ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2009, том 45, № 9, с. 1320–1328

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1+517.926

УПРАВЛЕНИЕ СПЕКТРОМ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С НЕПОЛНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

© 2009 г. В. А. Зайцев

Для линейной стационарной управляемой системы, замкнутой по принципу линейной неполной обратной связи, получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи управления спектром в случае, когда коэффициенты имеют специальный вид.

1. Обозначения и определения. Пусть $e_1,\dots,e_n$ – канонический базис в пространстве $\mathbb{R}^n$, т.е. $e_1=\operatorname{col}(1,0,\dots,0)$, ..., $e_n=\operatorname{col}(0,\dots,0,1)$; $M_{m,n}$ – пространство вещественных $m\times n$-матриц; $M_n:=M_{n,n}$; $I=[e_1,\dots,e_n]\in M_n$ – единичная матрица; $*$ – операция транспонирования вектора или матрицы; $J_0:=I$; J_1 – первый единичный косой ряд, т.е. $J_1:=\sum_{i=1}^{n-1}e_ie_{i+1}^*\in M_n$; $J_k:=J_1^k$, $k\in\mathbb{N}$ (т.е. $J_k=0\in M_n$ при $k\geq n$); $\chi(A;\lambda)$ – характеристический многочлен матрицы A; $\operatorname{Sp}A$ – след матрицы A.

Рассмотрим линейную стационарную управляемую систему

$$\dot x=Ax+Bu,\quad (x,u)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m, \tag{1}$$

$$y=C^*x,\quad y\in\mathbb{R}^k, \tag{2}$$

заданную матрицей $(A,B,C)\in M_{n,n+m+k}$. Пусть управление в системе (1), (2) строится по принципу линейной неполной обратной связи в виде $u=Uy$, где $U\in M_{m,k}$ – постоянная матрица. Соответствующая замкнутая система будет иметь вид

$$\dot x=(A+BUC^*)x,\quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{3}$$

В настоящей работе исследуется задача управления спектром матрицы $A+BUC^*$ системы (3). Эта задача может формулироваться различными способами:

1) даны матрицы A, B, C (возможно, комплексные). Требуется для произвольного набора $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ комплексных чисел построить матричное (возможно, комплексное) управление U так, чтобы собственные значения $\lambda_j(A+BUC^*)$ матрицы $A+BUC^*$ совпадали с числами μ_j;

2) даны вещественные матрицы A, B, C. Требуется для произвольного набора $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ комплексных чисел, замкнутого относительно операции комплексного сопряжения, построить вещественную матрицу U, обеспечивающую равенства $\lambda_j(A+BUC^*)=\mu_j$, $j=1,\dots,n$.

Будем считать, что матрицы A, B, C вещественные, и будем решать эту задачу во второй формулировке; все утверждения и доказательства будут справедливы и для первой формулировки.

Определение 1. Будем говорить, что *задача управления спектром матрицы* $A+BUC^*$ *разрешима*, если для любого многочлена n-й степени $p(\lambda)=\lambda^n+\gamma_1\lambda^{n-1}+\ldots+\gamma_n$ с вещественными коэффициентами γ_i найдется постоянная вещественная матрица $U\in M_{m,k}$ такая, что характеристический многочлен $\chi(A+BUC^*;\lambda)$ матрицы $A+BUC^*$ с этим управлением совпадает с $p(\lambda)$.

Эту задачу называют еще *задачей о размещении собственных значений* [1, с. 159] или *задачей о модальном управлении* [2, с. 435]. В случае $C=I$ задача управления спектром разрешима тогда и только тогда, когда система (1) вполне управляема [3, с. 320; 4]. В случае, когда $m<n$ и $k<n$, эта задача исследовалась многими авторами. В работе [1, гл. III, § 7] приведен подробный обзор известных достаточных и необходимых условий разрешимости данной задачи. В настоящей работе получены новые условия разрешимости указанной задачи для системы (3) с коэффициентами вида (4) (см. ниже), которые являются необходимыми и достаточными условиями. Эти результаты обобщают результаты работ [5, 6].

2. Результаты. Пусть коэффициенты системы (3) имеют следующий вид:

$$
\begin{gathered}
A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}, \quad a_{i,i+1} \neq 0, \quad i = \overline{1, n-1}; \quad a_{ij} = 0, \quad j > i+1; \\
B = \{b_{ij}\}, \quad C = \{c_{il}\}, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}, \quad l = \overline{1,k}; \qquad (4) \\
b_{ij} = 0, \quad i = \overline{1, p-1}, \quad j = \overline{1,m}; \quad c_{il} = 0, \quad i = \overline{p+1, n}, \quad l = \overline{1,k}; \quad p \in \{1, \ldots, n\}.
\end{gathered}
$$

Пусть $\lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_n := \chi(A; \lambda)$. Положим $\alpha_0 := 1$. Вычеркнем из матрицы A последнюю строку и полученную матрицу обозначим через $Q \in M_{n-1,n}$. Построим матрицу $S_1 = \left\| \dfrac{e_1^*}{Q} \right\|$. Тогда $S_1 \in M_n$ – нижняя треугольная матрица и $\det S_1 \neq 0$. Для каждого $l = 2, \ldots, n-1$ по матрице $S_{l-1} = \{s_{ij}^{l-1}\}_{i,j=1}^{n}$ построим матрицу $S_l = \{s_{ij}^{l}\}_{i,j=1}^{n}$ следующим образом: $s_{11}^l := 1$, $s_{1j}^l := s_{j1}^l := 0$, $j = \overline{2,n}$; $s_{ij}^l = s_{i-1,j-1}^{l-1}$, $i, j = \overline{2,n}$. Тогда для всех $l = 1, \ldots, n-1$ матрицы S_l нижние треугольные, невырожденные. Пусть $S = S_{n-1} \cdots S_1$. Тогда S – также нижняя треугольная невырожденная матрица. Построим матрицу

$$
G := \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i-1} J_{i-1}^*.
$$

Теорема 1. *Пусть дана система (3) с матрицами вида (4) и*

$$
\lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n := \chi(A + BUC^*; \lambda).
$$

Тогда коэффициенты γ_i характеристического многочлена матрицы $A+BUC^*$ выражаются через коэффициенты системы (3), (4) следующим образом:

$$
\gamma_i = \alpha_i - \operatorname{Sp}(SBUC^*S^{-1}J_{i-1}G), \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (5)
$$

Теорема 2. *Задача управления спектром для системы (3) с матрицами вида (4) разрешима тогда и только тогда, когда матрицы*

$$
C^*S^{-1}J_0GSB, \quad C^*S^{-1}J_1GSB, \ \ldots, \ C^*S^{-1}J_{n-1}GSB \qquad (6)
$$

линейно независимы.

Доказательство теоремы 2. Мы докажем теорему 2 как следствие теоремы 1 и выпишем в явном виде управление, приводящее характеристический многочлен к наперед заданному. Пусть задан многочлен $p(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n$ с вещественными коэффициентами γ_i. Требуется построить U так, чтобы $\chi(A + BUC^*; \lambda) = p(\lambda)$, т.е. чтобы выполнялись равенства (5): $\gamma_i = \alpha_i - \operatorname{Sp}(SBUC^*S^{-1}J_{i-1}G) = \alpha_i - \operatorname{Sp}(UC^*S^{-1}J_{i-1}GSB)$, $i = 1, \ldots, n$. Это система из n линейных уравнений с mk неизвестными u_{pq}, $p = 1, \ldots, m$, $q = 1, \ldots, k$, элементами матрицы U. Введем в рассмотрение отображение $\operatorname{vec}: M_{k,m} \to \mathbb{R}^{km}$, которое "разворачивает" матрицу $H = \{h_{ij}\}$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, m$, по строкам в вектор-столбец $\operatorname{vec} H := \operatorname{col}(h_{11}, \ldots, h_{1m}, \ldots, h_{k1}, \ldots, h_{km})$. Очевидно, что для матриц $H_1, H_2 \in M_{k,m}$ выполнено равенство $\operatorname{Sp}(H_1^* H_2) = (\operatorname{vec} H_1)^*(\operatorname{vec} H_2)$. Тогда систему линейных уравнений (5) можно записать в векторном виде

$$
\alpha - P^*v = \gamma. \qquad (7)
$$

Здесь $P = [\operatorname{vec} C^*S^{-1}J_0GSB, \ldots, \operatorname{vec} C^*S^{-1}J_{n-1}GSB] \in M_{km,n}$, $\alpha = \operatorname{col}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $\gamma = \operatorname{col}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$, $v = \operatorname{vec} U^* \in \mathbb{R}^{km}$. Если матрицы (6) линейно независимы, то $\operatorname{rank} P = n$. Тогда P^*P невырождена, и для любого γ система (7) разрешима и имеет, в частности, решение $v = P(P^*P)^{-1}(\alpha - \gamma)$. Таким образом, задача управления спектром разрешима и соответствующее управление имеет вид $U = (\operatorname{vec}^{-1} v)^*$. Если же матрицы (6) линейно зависимы, то $\operatorname{rank} P < n$, и для вектора $\gamma = \alpha - \beta$, где $\beta \notin \operatorname{Im} P^*$, система (7) неразрешима, а следовательно, задача управления спектром неразрешима. Теорема доказана.

Замечание 1. Из теоремы 2 вытекает, что для системы (3) с матрицами (4) необходимым условием разрешимости задачи управления спектром является условие $mk \geq n$. Если матрицы (6) линейно независимы и $mk = n$, то управление U, обеспечивающее равенство $\chi(A + BUC^*; \lambda) = p(\lambda)$, единственно, а если матрицы (6) линейно независимы и $mk > n$, то такое управление неединственно.

Если среди матриц (6) существует $l < n$ линейно независимых, то задача управления спектром неразрешима. Тем не менее можно частично управлять спектром, а именно можно обеспечить равенство $\chi(A + BUC^*; \lambda) = p(\lambda)$ для любого $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, принадлежащего l-мерному линейному многообразию $\alpha - \operatorname{Im} P^*$ в $\mathbb{R}^n$.

Следствие 1. *Если матрицы (6) линейно независимы, то система (3), (4) стабилизируема в классе постоянных матричных управлений U, т.е. для любого $\varkappa > 0$ существует постоянная матрица U такая, что собственные значения λ_i матрицы $A + BUC^*$ удовлетворяют условиям* $\operatorname{Re} \lambda_i \leq -\varkappa < 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Замечание 2. Теоремы 1 и 2 имеют место для системы (3) с коэффициентами вида (4). Такими системами не исчерпываются все возможные системы вида (3). Тем не менее класс таких систем достаточно широк, в частности, он включает в себя следующий важный класс систем. Рассмотрим объект, который описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами, на вход которого подается линейная комбинация из m сигналов и их производных до порядка $(n-p)$ включительно, а измерению доступны k различных линейных комбинаций состояния объекта z и его производных до порядка $(p-1)$ включительно (см. [6]). Управление построим по принципу линейной неполной обратной связи. С помощью стандартной замены $z = x_1$, $\dot{z} = x_2$, $\ldots$, $z^{(n-1)} = x_n$ перейдем от уравнения n-го порядка к системе дифференциальных уравнений. Тогда коэффициенты полученной системы уравнений в точности будут иметь вид (4). Соответствующий результат – теорема 2 для обыкновенного дифференциального уравнения – получен в работе [6].

3. Доказательство теоремы 1. Пусть матрица $Q' \in M_{n-1}$ получена из матрицы S_1 вычеркиванием последней строки и последнего столбца. Построим матрицу $A_1 := S_1 A S_1^{-1}$.

Лемма 1. *Матрица* A_1 *имеет вид* $A_1 = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & Q' \\ \hline \multicolumn{2}{c}{* \; * \; *} \end{array} \right\|$; *здесь* $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, *а в последней строке стоят числа такие, что* $\chi(A; \lambda) = \chi(A_1; \lambda)$.

В этой лемме утверждается следующее. Если умножить на матрицу A слева S_1 и справа S_1^{-1}, то прямоугольный "несущий блок" $Q \in M_{n-1,n}$ матрицы A сдвинется по диагонали вправо вниз, при этом последняя строка и последний столбец матрицы Q потеряются, появится первый столбец (высотой $n-1$), состоящий из нулей, и первая строка e_2^* (длиной n); последняя строка матрицы A изменится таким образом, что характеристический многочлен сохранится. Формулировка леммы 1 корректна, поскольку по характеристическому многочлену матрицы A_1 ее последняя строка восстанавливается однозначно. Это будет вытекать из следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 2. *Пусть даны две матрицы* $P = \left\| \dfrac{Q}{\xi} \right\|$, $R = \left\| \dfrac{Q}{\psi} \right\|$ *такие, что характеристические многочлены этих матриц совпадают:* $\chi(P; \lambda) = \chi(R; \lambda)$. *Тогда последние строки этих матриц совпадают.*

Доказательство. Пусть $\xi = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^{n*}$, $\psi = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^{n*}$. Построим матрицу $\lambda I - P$. Обозначим через Δ_i, $i = 1, \ldots, n$, главные диагональные миноры этой матрицы: $\Delta_1 = \lambda - a_{11}$, $\Delta_2 = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21}$, $\ldots$, $\Delta_n = \det(\lambda I - P)$. Заметим, что для всех $i = 1, \ldots, n$ степень многочлена Δ_i равна в точности i, старший коэффициент при λ^i равен единице. Разложим $\det(\lambda I - P)$ по последней строке, получим

$$\chi(P; \lambda) = (\lambda - p_n)\Delta_{n-1} - (-p_{n-1})(-a_{n-1,n})\Delta_{n-2} + (-p_{n-2})(-a_{n-1,n})(-a_{n-2,n-1})\Delta_{n-3} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-2}(-p_2)(-a_{n-1,n}) \cdots (-a_{23})\Delta_1 + (-1)^{n-1}(-p_1)(-a_{n-1,n}) \cdots (-a_{12}) =$$

$$= (\lambda - p_n)\Delta_{n-1} - p_{n-1}a_{n-1,n}\Delta_{n-2} - p_{n-2}a_{n-1,n}a_{n-2,n-1}\Delta_{n-3} - \ldots$$

$$\ldots - p_2 a_{n-1,n} \cdots a_{23}\Delta_1 - p_1 a_{n-1,n} \cdots a_{12}.$$

Аналогично

$$\chi(R;\lambda) = (\lambda - r_n)\Delta_{n-1} - r_{n-1}a_{n-1,n}\Delta_{n-2} - r_{n-2}a_{n-1,n}a_{n-2,n-1}\Delta_{n-3} - \ldots$$
$$\ldots - r_2 a_{n-1,n}\cdots a_{23}\Delta_1 - r_1 a_{n-1,n}\cdots a_{12}.$$

Характеристические многочлены матриц совпадают. Вычтем из второго первый, получим

$$(p_n - r_n)\Delta_{n-1} + (p_{n-1} - r_{n-1})a_{n-1,n}\Delta_{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + (p_2 - r_2)a_{n-1,n}\cdots a_{23}\Delta_1 + (p_1 - r_1)a_{n-1,n}\cdots a_{12} = 0.$$

Слева стоит многочлен от λ степени не выше $n-1$, справа нуль, следовательно, все коэффициенты при λ^{i-1}, где $i = 1,\ldots,n$, равны нулю. Поскольку коэффициент при λ^{n-1} равен нулю, а среди многочленов $\Delta_1,\ldots,\Delta_{n-1}$ лишь многочлен Δ_{n-1} имеет степень $n-1$, т.е. содержит одночлен λ^{n-1}, то коэффициент при Δ_{n-1} равен нулю, следовательно, $p_n = r_n$. Далее будем рассуждать аналогичным образом. Из того, что все $a_{k,k+1} \neq 0$ и все многочлены Δ_i имеют разную степень, получим, что $p_i = r_i$ для всех $i = 1,\ldots,n$. Лемма доказана.

Доказательство леммы 1. Поскольку $S_1 = \left\| \begin{array}{c} e_1^* \\ \hline Q \end{array} \right\|$, то $QS_1^{-1} = \| \; 0 \;\; | \;\; I \; \| \in M_{n-1,n}$, $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, $I \in M_{n-1}$. Поэтому $AS_1^{-1} = \left\| \begin{array}{c} Q \\ \hline * \end{array} \right\| \cdot S_1^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline \multicolumn{2}{c}{* \; * \; *} \end{array} \right\|$. Поскольку $S_1 = \left\| \begin{array}{c|c} Q' & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{* \; * \; *} \end{array} \right\|$, то $S_1AS_1^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} Q' & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{* \; * \; *} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline \multicolumn{2}{c}{* \; * \; *} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & Q' \\ \hline \multicolumn{2}{c}{* \; * \; *} \end{array} \right\|$. Лемма доказана.

Матрица A_1 из леммы 1 имеет вид матрицы A из (4) (все элементы выше наддиагонали равны нулю, наддиагональ состоит из ненулевых элементов). Вычеркнем в матрице A_1 последнюю строку и припишем сверху первую строку e_1^*. Получим матрицу S_2. Построим матрицу $A_2 = S_2A_1S_2^{-1} = S_2S_1AS_1^{-1}S_2^{-1}$ и применим лемму 1. В результате "несущий блок" снова сдвинется по диагонали вправо вниз, характеристический многочлен не изменится, матрица A_2 будет иметь вид $A_2 = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & Q_1' \\ \hline \multicolumn{2}{c}{* \; * \; *} \end{array} \right\|$; здесь $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, а матрица $Q_1' \in M_{n-1}$ получена из матрицы S_2 вычеркиванием последней строки и последнего столбца. Применив $n-1$ раз лемму 1, мы придем к матрице $A_{n-1} = S_{n-1}\cdots S_1AS_1^{-1}\cdots S_{n-1}^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline \multicolumn{2}{c}{* \; * \; *} \end{array} \right\|$, $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, $I \in M_{n-1}$, причем $\chi(A_{n-1};\lambda) = \chi(A;\lambda)$. Следовательно, в последней строке матрицы A_{n-1} стоят коэффициенты α_i характеристического многочлена матрицы A, и матрица A_{n-1} является сопровождающей матрицей для многочлена $\chi(A;\lambda)$. Обозначим $\widetilde{A} = SAS^{-1}$, где $S = S_{n-1}\cdots S_1$, и $\varphi = (-\alpha_n, -\alpha_{n-1},\ldots,-\alpha_1) \in \mathbb{R}^{n*}$. Тогда справедлива

Лемма 3. *Матрица* $\widetilde{A}$ *имеет вид*

$$\widetilde{A} = J_1 + e_n\varphi. \tag{8}$$

Построим теперь матрицы $\widetilde{B} := SB$, $\widetilde{C}^* = C^*S^{-1}$. Имеем

$$\chi(A + BUC^*;\lambda) = \chi(S(A + BUC^*)S^{-1};\lambda) = \chi(\widetilde{A} + \widetilde{B}U\widetilde{C}^*;\lambda). \tag{9}$$

Далее воспользуемся следующей леммой, доказательство которой будет приведено ниже.

Лемма 4. *Пусть* $\widetilde{A}$ *имеет вид (8),* $D \in M_n$ *:*

$$D = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline F & 0 \end{array} \right\|, \quad F \in M_{n-p+1,p}; \tag{10}$$

здесь $p \in \{1,\ldots,n\}$. *Пусть* $\chi(\widetilde{A} + D;\lambda) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n$. *Тогда* $\gamma_i = \alpha_i - \mathrm{Sp}(DJ_{i-1}G)$ *для всех* $i = 1,\ldots,n$.

В силу того что матрица S нижняя треугольная, матрицы $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ имеют такой же вид, как и матрицы B и C, т.е. первые $p-1$ строк матрицы $\widetilde{B}$ и последние $n-p$ строк матрицы $\widetilde{C}$ нулевые. Отсюда следует, что матрица $\widetilde{B}U\widetilde{C}^*$ имеет вид (10) матрицы D, т.е. блочный вид $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \end{Vmatrix}$, где правый верхний угловой элемент матрицы F находится на главной диагонали. Тогда из леммы 4 следует, что если $\chi(\widetilde{A}+\widetilde{B}U\widetilde{C}^*;\lambda) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1}+\ldots+\gamma_n$, то для всех $i=1,\ldots,n$ выполнены равенства

$$\gamma_i = \alpha_i - \mathrm{Sp}(\widetilde{B}U\widetilde{C}^*J_{i-1}G) = \alpha_i - \mathrm{Sp}(SBUC^*S^{-1}J_{i-1}G).$$

В силу равенства (9) будут выполнены равенства (5), и доказательство теоремы 1 тем самым завершено. Остается доказать лемму 4.

4. Доказательство леммы 4. Докажем предварительно вспомогательное утверждение.

Лемма 5. *Пусть даны две матрицы*

$$H_1, H_2 \in M_n: \quad H_1 = \left\|\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline H & 0 \\ \hline \xi & 0 \end{array}\right\|, \quad H_2 = \left\|\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & H & 0 \end{array}\right\|,$$

где $H = \begin{Vmatrix} h_{p1} & \ldots & h_{pp} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n-1,1} & \ldots & h_{n-1,p} \end{Vmatrix} \in M_{n-p,p}$, $\xi = (h_{n1},\ldots,h_{np}) \in \mathbb{R}^{p*}$, $p \in \{1,\ldots,n-1\}$. *Тогда*

$$\mathrm{Sp}(H_1J_sG) = \mathrm{Sp}(H_2J_sG) \quad \textit{для всех} \quad s=0,\ldots,n-p-1, \tag{11}$$

$$\mathrm{Sp}(H_1J_sG) = \mathrm{Sp}(H_2J_sG) + \sum_{i=p}^{n} \alpha_{n-i}h_{i,n-s} \quad \textit{для всех} \quad s=n-p,\ldots,n-1, \tag{12}$$

т.е.

$$\begin{gathered} \mathrm{Sp}(H_1J_0G) = \mathrm{Sp}(H_2J_0G), \ \ldots, \ \mathrm{Sp}(H_1J_{n-p-1}G) = \mathrm{Sp}(H_2J_{n-p-1}G), \\ \mathrm{Sp}(H_1J_{n-p}G) = \mathrm{Sp}(H_2J_{n-p}G) + (\alpha_0h_{np}+\alpha_1h_{n-1,p}+\ldots+\alpha_{n-p}h_{pp}), \\ \mathrm{Sp}(H_1J_{n-p+1}G) = \mathrm{Sp}(H_2J_{n-p+1}G) + (\alpha_0h_{n,p-1}+\alpha_1h_{n-1,p-1}+\ldots+\alpha_{n-p}h_{p,p-1}), \ \ldots, \\ \mathrm{Sp}(H_1J_{n-1}G) = \mathrm{Sp}(H_2J_{n-1}G) + (\alpha_0h_{n1}+\alpha_1h_{n-1,1}+\ldots+\alpha_{n-p}h_{p1}). \end{gathered} \tag{13}$$

Доказательство. Представим матрицу H_1 в виде суммы $H_1 = H'+H''$, где матрицы $H' = \left\|\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline H & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right\|$, $H'' = \left\|\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \xi & 0 \end{array}\right\|$. Тогда $\mathrm{Sp}(H_1J_sG) = \mathrm{Sp}(H'J_sG) + \mathrm{Sp}(H''J_sG)$. Найдем сначала $\mathrm{Sp}(H''J_sG)$. Заметим, что $J_k^*e_i = e_{k+i}$ при $k+i \le n$ и $J_k^*e_i = 0 \in \mathbb{R}^n$ при $k+i>n$, а также, что $\mathrm{Sp}(e_ie_j^*) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера. Матрицу H'' можно представить в виде $H'' = \sum_{j=1}^p h_{nj}e_ne_j^*$. Имеем

$$\mathrm{Sp}(H''J_sG) = \mathrm{Sp}(GH''J_s) = \mathrm{Sp}\bigg(\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_kJ_k^*\sum_{j=1}^{p}h_{nj}e_ne_j^*J_s\bigg) =$$

$$= \mathrm{Sp}\bigg(\sum_{j=1}^{p}h_{nj}\bigg(\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_kJ_k^*e_n\bigg)(e_j^*J_s)\bigg) = \mathrm{Sp}\bigg(\sum_{j=1}^{p}h_{nj}\alpha_0e_ne_{j+s}^*\bigg) =: \varkappa_1.$$

Если $s \le n-p-1$, то $j+s \le n-1$, поскольку $j \le p$. Поэтому $\mathrm{Sp}(e_ne_{j+s}^*) = 0$ для любого $j \le p$, следовательно, $\varkappa_1 = 0$. Если $s \in \{n-p,\ldots,n-1\}$, то $j+s$ совпадает с n при $j=n-s$, а при остальных $j \in \{1,\dots,p\}\setminus\{n-s\}$ имеем $\mathrm{Sp}(e_n e_{j+s}^*)=0$. Поэтому $\varkappa_1 = h_{n,n-s}\alpha_0$. Таким образом,

$$\mathrm{Sp}(H''J_sG)=0 \quad \text{для всех} \quad s=0,\dots,n-p-1, \tag{14}$$

$$\mathrm{Sp}(H''J_sG)=h_{n,n-s}\alpha_0 \quad \text{для всех} \quad s=n-p,\dots,n-1. \tag{15}$$

Рассмотрим теперь матрицы H_2 и H'. Матрицу H' можно представить в виде

$$H'=\sum_{i=p}^{n-1}\sum_{j=1}^{p} h_{ij}P_{ij},$$

где $P_{ij}=e_ie_j^*$, а

$$H_2=\sum_{i=p}^{n-1}\sum_{j=1}^{p} h_{ij}P_{i+1,j+1}.$$

Выясним, как будут отличаться $\mathrm{Sp}(P_{ij}J_sG)$ и $\mathrm{Sp}(P_{i+1,j+1}J_sG)$ для различных s. Имеем

$$\varkappa_2 := \mathrm{Sp}(P_{ij}J_sG)=\mathrm{Sp}(GP_{ij}J_s)=\mathrm{Sp}\biggl(\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k J_k^* e_i e_j^* J_s\biggr)=\mathrm{Sp}\biggl(\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k e_{k+i}e_{j+s}^*\biggr)=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\delta_{k+i,j+s}.$$

Если $s\in\{0,\dots,i-j-1\}$, то $j+s<i\le k+i$, следовательно, $\varkappa_2=0$. Если $s\in\{i-j,\dots,n-j\}$, то $0\le s-i+j\le n-i\le n-1$. Тогда равенство $k+i=j+s$ выполняется при $k=s-i+j$, поэтому $\varkappa_2=\alpha_{s-i+j}$. Если $s\in\{n-j+1,\dots,n-1\}$, то $j+s>n$, следовательно, $e_j^*J_s=0$, поэтому $\varkappa_2=0$. Далее,

$$\varkappa_3 := \mathrm{Sp}(P_{i+1,j+1}J_sG)=\mathrm{Sp}(GP_{i+1,j+1}J_s)=\mathrm{Sp}\biggl(\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k J_k^* e_{i+1} e_{j+1}^* J_s\biggr)=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\delta_{k+i+1,j+s+1}.$$

Если $s\in\{0,\dots,i-j-1\}$, то $j+s+1<i+1\le k+i+1$, следовательно, $\varkappa_3=0$. Если $s\in\{i-j,\dots,n-j-1\}$, то $0\le s-i+j\le n-i-1\le n-1$. Тогда равенство $k+i+1=j+s+1$ выполняется при $k=s-i+j$, поэтому $\varkappa_3=\alpha_{s-i+j}$. Если $s\in\{n-j,\dots,n-1\}$, то $j+s+1>n$, следовательно, $e_{j+1}^*J_s=0$, поэтому $\varkappa_3=0$. Итак, мы имеем

$$\begin{gathered}
\mathrm{Sp}(P_{ij}J_sG)=\mathrm{Sp}(P_{i+1,j+1}J_sG)=0, \quad s\in\{0,\dots,i-j-1\},\\
\mathrm{Sp}(P_{ij}J_sG)=\mathrm{Sp}(P_{i+1,j+1}J_sG)=\alpha_{s-i+j}, \quad s\in\{i-j,\dots,n-j-1\},\\
\mathrm{Sp}(P_{ij}J_sG)=\alpha_{n-i}, \quad \mathrm{Sp}(P_{i+1,j+1}J_sG)=0, \quad s=n-j,\\
\mathrm{Sp}(P_{ij}J_sG)=\mathrm{Sp}(P_{i+1,j+1}J_sG)=0, \quad s\in\{n-j+1,\dots,n-1\}.
\end{gathered} \tag{16}$$

Таким образом, $\mathrm{Sp}(P_{ij}J_sG)$ и $\mathrm{Sp}(P_{i+1,j+1}J_sG)$ отличаются только при $s=n-j$.

Пусть $s\in\{0,\dots,n-p-1\}$. Тогда для всех $j\in\{1,\dots,p\}$ имеем $s\le n-p-1\le n-j-1$. В силу первых двух строк из (16) имеем

$$\sum_{i=p}^{n-1}\sum_{j=1}^{p} h_{ij}\,\mathrm{Sp}(P_{ij}J_sG)=\sum_{i=p}^{n-1}\sum_{j=1}^{p} h_{ij}\,\mathrm{Sp}(P_{i+1,j+1}J_sG),$$

следовательно, $\mathrm{Sp}(H'J_sG)=\mathrm{Sp}(H_2J_sG)$, и с учетом (14) получаем (11).

Пусть теперь $s\in\{n-p,\dots,n-1\}$. Значение $s=n-j$ попадает в этот промежуток, когда j пробегает от 1 до p. В силу (16) имеем

$$\sum_{j=1}^{p} h_{ij}\,\mathrm{Sp}(P_{ij}J_sG)=\sum_{j=1}^{p} h_{ij}\,\mathrm{Sp}(P_{i+1,j+1}J_sG)+h_{i,n-s}\alpha_{n-i} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{i=p}^{n-1}\sum_{j=1}^{p} h_{ij}\,\mathrm{Sp}(P_{ij}J_sG) = \sum_{i=p}^{n-1}\sum_{j=1}^{p} h_{ij}\,\mathrm{Sp}(P_{i+1,j+1}J_sG) + \sum_{i=p}^{n-1} h_{i,n-s}\alpha_{n-i}.$$

Отсюда следует, что $\mathrm{Sp}(H'J_sG) = \mathrm{Sp}(H_2J_sG) + \sum_{i=p}^{n-1} h_{i,n-s}\alpha_{n-i}$. Сложив последнее равенство и равенство (15), получим равенство (12). Лемма 5 доказана.

Продолжим доказательство леммы 4. Рассмотрим номер k строки, в которой находится правый верхний угловой элемент левого нижнего блока F матрицы D. Проведем доказательство индукцией по k, изменяющемуся от n до 1. База индукции: пусть $k = n$. Тогда $D = \left\|\begin{array}{c} 0 \\ \hline \eta \end{array}\right\|$, $\eta = (d_{n1}, \ldots, d_{nn}) \in \mathbb{R}^{n*}$, следовательно,

$$\chi(\widetilde{A} + D; \lambda) = \lambda^n + (\alpha_1 - d_{nn})\lambda^{n-1} + \ldots + (\alpha_n - d_{n1}).$$

Отсюда имеем $\gamma_i = \alpha_i - d_{n,n-i+1}$. Далее для всех $i = 1, \ldots, n$

$$\mathrm{Sp}(DJ_{i-1}G) = \mathrm{Sp}(GDJ_{i-1}) = \mathrm{Sp}\Big(\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k J_k^* \sum_{j=1}^{n} d_{nj}e_ne_j^*J_{i-1}\Big) =$$

$$= \mathrm{Sp}\Big(\sum_{j=1}^{n} d_{nj}\Big(\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k J_k^* e_n\Big)(e_j^*J_{i-1})\Big) = \mathrm{Sp}\Big(\sum_{j=1}^{n} d_{nj}\alpha_0 e_n e_{j+i-1}^*\Big) = \sum_{j=1}^{n} d_{nj}\delta_{n,j+i-1} = d_{n,n-i+1}.$$

База доказана. Предположение индукции: пусть утверждение леммы верно для любого $k \in \{p+1, \ldots, n\}$. Докажем, что оно справедливо и для $k = p$. Рассмотрим матрицу D из (10). В силу предположения индукции $p < n$. Введем следующие обозначения: $L = \left\|\begin{array}{ccc} d_{p1} & \ldots & d_{pp} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n-1,1} & \ldots & d_{n-1,p}\end{array}\right\| \in M_{n-p,p}$, $\sigma = (d_{n1}, \ldots, d_{np}) \in \mathbb{R}^{p*}$, $\psi = (d_{n1}, \ldots, d_{np}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n*}$.

Тогда $D = \left\|\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline L & 0 \\ \hline \sigma & 0 \end{array}\right\|$. Представим D в виде $D = D' + D''$, где $D' = \left\|\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline L & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right\|$, $D'' = \left\|\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \sigma & 0 \end{array}\right\|$. Пусть $\widetilde{D} := J_1^*D = \left\|\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ L & 0 \end{array}\right\| \in M_n$, $\widehat{D} := \widetilde{D}J_1 = \left\|\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & L & 0 \end{array}\right\| \in M_n$.

Далее положим $K := \left\|\begin{array}{c} 0 \\ \hline \varphi \end{array}\right\| \in M_n$, где $\varphi = (-\alpha_n, \ldots, -\alpha_1) \in \mathbb{R}^{n*}$. Тогда $\widetilde{A} = J_1 + K$. Матрица $\widetilde{A} + D$ является матрицей вида (4). Построим для матрицы $\widetilde{A} + D$ матрицу T так же, как строили для матрицы A матрицу S_1 : вычеркнем из $\widetilde{A} + D$ последнюю строку и припишем сверху первую строку e_1^*. Тогда $T = I + \widetilde{D} = \left\|\begin{array}{cc} I_p & 0 \\ L & I_{n-p} \end{array}\right\|$, $I_p \in M_p$, $I_{n-p} \in M_{n-p}$. Отсюда следует, что $T^{-1} = I - \widetilde{D}$. Умножим на матрицу $(\widetilde{A} + D)$ справа матрицу T^{-1}, а слева – матрицу T. Имеем $(\widetilde{A} + D)T^{-1} = (\widetilde{A} + D)(I - \widetilde{D}) = \widetilde{A} + D - \widetilde{A}\widetilde{D} - D\widetilde{D}$. В матрице $\widetilde{D}$ первые p строк нулевые, а в матрице D последние $n - p$ столбцов нулевые, поэтому $D\widetilde{D} = 0$. Далее $\widetilde{A}\widetilde{D} = (J_1 + K)\widetilde{D} = J_1\widetilde{D} + K\widetilde{D}$, но $J_1\widetilde{D} = D'$, поэтому $D - \widetilde{A}\widetilde{D} = D - D' - K\widetilde{D} = D'' - K\widetilde{D}$. Таким образом, $(\widetilde{A} + D)T^{-1} = \widetilde{A} + D'' - K\widetilde{D} = \widetilde{A} + K_1$, где $K_1 = \left\|\begin{array}{c} 0 \\ \hline \zeta \end{array}\right\| \in M_n$, $\zeta = \psi - \varphi\widetilde{D} \in \mathbb{R}^{n*}$. Далее,

$$T(\widetilde{A} + D)T^{-1} = (I + \widetilde{D})(\widetilde{A} + K_1) = \widetilde{A} + K_1 + \widetilde{D}\widetilde{A} + \widetilde{D}K_1.$$

Поскольку $p < n$, последний столбец матрицы $\widetilde{D}$ нулевой, а так как в матрице K_1 первые $n - 1$ строк нулевые, то $\widetilde{D}K_1 = 0$. Далее, $\widetilde{D}\widetilde{A} = \widetilde{D}(J_1 + K) = \widetilde{D}J_1 + \widetilde{D}K$. Имеем $\widetilde{D}J_1 = \widehat{D}$ и

$\widetilde{D}K=0$, поскольку в матрице K первые $n-1$ строк нулевые. Таким образом, $T(\widetilde{A}+D)T^{-1}=$ $=\widetilde{A}+K_1+\widehat{D}$. Обозначим $\widehat{A}:=\widetilde{A}+K_1$. Тогда

$$T(\widetilde{A}+D)T^{-1}=\widehat{A}+\widehat{D}.$$

Далее, $\widehat{A}=J_1+K+K_1$, т.е. матрица $\widehat{A}$ имеет такой же вид, как и матрица $\widetilde{A}$, отличаясь лишь последней строкой. Пусть $\widehat{\varphi}=(-\widehat{\alpha}_n,\ldots,-\widehat{\alpha}_1)\in\mathbb{R}^{n*}$ – последняя строка матрицы $\widehat{A}$. Тогда $\widehat{\varphi}=\varphi+\zeta=\varphi+\psi-\varphi\widetilde{D}$. Умножив обе части последнего равенства на -1, получим $-\widehat{\varphi}=-\varphi-\psi+\varphi\widetilde{D}$. Запишем это равенство покоординатно, начиная с последней координаты. Получим

$$\widehat{\alpha}_1=\alpha_1,\ \ldots,\ \widehat{\alpha}_{n-p}=\alpha_{n-p},$$

$$\widehat{\alpha}_{n-p+1}=\alpha_{n-p+1}-d_{np}-\alpha_1 d_{n-1,p}-\ldots-\alpha_{n-p}d_{pp}=\alpha_{n-p+1}-\sum_{i=p}^{n}\alpha_{n-i}d_{ip},\quad\ldots,\tag{17}$$

$$\widehat{\alpha}_n=\alpha_n-d_{n1}-\alpha_1 d_{n-1,1}-\alpha_2 d_{n-2,1}-\ldots-\alpha_{n-p}d_{p1}=\alpha_n-\sum_{i=p}^{n}\alpha_{n-i}d_{i1}.$$

Пусть $\lambda^n+\gamma_1\lambda^{n-1}+\ldots+\gamma_n:=\chi(\widetilde{A}+D;\lambda)$. Матрицы $\widetilde{A}+D$ и $\widehat{A}+\widehat{D}$ подобны, поэтому $\chi(\widehat{A}+\widehat{D};\lambda)=\chi(\widetilde{A}+D;\lambda)$. По предположению индукции утверждение леммы 4 справедливо для матрицы $\widehat{A}+\widehat{D}$, поскольку правый верхний угловой элемент левого нижнего блока $\|\,0\quad L\,\|$ матрицы $\widehat{D}$ лежит на диагонали в $(p+1)$-й строке. Следовательно, имеют место равенства

$$\gamma_1=\widehat{\alpha}_1-\mathrm{Sp}(\widehat{D}J_0G),\ \ldots,\ \gamma_n=\widehat{\alpha}_n-\mathrm{Sp}(\widehat{D}J_{n-1}G).\tag{18}$$

Матрица D имеет вид матрицы H_1, а $\widehat{D}$ имеет вид матрицы H_2 из леммы 5. Поэтому в силу (13) имеют место равенства

$$\mathrm{Sp}(DJ_0G)=\mathrm{Sp}(\widehat{D}J_0G),\ \ldots,\ \mathrm{Sp}(DJ_{n-p-1}G)=\mathrm{Sp}(\widehat{D}J_{n-p-1}G),$$

$$\mathrm{Sp}(DJ_{n-p}G)=\mathrm{Sp}(\widehat{D}J_{n-p}G)+(\alpha_0 d_{np}+\alpha_1 d_{n-1,p}+\ldots+\alpha_{n-p}d_{pp}),\quad\ldots,\tag{19}$$

$$\mathrm{Sp}(DJ_{n-1}G)=\mathrm{Sp}(\widehat{D}J_{n-1}G)+(\alpha_0 d_{n1}+\alpha_1 d_{n-1,1}+\ldots+\alpha_{n-p}d_{p1}).$$

Подставив (17), (19) в (18), получим

$$\gamma_1=\widehat{\alpha}_1-\mathrm{Sp}(\widehat{D}J_0G)=\alpha_1-\mathrm{Sp}(DJ_0G),\quad\ldots,$$

$$\gamma_{n-p}=\widehat{\alpha}_{n-p}-\mathrm{Sp}(\widehat{D}J_{n-p-1}G)=\alpha_{n-p}-\mathrm{Sp}(DJ_{n-p-1}G),$$

$$\gamma_{n-p+1}=\widehat{\alpha}_{n-p+1}-\mathrm{Sp}(\widehat{D}J_{n-p}G)=\Big(\alpha_{n-p+1}-\sum_{i=p}^{n}\alpha_{n-i}d_{ip}\Big)-\Big(\mathrm{Sp}(DJ_{n-p}G)-\sum_{i=p}^{n}\alpha_{n-i}d_{ip}\Big)=$$

$$=\alpha_{n-p+1}-\mathrm{Sp}(DJ_{n-p}G),\quad\ldots,$$

$$\gamma_n=\widehat{\alpha}_n-\mathrm{Sp}(\widehat{D}J_{n-1}G)=\Big(\alpha_n-\sum_{i=p}^{n}\alpha_{n-i}d_{i1}\Big)-\Big(\mathrm{Sp}(DJ_{n-1}G)-\sum_{i=p}^{n}\alpha_{n-i}d_{i1}\Big)=$$

$$=\alpha_n-\mathrm{Sp}(DJ_{n-1}G).$$

Лемма 4 доказана.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты 06-01-00258, 09-01-403).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонов Г.А., Шумафов М.М.* Методы стабилизации линейных управляемых систем. СПб., 2005.
2. Справочник по теории автоматического регулирования / Под ред. Красовского А.А. М., 1987.
3. *Попов В.М.* Гиперустойчивость автоматических систем. М., 1970.
4. *Wonham W.M.* On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems // IEEE Trans. on Automat. Control. 1967. V. AC-12. № 6. P. 660–665.
5. *Зайцев В.А.* Об управлении характеристическими показателями Ляпунова стационарной системы с наблюдателем // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 6. С. 855–856.
6. *Зайцев В.А.* Модальное управление линейным дифференциальным уравнением с неполной обратной связью // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 1. С. 133–135.

Удмуртский государственный университет,
г. Ижевск

Поступила в редакцию
01.10.2007 г.