

УДК: 524—32

ДИНАМИКА ОСОБОЙ СФЕРОИДАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ОДНОРОДНЫХ ЗВЕЗДНЫХ СИСТЕМ. I. СТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Б. П. КОНДРАТЬЕВ

Поступила 17 октября 1988

Принята к печати 23 марта 1989

Исследована бесстолкновительная стационарная модель однородного гравитирующего сфероида с неэллипсоидальной фазовой функцией. Модель может иметь один или два свободных параметра. Выяснено, что в пространстве скоростей модель представлена поверхностью четвертого порядка с геометрическими местами особых точек. Для вычисления характеристик модели все семейство частиц разделено на восемь составляющих с соответствующими функциями распределения. Однопараметрическая модель имеет нелинейное бароклинное вращение, причем поверхности равной угловой скорости схожи с наблюдаемыми в галактиках. Получены выражения для компонентов тензора дисперсии скоростей и тензора моментов скоростей третьего порядка. Выяснено, что последние не являются независимыми, поскольку выражаются через компоненты тензоров первого и второго порядков.

1. *Введение.* Центральной идеей теории, развитой в работах [1—4], явилось представление изучаемой модели—трехосного бесстолкновительного эллипсоида—многомерным эллипсоидом в фазовом пространстве координат и скоростей движущихся частиц. Следуя ей, было найдено общее решение в проблеме движения однородных гравитирующих систем. Однако оказывается, что кроме общего существует и особое решение данной проблемы, которое нельзя получить из общего ни при каких обстоятельствах. Об этом особом решении и будет идти ниже речь.

Для выявления предпосылок существования особого решения вначале следует напомнить те предположения, из которых мы исходили при поиске общего решения.

а) Внутреннее поле скоростей центроидов $\vec{u}(t, \vec{x})$ линейно зависит от координат.

б) Компоненты тензора дисперсии скоростей должны иметь вид

$$\sigma_{ij}(t, \vec{x}) = \sigma_{ij}^0(t) \cdot \left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} \right). \quad (1)$$

Поэтому внутри фигуры модели поверхности равных напряжений образуют семейство подобных эллипсоидов, причем на границе системы все напряжения обращаются в нуль.

в) Все нечетные центральные моменты от фазовой функции $f(t, \vec{x}, \vec{x})$, в частности, компоненты тензора скоростей третьего порядка

$$\sigma_{ijk} = \frac{1}{\rho} \int f(\dot{x}_i - u_i)(\dot{x}_j - u_j)(\dot{x}_k - u_k) d^3x \quad (2)$$

должны быть равны нулю. В силу этого ограничения на фазовую плотность, цепочка моментных уравнений звездной гидродинамики естественно замыкается на уравнениях уже третьего порядка.

Общее решение приводит к моделям, которые мы назовем моделями псевдогидродинамического типа. При этом имеется в виду замечательная аналогия между такими бесстолкновительными фигурами с одной стороны, и жидкими гравитирующими эллипсоидами Дирихле—с другой [5—6].

Теперь, если мы хотим искать особое решение в указанной проблеме, следует обратить внимание на то, что вышеизложенные ограничения являются обязательными только для трехосного, геометрически невырожденного бесстолкновительного эллипсоида. Для сфероидальных же, например, моделей следование столь жестким ограничениям может привести к потере особого решения. В самом деле, совсем не обязательно, чтобы на поверхности бесстолкновительного сфероида обращался в нуль азимутальный компонент дисперсии скоростей $\sigma_{\varphi\varphi}$. Более того, с кинематической точки зрения нет запрета на существование у модели бесстолкновительного сфероида и некоторых компонентов тензора (2) (например, $\sigma_{\varphi\varphi\varphi}$). Однако это только кинематические соображения. С динамической же точки зрения не ясен ответ даже на такой принципиально важный вопрос: может ли модель с отличными от нуля моментами скоростей третьего порядка колебаться, оставаясь при этом всегда сфероидом (не обязательно сжатым!), или это будет фигура с поверхностью третьего (или еще более высокого) порядка.

Подобные вопросы требуют углубленного анализа, а их решение имеет важное значение для дальнейшего развития теории колебаний звездных систем.

Итак, на данном этапе у нас есть основания подозревать, что на границе области существования общего решения (там, где эллипсоид вырождается в сфероид) скрывается особое решение задачи. Для прояснения ситуации обратимся к одной модели бесстолкновительного однородного сфероида явно не гидродинамического типа. Эта модель стоит особняком среди однородных моделей звездных систем. Неполно изучены даже ее стационарные состояния [7—8], а задача о ее нелинейных колебаниях вообще не ставилась. Из-за большого объема всю работу пришлось разбить на

две части. Предлагаемая статья представляет первую. В разделе 2 дана постановка задачи, а в разделе 3 исследована форма модели в фазовом пространстве. В разделах 4—6 тщательно исследуются различные характеристики модели. В заключении подводятся краткие итоги.

2. *Фазовые функции.* Напомним постановку задачи [7—8]. Исследуемая модель—это однородный, плотности ρ , сжатый или вытянутый вдоль оси x_3 сфероид

$$\frac{r^2}{a_1^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} \leq 1, \quad a_1 \geq a_3, \quad (3)$$

состоящий из звезд одинаковой массы, движение которых происходит в самосогласованном гравитационном потенциале

$$\Phi = J - A_1 r^2 - A_3 x_3^2. \quad (4)$$

Сразу ясно, что отдельные звезды (далее частицы) участвуют в двух независимых движениях: в экваториальной плоскости частица движется с час-

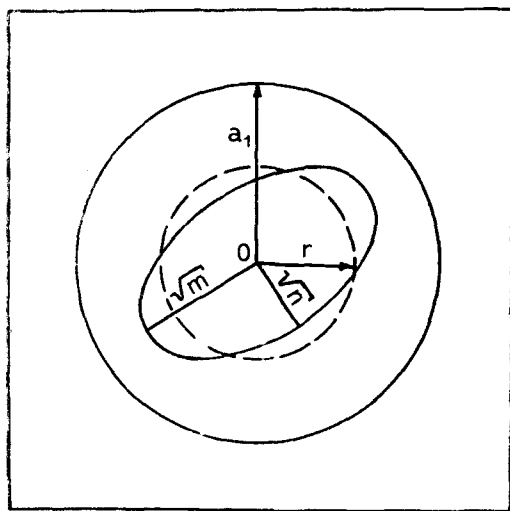


Рис. 1. Сечение эллиптического цилиндра, поверхность которого покрывает частица при движении, экваториальной плоскостью модели.

тотой $\sqrt{2A_1}$ по эллипсу с полуосями $\sqrt{m}$ и $\sqrt{n}$, центр которого совпадает с точкой на оси x_3 (рис. 1); вдоль же оси x_3 происходят гармонические колебания с частотой $\sqrt{2A_3}$. Интегралы движения

$$E_{\perp} = \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + A_1 r^2 = \frac{v_r^2 + v_{\varphi}^2}{2} + A_1 r^2,$$

$$E_3 = \frac{v_3^2}{2} + A_3 x_3^2,$$

$$L_3 = x_1 v_2 - x_2 v_1 = r \cdot v_\varphi. \quad (5)$$

Из первого и третьего выражений (5) следует формула

$$2E_\perp r^2 - L_3^2 - 2A_1 r^4 = v_r^2 \cdot r^2, \quad (6)$$

откуда при $v_r = 0$ получаются выражения для квадратов полуосей эллипса

$$m = \frac{E_\perp + \sqrt{E_\perp^2 - 2A_1 L_3^2}}{2A_1}, \quad n = \frac{E_\perp - \sqrt{E_\perp^2 - 2A_1 L_3^2}}{2A_1}. \quad (7)$$

Последние можно принять за интегралы взамен $E_\perp$ и L_3 .

В дальнейшем нам понадобятся выражения компонентов скорости частицы через интегралы m , n и E_3 :

$$v_\varphi = \pm \frac{\sqrt{2A_1}}{r} \sqrt{m \cdot n}, \quad v_r = \pm \frac{\sqrt{2A_1}}{r} \cdot \sqrt{(m - r^2)(r^2 - n)},$$

$$v_3 = \pm \sqrt{2(E_3 - A_3 x_3^2)}. \quad (8)$$

Случай $m = n$ вырождения эллипсов в круги рассматриваться не будет; соответствующая ему бесстолкновительная модель сфероида (см. [9]) является моделью псевдогидродинамического типа и ее колебания описываются выведенными в [1] уравнениями.

Задача заключается в нахождении самосогласованной функции модели $\vec{f}(\vec{x}, \vec{x})$ из интегрального уравнения

$$\rho = \int \vec{f}(\vec{x}, \vec{x}) d^3 \vec{x}. \quad (9)$$

Для получения физически разумного решения интегрального уравнения функцию распределения необходимо представить зависящей от трех интегралов движения частицы. С этой целью перейдем в (9) от переменных $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ к новым m, n, E_3 . Якобиан перехода легко находится

$$J\left(\frac{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3}{m, n, E_3}\right) = \frac{A_1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{m-n}{\sqrt{m \cdot n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{E_3 - A_3 x_3^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(m - r^2)(r^2 - n)}}. \quad (10)$$

Важно подчеркнуть деталь, на которую в [7—8] не обращалось должного внимания. Общей чертой всех однородных моделей является необходимость касания всеми частицами в процессе своего движения поверхности модели. Только при выполнении этого требования распределение вещества может быть однородным внутри граничной оболочки. В нашем случае условие касания находится элементарно и имеет вид

$$\frac{m}{a_1^2} + \frac{E_3}{A_3 a_3^2} = 1. \quad (11)$$

Таким образом, поиск решений уравнения (9), не опираясь на условие (11), вообще не правомерен.

Поскольку условие касания (11) связывает две переменные m и E_3 , для решения уравнения (9) нам надо знать пределы интегрирования только по двум переменным. А именно,

$$\alpha \leq \frac{E_3}{A_3 a_3^2} \leq \beta, \quad (12)$$

где

$$\alpha = \frac{x_3^2}{a_3^2}, \quad \beta = 1 - \frac{r^2}{a_1^2}, \quad (13)$$

и

$$0 \leq n \leq r^2. \quad (14)$$

Но указанная замена переменных для функции фазовой плотности приводит к некоторой потере информации о состоянии системы. Это видно из того, что выражения интегралов m , n и E_3 четны относительно компонентов вектора скорости v_φ , v_r , v_z и не чувствуют изменения знака последних. Такая потеря информации может привести к неверному вычислению большинства фазовых средних величин. Ввиду этого мы разделим все частицы модели на составляющие по признакам того или иного знака у каждого компонента скорости. Каждая из восьми составляющих будет описываться своей фазовой функцией $f_{rz}^{(\varphi)}$. Здесь

$$\begin{aligned} f_{rz}^{(1)} & \text{ при } v_\varphi > 0 \text{ и } f_{rz}^{(2)} \text{ при } v_\varphi < 0; \\ f_{1z}^{(\varphi)} & \text{ при } v_r > 0 \text{ и } f_{2z}^{(\varphi)} \text{ при } v_r < 0; \\ f_{r1}^{(\varphi)} & \text{ при } v_z > 0 \text{ и } f_{r2}^{(\varphi)} \text{ при } v_z < 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Запись индекса в буквенном виде означает суммирование по нему. Подчеркнем, что из восьми составляющих можно выделить только две подсистемы действительно разных частиц, отличающихся по знаку v_φ ; другие же составляющие образованы одними и теми же частицами и подсистемами не являются. Очевидно также, что любая из восьми фазовых функций $f_{rz}^{(\varphi)}$ зависит только от m , n и E_3 .

Сумма фазовых функций всех составляющих должна удовлетворять уравнению (9), которое в свете сказанного выше записывается в виде*

* $\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ 1 & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$

$$\rho \cdot \eta (\beta - \alpha) = \iiint f_{rz}^{(\varphi)}(E_3, m, n) \cdot J dE_3 dm dn. \quad (16)$$

Область интегрирования в уравнении (16) показана на рис. 2. Имеем [7]

$$f_{rz}^{(\varphi)} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \rho}{\pi^2 A_1 \sqrt{A_3}} \cdot \frac{a_1}{a_3} \frac{\sqrt{m}}{m - n} \cdot \delta \left[m - a_1^2 \left(1 - \frac{E_3}{A_3 a_3^2} \right) \right]. \quad (17)$$

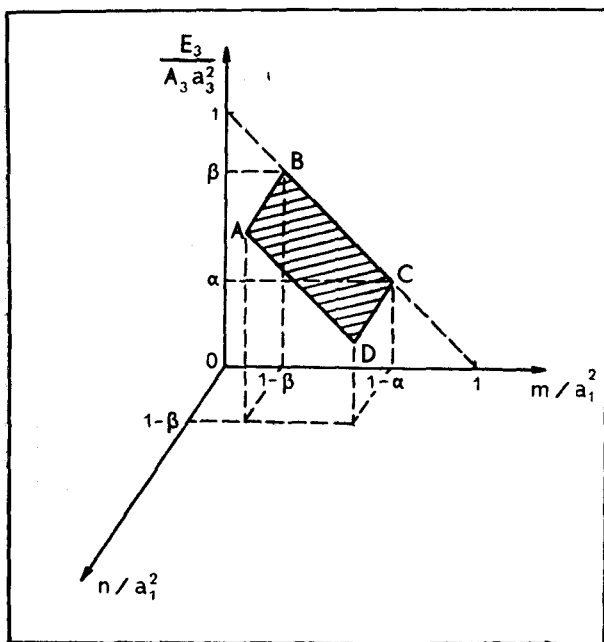


Рис. 2. Заштрихована область, занимаемая моделью в пространстве интегралов движения отдельной частицы.

Другие сочетания фазовых функций подсистем будут получены ниже.

Ось симметрии сфероида является особой линией; для частиц, проходящих через нее, $v_\varphi = 0$ (а значит и $n = 0$) и

$$f_{rz} = \frac{2\sqrt{2} \rho}{\pi^2 A_1 \sqrt{A_3}} \cdot \frac{a_1}{a_3} m^{-1/2}. \quad (18)$$

В частности, для постоянно находящихся на этой оси частиц $m = 0$, и фазовая функция стремится к бесконечности.

3. Форма модели в фазовом пространстве. Функция (17) явно не эллипсоидального типа, так что исследуемая модель заведомо не принадлежит семейству псевдогидродинамических фигур. Какой же в действительности представляется эта модель в фазовом пространстве?

Зная область, которую модель занимает в пространстве интегралов движения (рис. 2), в принципе можно было бы методом преобразований отобразить эту область на пространство скоростей (v_φ , v_r , v_z). Для реализации сказанного в практическом отношении более удобен следующий путь.

Условие вырождения (11) с учетом выражения для m из (7), после преобразований с учетом (5) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{v_\varphi^2}{2A_1a_1^2} \cdot \left(\beta - \alpha - \frac{v_z^2}{2A_3a_3^2} \right) = \\ & = \left(1 - \alpha - \frac{v_z^2}{2A_3a_3^2} \right) \cdot \left(\beta - \alpha - \frac{v_r^2}{2A_1a_1^2} - \frac{v_z^2}{2A_3a_3^2} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Уравнение (19) в пятимерном фазовом пространстве (r , x_3 , v_φ , v_r , v_z) задает поверхность четвертого порядка, на которой и находятся изображающие точки частиц модели. Плотность распределения изображающих точек на этой поверхности неравномерная.

Для наглядности изобразим интересующую нас поверхность в пространстве скоростей, зафиксировав координаты r и x_3 .

Рассекая фигуру (19) плоскостями $v_\varphi = \text{const}$, нельзя выходить из интервала

$$0 \leq \frac{v_\varphi^2}{2A_1a_1^2} \leq 1 - \alpha. \quad (20)$$

Здесь мы встречаемся с одной особенностью, которую необходимо пояснить. Для этого положим в (19) $v_r = 0$ и решим относительно $\frac{v_z^2}{2A_3a_3^2}$ квадратное уравнение; его решение содержит два знака, но только знак (—) не приводит к противоречию. Следовательно,

$$\frac{v_z^2}{2A_3a_3^2} = \begin{cases} \beta - \alpha, & \text{при } 0 \leq \frac{v_\varphi^2}{2A_1a_1^2} \leq 1 - \beta, \\ 1 - \alpha - \frac{v_\varphi^2}{2A_1a_1^2}, & \text{при } 1 - \beta < \frac{v_\varphi^2}{2A_1a_1^2} \leq 1 - \alpha. \end{cases} \quad (21)$$

В итоге находим семейство кривых четвертого порядка, вложенных в окружность с радиусом $\sqrt{\beta - \alpha}$ (рис. 3а).

При сечении исследуемой фигуры плоскостями $v_z = \text{const}$ обнаружим семейство софокусных эллипсов (рис. 3б). Так как

$$0 \leq \frac{v_z^2}{2A_3a_3^2} \leq \beta - \alpha, \quad (22)$$

при верхнем пределе получается геометрическое место особых точек между фокусами найденного семейства, заполняющих отрезок длиной $2\sqrt{1-\beta}$. Главные полуоси данного семейства эллипсов:

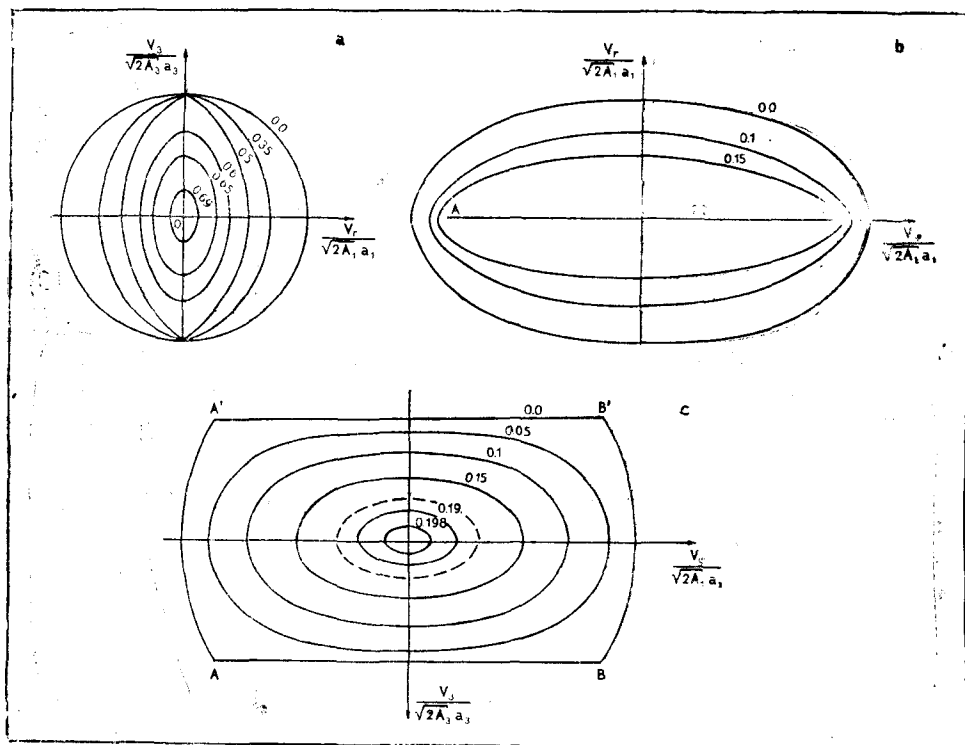


Рис. 3. Сечения фигуры, поверхность которой представляет собой область существования модели в пространстве скоростей. Для расчетов взято $\alpha = 0.3$ и $\beta = 0.5$. а) Плоскостями, параллельными осям $0v_z v_r$; цифрами обозначены контуры сечений при разных значениях $\frac{v_r^2}{2A_1 a_1^2}$. Внешний контур—окружность радиусом $\sqrt{\beta-\alpha}$; контур $\frac{v_r^2}{2A_1 a_1^2} = 1 - \beta$ представляет линзу с острыми краями (где производная терпит разрыв). б) Плоскостями, параллельными осям $0v_r v_z$; цифрами обозначены значения $\frac{v_z^2}{2A_3 a_3^2}$. Контур-семейство софокусных эллипсов, межфокусное расстояние AB равно $2\sqrt{1-\beta}$. в) То же самое плоскостями, параллельными осям $0v_z v_r$; цифрами даны значения $\frac{v_r^2}{2A_1 a_1^2}$. Внешний контур состоит из двух отрезков длиной $2\sqrt{1-\beta}$, соединенных дугами окружности с радиусом $\sqrt{1-\alpha}$.

$$\begin{aligned} \text{полуось вдоль } \frac{v_\varphi}{\sqrt{2A_1}a_1} \text{ равна } \left(1 - \alpha - \frac{v_3^2}{2A_3a_3^2}\right)^{1/2}; \\ \text{полуось вдоль } \frac{v_r}{\sqrt{2A_1}a_1} \text{ равна } \left(\beta - \alpha - \frac{v_3^2}{2A_3a_3^2}\right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Наконец, в сечениях плоскостями $v_r = \text{const}$, где

$$0 \leq \frac{v_r^2}{2A_1a_1^2} \leq \beta - \alpha, \quad (24)$$

получим контуры рис. 3с. Здесь для правильного воспроизведения внешнего контура, отвечающего случаю $v_r = 0$, следует предварительно записать (19) в виде

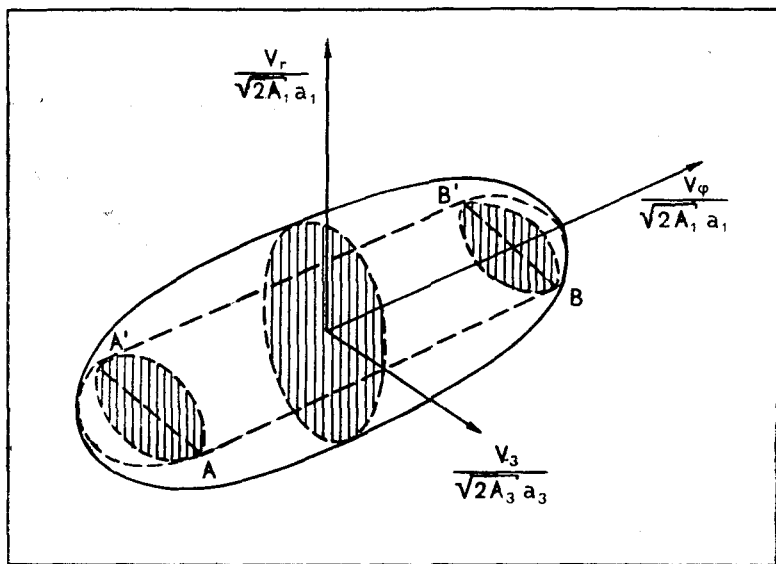


Рис. 4. Объемное изображение фигуры, показанной на рис. 3. По краям ее заштрихованы линзовидные сечения, посредине — окружность с радиусом $\sqrt{\beta - \alpha}$.

$$\begin{aligned} \frac{v_\varphi^2}{2A_1a_1^2} = \\ = \frac{\frac{v_3^2}{2A_3a_3^2} \left(\frac{v_3^2}{2A_3a_3^2} - 1 - \beta + 2\alpha + \frac{v_r^2}{2A_1a_1^2} \right) - (1 - \alpha) \frac{v_r^2}{2A_1a_1^2} + (1 - \alpha)(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha - \frac{v_3^2}{2A_3a_3^2}}, \end{aligned} \quad (25)$$

и затем учесть решения (21).

Внешний вид фигуры показан на рис. 4. Если все частицы вращаются в одну сторону, фигура разрезается пополам плоскостью (v_r, v_z) . Вероятность нахождения изображающей точки в разных местах на поверхности фигуры неодинакова.

4. *Поле скоростей центроидов.* Выше уже подчеркивалось, что из восьми составляющих можно выделить только две подсистемы действительно разных частиц. Следовательно, все четыре фазовые функции, имеющие одинаковый верхний индекс, описывают одну и ту же подсистему частиц и в силу этого должны быть равны между собой.

Рассуждая таким образом, мы приходим в итоге к важным равенствам

$$f_{11}^{(1)} = f_{12}^{(1)} = f_{21}^{(1)} = f_{22}^{(1)} = \frac{1}{4} f_{rz}^{(1)}; \quad (26)$$

$$f_{11}^{(2)} = f_{12}^{(2)} = f_{21}^{(2)} = f_{22}^{(2)} = \frac{1}{4} f_{rz}^{(2)}. \quad (27)$$

Опираясь на них, в принципе уже нетрудно будет вычислять и средние величины по ансамблю.

Начнем с нахождения компонентов поля скоростей центроидов. Имеем:

$$u_z(v_\varphi > 0) = \frac{1}{\rho_{rz}^{(1)}} \int v_z (f_{r1}^{(1)} - f_{r2}^{(1)}) d^3 \dot{x} = 0;$$

$$u_z(v_\varphi < 0) = \frac{1}{\rho_{rz}^{(2)}} \int v_z (f_{r1}^{(2)} - f_{r2}^{(2)}) d^3 \dot{x} = 0;$$

$$u_z(v_r > 0) = \frac{1}{\rho_{1z}^{(\varphi)}} \int v_z (f_{11}^{(\varphi)} - f_{12}^{(\varphi)}) d^3 \dot{x} = 0;$$

$$u_z(v_r < 0) = \frac{1}{\rho_{2z}^{(\varphi)}} \int v_z (f_{21}^{(\varphi)} - f_{22}^{(\varphi)}) d^3 \dot{x} = 0.$$

Очевидно, эти величины обращаются в нуль в силу равенства (26), (27). Ясно, что подобные же соотношения можно написать и для направления r . В итоге, для модели в целом будет

$$u_z = \frac{1}{\rho} \int v_z (f_{r1}^{(\varphi)} - f_{r2}^{(\varphi)}) d^3 \dot{x} = 0; \quad (28)$$

$$u_r = \frac{1}{\rho} \int v_r (f_{1z}^{(\varphi)} - f_{2z}^{(\varphi)}) d^3 \dot{x} = 0. \quad (29)$$

Переходя к вычислению азимутального компонента скорости, вначале рассмотрим вращение всех частиц в одном направлении (т. е. $f_{rz}^{(2)} = 0$)*:

* Такая модель имеет один параметр: отношение полуосей a_3/a_1 .

$$u_{\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{\sqrt{2A_1}}{r} \iiint V m n f_{rz}^{(1)} \cdot J dE_3 dm dn = \frac{2\sqrt{2A_1} a_1}{\pi^2} \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\frac{1-l}{(1-\alpha)(\beta-l)}} dl =$$

$$= \frac{4\sqrt{2A_1}}{\pi^2} a_1 \sqrt{1-\alpha} \cdot E\left(\frac{\pi}{2}; \sqrt{\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}}\right), \quad (30)$$

где для вычисления мы использовали формулы (8), (10), (17); α и β даны в (13), $E(\dots)$ — полный эллиптический интеграл 2-го рода.

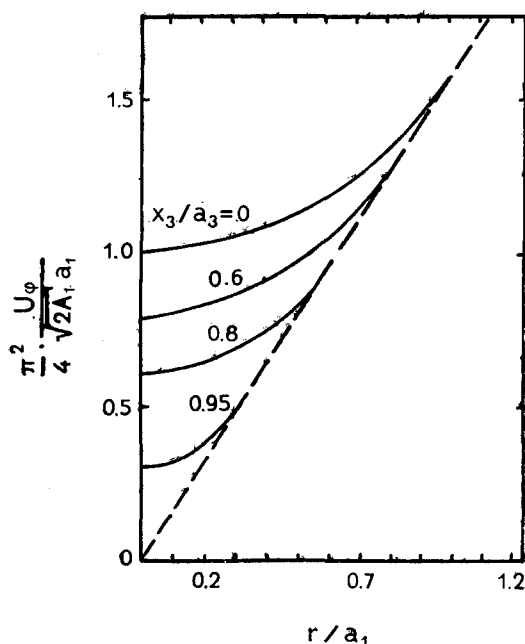


Рис. 5. Кривые вращения при разных $\frac{x_3}{a_3}$ для модели с $f_{rz}^{(2)} = 0$. Все кривые имеют одну касательную, что связано с твердотельным характером осредненного вращения поверхности модели. Причина неисчезновения вращения на оси x_3 объяснена в тексте.

Формула (30) задает дифференциальное вращение (рис. 5). Любопытно, что на поверхности модели угловая скорость вращения остается постоянной: при $\alpha = \beta$ из (30) следует $u_{\varphi} \sim \frac{r}{a_1}$; это видно также и из рис. 5, где кривые вращения при разных x_3 имеют одну касательную. Однако жесткость вращения граничной поверхности совсем не означает, что она состоит из одних и тех же частиц! Внутри же модели вращение является бароклинным, т. е. угловая скорость усредненных азимутальных движений за-

висит как от r , так и от x_3 . Представляет интерес выяснить—какими являются поверхности $\omega(r, x_3) = \text{const}$ внутри модели. Для этого сначала найдем величину

$$k = \left(\frac{\bar{n}}{m} \right) = \frac{1}{\rho} \int \frac{n}{m} f_{r_z}^{(\varphi)} \cdot J dE_3 dm dn = \frac{r/a_1}{2\sqrt{1-\alpha}}, \quad \left(0 \leq k \leq \frac{1}{2} \right), \quad (31)$$

позволяющую вычислить средний квадрат эксцентриситетов эллипсов всех орбит в произвольной точке (r, x_3)

$$e^2 = 1 - k, \quad \left(\frac{1}{2} \leq e^2 \leq 1 \right). \quad (32)$$

Очевидно, поверхности равного среднего эксцентриситета образуют семейство сфероидов (рис. 6)

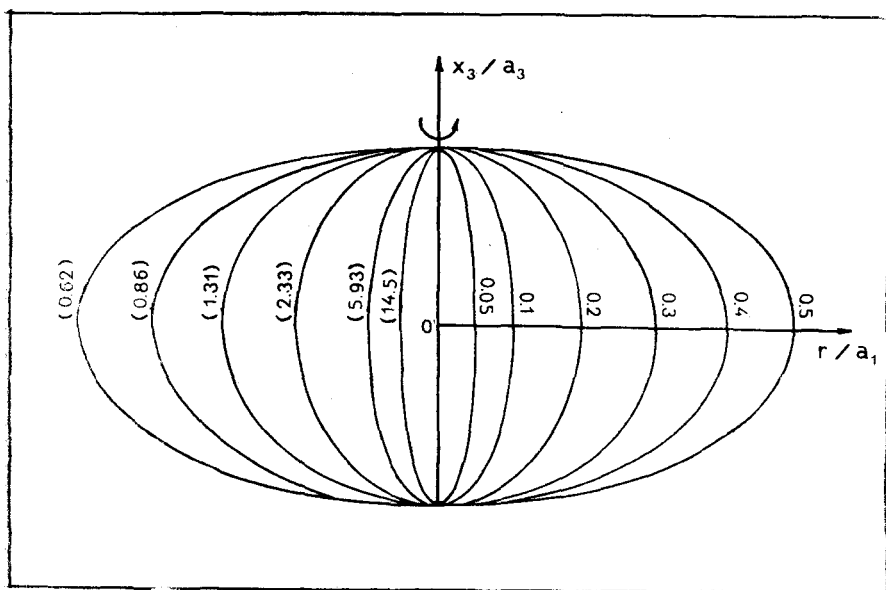


Рис. 6. Сечения поверхностей равного среднего эксцентриситета экваториальных разрезов орбит частиц; цифрами без скобок даны значения квадрата среднего эксцентриситета. Цифры в скобках — значения средней угловой скорости вращения центроидов, нормированной на фактор $\sqrt{\pi G \rho}$. Указанное относится только к модели с вращением частиц в одну сторону. Для вычислений взята модель сжатого сфероида с $a_3/a_1 = 0.5$.

$$\frac{r^2}{4a_1^2 k^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1. \quad (33)$$

Но так как угловая скорость в заданной точке выражается формулой

$$\omega(r, x_3) = \frac{2\sqrt{2A_1}}{\pi^2} k^{-1} \cdot E\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{1-4k^2}\right), \quad (34)$$

поверхности $\omega(r, x_3) = \text{const}$ совпадают с поверхностями равного среднего эксцентриситета на рис. 6.

Любопытно заметить, что, согласно наблюдениям на волне 21 см, поверхности равной угловой скорости в Галактике в принципе напоминают показанные на рис. 6.

Есть еще одна особенность найденного нами закона вращения (30) (которая, кстати, не была замечена и объяснена в [7]). Дело в том, что на оси x_3 скорость вращения не равна нулю: согласно формуле (30)

$$\lim_{r \rightarrow 0} u_\varphi = \frac{4}{\pi^2} \sqrt{2A_1} a_1 \sqrt{1-\alpha} > 0. \quad (35)$$

Налицо парадокс, особенно если вспомнить, что через ось x_3 могут проходить только частицы с $v_\varphi = 0$. Исследование этого парадокса затрудняется из-за обращения функции распределения в бесконечность для тех частиц, которые всегда находятся на оси симметрии модели (см. формулу 18). Разгадка парадокса в том, что на оси цилиндрической системы координат теряется смысл говорить о направлении ортов вдоль r и в азимутальном направлении—происходит, следовательно, нивелировка между этими направлениями. И, как следствие, происходит нивелировка между компонентами скоростей v_φ и v_r . Именно из-за этого недостатка цилиндрической системы координат компонент дисперсии скоростей $\sigma_{\varphi\varphi}$ при $r = 0$ стремится, как мы увидим ниже, не к нулю, а к значению на оси x_3 компонента дисперсии σ_{rr} !

Мы уже убедились, что при вращении всех частиц в одном направлении закон вращения модели в целом описывается весьма сложной формулой. Указанных осложнений можно избежать, если полнее использовать свойства введенных нами подсистем частиц. А именно, распорядимся функциями $f_{rz}^{(1)}$ и $f_{rz}^{(2)}$ таким образом (см. также [7]), чтобы вращение в целом стало твердотельным

$$u_\varphi = \Omega r = \frac{1}{\rho} \iiint v_\varphi (f_{rz}^{(1)} - f_{rz}^{(2)}) \cdot J dE_3 dm dn. \quad (36)$$

Это уравнение решается тем же способом, что и (16); находим

$$f_{rz}^{(1)} - f_{rz}^{(2)} = \frac{4\Omega\rho}{\pi^2 A_1^{3/2} \sqrt{A_3}} \frac{a_1}{a_3} \frac{\sqrt{n}}{m-n} \delta \left[m - a_1^2 \left(1 - \frac{E_3}{A_3 a_3^2} \right) \right]. \quad (37)$$

Из (17) и (37) тогда получим

$$f_{rz}^{(1)} = \frac{\rho\sqrt{2}}{\pi^2 A_1 \sqrt{A_3}} \cdot \frac{a_1}{a_3} \cdot \frac{\delta \left[m - a_1^2 \left(1 - \frac{E_3}{A_3 a_3^2} \right) \right]}{m - n} \left\{ \sqrt{m} + \frac{\Omega \sqrt{n}}{\sqrt{A_1/2}} \right\}; \quad (38)$$

$$f_{rz}^{(2)} = \frac{\rho\sqrt{2}}{\pi^2 A_1 \sqrt{A_3}} \cdot \frac{a_1}{a_3} \cdot \frac{\delta \left[m - a_1^2 \left(1 - \frac{E_3}{A_3 a_3^2} \right) \right]}{m - n} \left\{ \sqrt{m} - \frac{\Omega \sqrt{n}}{\sqrt{A_1/2}} \right\}. \quad (39)$$

Таким образом, для модели с твердотельным вращением мы окончательно решили задачу нахождения фазовых функций подсистем (см. формулы (26), (27))*.

Избавиться от «корявого» вращения (30) мы смогли только ценой того, что заставили подсистемы частиц со столь же «корявым» распределением плотности

$$\rho(v_\varphi \geq 0) = \rho \left\{ \frac{1}{2} \pm \frac{2\sqrt{2}\Omega}{\pi^2 \sqrt{A_1}} \frac{r/a_1}{\sqrt{1-\alpha}} F\left(\frac{\pi}{2}; \sqrt{\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}}\right) \right\}, \quad (40)$$

где $F(\dots)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода, вращаться в разные стороны.

Из условия неотрицательности $f_{rz}^{(2)}$ находим интервал вращения

$$0 \leq \Omega^2 \leq A_1/2. \quad (41)$$

5. Тензор дисперсии скоростей. Вначале найдем диагональные компоненты этого тензора. Азимутальный компонент:

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{\rho} \int [(v_\varphi - u_\varphi)^2 f_{rz}^{(1)} + (v_\varphi + u_\varphi)^2 f_{rz}^{(2)}] d^3x = \frac{1}{\rho} \int v_\varphi^2 f_{rz}^{(\varphi)} d^3x - u_\varphi^2. \quad (42)$$

Очевидно,

$$\overline{v_\varphi^2} = \frac{1}{\rho} \int v_\varphi^2 f_{rz}^{(\varphi)} d^3x = A_1 a_1^2 \left(1 - \frac{\alpha + \beta}{2} \right). \quad (43)$$

Для модели, в которой частицы вращаются только в одну сторону, мы должны в (12) подставить u_φ из (30). Для модели же с твердотельным вращением

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{A_1 a_1^2}{2} \left[1 + \frac{r^2}{a_1^2} \left(1 - \frac{2\Omega^2}{A_1} \right) - \frac{x_3^2}{a_3^2} \right]. \quad (44)$$

Поверхности $\sigma_{\varphi\varphi} = \text{const}$ (как и $\overline{v_\varphi^2} = \text{const}$) представляют собой в общем случае семейство двуполых гиперболоидов; при максимально

* Модель имеет два параметра: отношение полуосей $\frac{a_3}{a_1}$ и угловую скорость Ω .

быстром вращении $\Omega^2 = \frac{A_1}{2}$ гиперболоиды $\sigma_{\varphi\varphi} = \text{const}$ вырождаются в плоскости, перпендикулярные оси x_3 . Обратим внимание: на поверхности модели $\bar{v}_\varphi^2 = A_1 r^2$ и $\sigma_{\varphi\varphi} = (A_1 - \Omega^2) r^2$, т. е. эти компоненты в нуль не обращаются (исключение — для точек полюсов).

Далее,

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{\rho} \int [(v_r - u_r)^2 f_{1z}^{(\varphi)} + (v_r + u_r)^2 f_{2z}^{(\varphi)}] d^3x, \quad (45)$$

а так как согласно (29) $u_r = 0$, то

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{2} A_1 a_1^2 (\beta - \alpha). \quad (46)$$

Аналогично находим и компонент

$$\sigma_{33} = A_3 a_3^2 (\beta - \alpha). \quad (47)$$

Итак, давление в меридиональных плоскостях

$$P_{r3} = \rho (\sigma_{rr} + \sigma_{33}) = \rho \left(\frac{A_1 a_1^2}{2} + A_3 a_3^2 \right) (\beta - \alpha) \quad (48)$$

найдено постоянным на семействе сфероидальных поверхностей, подобных границе модели. Для сравнения следует отметить: у классического жидкого сфероида Маклорена на семействе подобных сфероидальных поверхностей постоянным оказывается полное гидростатическое давление.

Особенность цилиндрической системы координат проявляется не только в peculiarity закона вращения (30), но и в равенстве на оси x_3 двух компонентов тензора дисперсии скоростей

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r=0) = \sigma_{rr}(r=0) = \frac{1}{2} A_1 a_1^2 (1 - \alpha). \quad (49)$$

Недиагональные компоненты того же тензора оказываются равными нулю. Для примера вычислим компонент

$$\begin{aligned} \rho \sigma_{r\varphi} = \int [v_r (v_\varphi - u_\varphi) f_{1z}^{(1)} - v_r (v_\varphi - u_\varphi) f_{2z}^{(1)} - v_r (v_\varphi + u_\varphi) f_{1z}^{(2)} + \\ + v_r (v_\varphi + u_\varphi) f_{2z}^{(2)}] d^3x. \end{aligned} \quad (50)$$

После элементарных преобразований получим два интеграла

$$\begin{aligned} \rho \sigma_{r\varphi} = \int v_r v_\varphi [f_{1z}^{(1)} - f_{2z}^{(1)} - f_{1z}^{(2)} + f_{2z}^{(2)}] d^3x + \\ + u_\varphi \int v_r [-f_{1z}^{(1)} + f_{2z}^{(1)} - f_{1z}^{(2)} + f_{2z}^{(2)}] d^3x. \end{aligned} \quad (51)$$

Но в силу (26), (27) каждое подынтегральное выражение в квадратных скобках равно нулю. Аналогично и для компонентов σ_{rz} и $\sigma_{\varphi z}$. Итак*,

$$\sigma_{r\varphi} = \sigma_{rz} = \sigma_{\varphi z} = 0. \quad (52)$$

6. *Тензор моментов скоростей третьего порядка.* При решении поставленной задачи нельзя ограничиться вычислением тензора дисперсии скоростей. Отнюдь не очевидная истина заключается в следующем: если при вычислении характеристик модели цепочка моментов логически не замыкается на каком-то определенном порядке, такая модель вообще не имеет права на существование. Следовательно, нельзя считать модель исследованной, если для нее не получены все независимые компоненты тензоров скоростей разных порядков. Фазовое описание моделей псевдогидродинамического типа (см. Введение) было таким, что моменты третьего порядка отбрасывались с самого начала (моменты четвертого же порядка, как можно показывать, не были независимыми, так как выражались через уже известные моменты второго порядка). В настоящем случае ситуация более сложная.

Нетрудно убедиться, что для нашей модели имеется десять независимых компонентов тензора скоростей третьего порядка (2). Как относительно более простую, рассмотрим вначале модель с вращением частиц в разные стороны; о модели с вращением в одну сторону ниже будет сказано особо.

Приступим к вычислению компонентов.

$$\begin{aligned} \rho \sigma_{\varphi\varphi\varphi} &= \int [(v_{\varphi} - u_{\varphi})^3 f_{rz}^{(1)} - (v_{\varphi} + u_{\varphi})^3 f_{rz}^{(2)}] d^3\dot{x} = \\ &= \int v_{\varphi}^3 (f_{rz}^{(1)} - f_{rz}^{(2)}) d^3\dot{x} - 3u_{\varphi} \int v_{\varphi}^2 f_{rz}^{(\varphi)} d^3\dot{x} + \\ &+ 3u_{\varphi}^2 \int v_{\varphi} (f_{rz}^{(1)} - f_{rz}^{(2)}) d^3\dot{x} - u_{\varphi}^3 \int f_{rz}^{(\varphi)} d^3\dot{x}. \end{aligned} \quad (53)$$

Вычисляя с учетом (37)–(39) отдельные интегралы, имеем

$$\begin{aligned} \int v_{\varphi}^3 (f_{rz}^{(1)} - f_{rz}^{(2)}) d^3\dot{x} &= \frac{3}{4} \rho \Omega r A_1 a_1^2 \left(1 + \frac{r^2}{a_1^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} \right); \quad \int f_{rz}^{(\varphi)} d^3\dot{x} = \rho; \\ \int v_{\varphi}^2 f_{rz}^{(\varphi)} d^3\dot{x} &= \rho \frac{A_1 a_1^2}{2} \left(1 + \frac{r^2}{a_1^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} \right); \quad \int v_{\varphi} (f_{rz}^{(1)} - f_{rz}^{(2)}) d^3\dot{x} = \rho \Omega r. \end{aligned} \quad (54)$$

В итоге

$$\sigma_{\varphi\varphi\varphi} = \frac{\Omega r}{2} (4\Omega^2 r^2 - 3\overline{v_{\varphi}^2}) = \frac{\Omega r}{2} (\Omega^2 r^2 - 3\sigma_{\varphi\varphi}), \quad (55)$$

* Включая и случай вращения частиц в одну сторону.

причем $\sigma_{\varphi\varphi}$ дана в (44). На поверхности и внутри модели $\sigma_{\varphi\varphi} < 0$.

Далее,

$$\rho\sigma_{rr\varphi} = \int v_r^2 [(v_\varphi - u_\varphi) f_{rz}^{(1)} - (v_\varphi + u_\varphi) f_{rz}^{(2)}] d^3x. \quad (56)$$

Так как

$$\int v_r^2 v_\varphi (f_{rz}^{(1)} - f_{rz}^{(2)}) d^3x = \frac{\rho\Omega r A_1 a_1^2}{4} (\beta - \alpha); \quad (57)$$

$$u_\varphi \int v_r^2 f_{rz}^{(\varphi)} d^3x = \frac{1}{2} \rho\Omega r A_1 a_1^2 (\beta - \alpha),$$

в итоге получим

$$\sigma_{rr\varphi} = -\frac{1}{2} \Omega r \sigma_{rr} = -\frac{A_1^2 a_1^2}{4} \Omega r (\beta - \alpha). \quad (58)$$

Этот компонент также всюду отрицателен.

Несколько неожиданно обстоит дело с компонентом $\sigma_{33\varphi}$. Вычисления, вполне аналогичные предыдущим, приводят к выражению

$$\rho\sigma_{33\varphi} = \int v_3^2 v_\varphi (f_{rz}^{(1)} - f_{rz}^{(2)}) d^3x - \rho u_\varphi \sigma_{rr}. \quad (59)$$

Но, как можно показать,

$$\int v_3^2 v_\varphi (f_{rz}^{(1)} - f_{rz}^{(2)}) d^3x = \rho u_\varphi \sigma_{rr}, \quad (60)$$

поэтому $\sigma_{33\varphi} = 0$.

Заметим, что если частицы вращаются только в одну сторону, компонент $\sigma_{33\varphi}$, как и компоненты $\sigma_{\varphi\varphi\varphi}$ и $\sigma_{rr\varphi}$, не равен нулю. Однако получающиеся для них выражения весьма сложны и мы их не приводим из-за отсутствия места.

Что касается семи оставшихся компонентов тензора третьего порядка — они оказываются равными нулю для обоих типов модели. Характерен следующий пример.

$$\begin{aligned} \rho\sigma_{\varphi\varphi r} = & \int v_r [(v_\varphi - u_\varphi)^2 f_{1z}^{(1)} - (v_\varphi - u_\varphi)^2 f_{2z}^{(1)} + (v_\varphi + u_\varphi)^2 f_{1z}^{(2)} - (v_\varphi + u_\varphi)^2 f_{2z}^{(2)}] \times \\ & \times d^3x = \int v_\varphi^2 v_r [f_{1z}^{(1)} - f_{2z}^{(1)} + f_{1z}^{(2)} - f_{2z}^{(2)}] d^3x + \\ & + 2u_\varphi \int v_\varphi v_r [-f_{1z}^{(1)} + f_{2z}^{(1)} + f_{1z}^{(2)} - f_{2z}^{(2)}] d^3x + \\ & + u_\varphi^2 \int v_r [f_{1z}^{(1)} - f_{2z}^{(1)} + f_{1z}^{(2)} - f_{2z}^{(2)}] d^3x. \end{aligned}$$

Поскольку выражения в квадратных скобках под интегралами равны нулю в силу (26), (27), равен нулю и сам компонент $\sigma_{\varphi\varphi r}$. Итак,

$$\sigma_{rrr} = \sigma_{333} = \sigma_{\varphi\varphi r} = \sigma_{\varphi\varphi 3} = \sigma_{rr3} = \sigma_{33\varphi} = \sigma_{33r} = \sigma_{\varphi r3} = 0. \quad (61)$$

Важно отметить следующее: отличные от нуля компоненты (55) и (58) выражаются через компоненты тензоров первого и второго порядков, а именно—через $u_\varphi = \Omega \cdot r$, σ_{rr} и $\sigma_{\varphi\varphi}$. Таким образом, цепочка моментов скоростей для нашей модели естественно замыкается на моментах третьего порядка. Подчеркнем, однако, что сказанное относится только к модели, в которой частицы вращаются в разные стороны. Для модели же с вращением частиц в одну сторону вопрос о замыкании цепочки моментов скоростей чрезвычайно сложен и остается открытым.

7. Заключение. Мы убедились, что внешне простая бесстолкновительная модель однородного сфероида оказывается совсем не простой для исследования ввиду новизны некоторых из встречающихся здесь вопросов. Причина этого, как мы уже неоднократно говорили, в том, что по своему типу модель не является псевдогидродинамической. Тем больший интерес вызывает механизм замыкания для нее цепочки моментов от фазовой плотности. Установление этого механизма закладывает фундамент для изучения нелинейных колебаний модели. Эта задача будет рассмотрена в следующей статье.

Педагогический институт,
г. Глазов

THE DYNAMICS OF THE SPECIAL SPHEROIDAL MODEL OF HOMOGENEOUS STELLAR SYSTEM. I. EQUILIBRIUM STATES

B. P. KONDRAT'EV

The stationary collisionless model of the self — gravitating homogeneous spheroid with nonellipsoidal phase distribution function is investigated. The model has one or two parameters. In velocity space this model is represented by a fourth degree surface with singular line segments. To obtain the characteristics of the model one is regarded as consisting of eight subsystems of particles. The phase function for each subsystem is derived. The one — parameter model has a nonlinear baroclinic rotation and surfaces of constant angular velocity are revealed with the ones in galaxies. Components of the dispersion velocity tensor and the tensor of the third rank are derived. It has been found that third moments of velocity reduce to first — and second moments.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. П. Кондратьев, Е. А. Малков, *Астрофизика*, 25, 587, 1986.
2. Б. П. Кондратьев, Е. А. Малков, *Астрофизика*, 26, 511, 1987.
3. Б. П. Кондратьев, Е. А. Малков, *Астрофизика*, 27, 311, 1987.
4. Б. П. Кондратьев, *Астрофизика* (в печати).
5. С. Чандрасекар, *Эллипсоидальные фигуры равновесия*, Мир, М., 1973.
6. Б. П. Кондратьев, *Динамика эллипсоидальных гравитирующих фигур*, Наука, М., 1989.
7. В. Л. Поляченко, *Докл. АН СССР*, 229, 1335, 1976.
8. Б. П. Кондратьев, *Физ. ин-т АН СССР, Препр.*, № 244, 1978.
9. Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович, *Астрофизика*, 6, 387, 1970.