{n,m}$ (который лежит в n -м ряду полосы Π) существует $m+1$ вектор-строк длины l :

$$\begin{aligned} \psi(n, l, l) &= (a_n^{n-l+1}, \dots, a_n^n) = (a_n^m, \dots, a_n^n), \\ \psi(n, l, l+1) &= (a_n^{n-l}, \dots, a_n^{n-1}) = (a_n^{m-1}, \dots, a_n^{n-1}), \\ &\dots\dots\dots \\ \psi(n, l, l+m) &= (a_n^0, \dots, a_n^{l-1}) = (a_n^0, \dots, a_n^{n-m}). \end{aligned}$$

[illegible]
$$\psi(n - (k - 1), l, l - k + i_k), \quad i_k \in \{1, \dots, m + k\}.$$
$$1 \leq i_1 \leq m+1, \quad 0 \leq i_{\nu+1} - i_\nu \leq 1, \quad \nu = \overline{1, l-1}. \quad (20)$$
$$1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_l \leq m + l, \quad i_{\nu+1} \leq i_\nu + 1.$$
$$1 \leq i'_1 \leq m+1, \quad 1 \leq i'_2 \leq m+2, \quad \dots, \quad 1 \leq i'_k \leq m+k, \quad \dots, \quad 1 \leq i'_l \leq m+l, \quad (21)$$

следовательно, все выбранные вектор-строки содержатся внутри трапеции $T_{n,m}$. Далее, индекс i'_2 либо равен i'_1 , либо $i'_2 = i'_1 + 1$. Этому индексу соответствует строка $\psi(n-1, l, l-2+i'_2)$ предпоследнего ряда трапеции $T_{n,m}$. Эта строка получается следующим образом. Пусть мы находимся в вектор-строке $\psi(n, l, l-1+i'_1)$ трапеции $T_{n,m}$. Если мы будем двигаться из этой вектор-строки в трапеции $T_{n,m}$ на один ряд вверх влево, то по свойству «сдвига вверх» мы попадем в строку $\psi(n-1, l, l-1+i'_1)$. Эта строка совпадает с $\psi(n-1, l, l-2+i'_2)$ в том случае, когда $i'_2 = i'_1 + 1$. Если же мы двигаемся из вектор-строки $\psi(n, l, l-1+i'_1)$ на один ряд вверх вправо в трапеции $T_{n,m}$, то по свойству «сдвига вверх» мы попадем в строку $\psi(n-1, l, l-1+i'_1-1)$, которая совпадает со строкой $\psi(n-1, l, l-2+i'_2)$ в том случае, когда $i'_2 = i'_1$. И так далее, для каждого $k = \overline{1, l-1}$ переходу от i'_k к i'_{k+1} в кортеже β' соответствует переход от строки $\psi(n-k+1, l, l-k+i'_k)$ к строке $\psi(n-k, l, l-k-1+i'_{k+1})$ в трапеции $T_{n,m}$, при этом переход в трапеции $T_{n,m}$ происходит на один ряд вверх влево, если $i'_{k+1} = i'_k + 1$, и на один ряд вверх вправо, если $i'_{k+1} = i'_k$. В результате каждому кортежу $\beta = [i_1, \dots, i_l] \in D(m, l)$ взаимно однозначно соответствует некоторый «ломанный путь» (путь вдоль некоторой ломаной) длины l снизу вверх по вектор-строкам (размерности l) трапеции $T_{n,m}$ (звенья этой ломаной параллельны левой или правой сторонам треугольника Δ); в частности, этот путь

Лемма 1. Для любых $m \in \mathbb{N}_0$ и $l \in \mathbb{N}$, для любого $s \in \{0, \dots, m\}$ и для любого кортежа $\beta_0 \in D(0, l)$ выполнено равенство

$$S(m, l, \beta_0 + s) = S(0, l, \beta_0) \cdot T(m, l, s + 1), \quad (23)$$

где матрица $T(m, l, k)$ определена равенством (19).

Доказательство. Пусть заданы произвольные $m \in \mathbb{N}_0$, $l \in \mathbb{N}$, любое $s \in \{0, \dots, m\}$ и произвольный кортеж $\beta_0 = [i_1, \dots, i_l] \in D(0, l)$. Тогда

$$\begin{aligned} i_1 = 1, \quad 1 \leq i_2 \leq 2, \quad \dots, \quad 1 \leq i_k \leq k, \quad \dots, \quad 1 \leq i_l \leq l, \\ l - 1 + i_1 = 1, \quad l - 1 \leq l - 2 + i_2 \leq l, \quad \dots, \quad l - k + 1 \leq l - k + i_k \leq l, \quad \dots, \quad 1 \leq i_l \leq l. \end{aligned}$$

Рассмотрим кортеж $\beta_0 + s = [j_1, \dots, j_l] \in D(m, l)$. Тогда $j_\nu = i_\nu + s$, $\nu = \overline{1, l}$. Имеем

$$S(m, l, \beta_0 + s) = \begin{bmatrix} \varphi(m, l, j_l) \\ \dots \\ \varphi(m + l - k, l, l - k + j_k) \\ \dots \\ \varphi(m + l - 2, l, l - 2 + j_2) \\ \varphi(m + l - 1, l, l - 1 + j_1) \end{bmatrix}, \quad S(0, l, \beta_0) = \begin{bmatrix} \varphi(0, l, i_l) \\ \dots \\ \varphi(l - k, l, l - k + i_k) \\ \dots \\ \varphi(l - 2, l, l - 2 + i_2) \\ \varphi(l - 1, l, l - 1 + i_1) \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим k -ю снизу строку матрицы $S(m, l, \beta_0 + s)$:

$$\varphi(m + l - k, l, l - k + j_k) = \varphi(m + l - k, l, l - k + i_k + s), \quad k \in \{1, \dots, l\}.$$

По формуле (15) имеем

$$\begin{aligned} \varphi(m + l - k, l, l - k + i_k + s) = b_{l-k}^0 \varphi(m, l, i_k + s) + b_{l-k}^1 \varphi(m, l, i_k + s + 1) + \dots \\ + b_{l-k}^\nu \varphi(m, l, i_k + s + \nu) + \dots + b_{l-k}^{l-k} \varphi(m, l, i_k + s + l - k). \end{aligned} \quad (24)$$

Рассмотрим матрицу $S(0, l, \beta_0)T(m, l, s + 1)$ и ее k -ю снизу строку ξ_k , $k \in \{1, \dots, l\}$. Имеем $\xi_k = \eta_k T(m, l, s + 1)$, где η_k — k -я снизу строка матрицы $S(0, l, \beta_0)$. Строка η_k имеет вид

$$\eta_k = \varphi(l - k, l, l - k + i_k) = (b_{l-k}^{1-i_k}, b_{l-k}^{2-i_k}, \dots, b_{l-k}^{l-i_k}).$$

Тогда

$$\xi_k = b_{l-k}^{1-i_k} \varphi(m, l, s + 1) + b_{l-k}^{2-i_k} \varphi(m, l, s + 2) + \dots + b_{l-k}^{l-i_k} \varphi(m, l, s + l) = \sum_{\nu=1}^l b_{l-k}^{\nu-i_k} \varphi(m, l, \nu + s). \quad (25)$$

Заметим, что $1 \leq i_k \leq l - k + i_k \leq l$. Рассмотрим сумму (25). Если $\nu < i_k$, то $\nu - i_k < 0$, тогда $b_{l-k}^{\nu-i_k} = 0$; аналогично, если $\nu > l - k + i_k$, то $\nu - i_k > l - k$, тогда также $b_{l-k}^{\nu-i_k} = 0$. Поэтому в формуле (25) суммирование по ν от 1 до l можно заменить на суммирование по ν от i_k до $l - k + i_k$. Таким образом,

$$\xi_k = \sum_{\nu=i_k}^{l-k+i_k} b_{l-k}^{\nu-i_k} \varphi(m, l, \nu + s) = b_{l-k}^0 \varphi(m, l, i_k + s) + \dots + b_{l-k}^{l-k} \varphi(m, l, l - k + i_k + s). \quad (26)$$

Из равенств (24) и (26) следует, что $\varphi(m + l - k, l, l - k + i_k + s) = \xi_k$. Таким образом, k -я снизу строка матрицы $S(m, l, \beta_0 + s)$ совпадает с k -й снизу строкой $S(0, l, \beta_0)T(m, l, s + 1)$ для всех $k \in \{1, \dots, l\}$. Следовательно, выполнено равенство (23). Лемма 1 доказана. $\square$

Лемма 2. Для любого $l \in \mathbb{N}$ и для любого кортежа $\beta \in D(0, l)$

$$\det S(0, l, \beta) \neq 0. \quad (27)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем лемму индукцией по l . Если $l = 1$, то $S(0, l, 1) = \|1\|$ — это 1×1 -матрица и $\det S(0, l, 1) = 1$. Если $l = 2$, то возможны только 2 кортежа $[1, 1], [1, 2] \in D(0, 2)$. Тогда

$$S(0, 2, [1, 1]) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad S(0, 2, [1, 2]) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

и $\det S(0, 2, [1, 1]) = 1 \neq 0$, $\det S(0, 2, [1, 2]) = -1 \neq 0$.

Шаг индукции по l . Предположим, что для любого $l = 1, 2, \dots, p-1$ и для любого кортежа $\beta \in D(0, l)$ выполнено неравенство (27). Докажем тогда, что для $l = p$ и для любого кортежа $\beta \in D(0, p)$ выполнено (27). По индукции отсюда будет следовать справедливость неравенства (27) для любого $l \in \mathbb{N}$ и для любого кортежа $\beta \in D(0, l)$, и лемма будет доказана.

Пусть $l = p$. Рассмотрим произвольный кортеж $\hat{\beta} = [i_1, \dots, i_p] \in D(0, p)$. Индекс i_1 может быть равен только 1, поэтому последняя строка матрицы $S(0, p, \hat{\beta})$ равна

$$\varphi(p-1, p, p) = (b_{p-1}^0, \dots, b_{p-1}^{p-1}).$$

Далее, индекс i_2 может принимать только 2 значения: 1 и 2. Рассмотрим эти случаи по отдельности.

1. $i_2 = 1$. Значит, $i_2 = i_1$. По определению матрицы $S(0, p, \hat{\beta})$ по кортежу $\hat{\beta}$ предпоследняя строка матрицы $S(0, p, \hat{\beta})$ получается при переходе из строки $\varphi(p-1, p, p)$ полосы Π_+ на один ряд вверх вправо в полосе Π_+ . По свойству «сдвига вверх» предпоследняя строка матрицы $S(0, p, \hat{\beta})$ равна

$$\varphi(p-2, p, p-1) = (b_{p-2}^0, \dots, b_{p-2}^{p-1}) = (b_{p-2}^0, \dots, b_{p-2}^{p-2}, 0) = (\varphi(p-2, p-1, p-1), 0). \quad (28)$$

Из замечания 3 отсюда следует, что элементы s_{ip} , $i = \overline{1, p-1}$ последнего столбца матрицы $S(0, p, \hat{\beta})$ равны нулю.

Рассмотрим размещение $[i_2, \dots, i_p]$ из $(p-1)$ элементов по $(p-1)$ элементов. Это размещение удовлетворяет условиям

$$i_2 = 1, \quad 0 \leq i_{\nu+1} - i_\nu \leq 1, \quad \nu = \overline{2, p-1},$$

следовательно, образует кортеж $\tilde{\beta} = [i_2, \dots, i_p] \in D(0, p-1)$. Построим по этому кортежу матрицу $S(0, p-1, \tilde{\beta})$. Первый индекс i_2 кортежа $\tilde{\beta}$ равен 1, поэтому последняя строка матрицы $S(0, p-1, \tilde{\beta})$ равна $\varphi(p-2, p-1, p-1)$. Перейдем от индекса i_2 к i_3 в кортеже $\tilde{\beta}$. При этом переходе к i_2 прибавится 0 или 1. Этому переходу индекса соответствует переход от строки $\varphi(p-2, p-1, p-1)$ к строке $\xi \in \mathbb{R}^{p-1*}$ полосы Π_+ , расположенной на один ряд выше справа или слева (эта строка будет предпоследней строкой матрицы $S(0, p-1, \tilde{\beta})$). Поскольку индексы i_2 и i_3 в кортежах $\tilde{\beta}$ и $\hat{\beta}$ совпадают, то соответствующий переход в том же направлении происходит в полосе Π_+ от строки (28) к строке $(\xi, 0) \in \mathbb{R}^{p*}$, которая, таким образом, будет третьей снизу строкой матрицы $S(0, p, \hat{\beta})$. Поскольку все дальнейшие переходы индексов от i_ν к $i_{\nu+1}$ в кортежах $\tilde{\beta}$ и $\hat{\beta}$ совпадают, следовательно, «ломанный путь» будет один и тот же для кортежа $\tilde{\beta}$ и для кортежа $\hat{\beta}$ (начиная со второго индекса). Этот путь для кортежа $\tilde{\beta}$ проходит по некоторым вектор-строкам $\xi_1, \dots, \xi_{p-1}$ размерности $p-1$, а для кортежа $\hat{\beta}$ (начиная со второго индекса) — по соответствующим вектор-строкам $(\xi_1, 0), \dots, (\xi_{p-1}, 0)$ размерности p . Таким образом,

$$S(0, p, \hat{\beta}) = \left\| \begin{array}{c|c} S(0, p-1, \tilde{\beta}) & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline b_{p-1}^0 \dots b_{p-1}^{p-2} & b_{p-1}^{p-1} \end{array} \right\|.$$

Следовательно, $S(0, p, \hat{\beta}) = \det S(0, p-1, \tilde{\beta}) \neq 0$ по предположению индукции.

2. $i_2 = 2$. Значит, $i_2 = i_1 + 1$. По определению матрицы $S(0, p, \hat{\beta})$ по кортежу $\hat{\beta}$ предпоследняя строка матрицы $S(0, p, \hat{\beta})$ получается при переходе из строки $\varphi(p-1, p, p)$ полосы Π_+ на один

ряд вверх влево в полосе Π_+ . По свойству «сдвига вверх» предпоследняя строка матрицы $S(0, p, \hat{\beta})$ равна

$$\varphi(p-2, p, p) = (b_{p-2}^{-1}, b_{p-2}^0, \dots, b_{p-2}^{p-2}) = (0, b_{p-2}^0, \dots, b_{p-2}^{p-2}) = (0, \varphi(p-2, p-1, p-1)).$$

Из замечания 3 отсюда следует, что элементы s_{i1} , $i = \overline{1, p-1}$ первого столбца матрицы $S(0, p, \hat{\beta})$ равны нулю.

Построим по кортежу $\hat{\beta}$ размещение $[i'_1, \dots, i'_{p-1}] := [i_2 - 1, \dots, i_p - 1]$ из $(p-1)$ элементов по $(p-1)$ элементов. Это размещение удовлетворяет условиям

$$i'_1 = 1, \quad 0 \leq i'_{\nu+1} - i'_\nu \leq 1, \quad \nu = \overline{1, p-2},$$

следовательно, образует кортеж. Обозначим его $\tilde{\beta} = [i'_1, \dots, i'_{p-1}] \in D(0, p-1)$. Построим по этому кортежу матрицу $S(0, p-1, \tilde{\beta})$. Поскольку $i'_1 = 1$, то последняя строка матрицы $S(0, p-1, \tilde{\beta})$ равна $\varphi(p-2, p-1, p-1)$. Далее идут такие же рассуждения, как и в первом случае. Заметим, что $i_{\nu+1} - i_\nu = i'_\nu - i'_{\nu-1}$, $\nu = \overline{2, p-1}$, то есть переход от индекса $i'_{\nu-1}$ к i'_ν в кортеже $\tilde{\beta}$ совпадает с переходом от индекса i_ν к $i_{\nu+1}$ в кортеже $\hat{\beta}$. Это значит, что «ломаный путь» для кортежа $\tilde{\beta}$ и для кортежа $\hat{\beta}$ (начиная со второго индекса) будет один и тот же. Этот путь для кортежа $\tilde{\beta}$ проходит по некоторым вектор-строкам $\xi_1, \dots, \xi_{p-1}$ размерности $p-1$, а для кортежа $\hat{\beta}$ (начиная со второго индекса) — по соответствующим вектор-строкам $(0, \xi_1), \dots, (0, \xi_{p-1})$ размерности p . Таким образом,

$$S(0, p, \hat{\beta}) = \left\| \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & S(0, p-1, \tilde{\beta}) \\ \hline b_{p-1}^0 & b_{p-1}^1 \dots b_{p-1}^{p-1} \end{array} \right\|.$$

Следовательно, $S(0, p, \hat{\beta}) = (-1)^{p+1} \det S(0, p-1, \tilde{\beta}) \neq 0$ по предположению индукции. Лемма 2 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 5. Рассмотрим любое $m \in \mathbb{N}_0$, любое $l \in \mathbb{N}$ и любой кортеж $\beta \in D(m, l)$. Тогда этот кортеж β (единственным образом) можно представить в виде суммы $\beta = \beta_0 + s$, где $\beta_0 \in D(0, l)$, $s \in \{0, \dots, m\}$. По лемме 1 имеем

$$S(m, l, \beta) = S(m, l, \beta_0 + s) = S(0, l, \beta_0) \cdot T(m, l, s+1).$$

Матрица $S(0, l, \beta_0)$ невырождена по лемме 2, матрица $T(m, l, s+1)$ невырождена по следствию 1. Отсюда следует, что матрица $S(m, l, \beta)$ невырождена. Теорема 5 доказана. Вместе в ней доказана и теорема 4. $\square$

Замечание 4. Можно рассмотреть следующую задачу. Будем рассматривать не только кортежи из множества $D(m, l)$, то есть те размещения, которые удовлетворяют условиям (20), а те размещения $[i'_1, \dots, i'_l]$, которые удовлетворяют условиям (21). Обозначим множество таких размещений через $E(m, l)$. Множество $E(m, l)$ содержит $\frac{(m+l)!}{m!}$ элементов и $D(m, l) \subset E(m, l)$. По заданному размещению $\gamma = [i_1, \dots, i_l] \in E(m, l)$ построим соответствующую матрицу

$$\hat{S}(m, l, \gamma) = \left\| \begin{array}{c} \varphi(m, l, i_l) \\ \dots \dots \dots \varphi(n-1, l, l-2+i_2) \\ \varphi(n, l, l-1+i_1) \end{array} \right\|.$$

По аналогии с теоремой 5 можно выдвинуть гипотезу: для любых $m \in \mathbb{N}_0$ и $l \in \mathbb{N}$ и для любого размещения $\gamma \in E(m, l)$ матрица $\hat{S}(m, l, \gamma)$ невырождена. Это утверждение означает следующее. Рассмотрим произвольную трапецию $T_{n,m}$, $m, n \in \mathbb{N}_0$, $n \geq m$; $l := n-m+1$. Выберем в каждом ряду трапеции $T_{n,m}$ произвольную строку ξ_i , $i = \overline{1, l}$ длины l . Тогда эти строки будут линейно независимы. Это утверждение более сильное, чем теорема 5. Оно представляется верным, однако не доказано.

§ 3. Достаточное условие согласованности

В этом параграфе доказывается следующая теорема.

Теорема 6. Пусть дана система (1) с матрицами (3). Если

$$\operatorname{rank} B + \operatorname{rank} C \geq n + 1, \quad (29)$$

то система (1), (3) согласованна.

Доказательство. Рассмотрим систему (1) с матрицами (3). Без ограничения общности можно считать, что $\operatorname{rank} B = m$, $\operatorname{rank} C = k$, $m \leq n$, $k \leq n$. Из вида (3) матриц B и C следует, что $n - p + 1 \geq m$, $p \geq k$, $p \in \{1, \dots, n\}$, поэтому $n + 1 \geq m + k$. Таким образом условие (29) сводится к тому, что

$$m + k = n + 1. \quad (30)$$

Заметим, что из условия (30) с необходимостью вытекает неравенство $mk \geq n$, поскольку если $mk < n$, то $(m - 1)(k - 1) = mk - (m + k) + 1 < n - (n + 1) + 1 = 0$, что противоречит условиям $m \geq 1$, $k \geq 1$.

В силу следствия 4 работы [1] свойство согласованности системы (1) с матрицами A, B, C равносильно свойству согласованности системы (1) с матрицами $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$, где $\tilde{A} = SAS^{-1}$, $\tilde{B} = SB$, $\tilde{C}^* = C^*S^{-1}$, а $S \in M_n$ — произвольная невырожденная матрица. Положим $S_1 := \operatorname{diag} \{1, a_{12}, a_{23}, \dots, a_{n-1,n}\} \in M_n$. Матрица S_1 диагональная и невырожденная. Построим матрицы $A_1 := S_1AS_1^{-1} = \{a_{ij}^1\}_{i,j=1}^n$, $B_1 := S_1B$, $C_1^* := C^*S_1^{-1}$. При умножении A на S_1^{-1} первый столбец матрицы A умножается на 1, второй — на a_{12}^{-1} , ..., i -й — на $a_{i-1,i}^{-1}$, ..., n -й — на $a_{n-1,n}^{-1}$. Первая наддиагональ матрицы AS_1^{-1} состоит из единиц. При умножении S_1 на AS_1^{-1} первая строка матрицы AS_1^{-1} умножится на 1, вторая — на a_{12} , ..., i -я на $a_{i-1,i}$, ..., n -я на $a_{n-1,n}$. Таким образом, матрица A_1 будет иметь такой же вид (3), как и матрица A (элементы первой наддиагонали не равны нулю, элементы выше первой наддиагонали равны нулю), при этом $a_{12}^1 = 1$, $a_{i+1,i+2}^1 = a_{i,i+1}$, $i = \overline{1, n-2}$, то есть при переходе от матрицы A к матрице $A_1 = S_1AS_1^{-1}$ элементы первой наддиагонали сдвинутся вправо вниз по диагонали на единицу, элемент $a_{n-1,n}$ исчезает, появляется элемент $a_{12}^1 = 1$. Матрицы B_1 и C_1 будут иметь такой же вид (3), как и матрицы B и C .

На втором шаге положим $S_2 := \operatorname{diag} \{1, 1, a_{12}, a_{23}, \dots, a_{n-2,n-1}\} \in M_n$ и построим матрицы $A_2 := S_2A_1S_2^{-1} = \{a_{ij}^2\}_{i,j=1}^n$, $B_2 := S_2B_1$, $C_2^* := C_1^*S_2^{-1}$. Получим, что матрицы A_2, B_2, C_2 будут иметь такой же вид (3), как и матрицы A, B, C , при этом уже два элемента наддиагонали матрицы A_2 будут равны единице: $a_{12}^2 = 1$, $a_{23}^2 = 1$. Продолжая далее, для каждого $i = \overline{1, n-1}$ построим матрицы $S_i := \operatorname{diag} \{1, \dots, 1, a_{12}, \dots, a_{n-i,n-i+1}\} \in M_n$ и матрицу $S := S_{n-1} \cdot \dots \cdot S_1 \in M_n$. Тогда все матрицы S_i , $i = \overline{1, n-1}$ и S диагональные и невырожденные. Построим $\tilde{A} := SAS^{-1}$, $\tilde{B} := SB$, $\tilde{C}^* := C^*S^{-1}$. Тогда $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ имеют вид (3), при этом наддиагональ матрицы $\tilde{A}$ состоит из единиц. Таким образом, без ограничения общности можно считать, что матрица A системы (1), (3) имеет вид $A = J + T$, где J — первый единичный косоый ряд, T — нижняя треугольная матрица.

Далее из равенства (30) следует, что $n - p + 1 = m$ и $p = k$. Таким образом, матрицы B и C имеют вид $B = \begin{bmatrix} 0 \\ P \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$, $P \in M_m$, $R \in M_k$. При этом, поскольку $\operatorname{rank} B = m$ и $\operatorname{rank} C = k$, то $\det P \neq 0$ и $\det R \neq 0$. В силу следствия 3 работы [1] система (1) с матрицами A, B, C согласованна тогда и только тогда, когда для любых невырожденных матриц $F \in M_m$, $G \in M_k$ система (1) с матрицами $\tilde{A} = A$, $\tilde{B} = BF$, $\tilde{C} = CG$ согласованна. Выберем $F = P^{-1}$, $G = R^{-1}$, получим, что $\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$, $I \in M_m$, $\tilde{C} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$, $I \in M_k$. Таким образом, без ограничения

общности можно считать, что коэффициенты системы (1), (3) имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Покажем, что система (1) с матрицами (31) является согласованной для любой матрицы A , имеющей вид (31). Тогда теорема 6 будет доказана. Имеем

$$A = J + T, \quad T = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n, \quad a_{ij} = 0, \quad j > i, \quad B = [e_p, \dots, e_n], \quad C = [e_1, \dots, e_p].$$

Построим по системе (1) с матрицами (31) большую систему

$$\dot{z} = Pz + Qv, \quad z \in \mathbb{R}^{n^2}, \quad v \in \mathbb{R}^{mk}, \quad (32)$$

где $P = A \otimes I - I \otimes A^* \in M_{n^2}$, $I \in M_n$, $Q = B \otimes C \in M_{n^2, mk}$. Система (1), (31) согласованна тогда и только тогда, когда большая система (32) вполне управляема. Построим матрицу управляемости большой системы $W = [Q, PQ, \dots, P^{n^2-1}Q] \in M_{n^2, n^2mk}$. Большая система вполне управляема тогда и только тогда, когда $\text{rank } W = n^2$. Построим «усеченную» матрицу управляемости $K = [Q, PQ, \dots, P^{n-1}Q] \in M_{n^2, nmk}$. Покажем, что

$$\text{rank } K = n^2. \quad (33)$$

Отсюда будет следовать, что $\text{rank } W = n^2$ и теорема будет доказана.

Матрица Q состоит из mk столбцов $e_i \otimes e_j$, $i = \overline{p, n}$, $j = \overline{1, p}$. Выберем из них p столбцов $e_n \otimes e_j$, $j = \overline{1, p}$ и $n - p$ столбцов $e_i \otimes e_p$, $i = \overline{p, n-1}$ и составим из них матрицу

$$\overline{Q} = [e_n \otimes e_1, e_n \otimes e_2, \dots, e_n \otimes e_p, e_{n-1} \otimes e_p, e_{n-2} \otimes e_p, \dots, e_p \otimes e_p] \in M_{n^2, n}.$$

Построим матрицу $\overline{K} = [\overline{Q}, P\overline{Q}, \dots, P^{n-1}\overline{Q}] \in M_{n^2}$. Матрица $\overline{K}$ получена из матрицы K вычеркиванием некоторых столбцов и перестановкой некоторых из оставшихся столбцов. Покажем, что

$$\text{rank } \overline{K} = n^2. \quad (34)$$

Отсюда будет следовать, что столбцы матрицы $\overline{K}$ линейно независимы. Это будет означать, что в матрице K найдется n^2 линейно независимых столбцов, то есть выполнено (33), таким образом, теорема будет доказана.

Введем в рассмотрение линейный оператор $L = L_A : M_n \rightarrow M_n$, который ставит в соответствие матрице $F \in M_n$ коммутатор матриц A и F : $L(F) := [A, F] = AF - FA$. Тогда

$$L^2(F) = [A, L(F)] = [A, AF - FA] = A(AF - FA) - (AF - FA)A = A^2F - 2AFA + FA^2, \\ \dots, \quad L^\nu(F) = \sum_{i=0}^{\nu} (-1)^i C_\nu^i A^{\nu-i} F A^i.$$

Построим n^2 матриц в M_n :

$$\begin{array}{ccccccc} F_1 = E_{n1}, & \dots, & F_p = E_{np}, & F_{p+1} = E_{n-1,p}, & \dots, & F_n = E_{pp}, \\ L(F_1), & \dots, & L(F_p), & L(F_{p+1}), & \dots, & L(F_n), \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L^{n-1}(F_1), & \dots, & L^{n-1}(F_p), & L^{n-1}(F_{p+1}), & \dots, & L^{n-1}(F_n). \end{array} \quad (35)$$

Матрицы (38) разбиваются на группы Γ_i , $i = -(n-1), \dots, (n-1)$. Две матрицы лежат в одной и той же группе Γ_i , если они принадлежат одному и тому же подпространству N_i . Имеем

$$\begin{aligned}\Gamma_{-(n-1)} &= \{Z_1^0\}, \quad \Gamma_{-(n-2)} = \{Z_1^1, Z_2^0\}, \quad \dots, \quad \Gamma_{-i} = \{Z_1^{n-i-1}, Z_2^{n-i-2}, \dots, Z_{n-i}^0\}, \quad \dots, \\ \Gamma_0 &= \{Z_1^{n-1}, Z_2^{n-2}, \dots, Z_n^0\}, \quad \dots, \quad \Gamma_i = \{Z_{i+1}^{n-1}, \dots, Z_n^i\}, \quad \dots, \quad \Gamma_{n-1} = \{Z_n^{n-1}\}.\end{aligned}$$

Очевидно, что матрицы, находящиеся в разных группах, линейно независимы. Таким образом, для того чтобы доказать, что матрицы (36) линейно независимы, достаточно доказать, что для каждого $i \in \{-(n-1), \dots, (n-1)\}$ совокупность матриц, лежащих в одной группе Γ_i , линейно независима. Отсюда, в частности, будет следовать, что линейная оболочка матриц из одной группы Γ_i совпадает с N_i для любого $i \in \{-(n-1), \dots, (n-1)\}$, поскольку количество матриц в группе Γ_i равно $n - |i|$.

Предположим, что матрицы группы Γ_0 линейно независимы. Покажем тогда, что матрицы группы Γ_{-1} также будут линейно независимы. Предположим противное, пусть матрицы группы Γ_{-1} линейно зависимы, то есть существует вектор $c = (c_1, \dots, c_{n-1}) \neq 0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ такой, что $c_1 Z_1^{n-2} + c_2 Z_2^{n-3} + \dots + c_{n-1} Z_{n-1}^0 = 0 \in M_n$. Тогда

$$\begin{aligned}0 &= J(c_1 Z_1^{n-2} + c_2 Z_2^{n-3} + \dots + c_{n-1} Z_{n-1}^0) - (c_1 Z_1^{n-2} + c_2 Z_2^{n-3} + \dots + c_{n-1} Z_{n-1}^0)J = \\ &= c_1 (J Z_1^{n-2} - Z_1^{n-2} J) + c_2 (J Z_2^{n-3} - Z_2^{n-3} J) + \dots + c_{n-1} (J Z_{n-1}^0 - Z_{n-1}^0 J) = \\ &= c_1 Z_1^{n-1} + c_2 Z_2^{n-2} + \dots + c_{n-1} Z_{n-1}^1.\end{aligned}$$

Следовательно, матрицы $Z_1^{n-1}, \dots, Z_{n-1}^1$ группы Γ_0 линейно зависимы, а значит, и матрицы $Z_1^{n-1}, \dots, Z_{n-1}^1, Z_n^0$ группы Γ_0 линейно зависимы. Получили противоречие. Следовательно, совокупность матриц группы Γ_{-1} является линейно независимой. Аналогично можно показать, что совокупность матриц группы Γ_{-2} является линейно независимой. И так далее, из линейной независимости матриц группы Γ_0 следует, что для любого $i = -(n-1), \dots, -1$ совокупность матриц группы Γ_i линейно независима.

Таким образом, достаточно показать, что для каждого $i = 0, \dots, n-1$ матрицы группы Γ_i линейно независимы. Докажем предварительно вспомогательное утверждение.

Рассмотрим подпространство $N_\nu \subset M_n$. Обозначим через $\mathbf{E}_\nu = (E_{1,\nu+1}, \dots, E_{n-\nu,n})$, $\nu = 0, \dots, n-1$ базис пространства N_ν ; соответственно $\mathbf{E}_{-\nu} = (E_{\nu+1,1}, \dots, E_{n,n-\nu})$ — базис пространства $N_{-\nu}$, $\nu = 1, \dots, n-1$. Для произвольного вектора(-строки) $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-\nu}) \in \mathbb{R}^{n-\nu*}$, $\nu = \overline{0, n-1}$ через $\xi \circ \mathbf{E}_\nu$ обозначим матрицу $X \in N_\nu \subset M_n$, которая имеет координаты $(\xi_1, \dots, \xi_{n-\nu})$ в базисе $\mathbf{E}_\nu$, то есть

$$\xi \circ \mathbf{E}_\nu := \xi_1 E_{1,\nu+1} + \xi_2 E_{2,\nu+2} + \dots + \xi_{n-\nu} E_{n-\nu,n}.$$

Очевидно, матрицы $X_1 = \xi^1 \circ \mathbf{E}_\nu, \dots, X_r = \xi^r \circ \mathbf{E}_\nu \in N_\nu \subset M_n$ линейно независимы тогда и только тогда, когда вектор-строки $\xi^1, \dots, \xi^r \in \mathbb{R}^{n-\nu*}$ линейно независимы.

Зафиксируем $j \in \{0, \dots, n-1\}$ и рассмотрим подпространство $N_{-j} \subset M_n$. Произвольная матрица базиса $\mathbf{E}_{-j}$ подпространства N_{-j} имеет вид $E_{j+r,r}$, где $r \in \{1, \dots, n-j\}$. Зафиксируем произвольное $i \in \{j, \dots, n-1\}$. Рассмотрим i -ю степень оператора $L = L_J$ от матрицы $E_{j+r,r}$. Имеем $L^i(E_{j+r,r}) \in N_{i-j}$. Выразим эту матрицу через базисные матрицы пространства N_{i-j} . Тогда имеет место следующее утверждение.

Лемма 3. Для любого $j \in \{0, \dots, n-1\}$, для любого $r \in \{1, \dots, n-j\}$ и для любого $i \in \{j, \dots, n-1\}$

$$L^i(E_{j+r,r}) = \psi(i, n+j-i, j+r) \circ \mathbf{E}_{i-j}, \quad (39)$$

где $\psi(\cdot, \cdot, \cdot)$ — это вектор-строка биномиальных коэффициентов, определенная во втором параграфе равенством (10).

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 3. Докажем сначала лемму при $j = 0$. Зафиксируем произвольные $r \in \{1, \dots, n\}$ и $i \in \{0, \dots, n-1\}$. По определению оператора L имеем

$$L^i(E_{rr}) = \sum_{s=0}^i (-1)^s C_i^s J^{i-s} E_{rr} J^s = \sum_{s=0}^i a_i^s J^{i-s} e_r e_r^* J^s = \left| \tau = s + r \right| = \sum_{\tau=r}^{i+r} a_i^{\tau-r} J^{i-\tau+r} e_r e_r^* J^{\tau-r}.$$

Здесь $a_i^s = (-1)^s C_i^s$ — биномиальные коэффициенты со знаком, определенные во втором параграфе. По свойству (37) имеем

$$J^{i-\tau+r} e_r = \begin{cases} e_{\tau-i}, & \tau \geq i+1, \\ 0, & \tau < i+1, \end{cases} \quad e_r^* J^{\tau-r} = \begin{cases} e_{\tau}^*, & \tau \leq n, \\ 0, & \tau > n. \end{cases}$$

Таким образом,

$$L^i(E_{rr}) = \sum_{\tau} a_i^{\tau-r} e_{\tau-i} e_{\tau}^*, \quad (40)$$

где суммирование по τ берется по множеству $\tau \in \{r, \dots, i+r\} \cap \{i+1, \dots, n\}$. Если $i+1 < r$, то при $\tau = i+1, \dots, r-1$ имеем $a_i^{\tau-r} = 0$. Аналогично, если $n > i+r$, то при $\tau = i+r+1, \dots, n$ имеем $a_i^{\tau-r} = 0$. Поэтому можно считать, что суммирование в (40) берется по $\tau \in \{i+1, \dots, n\}$. Таким образом,

$$L^i(E_{rr}) = \sum_{\tau=i+1}^n a_i^{\tau-r} e_{\tau-i} e_{\tau}^* = a_i^{i+1-r} E_{1,i+1} + a_i^{i+2-r} E_{2,i+2} + \dots + a_i^{n-r} E_{n-i,n} = \psi(i, n-i, r) \circ \mathbf{E}_i.$$

Следовательно, при $j = 0$ формула (39) верна.

Пусть теперь задано любое $j \in \{0, \dots, n-1\}$ и любое $r \in \{1, \dots, n-j\}$. Докажем равенство (39) для $i = j$. Имеем

$$\begin{aligned} L^j(E_{j+r,r}) &= \sum_{s=0}^j (-1)^s C_j^s J^{j-s} E_{j+r,r} J^s = \sum_{s=0}^j a_j^s J^{j-s} e_{j+r} e_r^* J^s = \left| \tau = s + r \right| = \\ &= \sum_{\tau=r}^{j+r} a_j^{\tau-r} J^{j-\tau+r} e_{j+r} e_r^* J^{\tau-r}. \end{aligned}$$

По свойству (37) имеем

$$J^{j-\tau+r} e_{j+r} = \begin{cases} e_{\tau}, & \tau \geq 1, \\ 0, & \tau < 1, \end{cases} \quad e_r^* J^{\tau-r} = \begin{cases} e_{\tau}^*, & \tau \leq n, \\ 0, & \tau > n. \end{cases}$$

Имеем $1 \leq r \leq j+r \leq n$. Поэтому

$$L^j(E_{j+r,r}) = \sum_{\tau=r}^{j+r} a_j^{\tau-r} e_{\tau} e_{\tau}^* = \sum_{\tau=r}^{j+r} a_j^{\tau-r} E_{\tau\tau}.$$

Поскольку при $\tau < r$ и при $\tau > j+r$ имеем $a_j^{\tau-r} = 0$, то можно заменить сумму по τ от r до $j+r$ на сумму по τ от 1 до n . Получим, что

$$L^j(E_{j+r,r}) = \sum_{\tau=1}^n a_j^{\tau-r} E_{\tau\tau} = a_j^{1-r} E_{11} + a_j^{2-r} E_{22} + \dots + a_j^{n-r} E_{nn} = \psi(j, n, j+r) \circ \mathbf{E}_0.$$

Таким образом, формула (39) доказана при $i = j$.

$$\begin{aligned}
Z_{p+1}^{n+j-p-1} &= L^{n+j-p-1}(Z_{p+1}^0) = L^{n+j-p-1}(E_{n-1,p}) = \\
&= L^{n+j-p-1}(E_{n-p-1+p,p}) = \psi(n+j-p-1, n-j, n-1) \circ \mathbf{E}_j, \\
&\dots\dots\dots \\
Z_\nu^{n+j-\nu} &= L^{n+j-\nu}(Z_\nu^0) = L^{n+j-\nu}(E_{n-\nu+p,p}) = \psi(n+j-\nu, n-j, n-\nu+p) \circ \mathbf{E}_j, \quad \nu = \overline{p+1, n}, \\
&\dots\dots\dots \\
Z_v^j &= L^j(E_{vv}) = \psi(j, n-j, p) \circ \mathbf{E}_j.
\end{aligned}$$

Построим из полученных вектор-строк матрицу, расположив строки снизу вверх; получим $(n - j) \times (n - j)$ -матрицу

$$\left\| \begin{array}{c} \psi(j, n-j, p) \\ \dots \\ \psi(n+j-p-1, n-j, n-1) \\ \psi(n+j-p, n-j, n) \\ \dots \\ \psi(n-1, n-j, n) \end{array} \right\|.$$

Эта матрица совпадает с матрицей $Q(j, n - j, \beta)$ вида (22), построенной по кортежу

$$\beta = [\underbrace{j+1, j+2, \dots, p}_{p-j}, \underbrace{p, \dots, p}_{n-p}] \in D(j, n-j).$$

По теореме 4 матрица $Q(j, n-j, \beta)$ невырождена, следовательно, ее строки линейно независимы, а значит, и матрицы группы Γ_j линейно независимы.

Пусть теперь $j \in \{p, \dots, n-1\}$. Рассмотрим группу Γ_j и разложим матрицы этой группы по базису $\mathbf{E}_j$. Имеем

$$\begin{aligned} Z_{j+1}^{n-1} &= L^{n-1}(Z_{j+1}^0) = L^{n-1}(E_{n-j-1+p,p}) = \psi(n-1, n-j, n-j-1+p) \circ \mathbf{E}_j, \\ &\dots\dots\dots \\ Z_\nu^{n+j-\nu} &= L^{n+j-\nu}(Z_\nu^0) = L^{n+j-\nu}(E_{n-\nu+p,p}) = \psi(n+j-\nu, n-j, n-\nu+p) \circ \mathbf{E}_j, \quad \nu = \overline{j+1, n}, \\ &\dots\dots\dots \\ Z_\nu^j &= L^j(E_{pp}) = \psi(j, n-j, p) \circ \mathbf{E}_j. \end{aligned}$$

Построим из полученных вектор-строк матрицу, расположив строки снизу вверх; получим $(n-j) \times (n-j)$ -матрицу

$$\left\| \begin{array}{c} \psi(j, n-j, p) \\ \dots\dots\dots \\ \psi(n-2, n-j, n-j-2+p) \\ \psi(n-1, n-j, n-j-1+p) \end{array} \right\|.$$

Эта матрица совпадает с матрицей $Q(j, n - j, \beta)$ вида (22), построенной по кортежу

$$\beta = \underbrace{[p, \dots, p]}_{n-j} \in D(j, n-j).$$

По теореме 4 матрица $Q(j, n-j, \beta)$ невырождена, следовательно, ее строки линейно независимы, а значит, и матрицы группы Γ_j линейно независимы.

Таким образом, доказано, что матрицы (38) линейно независимы, при этом

$$\begin{aligned} \langle Z_1^0 \rangle &= N_{-(n-1)}, \quad \langle Z_1^1, Z_2^0 \rangle = N_{-(n-2)}, \quad \dots, \quad \langle Z_1^{n-i-1}, Z_2^{n-i-2}, \dots, Z_{n-i}^0 \rangle = N_{-i}, \quad \dots, \\ \langle Z_1^{n-1}, Z_2^{n-2}, \dots, Z_n^0 \rangle &= N_0, \quad \dots, \quad \langle Z_{i+1}^{n-1}, \dots, Z_n^i \rangle = N_i, \quad \dots, \quad \langle Z_n^{n-1} \rangle = N_{n-1}, \quad (41) \\ \langle Z_\nu^i, i = 0, \dots, n-1, \nu = 1, \dots, n \rangle &= M_n. \end{aligned}$$

Покажем теперь, что матрицы (35) линейно независимы для произвольной матрицы A вида (31). Имеем $A = J + T$; T — нижняя треугольная матрица; $L = L_A$.

Обозначим матрицы (35) следующим образом:

$$Y_\nu^0 := F_\nu, \quad Y_\nu^i := [A, Y_\nu^{i-1}], \quad \nu = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (42)$$

Обозначим через $\Omega_0 \subset M_n$ множество нижних треугольных матриц; $\Omega_i \subset M_n$ — множество матриц, для которых элементы, находящиеся выше i -й наддиагонали, равны нулю ($i = 1, \dots, n-1$); $\Omega_{-i} \subset M_n$ — множество матриц, для которых элементы, находящиеся выше i -й поддиагонали, равны нулю ($i = 1, \dots, n-1$); $\Omega_{-n} := \{0\}$, $0 \in M_n$. Множества Ω_i , $i = -(n-1), (n-1)$ — это линейные подпространства в M_n . Имеем

$$\Omega_\nu = N_{-(n-1)} \oplus \dots \oplus N_\nu, \quad \Omega_\nu = \Omega_{\nu-1} \oplus N_\nu, \quad \nu \in \{-(n-1), \dots, (n-1)\}, \quad \Omega_{n-1} = M_n.$$

Заметим, что если $F \in \Omega_\nu$ и $T \in M_n$ — нижняя треугольная матрица, то $TF \in \Omega_\nu$, $FT \in \Omega_\nu$ и $[T, F] = TF - FT \in \Omega_\nu$.

Для всякого $\nu \in \{-(n-1), \dots, (n-1)\}$ обозначим через $\langle \Gamma_{-(n-1)}, \Gamma_{-(n-2)}, \dots, \Gamma_\nu \rangle$ линейную оболочку матриц, входящих в группы $\Gamma_{-(n-1)}, \Gamma_{-(n-2)}, \dots, \Gamma_\nu$, то есть

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_{-(n-1)}, \Gamma_{-(n-2)}, \dots, \Gamma_\nu \rangle &= \langle Z_1^0, Z_1^1, Z_2^0, \dots, Z_1^{n+\nu-1}, Z_2^{n+\nu-2}, \dots, Z_{n+\nu}^0 \rangle, \quad \text{если } \nu \leq 0, \\ \langle \Gamma_{-(n-1)}, \Gamma_{-(n-2)}, \dots, \Gamma_\nu \rangle &= \langle Z_1^0, Z_1^1, Z_2^0, \dots, Z_{\nu+1}^{n-1}, Z_{\nu+2}^{n-2}, \dots, Z_n^\nu \rangle, \quad \text{если } \nu > 0. \end{aligned}$$

Тогда в силу равенств (41) получаем, что $\Omega_\nu = \langle \Gamma_{-(n-1)}, \Gamma_{-(n-2)}, \dots, \Gamma_\nu \rangle$.

Рассмотрим матрицы (42). Покажем по индукции, что для любого $\nu = 1, \dots, n$ и для любого $i = 0, \dots, n-1$ матрица Y_ν^i имеет вид $Y_\nu^i = Z_\nu^i + X_\nu^i$, где $Z_\nu^i \in N_{-n+\nu+i}$ — матрица из (38), а X_ν^i — некоторая матрица, которая принадлежит $\Omega_{-n+\nu+i-1}$, то есть покажем, что для всех $i = 0, \dots, n-1$ имеет место представление

$$Y_\nu^i = Z_\nu^i + X_\nu^i \in N_{-n+\nu+i} \oplus \Omega_{-n+\nu+i-1} = \Omega_{-n+\nu+i}, \quad \nu = 1, \dots, n. \quad (43)$$

При $i = 0$ для любого $\nu = 1, \dots, n$ имеем $Y_\nu^0 = Z_\nu^0 + 0 \in N_{-n+\nu} \oplus \Omega_{-n+\nu-1} = \Omega_{-n+\nu}$.

Шаг индукции. Предположим, что для любого $\nu = 1, \dots, n$, для всех $i = 0, \dots, s-1$ ($s < n$) имеет место представление (43). Покажем тогда, что представление (43) имеет место при $i = s$. Отсюда по индукции будет следовать, что (43) имеет место для всех $i = 0, \dots, n-1$.

Пусть $i = s$. Для любого $\nu = 1, \dots, n$ имеем

$$\begin{aligned} Y_\nu^s &= [A, Y_\nu^{s-1}] = [J + T, Y_\nu^{s-1}] = [J, Y_\nu^{s-1}] + [T, Y_\nu^{s-1}] = \\ &= [J, Z_\nu^{s-1} + X_\nu^{s-1}] + [T, Y_\nu^{s-1}] = [J, Z_\nu^{s-1}] + [J, X_\nu^{s-1}] + [T, Y_\nu^{s-1}]. \end{aligned}$$

Имеем $[J, Z_\nu^{s-1}] = Z_\nu^s$. Обозначим $X_\nu^s := [J, X_\nu^{s-1}] + [T, Y_\nu^{s-1}]$. Тогда Y_ν^s имеет вид $Y_\nu^s = Z_\nu^s + X_\nu^s$, где $Z_\nu^s \in N_{-n+\nu+s}$. По предположению индукции имеем $X_\nu^{s-1} \in \Omega_{-n+\nu+s-2}$, следовательно, $[J, X_\nu^{s-1}] \in \Omega_{-n+\nu+s-1}$. Далее, по предположению индукции $Y_\nu^{s-1} \in \Omega_{-n+\nu+s-1}$, следовательно, $[T, Y_\nu^{s-1}] \in \Omega_{-n+\nu+s-1}$. Таким образом, $X_\nu^s = [J, X_\nu^{s-1}] + [T, Y_\nu^{s-1}] \in \Omega_{-n+\nu+s-1}$. Следовательно, представление (43) имеет место при $i = s$, и доказательство по индукции завершено.

Имеем

$$\begin{aligned} Y_1^0 &= Z_1^0 \in N_{-n+1}, & \dots, & & Y_n^0 &= Z_n^0 \in N_0, \\ Y_1^1 &= Z_1^1 + X_1^1 \in N_{-n+2} \oplus \Omega_{-n+1}, & \dots, & & Y_n^1 &= Z_n^1 + X_n^1 \in N_1 \oplus \Omega_0, \\ & \dots, & & & & \\ Y_1^{n-1} &= Z_1^{n-1} + X_1^{n-1} \in N_0 \oplus \Omega_{-1}, & \dots, & & Y_n^{n-1} &= Z_n^{n-1} + X_n^{n-1} \in N_{n-1} \oplus \Omega_{n-2}. \end{aligned} \quad (44)$$

Покажем, что матрицы (44) линейно независимы. Матрицы (44) разбиваются на группы Λ_i , $i = -(n-1), \dots, (n-1)$. Две матрицы лежат в одной и той же группе Λ_i , если они принадлежат одному и тому же подпространству $N_i \oplus \Omega_{i-1}$. Имеем

$$\begin{aligned} \Lambda_{-(n-1)} &= \{Y_1^0\}, \quad \Lambda_{-(n-2)} = \{Y_1^1, Y_2^0\}, \quad \dots, \quad \Lambda_{-i} = \{Y_1^{n-i-1}, Y_2^{n-i-2}, \dots, Y_{n-i}^0\}, \quad \dots, \\ \Lambda_0 &= \{Y_1^{n-1}, Y_2^{n-2}, \dots, Y_n^0\}, \quad \dots, \quad \Lambda_i = \{Y_{i+1}^{n-1}, \dots, Y_n^i\}, \quad \dots, \quad \Lambda_{n-1} = \{Y_n^{n-1}\}. \end{aligned}$$

Обозначим $\Psi_\nu := \langle \Lambda_{-(n-1)}, \Lambda_{-(n-2)}, \dots, \Lambda_\nu \rangle$, $\nu = -(n-1), \dots, (n-1)$. Докажем по индукции, что для любого $\nu \in \{-(n-1), \dots, (n-1)\}$ имеет место равенство

$$\Psi_\nu = \langle \Gamma_{-(n-1)}, \Gamma_{-(n-2)}, \dots, \Gamma_\nu \rangle. \quad (45)$$

База индукции. Пусть $\nu = -(n-1)$. Тогда

$$\Psi_{-(n-1)} = \langle \Lambda_{-(n-1)} \rangle = \langle Y_1^0 \rangle = \langle Z_1^0 \rangle = \langle \Gamma_{-(n-1)} \rangle.$$

Шаг индукции. Предположим, что для $\nu = s-1$ ($s < n$) имеет место равенство (45). Докажем тогда, что равенство (45) имеет место для $\nu = s$. Отсюда по индукции будет следовать, что (45) выполнено для всех $\nu \in \{-(n-1), \dots, (n-1)\}$.

Пусть $\nu = s$. По предположению индукции $\langle \Lambda_{-(n-1)}, \dots, \Lambda_{s-1} \rangle = \langle \Gamma_{-(n-1)}, \dots, \Gamma_{s-1} \rangle$, поэтому

$$\Psi_s = \langle \Lambda_{-(n-1)}, \dots, \Lambda_{s-1}, \Lambda_s \rangle = \langle \Gamma_{-(n-1)}, \dots, \Gamma_{s-1}, \Lambda_s \rangle.$$

Если $s \leq 0$, то матрицы группы Λ_s имеют вид $Y_1^{n+s-1}, \dots, Y_{n+s}^0$. В силу представления (43) имеем

$$Y_1^{n+s-1} = Z_1^{n+s-1} + X_1^{n+s-1}, \quad \dots, \quad Y_{n+s}^0 = Z_{n+s}^0 + X_{n+s}^0,$$

где $Z_1^{n+s-1}, \dots, Z_{n+s}^0 \in N_s$, $X_1^{n+s-1}, \dots, X_{n+s}^0 \in \Omega_{s-1}$. Матрицы $Z_1^{n+s-1}, \dots, Z_{n+s}^0$ составляют группу Γ_s и в силу (41) образуют базис в N_s , а матрицы $X_1^{n+s-1}, \dots, X_{n+s}^0 \in \langle \Gamma_{-(n-1)}, \dots, \Gamma_{s-1} \rangle$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \Psi_s &= \langle \Gamma_{-(n-1)}, \dots, \Gamma_{s-1}, \Lambda_s \rangle = \langle \Gamma_{-(n-1)}, \dots, \Gamma_{s-1}, Y_1^{n+s-1}, \dots, Y_{n+s}^0 \rangle = \\ &= \langle \Gamma_{-(n-1)}, \dots, \Gamma_{s-1}, Z_1^{n+s-1} + X_1^{n+s-1}, \dots, Z_{n+s}^0 + X_{n+s}^0 \rangle = \\ &= \langle \Gamma_{-(n-1)}, \dots, \Gamma_{s-1}, Z_1^{n+s-1}, \dots, Z_{n+s}^0 \rangle = \langle \Gamma_{-(n-1)}, \dots, \Gamma_{s-1}, \Gamma_s \rangle. \end{aligned}$$

Если $s > 0$, то матрицы группы Λ_s имеют вид $Y_{s+1}^{n-1}, \dots, Y_n^s$. В силу представления (43) имеем

$$Y_{s+1}^{n-1} = Z_{s+1}^{n-1} + X_{s+1}^{n-1}, \quad \dots, \quad Y_n^s = Z_n^s + X_n^s,$$

где $Z_{s+1}^{n-1}, \dots, Z_n^s \in N_s$, $X_{s+1}^{n-1}, \dots, X_n^s \in \Omega_{s-1}$. Матрицы $Z_{s+1}^{n-1}, \dots, Z_n^s$ составляют группу Γ_s и в силу (41) образуют базис в N_s , а матрицы $X_{s+1}^{n-1}, \dots, X_n^s \in \langle \Gamma_{-(n-1)}, \dots, \Gamma_{s-1} \rangle$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \Psi_s &= \langle \Gamma_{-(n-1)}, \dots, \Gamma_{s-1}, \Lambda_s \rangle = \langle \Gamma_{-(n-1)}, \dots, \Gamma_{s-1}, Y_{s+1}^{n-1}, \dots, Y_n^s \rangle = \\ &= \langle \Gamma_{-(n-1)}, \dots, \Gamma_{s-1}, Z_{s+1}^{n-1} + X_{s+1}^{n-1}, \dots, Z_n^s + X_n^s \rangle = \\ &= \langle \Gamma_{-(n-1)}, \dots, \Gamma_{s-1}, Z_{s+1}^{n-1}, \dots, Z_n^s \rangle = \langle \Gamma_{-(n-1)}, \dots, \Gamma_{s-1}, \Gamma_s \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (45) доказано. Следовательно, для любого $\nu \in \{-(n-1), \dots, (n-1)\}$ имеет место равенство $\Psi_\nu = \Omega_\nu$. В частности,

$$\Psi_{n-1} = \Omega_{n-1} = M_n,$$

то есть линейная оболочка n^2 матриц (44) совпадает с M_n . Отсюда следует, что матрицы (44) (которые совпадают с (35)) линейно независимы. Это означает, что выполнено равенство (34), а следовательно, выполнено равенство (33). Отсюда следует согласованность системы (1) с матрицами (31). На этом доказательство теоремы 6 завершено. $\square$

Замечание 5. Доказательство теоремы 6 основано на доказательстве линейной независимости матриц (35), где матрицы F_ν , $\nu = \overline{1, n}$ определены равенствами $F_1 = E_{n1}, \dots, F_p = E_{np}$, $F_{p+1} = E_{n-1,p}, \dots, F_n = E_{pp}$. Рассмотрим $n \times n$ -таблицу Υ и клетки $\{ij\}$, $i, j = \overline{1, n}$ этой таблицы. Отметим те клетки таблицы Υ , в которых расположены единицы в матрицах F_ν , $\nu = \overline{1, n}$ и проведем линию через центры этих клеток. Получится ломаная линия α с одним изломом в клетке $\{np\}$. Этой ломаной соответствует кортеж $\beta = [i_1, \dots, i_n] = [1, 2, \dots, p, p, \dots, p] \in D(0, n)$

индексов i_ν , $\nu = \overline{1, n}$. Индекс i_ν равен номеру столбца, в котором расположена единица в матрице F_ν . Доказательство линейной независимости матриц (35) основано на доказательстве линейной независимости строк матриц $Q(j, n-j, \beta_j)$, $j = \overline{0, n-1}$, построенных по кортежам β_j , где $\beta_0 := \beta \in D(0, n)$, а кортежи $\beta_j \in D(j, n-j)$, $j = \overline{1, n-1}$ получены вычеркиванием индексов $i_1, \dots, i_j$ из кортежа β_0 . Рассмотрим произвольную ломаную линию $\hat{\alpha}$ (состоящую из $n-1$ отрезка, звенья которой параллельны сторонам таблицы Υ), соединяющую левую нижнюю угловую клетку с клеткой $\{pp\}$, ($p \in \{1, \dots, n\}$), лежащей на главной диагонали таблицы. Ломаная $\hat{\alpha}$ проходит через n клеток $\{i_1 j_1\} = \{n1\}$, $\dots$, $\{i_n j_n\} = \{pp\}$ таблицы. Построим по ломаной $\hat{\alpha}$ матрицы $\hat{F}_1 = E_{i_1, j_1}$, $\dots$, $\hat{F}_n = E_{i_n, j_n}$. Ломаной $\hat{\alpha}$ соответствует набор индексов $[j_1, \dots, j_n]$, где индекс j_ν равен номеру столбца, в котором расположена единица в матрице $\hat{F}_\nu$. Очевидно, что этот набор образует кортеж $\hat{\beta} = [j_1, \dots, j_n] \in D(0, n)$, то есть этот набор удовлетворяет условиям (20). По теореме 4 строки матриц $Q(\nu, n-\nu, \hat{\beta}_\nu)$, $\nu = \overline{0, n-1}$ будут линейно независимы; здесь $\hat{\beta}_0 := \hat{\beta} \in D(0, n)$, а кортежи $\hat{\beta}_\nu \in D(\nu, n-\nu)$, $\nu = \overline{1, n-1}$ получены вычеркиванием индексов $j_1, \dots, j_\nu$ из кортежа $\hat{\beta}_0$. Отсюда можно показать, аналогично тому, как это было сделано в доказательстве теоремы 6, что матрицы (35) будут линейно независимы при $F_\nu = \hat{F}_\nu$, $\nu = \overline{1, n}$ (где $\hat{F}_\nu$ построены по ломаной $\hat{\alpha}$) для произвольной ломаной линии $\hat{\alpha}$, соединяющей левый нижний угол таблицы Υ с главной диагональю.

Из теоремы 6 и утверждения 1 следует достаточное условие глобальной управляемости спектра.

Следствие 2. Пусть дана система (1) с матрицами (3). Если

$$\text{rank } B + \text{rank } C \geq n + 1,$$

то спектр системы (2) глобально управляем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зайцев В. А. Согласованность и управление спектром в линейных системах с наблюдателем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2009. — Вып. 3. — С. 50–80.
2. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978.
3. Davison E. J., Wang S. H. On Pole Assignment in Linear Multivariable Systems Using Output Feedback // IEEE Trans. on Automat. Control. — 1975. — Vol. AC-20. — P. 516–518.
4. Kimura H. On Pole Assignment by Gain Output Feedback // IEEE Trans. on Automat. Control. — 1975. — Vol. AC-20. — P. 509–516.
5. Леонов Г. А., Шумафов М. М. Методы стабилизации линейных управляемых систем. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2005.

Поступила в редакцию 01.11.09

V. A. Zaitsev

Consistency of linear stationary control systems with the observer of a special form

We consider a linear control system with the observer. We investigate the property of consistency of this system in a special case where consistency is the sufficient condition for global controllability over eigenvalue spectrum of closed-loop system. We prove for systems of the special form that the necessary condition of consistency is not sufficient for dimensions big than 5. The new sufficient condition of consistency for such systems is discovered.

Keywords: control system, incomplete feedback, consistency, control over spectrum.

Mathematical Subject Classifications: 34D08, 93C15, 93D15

Зайцев Василий Александрович, к. ф.-м. н., доцент кафедры дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4).

E-mail: verba@udm.ru