

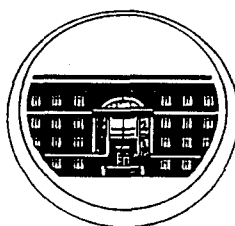
**ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН**

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

ТОМ 16

№ 1

2010



ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 16, № 1. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2010. 288 с.

ISSN 0134-4889

Главный редактор чл.-корр. РАН В. И. Бердышев

Зам. гл. редактора В. В. Кабанов

Редакционная коллегия

А. Г. Бабенко, Н. В. Величко,
Л. П. Власов, М. И. Гусев, А. Р. Данилин,
А. Ф. Клейменов, А. С. Кондратьев, А. И. Короткий,
В. И. Максимов, О. Н. Ульянов (отв. секретарь)

Редакционный совет

чл.-корр. РАН В. В. Васин, акад. РАН И. И. Еремин,
акад. РАН А. М. Ильин, акад. РАН Н. Н. Красовский,
чл.-корр. РАН А. А. Махнев, акад. РАН Ю. С. Осипов,
чл.-корр. РАН Ю. Н. Субботин, чл.-корр. РАН В. Н. Ушаков,
чл.-корр. РАН А. Г. Ченцов

Отв. редакторы выпуска В. Н. Ушаков, А. Г. Ченцов

УДК 517.977

К НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

А. С. Банников, Н. Н. Петров

Рассматривается классический нестационарный пример Понтрягина со многими участниками и фазовыми ограничениями на состояния убегающего при одинаковых динамических и инерционных возможностях игроков. Отдельно рассмотрен случай простого движения. Получены условия разрешимости задач преследования и уклонения.

Ключевые слова: групповое преследование, нестационарная задача, пример Л.С. Понтрягина, фазовые ограничения.

A. S. Bannikov, N. N. Petrov. On a nonstationary problem of group pursuit.

Pontryagin's classical nonstationary example with many participants and phase constraints on the evader's states with equal dynamic and inertia capabilities of the players is considered. The case of a simple motion is considered separately. Solvability conditions for problems of pursuit and evasion are obtained.

Keywords: group pursuit, nonstationary problem, Pontryagin's example, phase constraints.

Введение

Достаточно широкий класс линейных дифференциальных игр преследования охватывает обобщенный нестационарный контрольный пример Понтрягина [1–6]. Для такого класса игр рассматривается задача преследования группой преследователей одного убегающего при условии, что убегающий в процессе игры не покидает пределы многогранного множества. При этом граница фазовых ограничений не является “линией смерти” для убегающего. Получены достаточные условия разрешимости задачи преследования. Отдельно рассмотрен случай простого преследования. Стационарный случай $a(t) \equiv 1$ задачи простого преследования рассматривался многими авторами. В работах [7, 8] получено решение данной задачи без фазовых ограничений, причем в работе [7] рассмотрен случай, когда множество допустимых управлений игроков — шар, терминальные множества — начало координат, в работе [8] множество допустимых управлений и терминальные множества — выпуклые компакты. В работе [9] получено решение задачи с фазовыми ограничениями в случае, когда множество, ограничивающее управления игроков, — шар единичного радиуса, терминальные множества — начало координат, а фазовые ограничения — выпуклый компакт. В работе [10] получено решение задачи простого группового преследования с фазовыми ограничениями, когда множество, ограничивающее управления игроков, — шар единичного радиуса, терминальные множества — выпуклые компакты, а фазовые ограничения — выпуклое многогранное множество. В работе [11] рассматривался случай, когда множество допустимых управлений игроков — выпуклый компакт, терминальные множества — выпуклые компакты, фазовые ограничения — выпуклое многогранное множество. Результаты примыкают к исследованиям [6, 12–14].

1. Нестационарный пример Л. С. Понтрягина

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра Γ $n + 1$ лиц: n преследователей $P_1, \dots, P_n$ и убегающий E . Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$x_i^{(l)} + a_1(t)x_i^{(l-1)} + \dots + a_l(t)x_i = u_i, \quad u_i \in V. \quad (1.1)$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$y^{(l)} + a_1(t)y^{(l-1)} + \dots + a_l(t)y = v, \quad v \in V. \quad (1.2)$$

Здесь $x_i, y, u_i, v \in \mathbb{R}^n$, $a_1, \dots, a_l$ — непрерывные на $[t_0, \infty)$ функции, $i = 1, \dots, n$. При $t = t_0$ заданы начальные условия

$$x_i(t_0) = x_{i0}^0, \quad \dot{x}_i(t_0) = x_{i1}^0, \dots, x_i^{(l-1)}(t_0) = x_{il-1}^0,$$

$$y(t_0) = y_0^0, \quad \dot{y}(t_0) = y_1^0, \dots, y^{(l-1)}(t_0) = y_{l-1}^0,$$

причем $x_{i0} \neq y_0^0$.

Дополнительно предполагается, что убегающий в процессе игры не покидает пределы выпуклого многогранного множества

$$D = \left\{ y \mid y \in \mathbb{R}^k, \langle p_j, y \rangle \leq \mu_j, j = 1, \dots, r \right\}, \quad (1.3)$$

где $p_1, \dots, p_r$ — единичные векторы, $\mu_1, \dots, \mu_r$ — вещественные числа такие, что $\text{Int } D \neq \emptyset$.

Вместо систем (1.1), (1.2) рассмотрим систему

$$z_i^{(l)} + a_1(t)z_i^{(l-1)} + \dots + a_l(t)z_i = u_i - v, \quad u_i, v \in V, \quad (1.4)$$

$$z_i(t_0) = z_{i0}^0 = x_{i0}^0 - y_0^0, \dots, z_i^{(l-1)}(t_0) = z_{il-1}^0 = x_{il-1}^0 - y_{l-1}^0.$$

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что в игре Γ происходит поимка, если существуют момент $T(z^0)$, квазистратегии $\mathcal{U}_1(t, z^0, v_t(\cdot)), \dots, \mathcal{U}_n(t, z^0, v_t(\cdot))$ преследователей $P_1, \dots, P_n$ такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $y(t) \in D$, $t \in [t_0, T(z^0)]$, существуют момент времени $\tau \in [t_0, T(z^0)]$ и номер s такие, что $x_s(\tau) - y(\tau) = 0$, где $v_t(\cdot) = \{v(s), s \in [0, t]\}$.

Обозначим через $\varphi_q(t, s)$, $q = 0, \dots, l-1$ ($t \geq s \geq t_0$), решения уравнения

$$w^{(l)} + a_1(t)w^{(l-1)} + \dots + a_l(t)w = 0$$

с начальными условиями

$$w^{(j)}(s) = 0, \quad j = 0, \dots, q-1, q+1, \dots, l-1, \quad w^{(q)}(s) = 1.$$

Предположение 1. Для всех $t \geq t_0$, $t_0 \leq s \leq t$, справедливо неравенство $\varphi_{l-1}(t, s) \geq 0$.

Пусть далее

$$\xi_i(t) = \varphi_0(t, t_0)z_{i0}^0 + \varphi_1(t, t_0)z_{i1}^0 + \dots + \varphi_{l-1}(t, t_0)z_{il-1}^0,$$

$$\eta(t) = \varphi_0(t, t_0)y_0^0 + \varphi_1(t, t_0)y_1^0 + \dots + \varphi_{l-1}(t, t_0)y_{l-1}^0.$$

Предположение 2. Существуют функции $\beta_i \in C[t_0, \infty)$, векторы z_i^0 , $z_i^0 \neq 0$ такие, что

1. $\beta_i(t) > 0$ для всех $t > t_0$;

2. $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_i(t)\xi_i(t) = z_i^0$.

Обозначим $\beta(t) = \min_i \beta_i(t)$, $\lambda(z, v) = \sup \{ \lambda : \lambda \geq 0, -\lambda z \in V - v \}$, $\lambda_i(v) = \lambda(z_i^0, v)$, $\lambda_{j+n}(v) = \langle p_j, v \rangle$, $j = 1, \dots, r$, $I(q) = \{1, \dots, n+q\}$, $\delta_0 = \inf_{v \in V} \max_{q \in I(r)} \lambda_q(v)$, $\xi_i^1(t) = \beta_i(t)\xi_i(t)$, $V_1 = \{v : v \in V, \lambda_i(v) = 0, i = 1, \dots, n\}$, $f(t) = \int_{t_0}^t \varphi_{l-1}(t, s)ds$.

Предположение 3.

1. Функция $\lambda(z, v)$ непрерывна во всех точках (z, v) таких, что $\lambda(z, v) > 0$;

2. $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t)f(t) = \infty$;

3. Для каждого $\tau > t_0$ выполнены следующие условия:

3.1. $\|\beta(t)\eta(t)\|$ ограничена на $[\tau, \infty)$;

3.2. $\beta(t) \int_{t_0}^{\tau} \varphi_{l-1}(t, s) ds$ ограничена на $[\tau, \infty)$.

Лемма 1. Пусть для игры Γ выполнены предположения 1–3, $D = \mathbb{R}^k$, $\delta_0 > 0$. Тогда существует момент $T_0 > t_0$ такой, что для любой допустимой функции $v(\cdot)$ найдется номер q , такой что

$$1 - \beta_q(T_0) \int_{t_0}^{T_0} \varphi_{l-1}(T_0, s) \lambda(\xi_q^1(T_0), v(s)) ds \leq 0.$$

Лемма 2. Пусть для игры Γ выполнены предположения 1–3, $\delta_0 > 0$, $r = 1$, $\mu_1 = 0$. Тогда существует момент $T_0 > t_0$ такой, что для любой допустимой функции $v(\cdot)$ найдется номер q , такой что

$$1 - \beta_q(T_0) \int_{t_0}^{T_0} \varphi_{l-1}(T_0, s) \lambda(\xi_q^1(T_0), v(s)) ds \leq 0.$$

Доказательство. Пусть $T > t_0$ — произвольное число, $v : [t_0, T] \rightarrow V$ — допустимая функция. Определим функции h_i :

$$h_i(t) = 1 - \beta_i(t) \int_{t_0}^t \varphi_{l-1}(t, s) \lambda(\xi_q^1(T), v(s)) ds;$$

$h_i(0) = 1$, h_i — непрерывные функции и

$$\sum_{i=1}^n h_i(T) \leq n - \beta(T) \int_{t_0}^T \varphi_{l-1}(T, s) \max_i \lambda(\xi_q^1(T), v(s)) ds.$$

Так как $\lim_{T \rightarrow \infty} \xi_i^1(T) = z_i^0$, то существует момент $T_1 > t_0$ такой, что

$$\inf_v \max \left\{ \max_i \lambda(\xi_i^1(T), v), \lambda_{n+1}(v) \right\} \geq \delta = \frac{\delta_0}{2}$$

для всех $T > T_1$.

Так как $y(t) \in D$, то $\langle p_1, y(t) \rangle \leq 0$ для всех $t \geq t_0$. Последнее неравенство равносильно неравенству

$$\int_{T_1}^t \varphi_{l-1}(t, s) \langle p_1, v(s) \rangle ds \leq \mu(t) = -\langle p_1, \eta(t) \rangle - \int_{t_0}^{T_1} \varphi_{l-1}(t, s) \langle p_1, v(s) \rangle ds. \quad (1.5)$$

Определим два множества $\Delta_1(t)$, $\Delta_2(t) \subset [T_1, t]$ ($t > T_1$) следующим образом:

$$\Delta_1(t) = \{ \tau \mid \tau \in [T_1, t], \langle p_1, v(\tau) \rangle < \delta \}, \quad \Delta_2(t) = \{ \tau \mid \tau \in [T_1, t], \langle p_1, v(\tau) \rangle \geq \delta \}.$$

Тогда

$$G_1 + G_2 = f_1(t), \quad -dG_1 + \delta G_2 \leq \mu(t),$$

где

$$G_{1,2} = \int_{\Delta_{1,2}(t)} \varphi_{l-1}(t, s) ds, \quad f_1(t) = \int_{T_1}^t \varphi_{l-1}(t, s) ds.$$

Из последних двух соотношений следует, что

$$G_1 \geq \frac{\delta f_1(t) - \mu(t)}{d + \delta}. \quad (1.6)$$

Считая, что $T > T_1$, из неравенств (1.5), (1.6) получаем

$$\sum_i h_i(T) \leq n - \beta(T) \delta \int_{\Delta_1(T)} \varphi_{l-1}(T, s) ds \leq n - \delta \beta(T) \frac{\delta f_1(T) - \mu(T)}{d + \delta} = g(T).$$

В силу предположения 3 функции $\|\beta(T)\langle p_1, \eta(T) \rangle\|$, $\beta(T) \int_{t_0}^{T_1} \varphi_{l-1}(T, s) ds$ ограничены на $[T_1, \infty)$ и, кроме того, $\lim_{T \rightarrow \infty} \beta(T) f_1(T) = \infty$. Поэтому $\lim_{T \rightarrow \infty} g(T) = -\infty$. Следовательно, существует момент T_0 , удовлетворяющий условию леммы. Лемма доказана. $\square$

Пусть

$$V(t) = \left\{ v(\cdot) \mid v : [t_0, t] \rightarrow V, v(\tau) \in V, y(\tau) \in D, \tau \in [t_0, t] \right\},$$

$$T(z^0) = \min \left\{ t \mid t \geq t_0, \inf_{v(\cdot) \in V(t)} \max_i \beta_i(t) \int_{t_0}^t \varphi_{l-1}(t, s) \lambda(\xi_i^1(t), v(s)) ds \geq 1 \right\}. \quad (1.7)$$

В силу леммы 2 $T(z^0) < \infty$.

Теорема 1. Пусть для игры Γ выполнены предположения 1–3, $D = \mathbb{R}^k$, $\delta_0 > 0$. Тогда в игре Γ происходит поимка.

Теорема 2. Пусть для игры Γ выполнены предположения 1–3, $\delta_0 > 0$, $\mu_j = 0$, $j = 1, \dots, r$ и хотя бы одно из следующих двух условий:

1. $r = 1$;
2. $\min_{v \in \text{conv } V_1} \max_j \langle p_j, v \rangle > 0$.

Тогда в игре Γ происходит поимка.

Доказательство. Пусть $v : [t_0, T] \rightarrow V$ — произвольное допустимое управление убегающего E , $T = T(z^0)$ и t_1 — наименьший положительный корень функции h вида

$$h(t) = 1 - \max_i \beta_i(t) \int_{t_0}^t \varphi_{l-1}(t, s) \lambda(\xi_i^1(T), v(s)) ds.$$

Задаем управления преследователей P_i , полагая

$$u_i(\tau) = v(\tau) - \lambda(\xi_i^1(T), v(\tau)) \xi_i^1(T), \quad \tau \in [t_0, T].$$

Считаем, что $\lambda(\xi_i^1(T), v(\tau)) = 0$ для всех $\tau \in [t_1, T]$. Тогда

$$\begin{aligned}\beta_i(T)z_i(T) &= \xi_i^1(T) + \beta_i(T) \int_{t_0}^T \varphi_{l-1}(T, s)(u_i(s) - v(s))ds \\ &= \xi_i^1(T) \left(1 - \beta_i(T) \int_{t_0}^{t_1} \varphi_{l-1}(T, s)\lambda(\xi_i^1(T), v(s))ds \right).\end{aligned}$$

Из (1.7) следует, что $\beta_q(T)z_q(T) = 0$ при некотором q , и теорема в случае $r = 1$ доказана.

Пусть выполнено условие 2 теоремы. Тогда по теореме Боннеблеста, Карлина, Шепли [15] существуют числа $\alpha_j \geq 0$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = 1$ такие, что $\inf_{v \in \text{conv } V_1} \sum_{j=1}^r \alpha_j \langle p_j, v \rangle > 0$. Полагая

$$p = \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_r p_r, \quad D_1 = \{y \mid y \in \mathbb{R}^k, \langle p, y \rangle \leq 0\},$$

получаем, что

$$D \subset D_1, \quad \inf_v \max_j \lambda_j(v) > 0,$$

где $\lambda_{n+1}(v) = \langle p, v \rangle$. Поэтому в силу ранее доказанного произойдет поимка в игре Γ_1 с фазовым ограничением D_1 . Следовательно, поимка произойдет и в игре Γ .

Теорема доказана. $\square$

Следствие 1. Пусть для игры Γ выполнены предположения 1–3, $\mu_j = 0$, $j = 1, \dots, r$, $V = D_1(0)$, $n \geq k$,

$$0 \in \text{Int conv} \{z_1^0, \dots, z_n^0, p_1, \dots, p_r\}.$$

Тогда в игре Γ происходит поимка.

Следствие 2. Пусть для игры Γ выполнены предположения 1–3, $D = \mathbb{R}^k$, $V = D_1(0)$,

$$0 \in \text{Int conv} \{z_1^0, \dots, z_n^0\}.$$

Тогда в игре Γ происходит поимка.

Пример 1. Система (1.4) имеет вид

$$\ddot{z}_i + \frac{4}{t}\dot{z}_i + \frac{2}{t^2}z_i = u_i - v, \quad \|u_i\| \leq 1, \quad \|v\| \leq 1,$$

$$z_i(t_0) = z_{i0}^0, \quad \dot{z}_i(t_0) = \dot{z}_{i1}^0, \quad t_0 > 0.$$

Тогда

$$\varphi_0(t, s) = \frac{2s}{t} - \frac{s^2}{t^2}, \quad \varphi_1(t, s) = \frac{s^2}{t} - \frac{s^3}{t^2}.$$

Кроме того

$$\xi_i(t) = \varphi_0(t, t_0)z_{i0}^0 + \varphi_1(t, t_0)\dot{z}_{i1}^0 = \frac{2t_0 z_{i0}^0 + t_0^2 \dot{z}_{i1}^0}{t} - \frac{t_0^2 z_{i0}^0 + t_0^3 \dot{z}_{i1}^0}{t^2},$$

$$\beta_i(t) = t, \quad z_i^0 = 2t_0 z_{i0}^0 + t_0^2 \dot{z}_{i1}^0.$$

Считаем, что $z_i^0 \neq 0$.

Утверждение 1. Пусть $\mu_j = 0$, $j = 1, \dots, r$, $n \geq k$ и

$$0 \in \text{Int conv} \{z_1^0, \dots, z_n^0, p_1, \dots, p_r\}.$$

Тогда в игре Γ происходит поимка.

Пример 2. Система (1.4) имеет вид

$$\dot{z}_i + \frac{1}{t} z_i = u_i - v, \quad u_i, v \in V, \quad z_i(t_0) = z_i^0.$$

Для данного примера выполнены все предположения 1–3.

Утверждение 2. Пусть $\delta_0 > 0$, $\mu_j = 0$, $j = 1, \dots, r$ и выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:

1. $r = 1$;
2. $\min_{v \in \text{conv } V_1} \max_j \langle p_j, v \rangle > 0$.

Тогда в игре Γ происходит поимка.

2. Нестационарная задача простого преследования

2.1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра $n + 1$ лиц: n преследователей $P_1, \dots, P_n$ и убегающего E .

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i(t) = a(t)u_i(t), \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad u_i \in Q. \quad (2.1)$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y}(t) = a(t)v(t), \quad y(t_0) = y^0, \quad v \in Q, \quad (2.2)$$

причем $z_i^0 = x_i^0 - y^0 \notin M_i$, $i = 1, \dots, n$, M_i — заданные выпуклые компакты; $a(t)$ — измеримая по Лебегу функция, интегрируемая на любом компактном подмножестве оси t , $\int_{t_0}^{+\infty} |a(s)| ds = +\infty$; Q — строго выпуклый компакт с гладкой границей, $0 \in Q$.

Будем полагать, что убегающий E в процессе игры не покидает пределы множества D вида (1.3).

Пусть $T > t_0$ — произвольное число и σ — некоторое конечное разбиение отрезка $[t_0, T]$: $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_s < \tau_{s+1} = T$.

Определение 2. Кусочно-программной стратегией V убегающего E , заданной на $[t_0, T]$, соответствующей разбиению σ , называется семейство отображений b^l , $l = 0, 1, \dots, s$, ставящих в соответствие величинам

$$(\tau_l, x_1(\tau_l), \dots, x_n(\tau_l), y(\tau_l)) \quad (2.3)$$

измеримую функцию $v_l(t)$, определенную для $t \in [\tau_l, \tau_{l+1})$ и такую, что $v_l(t) \in Q$, $y(t) \in D$, $t \in [\tau_l, \tau_{l+1})$.

Определение 3. Кусочно-программной контрстратегией U_i преследователя P_i , соответствующей разбиению σ , называется семейство отображений c^l , $l = 0, 1, \dots, s$, ставящих

в соответствие величинам (2.3) и управлению $v_l(t)$ измеримую функцию $u_l^i(t)$, определенную для $t \in [\tau_l, \tau_{l+1})$ и такую, что $u_l^i(t) \in Q$, $t \in [\tau_l, \tau_{l+1})$.

Пусть $z^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0, y^0)$. Обозначим данную игру $\Gamma = \Gamma(n, z^0, D)$.

О п р е д е л е н и е 4. В игре Γ возможно *уклонение от встречи*, если для любого числа $T > t_0$ существуют разбиение σ интервала $[t_0, T]$, стратегия V убегающего E , соответствующая разбиению σ , такие, что для любых траекторий игроков P_i имеет место

$$x_i(t) - y(t) \notin M_i, \quad t \in [t_0, T], \quad i = 1, \dots, n,$$

где $y(t)$ — реализовавшаяся в данной ситуации траектория убегающего E .

О п р е д е л е н и е 5. В игре Γ происходит *поимка*, если существует $T > t_0$ и для любого разбиения σ интервала $[t_0, T]$, любой траектории $y(t)$ игрока E существуют кусочно-программные контрстратегии U_i игроков P_i , соответствующие разбиению σ , момент $\tau \in [t_0, T]$ и номер $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ такие, что

$$x_m(\tau) - y(\tau) \in M_m,$$

где $x_m(t)$ — реализовавшаяся в данной ситуации траектория преследователя P_m .

Вместо систем (2.1) и (2.2) будем рассматривать систему

$$\dot{z}_i(t) = a(t)(u_i(t) - v(t)), \quad z_i(t_0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0. \quad (2.4)$$

Введем функции λ_i следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_i(v, m_i) &= \max\{\lambda \mid v - \lambda(z_i^0 - m_i) \in Q, \quad v \in Q\}, & \lambda_i(v) &= \max_{m_i \in M_i} \lambda_i(v, m_i), \quad i = 1, \dots, n, \\ \lambda_i^-(w, m_i) &= \max\{\lambda \mid w - \lambda(z_i^0 - m_i) \in -Q, \quad w \in -Q\}, & \lambda_i^-(w) &= \max_{m_i \in M_i} \lambda_i^-(w, m_i), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Так как Q — строго выпуклый компакт с гладкой границей, то функции λ_i непрерывны на Q , λ_i^- непрерывны на $-Q$ (см. [4]), и существуют

$$\delta(z^0) = \min_{v \in Q} \max_{i=1, \dots, n} \lambda_i(v), \quad \delta^-(z^0) = \min_{w \in -Q} \max_{i=1, \dots, n} \lambda_i^-(w),$$

причем

$$\delta(z^0) = 0 \iff 0 \in \text{Int conv} \bigcup_{i=1}^n (z_i^0 - M_i) \iff \delta^-(z^0) = 0.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} A^\pm(t) &= \{\tau \in [t_0, t] \mid \pm a(\tau) > 0\}, & A^\pm &= A^\pm(+\infty), \\ A^0(t) &= \{\tau \in [t_0, t] \mid a(\tau) > 0\}, & A^0 &= A^0(+\infty), \\ \alpha^\pm(t) &= \int_{A^\pm(t)} |a(s)| ds. \end{aligned}$$

2.2. Групповое преследование одного убегающего без фазовых ограничений

Рассмотрим случай, когда $D = \mathbb{R}^k$, т. е. на траекторию убегающего не наложено никаких фазовых ограничений.

Теорема 3. В игре Γ происходит поимка тогда и только тогда, когда $\delta(z^0) > 0$.

Доказательство. Из [4] следует, что функции $\lambda_i(v, m_i)$, $\lambda_i^-(w, m_i)$ непрерывны по совокупности переменных, а отображения $\mathcal{M}_i(v) = \{m_i \in M_i | \lambda_i(v, m_i) = \lambda_i(v)\}$ однозначны и непрерывны.

Зададим контрстратегии U_i преследователей P_i следующим образом:

$$u_i^j(t) = \begin{cases} v_l(t) - \lambda_i(v_l(t)) (z_i^0 - \mathcal{M}_i(v_l(t))), & t \in [\tau_l, \tau_{l+1}) \cap A^+, \\ v_l(t), & t \in [\tau_l, \tau_{l+1}) \cap A^0, \\ v_l(t) + \lambda_i^-(-v_l(t)) (z_i^0 - \mathcal{M}_i(-v_l(t))), & t \in [\tau_l, \tau_{l+1}) \cap A^-, \end{cases}$$

где $\sigma = \{t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{s+1} = T(z^0)\}$, V — произвольная стратегия убегающего E , соответствующая разбиению σ , $T(z^0)$ будет определено позже. Тогда для решения системы (2.4) справедливо представление

$$\begin{aligned} z_i(t) = & z_i^0 \left(1 - \int_{A^+(t)} a(s) \lambda_i(v(s)) ds - \int_{A^-(t)} |a(s)| \lambda_i^-(-v(s)) ds \right) \\ & + \int_{A^+(t)} a(s) \mathcal{M}_i(v(s)) \lambda_i(v(s)) ds + \int_{A^-(t)} |a(s)| \mathcal{M}_i(-v(s)) \lambda_i^-(-v(s)) ds. \end{aligned}$$

Из определения величин $\delta(z^0)$, $\delta^-(z^0)$ получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left(1 - \int_{A^+(t)} a(s) \lambda_i(v(s)) ds - \int_{A^-(t)} |a(s)| \lambda_i^-(-v(s)) ds \right) \\ & = n - \left(\int_{A^+(t)} a(s) \sum_{i=1}^n \lambda_i(v(s)) ds + \int_{A^-(t)} |a(s)| \sum_{i=1}^n \lambda_i^-(-v(s)) ds \right) \\ & \leq n - \left(\int_{A^+(t)} a(s) \max_{i=1..n} \lambda_i(v(s)) ds + \int_{A^-(t)} |a(s)| \max_{i=1..n} \lambda_i^-(-v(s)) ds \right) \\ & \leq n - \left(\int_{A^+(t)} a(s) \delta(z^0) ds + \int_{A^-(t)} |a(s)| \delta^-(z^0) ds \right) \leq n - \min\{\delta(z^0), \delta^-(z^0)\} \int_{t_0}^t |a(s)| ds. \end{aligned}$$

Поэтому не позже момента

$$T(z^0) = t_0 + \min \left\{ t \mid \int_{t_0}^t |a(s)| ds = \frac{n}{\min\{\delta(z^0), \delta^-(z^0)\}} \right\}$$

хотя бы одна из величин $1 - \int_{A^+(t)} a(s) \lambda_i(v(s)) ds - \int_{A^-(t)} |a(s)| \lambda_i^-(-v(s)) ds$ обратится в нуль. Тогда

$$z_i(T(z^0)) = \int_{A^+(T(z^0))} a(s) \mathcal{M}_i(v(s)) \lambda_i(v(s)) ds + \int_{A^-(T(z^0))} |a(s)| \mathcal{M}_i(-v(s)) \lambda_i^-(-v(s)) ds \in M_i.$$

Таким образом, хотя бы один из преследователей ловит к моменту $T(z^0)$ убегающего E .

Пусть теперь для позиции z_0 выполнено $\delta(z^0) = 0$. Это означает, что существуют векторы $v_0, -w_0 \in Q$ такие, что $\lambda_i(v_0) = 0$, $\lambda_i^-(w_0) = 0$, $i = 1, \dots, n$, при этом w_0 можно выбрать таким, что $C(Q, -p_0) = \langle -w_0, -p_0 \rangle$ (p_0 — единичный опорный вектор к Q в точке v_0). Зададим

стратегию убегающего следующим образом: $\sigma = \{t_0, +\infty\}$, $v(t) = \begin{cases} v_0, & a(t) \geq 0, \\ -w_0, & a(t) < 0. \end{cases}$

Предположим, что в игре Γ происходит поимка. Тогда существуют $T > t_0$, контрстратегии преследователей $U_1, \dots, U_n$ такие, что $z_i(T) \in M_i$ при некотором $i \in \{1, \dots, n\}$, а для $z_i(T)$ справедливо представление

$$z_i(T) = z_i^0 + (u_1 - v_0)\alpha^+(T) + (u_2 - w_0)\alpha^-(T) = m_i \in M_i,$$

$$u_1 = \begin{cases} \frac{\int_{A^+(T)} a(s)u_i(s) ds}{\alpha^+(T)} \in Q, & \alpha^+(T) > 0, \\ v_0, & \alpha^+(T) = 0, \end{cases} \quad u_2 = \begin{cases} \frac{\int_{A^-(T)} a(s)u_i(s) ds}{\alpha^-(T)} \in -Q, & \alpha^-(T) > 0, \\ w_0, & \alpha^-(T) = 0. \end{cases}$$

Перенесем z_i^0 в правую часть и умножим скалярно на p_0

$$\alpha^+(T)\langle u_1 - v_0, p_0 \rangle + \alpha^-(T)\langle w_0 - u_2, -p_0 \rangle \leq 0 \leq \langle m_i - z_i^0, p_0 \rangle,$$

причем одновременное равенство 0 левой и правой части невозможно. Значит, в игре Γ происходит уклонение от встречи. Теорема доказана. $\square$

2.3. Групповое преследование одного убегающего с фазовыми ограничениями

Будем теперь предполагать, что убегающий E в процессе игры не покидает пределы множества D вида 1.3, Q — шар радиуса $R > 0$ с центром в начале координат. Пусть

$$\delta_1(z^0) = \min_{v \in Q} \max_{s=1, \dots, n+r} \lambda_s(v), \quad \delta_1^-(z^0) = \min_{v \in Q} \max_{s=1, \dots, n+r} \lambda_s(-v).$$

Величина $\delta_1(z^0) = 0$ в том и только том случае [12], когда

$$0 \notin \text{Int conv} \{z_1^0 - M_1, \dots, z_n^0 - M_n, p_1, \dots, p_r\}.$$

Учитывая, что по определению $\delta_1(z^0) \geq 0$, получаем, что

$$\delta_1(z^0) > 0 \iff 0 \in \text{Int conv} \{z_1^0 - M_1, \dots, z_n^0 - M_n, p_1, \dots, p_r\} \iff \delta_1^-(z^0) > 0.$$

Теорема 4. Пусть число элементов множества $\bigcup_{i=1}^n (z_i^0 - M_i)$ не меньше k . Тогда для того, чтобы в игре Γ происходила поимка, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\delta_1(z^0) > 0$.

Доказательство. Пусть $\delta_1(z^0) > 0$. Докажем, что в игре $\Gamma(n, z^0, D)$ происходит поимка.

1. Рассмотрим сначала случай $r = 1$. Пусть V — произвольная стратегия убегающего E , соответствующая некоторому разбиению $\sigma = \{t_0 = \tau_0 < \dots < \tau_{s+1} = T\}$ некоторого интервала $[t_0, T]$.

Зададим контрстратегии U_i преследователей P_i следующим образом:

$$u_i^i(t) = \begin{cases} v_i(t) - \lambda_i(v_i(t)) (z_i^0 - M_i(v_i(t))), & t \in [\tau_l, \tau_{l+1}) \cap A^+, \\ v_i(t), & t \in [\tau_l, \tau_{l+1}) \cap A^0, \\ v_i(t) + \lambda_i(-v_i(t)) (z_i^0 - M_i(-v_i(t))), & t \in [\tau_l, \tau_{l+1}) \cap A^-. \end{cases}$$

Так как стратегия V допустима, то $y(t) \in D$, $t \in [t_0, T]$. Это означает, что

$$\langle p_1, y(t) \rangle = \left\langle p_1, y^0 + \int_{t_0}^t a(s)v(s) ds \right\rangle = \langle p_1, y_0 \rangle + \int_{t_0}^t a(s)\langle p_1, v(s) \rangle ds \leq \mu_1.$$

Пусть $T_1^\pm(t)$ и $T_2^\pm(t)$ — подмножества интервала $[t_0, T]$ такие, что

$$\begin{aligned} T_1^+(t) &= \left\{ \tau \in [t_0, t] \mid \langle p_1, v(\tau) \rangle < \delta_1(z^0) \right\} \cap A^+(t), \\ T_2^+(t) &= \left\{ \tau \in [t_0, t] \mid \langle p_1, v(\tau) \rangle \geq \delta_1(z^0) \right\} \cap A^+(t), \\ T_1^-(t) &= \left\{ \tau \in [t_0, t] \mid \langle p_1, -v(\tau) \rangle < \delta_1(z^0) \right\} \cap A^-(t), \\ T_2^-(t) &= \left\{ \tau \in [t_0, t] \mid \langle p_1, -v(\tau) \rangle \geq \delta_1(z^0) \right\} \cap A^-(t). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mu_0 = \mu_1 - \langle p_1, y^0 \rangle &\geq \int_{t_0}^t a(s)\langle p_1, v(s) \rangle ds = \int_{T_1(t)} |a(s)| \langle p_1, v(s) \operatorname{sign} a(s) \rangle ds \\ &+ \int_{T_2(t)} |a(s)| \langle p_1, v(s) \operatorname{sign} a(s) \rangle ds \geq -R \int_{T_1(t)} |a(s)| ds + \delta_1(z^0) \left(\int_{t_0}^t |a(s)| ds - \int_{T_2(t)} |a(s)| ds \right). \end{aligned}$$

Получаем следующую оценку для $\int_{T_1(t)} |a(s)| ds$:

$$\int_{T_1(t)} |a(s)| ds \geq \frac{\delta_1^0 \int_{t_0}^t |a(s)| ds - \mu_0}{R + \delta_1^0} \quad (\delta_1^0 = \delta_1(z^0)).$$

Из определения контрстратегий U_i и системы (2.4) получаем

$$\begin{aligned} z_i(t) &= z_i^0 \left(1 - \int_{A^+(t)} a(s)\lambda_i(v(s)) ds - \int_{A^-(t)} |a(s)|\lambda_i(-v(s)) ds \right) \\ &+ \int_{A^+(t)} a(s)\mathcal{M}_i(v(s))\lambda_i(v(s)) ds + \int_{A^-(t)} |a(s)|\mathcal{M}_i(-v(s))\lambda_i(-v(s)) ds. \end{aligned}$$

Рассмотрим функции

$$f_i(t) = 1 - \int_{A^+(t)} a(s)\lambda_i(v(s)) ds - \int_{A^-(t)} |a(s)|\lambda_i(-v(s)) ds, \quad i = 1, \dots, n.$$

Это непрерывные невозрастающие функции, $f_i(t_0) = 1$ и

$$\sum_{i=1}^n f_i(t) = n - \int_{A^+(t)} a(s) \sum_{i=1}^n \lambda_i(v(s)) ds - \int_{A^-(t)} |a(s)| \sum_{i=1}^n \lambda_i(-v(s)) ds \leq n - \delta_1^0 \int_{T_1(t)} |a(s)| ds$$

$$\leq n - \delta_1^0 \left(\frac{\delta_1^0 \int_{t_0}^t |a(s)| ds - \mu_0}{R + \delta_1^0} \right).$$

Из последнего неравенства следует, что существует момент времени

$$T_0 \leq t_0 + \min \left\{ t \mid \int_{t_0}^t |a(s)| ds = \frac{n(R + \delta_1^0) + \mu_0 \delta_1^0}{\delta_1^{0^2}} \right\}$$

такой, что одна из функций f_i обратится в 0 в момент T_0 . Поэтому при $t = T_0$ будем иметь $f_i(T_0) = 0$ и

$$z_i(T_0) = \int_{A^+(T_0)} a(s) \mathcal{M}_i(v(s)) \lambda_i(v(s)) ds + \int_{A^-(T_0)} |a(s)| \mathcal{M}_i(-v(s)) \lambda_i(-v(s)) ds \in M_i.$$

Это и означает, что в игре $\Gamma(n, z^0, D)$ происходит поимка.

2. Пусть теперь $r > 1$. Так как $\delta_1^0 > 0$, то $0 \in \text{Int conv}\{z_1^0 - M_1, \dots, z_n^0 - M_n, p_1, \dots, p_r\}$. Это означает, что существуют $b_1, \dots, b_m \in \bigcup_{i=1}^n (z_i^0 - M_i)$ такие, что векторы $b_1, \dots, b_m, p_1, \dots, p_r$ образуют положительный базис [16]. Можно считать, что $m \geq k$ и векторы $b_1, \dots, b_k$ образуют базис $\mathbb{R}^k$. Так как $b_1, \dots, b_m, p_1, \dots, p_r$ — положительный базис, то существуют положительные числа

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_m$$

такие, что

$$0 = \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_r p_r + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_m b_m.$$

Рассмотрим вектор $p_0 = \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_r p_r$. Тогда векторы $b_1, \dots, b_m, p_0$ образуют положительный базис $\mathbb{R}^k$.

Рассмотрим множество

$$D_1 = \{z \mid \langle z, p_0 \rangle \leq \mu_0\},$$

где $\mu_0 = \sum_{i=1}^r \alpha_i \mu_i$. Тогда $D \subset D_1$. Если $p_0 \neq 0$, то в силу п. 1 данной теоремы в игре $\Gamma_1(n, z^0, D_1)$ происходит поимка. Если же $p_0 = 0$, то $D_1 = \mathbb{R}^k$, и в силу теоремы 3 в игре $\Gamma_1(n, z^0, D_1)$ происходит поимка. Поэтому поимка произойдет и в игре $\Gamma(n, z^0, D)$.

Предположим, что $\delta_1^0 \leq 0$. Это означает, что существует вектор $v_0 \in Q$ такой, что

$$\begin{aligned} \lambda_i(v_0) &= 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ \langle p_j, v_0 \rangle &\leq 0, \quad j = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

Зададим стратегию V убегающего E следующим образом:

$$\sigma = \{t_0, +\infty\}, \quad v(t) = \begin{cases} v_0, & a(t) \geq 0, \\ -v_0, & a(t) < 0. \end{cases}$$

Стратегия V допустима, так как

$$\langle p_j, y(t) \rangle = \langle p_j, y^0 \rangle + \int_{t_0}^t a(s) \langle p_j, v(s) \rangle ds \leq \mu_j, \quad j = 1, \dots, r.$$

Предположим, что в игре Γ происходит поимка. Тогда существуют $T > t_0$, контрстратегии преследователей $U_1, \dots, U_n$ такие, что $z_i(T) \in M_i$ при некотором $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда, повторяя рассуждения из теоремы 3, приходим к невозможности включения $z_i(T) \in M_i$. Тем самым доказано, что в игре $\Gamma(n, z^0, D)$ происходит уклонение от встречи. Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. М.: Наука, 1988. Т. 2. 576 с.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
4. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 384 с.
5. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: МГУ, 1990. 197 с.
6. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 2009. 266 с.
7. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
8. Григоренко Н.Л. Игра простого преследования-убегания группы преследователей и одного убегающего // Вест. МГУ. 1983. № 1. С. 41–47. (Вычисл. математика и кибернетика.)
9. Иванов Р.П. Простое преследование на компакте // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254, № 6. С. 1318–1321.
10. Петров Н.Н. Теория игр: учеб. пособие. Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1997. 197 с.
11. Петров Н.Н. Одна задача простого преследования с фазовыми ограничениями // Автоматика и телемеханика. 1992. № 5. С. 22–26.
12. Банников А.С. Об одной задаче группового преследования // Вест. Удм. ун-та. 2009. Вып. 3. С. 3–11. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
13. Мезенцев А.В. О некотором классе дифференциальных игр // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1971. № 6. С. 3–7.
14. Никольский М.С. Нестационарные линейные дифференциальные игры I // Кибернетика. 1970. № 6. С. 98–101.
15. Партхасаратхи Т., Рагхаван Т. Некоторые вопросы теории игр двух лиц. М.: Мир, 1974. 29 с.
16. Петров Н.Н. Об управляемости автономных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 4. С. 606–617.

Банников Александр Сергеевич
аспирант
Удм. гос. ун-т
e-mail: bannikov_a_s@mail.ru

Поступила 11.01.2010

Петров Николай Никандрович
д-р физ.-мат. наук
декан
Удм. гос. ун-т
e-mail: npetrov@udmnet.ru