

УДК: 524.3—563

ДИНАМИКА ОСОБОЙ СФЕРОИДАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ОДНОРОДНЫХ ЗВЕЗДНЫХ СИСТЕМ. II. СФЕРОИДАЛЬНЫЕ ПУЛЬСАЦИИ

Б. П. КОНДРАТЬЕВ

Поступила 17 октября 1988

Принята к печати 20 апреля 1989

Поставлена и решена задача о нелинейных колебаниях бесстолкновительного гравитирующего сфероида с неэллипсоидальной функцией распределения. Доказано, что присутствие моментов скоростей третьего порядка не препятствует замыканию цепочки уравнений звездной гидродинамики. Определены изолинии равной кинетической энергии колебаний и среди них — контуры нулевых скоростей, внутри которых происходит движение изображающей точки модели. Рассмотрен случай малых колебаний и установлено, что модель устойчива по отношению к пульсационной моде.

1. *Введение.* В статье [1] исследовалась равновесная бесстолкновительная модель однородного гравитирующего сфероида. В варианте с твердотельным вращением центроидов

$$u_{\varphi} = \Omega \cdot r \quad (1)$$

модель описывалась следующими характеристиками. Компоненты тензора дисперсии скоростей

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= A_3 a_3^2 \left(1 - \frac{r^2}{a_1^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} \right), \\ \sigma_{rr} &= \frac{1}{2} A_1 a_1^2 \left(1 - r^2/a_1^2 - x_3^2/a_3^2 \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \overline{v_{\varphi}^2} - \Omega^2 r^2, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\overline{v_{\varphi}^2} = \frac{1}{2} A_1 a_1^2 \left(1 + \frac{r^2}{a_1^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} \right), \quad (3)$$

причем

$$\sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi 3} = \sigma_{r3} = 0. \quad (4)$$

Восемь из десяти моментов скоростей третьего порядка равны нулю

$$\sigma_{rrr} = \sigma_{333} = \sigma_{\varphi\varphi r} = \sigma_{\varphi\varphi 3} = \sigma_{rr3} = \sigma_{33\varphi} = \sigma_{33r} = \sigma_{\varphi r3} = 0, \quad (5)$$

а два остальных выражаются через компоненты тензора дисперсии скоростей и скорость вращения центроидов

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi\varphi} &= \frac{1}{2} \Omega r (\Omega^2 r^2 - 3\sigma_{\varphi\varphi}), \\ \sigma_{rr\varphi} &= -\frac{1}{2} \Omega r \sigma_{rr}. \end{aligned} \quad (6)$$

Там же подчеркивалась новизна и актуальность задачи по изучению нелинейных колебаний указанной модели. Ранее в классе однородных систем изучались колебания моделей, у которых моменты третьего порядка вообще отсутствовали, и фундаментальной важности вопрос о замыкании цепочки моментных уравнений звездной гидродинамики решался сам собой. Модель же, описываемая формулами (1)—(6), принципиально иного типа, на что указывает хотя бы отличие от нуля величин (6). Любое утверждение о нестационарном состоянии такой модели требует строгого доказательства ввиду отсутствия прецедента.

В данной статье задача о колебаниях бесстолкновительной модели указанного типа решена. В разделе 2 дана постановка задачи и в главных чертах обрисованы свойства будущей модели. В разделе 3 приведены моментные уравнения звездной гидродинамики, на базе которых в 4-м разделе будут получены дифференциальные уравнения колебаний модели. В разделе 5 получен интеграл энергии и рассмотрены кривые нулевой скорости. Малые пульсации рассмотрены в шестом разделе.

2. Постановка задачи. Рассмотренная в [1] равновесная модель сфероидов уникальна в том смысле, что она не может быть получена в результате предельного перехода от однородной эллипсоидальной модели. Следовательно, задача о нелинейных колебаниях может быть поставлена только так: допускают ли законы динамики сфероидальные пульсации этой модели? Некоторый намек на правильность такой постановки задачи можно увидеть в существовании последовательности сжатых и вытянутых сфероидов, реализующих нашу модель.

Доказательством от противного легко убедиться в существовании одного вспомогательного для нас правила, которое мы назовем принципом естественного перехода от нестационарного сфероида к стационарному. Согласно ему, все характеристики стационарной модели должны естественно, без каких-либо дополнительных условий или ограничений, получаться из характеристик модели в нестационарном состоянии. Ниже мы убедимся, как работает этот принцип.

Для сохранения сфероидальной формы и однородности модели поле скоростей центроидов должно описываться формулами

$$u_{\varphi}(t, \vec{x}) = \Omega(t) \cdot r; u_r(t, \vec{x}) = \frac{\dot{a}_1}{a_1} r; u_z(t, \vec{x}) = \frac{\dot{a}_3}{a_3} x_3, \quad (7)$$

которые удовлетворяют принципу естественного перехода (полагая в (7) производные от полуосей равными нулю, получим выражение (1)).

Компоненты тензора дисперсии скоростей для нестационарной модели должны тогда записываться в виде (сравните с (2), (3)!)

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(t, \vec{x}) &= \sigma_{zz}^0(t) \cdot (1 - r^2/a_1^2 - x_3^2/a_3^2), \\ \sigma_{rr}(t, \vec{x}) &= \sum(t) \cdot (1 - r^2/a_1^2 - x_3^2/a_3^2), \\ \sigma_{\varphi\varphi}(t, \vec{x}) &= \overline{v_{\varphi}^2}(t, \vec{x}) - \Omega^2 r^2, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\overline{v_{\varphi}^2}(t, \vec{x}) = \sum(t) \cdot (1 + r^2/a_1^2 - x_3^2/a_3^2). \quad (9)$$

Подчеркнем, что

$$\sum(t) = \sigma_{rr}^0(t, 0) = \overline{v_{\varphi}^2}(t, 0). \quad (10)$$

Все недиагональные компоненты должны быть, согласно принципу естественного перехода—см. формулы (4), равны нулю и для нестационарной модели.

По аналогии, все моменты скоростей третьего порядка (5) должны равняться нулю и в нестационарном случае; согласно же (6), теперь

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi\varphi}(t, \vec{x}) &= \frac{\Omega r}{2} (4\Omega^2 r^2 - 3\overline{v_{\varphi}^2}) = \frac{\Omega r}{2} (\Omega^2 r^2 - 3\sigma_{\varphi\varphi}(t, \vec{x})), \\ \sigma_{rr\varphi}(t, \vec{x}) &= -\frac{1}{2} \Omega r \sigma_{rr}(t, \vec{x}). \end{aligned} \quad (11)$$

В силу того, что отличные от нуля моменты скоростей третьего порядка выражены у нас через низшие моменты, становится ясно: цепочка моментных уравнений звездной гидродинамики, которыми полностью описывается нестационарная (как, впрочем, и стационарная!) модель, должна замыкаться на уравнениях именно третьего порядка.

3. Уравнения звездной гидродинамики. Хотя в общем виде методика получения моментных уравнений из кинетического уравнения Больцмана отработана, однако автору не известно, были ли записаны кем-либо ранее уравнения третьего порядка в цилиндрической системе координат.

Исходное уравнений Больцмана имеет, как известно, вид*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + v_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \left(-2A_1 r + \frac{v_\varphi^2}{r} \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} - \frac{v_r v_\varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} - 2A_3 x_3 \frac{\partial f}{\partial v_3} = 0. \quad (12)$$

Получаемые на базе (12) уравнение неразрывности и уравнения для центроидов также хорошо известны:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (\rho u_r) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho u_3) + \frac{\rho}{r} u_r = 0; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_3 \frac{\partial u_r}{\partial x_3} + \frac{\sigma_{rr} - \overline{v_\varphi^2}}{r} + \\ & + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial r} (\rho \sigma_{rr}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho \sigma_{r3}) \right] + 2A_1 r = 0; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + u_3 \frac{\partial u_\varphi}{\partial x_3} + \frac{u_r u_\varphi}{r} + \frac{2\rho}{r} \sigma_{r\varphi} + \\ & + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial r} (\rho \sigma_{r\varphi}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho \sigma_{\varphi 3}) \right] = 0; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_3}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_3}{\partial r} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\sigma_{r3}}{r} + \\ & + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial r} (\rho \sigma_{r3}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho \sigma_{33}) \right] + 2A_3 x_3 = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Используя (12), находим шесть уравнений третьего порядка. Ввиду громоздкости, мы запишем здесь эти уравнения только для нашего случая, т. е. используя условие однородности модели, условие (4) равенства нулю всех недиагональных компонентов тензора дисперсии скоростей, а также условие (5) обращения в нуль восьми моментов скоростей третьего порядка. Итак, умножая (12) на v_φ^2 , после многих преобразований имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{v_\varphi^2} + u_r \frac{\partial}{\partial r} \overline{v_\varphi^2} + u_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \overline{v_\varphi^2} + \frac{2u_r}{r} \overline{v_\varphi^2} = 0. \quad (17)$$

Не имеет моментов третьего порядка и уравнение, получаемое из (12) умножением на v_r^2 ,

* Предполагается естественное $\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$.

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma_{rr} + u_r \frac{\partial}{\partial r} \sigma_{rr} + 2\sigma_{rr} \frac{\partial}{\partial r} u_r + u_3 \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial x_3} = 0. \quad (18)$$

После умножения (12) на v_3^2 и преобразований, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma_{33} + u_r \frac{\partial}{\partial r} \sigma_{33} + u_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \sigma_{33} + 2\sigma_{33} \frac{\partial}{\partial x_3} u_3 = 0. \quad (19)$$

А вот после умножения (12) на $(v_\varphi \cdot v_r)$ и преобразований имеем уравнение

$$u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + (u_r^2 + \sigma_{rr}) \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \right) + u_r u_3 \frac{\partial u_\varphi}{\partial x_3} + \\ + \frac{\partial}{\partial r} \sigma_{rr\varphi} - \frac{2u_\varphi}{r} \sigma_{\varphi\varphi} + \frac{2\sigma_{rr\varphi} - \sigma_{\varphi\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad (20)$$

которое содержит отличные от нуля моменты (11). Два оставшихся уравнения находим после умножения (12) на $(v_\varphi v_3)$ и $(v_r v_3)$:

$$u_3 \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r u_3 \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + (u_3^2 + \sigma_{33}) \frac{\partial u_\varphi}{\partial x_3} + \frac{1}{r} u_\varphi u_r u_3 = 0, \quad (21)$$

$$\sigma_{rr} \frac{\partial u_3}{\partial r} + \sigma_{33} \frac{\partial u_r}{\partial x_3} = 0. \quad (22)$$

Они также не содержат моментов скоростей третьего порядка.

В силу (11) система моментных уравнений замыкается в третьем звене.

4. Уравнения нелинейных колебаний модели. Нестационарная модель бесстолкновительного сфероида описывается шестью переменными, зависящими от времени. Это

$$\rho(t), a_1(t), a_3(t), \Omega(t), \sigma_{33}^0(t), \Sigma(t). \quad (23)$$

Временные дифференциальные уравнения для этих переменных мы получим с помощью записанных выше моментных уравнений.

Методика вывода искомых уравнений колебаний сводится к подстановке характеристик модели (7)–(11) в десять моментных уравнений (13)–(22).

В итоге, уравнение неразрывности (13) приводит к

$$\dot{\rho} + \rho \left(2 \frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_3}{a_3} \right) = 0 \text{ или } \rho \cdot a_1^2 a_3 = \text{const}, \quad (24)$$

что означает сохранение массы системы. Уравнение (15) дает

$$\dot{\Omega} + 2 \frac{\dot{a}_1}{a_1} \Omega = 0 \text{ или } \Omega \cdot a_1^2 = \text{const}, \quad (25)$$

что означает сохранение момента вращения системы. Из (14) и (16) получим дифференциальные уравнения для полуосей сфероида

$$\ddot{a}_1 - \frac{4}{a_1} \dot{\Sigma} + 2A_1 a_1 = 0, \quad (26)$$

$$\ddot{a}_3 - \frac{2}{a_3} \dot{\sigma}_{33}^0 + 2A_3 a_3 = 0. \quad (27)$$

Из уравнений (17) и (18) приходим к одному и тому же уравнению

$$\dot{\Sigma} + 2 \frac{\dot{a}_1}{a_1} \Sigma = 0 \text{ или } \Sigma \cdot a_1^2 = c_1 = \text{const}. \quad (28)$$

Еще одно дифференциальное уравнение следует из (19)

$$\dot{\sigma}_{33}^0 + 2 \frac{\dot{a}_3}{a_3} \sigma_{33}^0 = 0 \text{ или } \sigma_{33}^0 \cdot a_3^2 = c_3 = \text{const}. \quad (29)$$

Три оставшихся моментных уравнения новой информации не дают: (20) приводит к комбинации уравнений (25) и (26), (21) приводит вновь к (25), а (22) удовлетворяется тождественно.

Шесть уравнений (24)–(29) для шести неизвестных (23) и дают решение задачи о колебаниях сфероида. Фактически же здесь мы имеем дело с системой четвертого порядка*

$$\begin{aligned} \ddot{a}_1 - \frac{4c_1}{a_1^3} + 2A_1 a_1 &= 0, \\ \ddot{a}_3 - 2c_3/a_3^3 + 2A_3 a_3 &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

5. *Контур нулевой скорости.* Прежде всего получим интеграл сохранения энергии системы. Для этого первое в (30) уравнение умножим на $2 \cdot \dot{a}_1$, а второе — на $\dot{a}_3$, и сложим. В итоге находим искомый интеграл

$$E = \frac{M}{5} \left[\dot{a}_1^2 + \frac{\dot{a}_3^2}{2} + \frac{4c_1}{a_1^2} + \frac{c_3}{a_3^2} - 2I \right] = \text{const}, \quad (31)$$

где через величину

$$I = \frac{3}{4} GM \int_0^{\infty} \frac{du}{(a_1^2 + u) \sqrt{a_3^2 + u}} = 2a_1^2 A_1 + A_3 a_3^2 \quad (32)$$

выражается гравитационная энергия однородной конфигурации

* Важно подчеркнуть, что уравнения (30) описывают и колебания модели с дифференциальным вращением (см. [2]).

$$W = -\frac{2}{5} M \cdot I. \quad (33)$$

Введем теперь параметр нестационарности системы

$$q = 1 - E/E_{eq}, \text{ причем } 0 \leq q \leq 1, \quad (34)$$

характеризующий отклонение энергии системы от некоторого равновесного значения E_{eq} . Учитывая, что в стационарном состоянии полная энергия равна половине гравитационной, запишем (31) в таком виде:

$$\dot{a}_1^2 + \frac{\dot{a}_3^2}{2} + \frac{4c_1}{a_1^2} + \frac{c_3}{a_3^2} - 2J = -J_{eq} \cdot (1 - q). \quad (35)$$

С помощью (35) можно найти геометрические места точек на плоскости (a_1, a_3) , в которых нестационарная конфигурация имеет одинаковые значения кинетической энергии колебаний,

$$T_{кин} = \frac{M}{5} \left(\dot{a}_1^2 + \frac{\dot{a}_3^2}{2} \right). \quad (36)$$

Для этого, в согласии с формулами (28), (29) и результатами статьи [1], мы заменим в (35) выражения c_1 и c_3 на

$$c_1 = \frac{1}{2} \bar{A}_1 \tilde{a}_1^4; \quad c_3 = \bar{A}_3 \tilde{a}_3^4. \quad (37)$$

Для удобства записи равновесные значения будем обозначать как буквы « eq », так и знаком « $\sim$ », а деленные на $\pi G \rho$ величины Ai и I отметим штрихом. Учитывая это, после деления (35) на $\pi G \rho$ получим

$$\frac{\dot{a}_1^2 + \dot{a}_3^2/2}{\pi G \rho} + \frac{2\bar{A}_1' \tilde{a}_1^4}{\tilde{a}_1^2} + \frac{\bar{A}_3' \tilde{a}_3^4}{\tilde{a}_3^2} - 2 \frac{\rho(t)}{\rho} I' = -I'_{eq} (1 - q). \quad (38)$$

Вводя обозначения

$$x = \frac{a_1(t)}{\tilde{a}_1}; \quad y = a_3(t) \tilde{a}_3, \quad (39)$$

приводим (38) к виду

$$\frac{\dot{a}_1^2 + \dot{a}_3^2/2}{\pi G \rho \tilde{a}_1^2} + \frac{2\bar{A}_1'}{x^2} + \frac{\bar{A}_3' \left(\frac{\tilde{a}_3}{\tilde{a}_1} \right)^2}{y^2} + \frac{I'_{eq}}{\tilde{a}_1^2} (1 - q) = \left\langle \begin{array}{l} 2I'_{obl}/y \\ 2I'_{prol} \cdot \frac{y}{x^2} \cdot \left(\frac{\tilde{a}_3}{\tilde{a}_1} \right)^2 \end{array} \right. \quad (40)$$

В последнем уравнении учитывается, что пульсирующий сфероид может быть как сжатым, так и вытянутым, причем

$$I'_{obl} = 2\sqrt{1-e^2} \frac{\arcsin e}{e}; \quad I'_{prol} = \frac{1-e^2}{e} \ln \frac{1+e}{1-e}. \quad (41)$$

Для нахождения искомых геометрических мест надо заметить, что эксцентриситеты для сжатого и вытянутого сфероидов вычисляются из формул

$$e_{obl}^2 = 1 - \frac{y^2}{x^2} \cdot \left(\frac{\tilde{a}_3}{\tilde{a}_1} \right)^2; \quad e_{prol}^2 = 1 - \frac{x^2}{y^2} \cdot \left(\frac{\tilde{a}_1}{\tilde{a}_3} \right)^2. \quad (42)$$

При заданном q , при изменении величины кинетической энергии в интервале

$$0 \leq \frac{\dot{a}_1^2 + \dot{a}_3^2/2}{\pi G \tilde{\rho}} \leq 2 \frac{\rho(t)}{\tilde{\rho}} I' - I'_{eq} (1-q) - 4 \sum - 2\tilde{\sigma}_{33}^0, \quad (43)$$

уравнение (40) определяет семейство требуемых изолиний. Самой замечательной из них является изолиния нулевой скорости, получаемая при $T_{кин} = 0$. В процессе колебаний изображающая точка модели может двигаться внутри данного контура нулевой скорости и никогда не покинет этой области. Любопытно заметить, что семейство контуров нулевой скорости, отвечающее ряду

$$q_1 < q_2 < \dots < q_n \leq 1, \quad (44)$$

одновременно представляет собой и семейство изолиний с отличными от нуля энергиями колебательного движения, причем

$$q_n - q_i = \frac{\dot{a}_1^2 + \dot{a}_3^2/2}{I'_{eq}}, \quad i = 1, 2, \dots. \quad (45)$$

Чем больше кинетическая энергия, тем ближе к центру соответствующая ей изолиния. Любопытно также проследить при численном интегрировании исходных уравнений движения (30): насколько часто изображающая точка будет находиться внутри той или иной изолинии (будет ли заполнение энергетических зон эргодичным).

Однако здесь мы ограничимся лишь демонстрацией на рис. 1 нескольких контуров нулевой скорости.

6. *Малые колебания.* Обозначив частоту малых колебаний через σ , линеаризируем уравнения (30) с помощью подстановок

$$a_i(t) = a_i + \delta a_i \cdot e^{-i\sigma t}; \quad A_i(t) = A_i + \delta A_i \cdot e^{-i\sigma t}. \quad (46)$$

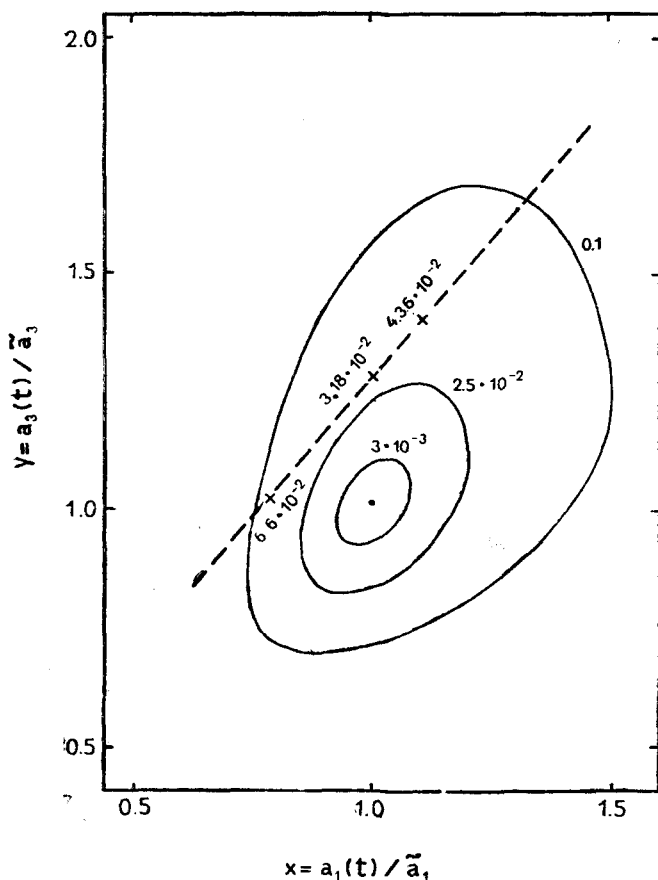


Рис. 1. Кривые нулевой скорости, определенные уравнением (40), для $q = 3 \cdot 10^{-3}$, $q = 2.5 \cdot 10^{-2}$ и $q = 0.1$. Равновесный сфероид имеет $\tilde{e} = 0.6$. Прямая представляет геометрическое место точек переходного сферического состояния, а три точки на ней указывают величину q_{crit} , при которой достигается данное состояние. Для выбранного состояния равновесия вытянутые сфероиды—только на кривой $q = 0.1$.

Получим два уравнения:

$$\begin{aligned} -\sigma^2 + 8A_1 + 2 \frac{a_1}{\delta a_1} \delta A_1 &= 0, \\ -\sigma^2 + 8A_3 + 2 \frac{a_3}{\delta a_3} \delta A_3 &= 0. \end{aligned} \quad (47)$$

При вариациях гравитирующего сфероида

$$\delta A_1 = -4a_1 \cdot A_{11} \cdot \delta a_1 - a_3 A_{13} \delta a_3, \quad (48)$$

$$\delta A_3 = -2a_1 A_{13} \delta a_1 - 3a_3 A_{33} \delta a_3, \quad (49)$$

где

$$A_{ij} = \pi G \rho a_1^2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{(a_1^2 + u) \sqrt{a_3^2 + u} (a_i^2 + u) (a_j^2 + u)}. \quad (50)$$

Подставляя выражения (48) и (49) в (47), после исключения выражения

$$\frac{\delta a_3}{\delta a_1} = \frac{4a_1 \cdot a_3 A_{13}}{-\sigma^2 + 8A_3 - 6a_3^2 A_{33}}, \quad (51)$$

и тождественных преобразований, получим характеристическое уравнение

$$\sigma^4 - 2\sigma^2 [A_1 + A_3 + (2a_1^2 + a_3^2) A_{13}] + 4(A_1 \cdot A_3 + I \cdot A_{13}) = 0, \quad (52)$$

где I дано в (32). Решения этого уравнения

$$\sigma^2 = A_1 + A_3 + (2a_1^2 + a_3^2) A_{13} \pm \sqrt{[A_1 + A_3 + (2a_1^2 + a_3^2) A_{13}]^2 - 4(A_1 \cdot A_3 + I \cdot A_{13})} \quad (53)$$

— действительные числа, поэтому стационарный бесстолкновительный сфероид при любом отношении полуосей будет устойчив по отношению к сфероидальным пульсациям. Результаты расчетов характеристических частот по выведенным формулам приведены в табл. 1 и 2.

7. Частный случай: нелинейные пульсации кругового цилиндра. Выше рассматривались колебания невырожденной сфероидальной модели и ничего не говорилось о колебаниях дисков и круговых цилиндров. Эти предельные случаи нетрудно получить из уравнений для колебаний сфероида. Так, изменение радиуса цилиндра R со временем t описывается уравнением

$$R - \frac{4c}{R^3} + \frac{2GM}{R} = 0, \text{ где } c = \sum R^2 \quad (54)$$

и M — масса цилиндра на единицу длины. Вводя безразмерные переменные

$$x(t) = \frac{R(t)}{\tilde{R}}, \quad \tau = \frac{t}{\sqrt{\pi G \tilde{\rho}}}, \quad (55)$$

приводим уравнение (54) к виду, удобному для численного решения

$$x''_{\tau^2} = 2 \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} \right). \quad (56)$$

Таблица 1

КВАДРАТЫ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЧАСТОТ ПУЛЬСАЦИЙ
БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОГО (СЖАТОГО) СФЕРОИДА

$\tilde{e}$	$\frac{\sigma_1^2}{\pi G \tilde{\rho}}$	$\frac{\sigma_2^2}{\pi G \tilde{\rho}}$
0.0	56/15	4/3
0.1	3.7502	1.3333
0.2	3.7696	1.3329
0.3	3.8161	1.3313
0.4	3.8922	1.3264
0.5	4.0082	1.3151
0.6	4.1861	1.2914
0.7	4.4683	1.2449
0.8	4.9506	1.1537
0.85	5.3390	1.0766
0.90	5.9291	0.9596
0.95	6.9821	0.7595
0.98	8.3007	0.5303
0.999	10.9563	0.1353
$\tilde{e} \rightarrow 1$	$\frac{\sigma_1^2}{\pi G \tilde{\sigma}_0} \rightarrow \frac{\pi}{a_1}$	$\frac{\sigma_2^2}{\pi G \tilde{\sigma}_0} \rightarrow 0$

Примечание. Частоты колебаний в дисковом пределе корректно вычислять, нормируя их не на объемную плотность $\tilde{\rho}$ (ввиду ее расходяемости), а на центральную поверхностную плотность диска $\tilde{\sigma}_0$.

Таблица 2

КВАДРАТЫ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЧАСТОТ ПУЛЬСАЦИЙ
БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОГО (ВЫТЯНУТОГО) СФЕРОИДА

$\tilde{e}$	$\frac{\sigma_1^2}{\pi G \tilde{\rho}}$	$\frac{\sigma_2^2}{\pi G \tilde{\rho}}$
0.0	56/15	4/3
0.15	3.7308	1.3332
0.2	3.7000	1.3329
0.3	3.6582	1.3312
0.4	3.6005	1.3259
0.5	3.5286	1.3128
0.6	3.4474	1.2836
0.7	3.3686	1.2209
0.81	3.3201	1.0687
0.9	3.3786	0.8025
0.95	3.5153	0.5368
1.0	4	0

8. *Заключение.* Главный результат данной работы в том, что, несмотря на весьма схожую структуру модели сфероида в фазовом пространстве (см. [1]), система уравнений звездной гидродинамики, которой описывается наша модель, замыкается уже на уравнениях третьего порядка. Весьма неожиданно и то, что сами колебания происходят в рамках квадратичных форм (в любой момент модель остается сфероидом). Результаты этой работы дополняют теорию колебаний однородных бесстолкновительных эллипсоидов, развитую нами ранее в рамках проблемы Дирихле.

Отметим, что в монографии [2] нами развит другой подход к этой задаче.

Педагогический институт,
г. Глазов

THE DYNAMICS OF THE PARTICULAR SPHEROIDAL MODEL OF HOMOGENEOUS STELLAR SYSTEMS. II. SPHEROIDAL PULSATIONS

B. P. KONDRAT'EV

In this paper the problem of nonharmonic spheroidal pulsations for the collisionless self-gravitating spheroid with nonellipsoidal phase function has been solved. It has been proved that even the presence of third moments of velocity does not prevent closing of the stellar hydrodynamical equation system. Lines of constant kinetic vibrational energy, among the lines of zero velocity, are determined. Characteristic frequencies of small oscillations are found.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. П. Кондратьев, *Астрофизика*, 31, 369, 1989.
2. Б. П. Кондратьев, *Динамика эллипсоидальных гравитирующих фигур*, гл. 9, Наука, М., 1989.