АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Вып. 69 1992 Том. 3

УДК 524.3—17 : 510.67

 КОНДРАТЬЕВ Б. П.

ФИГУРЫ РАВНОВЕСИЯ ЗВЕЗДНЫХ СИСТЕМ С ИГЛООБРАЗНЫМ ЭЛЛИПСОИДОМ СКОРОСТЕЙ. ОБ ИЗОИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ КАСАНИЯ И СЛУЧАЯХ ВЫРОЖДЕНИЯ МОДЕЛЕЙ В СФЕРОИДЫ И ОСОБЫЕ ЭЛЛИПСОИДЫ

В первой части работы рассмотрена задача, находящаяся на стыке геометрии и динамики, о касании двухрукавными фигурами граничной поверхности эллипсоидальной модели. Метод ее решения основан на том, что искомые кривые касания должны быть одновременно и геометрическими местами точек равных значений квадратичных интегралов движения отдельной звезды. Как оказалось, семейство изоинтегральных кривых обобщает семейство полодий, известное в механике твердого тела. Во второй части рассматриваются предельные для новых моделей переходы к сжатым и вытянутым сфероидам, а также к эллипсоидам с особыми свойствами. Установлено, в частности, что эллипсоиды K V бифуркируют от сфероидов с любой сплюснутостью, эллипсоиды же моделей K III и K IV — только от сфероидов со сжатием меньше критического $\varepsilon_{\text{крит}} = 0{,}62797$. Упомянутые эллипсоиды с особыми свойствами образуют однопараметрические последовательности фигур равновесия моделей K III и K IV и являются граничными для их областей существования на плоскости $(a_2/a_1,\ a_3/a_1)$. В их числе — последовательности эллипсоидов конвергенции и эллипсоидов без дисперсии скоростей. Эллипсоиды конвергенции начинаются от сжатого сфероида со сжатием $\varepsilon_{\text{крит}}$ и заканчиваются эллиптическим диском с $\varepsilon = 0{,}20867$. Существенно, что при переходе к эллипсоидам без дисперсии скоростей в моделях появляется особая прямая, в каждой точке которой центробежная и гравитационная силы уравновешены. Такие конфигурации являются аналогами жидких эллипсоидов Римана без давления.

THE FIGURES OF EQUILIBRIUM OF BARRED STELLAR SYSTEMS WITH A NEEDLE-SHAPED ELLIPSOID OF VELOCITIES. ON THE ISOINTEGRAL CURVES AND SOME CASES OF DEGENERATION OF THE MODELS INTO SPHEROIDS AND SPECIAL ELLIPSOIDS, by *Kondrat'ev B. P.*— This work is divided into two parts. In the first part, the problem of contact of a two-arm figure (whose surface is covered by a moving star) with the elliptical boundary of the model is considered. A solution of this problem, which is on the joint of geometry and dynamics, is based on an explanation of tangent curves as lines with constant values of the integrals of motion of a star. An analogy between the above problem and the problem of geometrical interpretation of motion of a rigid body about a fixed point is revealed. In the second part, limiting cases of degeneration of the models into spheroids and special ellipsoids are considered. It is proved that the models K III and K IV are absent among the spheroids with $\varepsilon \geq \varepsilon_{cr} = 0{,}62797$. The ellipsoids with special properties form a one-parameter sequence of equilibrim figures. Among them, the convergent ellipsoids for K III and K IV types are revealed. This sequence is limited by a spheroid with $\varepsilon = 0{,}62797$ and an elliptical disc with $\varepsilon = 0{,}20867$. The rest special ellipsoids are characterized by a pasticular straight line, in each point of which centrifugal force just balances gravity. The models K III and K IV in this limit are transformed into ellipsoids without velocity dispersion which may be considered as the adjoint liquid Riemann ellipsoids without pressure.

1. Введение

Для полной картины исследования новых фигур равновесия звездных систем (см., предыдущие статьи [1] и [2][1]) надо ответить еще на многие принципиально важные вопросы, например, на следующий. Нам известно, что некоторые звезды (в общем числе звезд модели их мера — нуль) в процессе движения обязаны касаться граничной поверхности эллипсоида. Кроме того, как показано в разд. 3 статьи [2], соответствующие таким звездам двухрукавные фигуры должны касаться указанной границы в общем случае не в отдельных точках, а на некоторых многообразиях

[1] Ссылаясь ниже на формулы этих работ, будем присваивать индексы «а» и «б» соответственно.

(пространственных кривых). Нас интересует, что это за пространственные кривые и каким образом семейством этих кривых полностью (без перекрытий и пересечений) покрывается поверхность эллипсоидальной модели. Решению этой сложной геометрической задачи посвящен следующий раздел данной статьи. Немало тонких вопросов содержат в себе и предельные переходы от моделей в общем случае к различным предельным конфигурациям. Ниже развита теория для некоторых таких предельных переходов: к сфероидам (в разд. 3), к особым эллипсоидам конвергенции моделей K III и K IV (в разд. 4), а также к эллипсоидам без дисперсии скоростей (разд. 5).

2. Геометрические места точек касания двухрукавных фигур (8б) с граничной поверхностью эллипсоида

Для того чтобы выяснить форму пространственной кривой, надо изучить ее проекции на плоскости выбранной системы координат. Выберем систему декартовых координат $Ox_1x_2x_3$, оси которой связаны с главными осями вращающегося эллипсоида (1a). Для решения поставленной задачи есть два способа. Первый, кажущийся на первый взгляд наиболее естественным, заключается в прямом анализе пары уравнений (1a) и (8б) с учетом условия связи постоянных интегрирования C_2 и C_3 из (24б). Исключая из указанных уравнений, например, x_1^2 после трудоемких преобразований получим алгебраический многочлен четвертой степени

$$Q_8\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^4+Q_7\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^3\left(\frac{x_2}{a_2}\right)+Q_6\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2+Q_5\left(\frac{x_3}{a_3}\right)\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^3+$$
$$+Q_4\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^4+Q_3\left(\frac{x_3}{a_3}\right)^2+Q_2\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2+Q_1\left(\frac{x_3}{a_3}\right)\left(\frac{x_2}{a_2}\right)+Q_0=0. \quad (1)$$

Коэффициенты Q_i зависят здесь от свободных параметров и от одной из постоянных интегрирования C_i; выражения для коэффициентов были нами найдены, что позволило численно решать уравнение (1) и находить соответствующее ему семейство кривых на плоскости Ox_2x_3. Однако указанный метод сложен и громоздок. И дело не только в сложности выражений для коэффициентов Q_i (для экономии места здесь эти выражения не приводятся), а в множестве подводных камней, препятствующих прояснению геометрической картины в интересующей нас задаче.

Поэтому рассмотрим другой метод нахождения кривых касания, альтернативный первому. Из анализа движения отдельной звезды нам известны первые интегралы (44a) — (47a), сохраняющие свои значения в любой точке выбранной нами траектории. Но мы также знаем, что траектория эта наматывается на рукава той самой фигуры (8б), для которой и ищется кривая касания с эллипсоидом (1a). Следовательно, если для поиска кривых касания взять вместо уравнения фигуры (8б) (как это делалось в вышеприведенном методе) более простое выражение одного из квадратичных интегралов движения и заменить в выбранном интеграле компоненты полной скорости звезды соответствующими компонентами поля скоростей центроидов (42a) (ведь точки касания лежат на поверхности модели, где случайные скорости отсутствуют), в итоге получим новый и изящный метод для вычисления кривых касания.

Возьмем, например, выражение интеграла (46a), и заменив в нем $\dot{x}_2$ и $\dot{x}_3$ соответственно на u_2 и u_3 из (25a), будем иметь уравнение второго порядка

$$\frac{(a_3\lambda_2+l_\nu a_2\lambda_3)^2}{\mu^2a_1^2}\cdot x_1^2+l_\nu^2x_2^2-2l_\nu x_2x_3+x_3^2=C_2^2\,(l_\mu-l_\nu)^2. \quad (2)$$

Совместный анализ уравнений второго порядка (1a) и (2) намного проще упомянутого выше и может быть проведен так. Умножим уравнение (1а) на $C_2^2(l_\mu - l_\nu)^2$ и вычтем из (2); получим следующее уравнение:

$$Cx_1^2 + \alpha_{22}x_2^2 + \alpha_{33}x_3^2 - 2l_\nu x_2 x_3 = 0, \tag{3}$$

где для краткости мы обозначили

$$C = \frac{(a_3\lambda_2 + l_\nu a_2\lambda_3)^2}{\mu^2 a_1^2} - \frac{C_2^2}{a_1^2}(l_\mu - l_\nu)^2, \tag{4}$$

$$\alpha_{22} = l_\nu^2 - \frac{C_2^2(l_\mu - l_\nu)^2}{a_2^2}, \tag{4'}$$

$$\alpha_{33} = 1 - \frac{C_2^2(l_\mu - l_\nu)^2}{a_3^2}. \tag{5}$$

В (3) имеем уравнение конической поверхности второго порядка с вершиной в центре эллипсоида (1а), причем направляющая кривая этого конуса, лежащая на поверхности модели, и предоставляет искомую кривую касания.

В (3) можно избавиться от смешанного члена, если повернуть оси Ox_2x_3 на угол φ', определяемый равенством

$$\operatorname{tg} 2\varphi' = -\frac{2l_\nu}{\alpha_{22} - \alpha_{33}}. \tag{6}$$

Будем иметь

$$Cx_1^2 + \alpha'_{22}(x'_2)^2 + \alpha'_{33}(x'_3)^2 = 0, \tag{7}$$

где

$$\alpha'_{22} = \frac{\alpha_{22} + \alpha_{33}}{2} + \frac{\alpha_{22} - \alpha_{33}}{2}\cos 2\varphi' - l_\nu \sin 2\varphi',$$

$$\alpha'_{33} = \frac{\alpha_{22} + \alpha_{33}}{2} - \frac{\alpha_{22} - \alpha_{33}}{2}\cos 2\varphi' + l_\nu \sin 2\varphi'. \tag{8}$$

Итак, пересечением образующей конуса (7) с поверхностью (Iа) и получаются кривые касания фигуры (8б) с этой границей модели. Семейство найденных кривых касания отчасти напоминает семейство полодий в задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки (см., например, [3], с. 535). Но в нашем случае есть и отличия. Дело в том, что сама величина угла φ', как видно из формулы (6), зависит от значения постоянной интегрирования C_2, изменяющейся для каждой модели в пределах (см. (24б) и (19б))

$$0 \le C_2^2 \le h_2 = -a_2^2 \frac{l_\nu}{l_\mu - l_\nu}. \tag{9}$$

Соответственно и сам угол φ' изменяется в интервале от

$$\varphi' = \operatorname{arctg} l_\nu \text{ (при } C_2 = 0) \text{ до } \varphi' = \operatorname{arctg} l_\mu \text{ (при } C_2^2 = h_2). \tag{10}$$

Резюмируем: кривые касания получаются в пересечении образующей конуса (7), с эллипсоидальной поверхностью (1а), причем при заданном угле наклона φ' оси симметрии конуса (т. е. от одной двухрукавной фигуры) получаются, как правило, две кривые касания, а сам угол наклона зависит от C_2 (или C_3) и может изменяться в интервале (10), а именно от оси главных координат $O\xi$ до оси $O\eta$ (см. равенства (3б)).

Для полноты картины полезно выяснить форму кривых касания и в проекции на координатные плоскости. Если исключить x_1^2 из (2) с помощью (1а), получим уравнение семейства кривых второго порядка

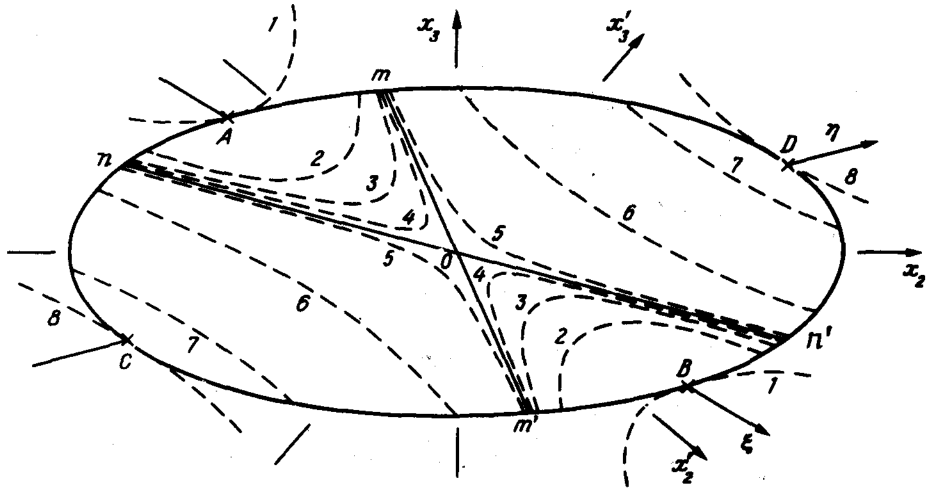

Рис. 1. Семейства сопряженных гипербол внутри сечения эллипсоида координатной плоскостью Ox_2x_3, представляющих проекции на эту плоскость кривых касания двухрукавной фигуры с граничной поверхностью модели. Стрелками указаны оси основной и штрихованной (после поворота на угол $\tilde{\varphi}'$ из (6)) декартовых систем координат, а также сопряженные друг другу главные оси $O\xi$ и $O\eta$. Семейства гипербол разделены асимптотами nn' и mm' ($C_2/a_1 = 0{,}563112$). Цифрами помечены гиперболы при некоторых значениях постоянной интегрирования C_2/a_1: 0 (*1*); 0,44 (*2*); 0,52 (*3*); 0,55 (*4*); 0,58 (*5*); 0,8 (*6*); 1,24 (*7*); 1,4 (*8*). Расчеты для модели К III с отношениями полуосей $a_2/a_1 = 1{,}7$ и $a_3/a_1 = 0{,}7$. Буквами *A, B, C, D* отмечены особые точки, в которых гиперболы только касаются границы сечения эллипсоида. Именно в особых точках эллипс сечения «протыкается» осями $O\xi$ и $O\eta$

$$\tilde{\alpha}_{22}x_2^2 + 2\tilde{\alpha}_{23}x_2x_3 + \tilde{\alpha}_{33}x_3^2 + Ca_1^2 = 0, \qquad (11)$$

где

$$\tilde{\alpha}_{22} = l_\nu^2 - \frac{(a_3\lambda_2 + l_\nu a_2\lambda_3)^2}{\mu^2 a_2^2}; \quad \tilde{\alpha}_{33} = 1 - \frac{(a_3\lambda_2 + l_\nu a_2\lambda_3)^2}{\mu^2 a_3^2};$$

$$\tilde{\alpha}_{23} = -l_\nu, \qquad (11')$$

а C дано в (4). Дискриминант этой квадратичной формы в любой точке существования каждой из трех моделей не имеет, как можно доказать, положительных значений:

$$\Delta = \tilde{\alpha}_{22}\tilde{\alpha}_{33} - \tilde{\alpha}_{23}^2 \le 0. \qquad (12)$$

Итак, в общем случае, когда $\Delta < 0$, уравнение (11) описывает семейство гипербол. Важный момент: при изменении C_2 в интервале (9) свободный член в (11) принимает как положительные, так и отрицательные значения (проходя, естественно, через нуль). Поэтому здесь мы имеем дело с семействами пар сопряженных гипербол, разделенных двумя асимптотами. Это и позволяет полностью заполнить проекциями кривых касания площадь всего сечения эллипсоида (1а) плоскостью Ox_2x_3.

Поскольку ранее (см. [2], формула (11), и рис. 2) мы уже имели дело с семейством гипербол на плоскости Ox_2x_3, получающихся в сечении ею двухрукавных фигур (8б), следует ясно отличать от кривых этого семейства гиперболы (11). В частности, можно доказать, что асимптоты обоих семейств гипербол не совпадают, и поэтому не могут принадлежать одной и той же двухрукавной фигуре. Та двухрукавная фигура, которую мы ранее называли критической (для нее $C_2^2D_2^2 = C_3^2D_3^2$) из-за пересечения границ ее рукавов по отрезкам асимптот, ничем теперь выделяться не будет, поскольку на рис. 1 оказывается представленной невырожденными гиперболами. Асимп-

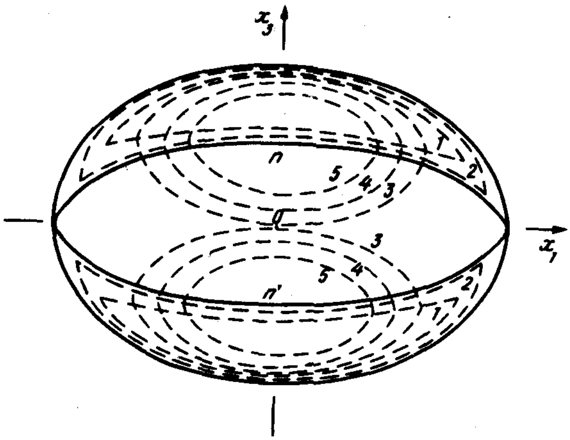

Рис. 2. Проекции кривых касания двухрукавной фигуры на плоскость Ox_1x_3, представленные в общем случае семейством кривых четвертого порядка. Расчеты проведены для той же модели, что и на рис. 1. Эллипс nn' соответствует одной из асимптот на рис. 1. Цифрами отмечены кривые для значений C_2/a_1: 0,44 (*1*); 0,55 (*2*); 1,15 (*3*); 1,24 (*4*); 1,3 (*5*)

тоты же семейства (11) будут принадлежать иной двухрукавной фигуре, которая характеризуется постоянными

$$C_2^2 = \frac{(a_3\lambda_2 + l_\nu a_2\lambda_3)^2}{\mu^2 (l_\mu - l_\nu)^2}, \quad C_3^2 = h_3 \left(1 - \frac{C_2^2}{h_2}\right).$$

Именно эта двухрукавная фигура касается граничного эллипсоида (1а) по двум пересекающимся плоским эллипсам.

Например, характеристики для модели К III с $a_2/a_1 = 1{,}7$ и $a_3/a_1 = 0{,}7$ таковы:

$\tilde{\alpha}_{22} = 2{,}75316 \cdot 10^{-1}$; $\tilde{\alpha}_{33} = 4{,}95482 \cdot 10^{-1}$; $\tilde{\alpha}_{23} = 6{,}00714 \cdot 10^{-1}$; $\Delta = -2{,}24444 \cdot 10^{-1}$; $\dfrac{(a_3\lambda_2 + l_\nu a_2\lambda_3)^2}{\mu^2 a_1^2} = 2{,}47214 \cdot 10^{-1}$; $h_2/a_1^2 = 1{,}96618$; $l_\mu = 2{,}82248 \cdot 10^{-1}$; $l_\nu = -6{,}00714 \cdot 10^{-1}$; $\operatorname{tg}\varphi' = -0{,}33399 \cdot 10^{-1}$; $\tilde{\lambda}_2 = -2{,}25318 \cdot 10^{-1}$; $\tilde{\lambda}_3 = 9{,}96117 \cdot 10^{-1}$,

где $\tilde{\lambda}_2$ и $\tilde{\lambda}_3$ — корни соответствующего характеристического уравнения квадратичной формы (11). Последнее, как и должно быть для гипербол, имеют разные знаки. Графическое изображение гипербол для данной модели приведено на рис. 1.

В предельном случае $\Delta = 0$ квадратичная форма (11) распадается на произведение двух линейных сомножителей:

$$(\tilde{A}_2 x_2 + \tilde{A}_3 x_3 + \tilde{C}) \cdot (\tilde{B}_2 x_2 + \tilde{B}_3 x_3 + \tilde{\tilde{C}}) = 0. \tag{13}$$

При этом вместо гипербол будем иметь дело с семейством отрезков параллельных линий. Ниже, рассматривая предельные варианты моделей — эллипсоиды без дисперсии скоростей и сфероиды, мы встретимся именно с таким вырождением проекций кривых касания[2].

Проекция кривых касания на другие координатные плоскости будут описываться алгебраическими уравнениями уже четвертого (при $\Delta = 0$ — второго) порядка. Уравнение искомых проекций получим, исключая в (2) компоненту x_2 (или x_3, если нас интересуют проекции на плоскость Ox_1x_2) с помощью (1а). После преобразований получим биквадратное уравнение

[2] Для полноты картины надо знать, что вместо (46а) можно (а иногда и необходимо) воспользоваться выражением другого интеграла (47а).

$$\frac{a_2^4}{a_1^4}\alpha_{22}^2x_1^4 + \left(1 + l_\nu^2\frac{a_2^2}{a_3^2}\right)^2x_3^4 + 2\frac{a_2^2}{a_1^2}\left[2l_\nu^2 + \alpha_{22}\left(l_\nu^2\frac{a_2^2}{a_3^2} - 1\right)\right]x_1^2x_3^2 +$$
$$+ 2C'\frac{a_2^2}{a_1^2}\alpha_{22}x_1^2 + 2\left[C'\left(l_\nu^2\frac{a_2^2}{a_3^2} - 1\right) - 2l_\nu^2a_2^2\right]x_3^2 + C'^2 = 0, \qquad (14)$$

где коэффициенты определены выше, а

$$C' = C_2^2(l_\mu - l_\nu)^2 - l_\nu^2a_2^2. \qquad (15)$$

Для численного решения уравнение (14) было представлено в виде

$$p_2y^2 + p_1y + p_0 = 0, \qquad (16)$$

где обозначено

$$y = x_3^2;\ p_2 = \left(l_\nu^2\frac{a_2^2}{a_3^2} + 1\right)^2;\ p_0 = \left(\frac{a_2^2}{a_1^2}\alpha_{22}x_1^2 + C'\right)^2;$$
$$p_1 = 2\frac{a_2^2}{a_1^2}\left[2l_\nu^2 + \alpha_{22}\left(l_\nu^2\frac{a_2^2}{a_3^2} - 1\right)\right]x_1^2 + 2\left[C'\left(l_\nu^2\frac{a_2^2}{a_3^2} - 1\right) - 2l_\nu^2a_2^2\right]. \qquad (17)$$

Графики решений уравнения (16) для модели К III с отношениями полуосей $a_2/a_1 = 1{,}7$ и $a_3/a_1 = 0{,}7$ даны на рис. 2. Как и на рис. 1, здесь в принципе возможно заполнение площади эллиптического сечения.

3. Предельный переход к сфероидам

Необходимо знать, могут ли исследуемые эллипсоидальные модели принимать геометрическую форму сжатых и вытянутых сфероидов. Этот вопрос можно сформулировать и более тонко: могут ли эллипсоиды с фазовой плотностью (46б) или (47б) ответвляться от сфероидов. Фактически, мы говорим о явлении бифуркации. Начнем с того, что

а) превратим эллипсоид с поверхностью (1а) в сфероид при

$$a_2 \to a_1, \text{ тогда и } A_2 \to A_1. \qquad (18)$$

Возникающая при этом круговая симметрия модели в плоскости Ox_1x_2 предполагает, что если по исходным соображениям в этой плоскости отсутствует компонента случайной скорости $\dot{x}_1'$, то должна отсутствовать и другая:

$$\dot{x}_2' = 0, \text{ а тогда и } \sigma_{22}^0 = 0. \qquad (19)$$

Следовательно, в указанной плоскости звезды обязаны двигаться по окружностям с центром на оси Ox_3. Поле скоростей центроидов получим, полагая

$$\lambda_2 = \Omega_2 = 0. \qquad (20)$$

в формулах (16а):

$$\dot{x}_1 = u_1 = \lambda_3x_2;\ \dot{x}_2 = u_2 = -\lambda_3x_1;\ u_3 = 0. \qquad (21)$$

Заметим, что условие $\Omega_2 = 0$ следует из согласования интегралов движения (21) с исходным вторым уравнением движения звезды из (2а).

Согласно формулам (21), во вращающейся системе отсчета азимутальная компонента скорости частиц и центроидов равна $u_\varphi = -\lambda_3r$. Угловая скорость такого движения в инерциальной системе будет равна

$$\Omega^{(0)} = \Omega_3 - \lambda_3 = \Omega_3(1 - n). \qquad (22)$$

С другой стороны, с учетом формулы (27а) квадрат этой величины равен

$$[\Omega^{(0)}]^2 = \Omega_3^2(1 - n)^2 = 2A_1 \qquad (23)$$

и поэтому одинаков для всех трех моделей в сфероидальном пределе. Итак, для вращающегося вместе с осями эллипсоида наблюдателя все три сфероида будут обладать в общем случае строго индивидуальными угловыми скоростями вращения собственных систем координат (Ω_3) и угловыми скоростями вращения в них частиц ($-\lambda_3$). Но для наблюдателя в инерциальной системе отсчета эти три сфероида оказываются представленными одной и той же сфероидальной конфигурацией, вращающейся с угловой скоростью $\Omega^{(0)} = \sqrt{2A_1}$.

Для наблюдателя во вращающейся системе координат коэффициенты из (29а) в сфероидальном пределе оказываются равными

$$a = 2A_1 \left(\frac{n}{1-n}\right)^2, \quad b = c = 0, \quad d = 2A_3, \tag{24}$$

так что система уравнений движения звезды (28а) сводится к

$$\ddot{x}_2 + ax_2 = 0, \quad \ddot{x}_3 + dx_3 = 0. \tag{25}$$

В силу известного нам значения угловой скорости вращения частиц, имеем

$$a = \lambda_3^2. \tag{26}$$

Интегрируя теперь уравнения (25), получим формулы

$$x_1(t) = C\sin(\lambda_3 t - \varepsilon), \quad x_2(t) = C\cos(\lambda_3 t - \varepsilon), \tag{27}$$

$$x_3(t) = \tilde{C}\cos(\sqrt{2A_3}\, t - \tilde{\varepsilon}),$$

которыми и описывается движение звезды в сфероиде. Следует различать два случая: если $a > d$, то

$$\mu^2 = a, \quad \nu^2 = d, \quad l_\mu = 0, \quad l_\nu \to -\infty; \tag{28}$$

если же $a < d$, то

$$\mu^2 = d, \quad \nu^2 = a, \quad l_\mu \to -\infty, \quad l_\nu = 0. \tag{29}$$

Для каждого из этих случаев сфероидальный предел в общих формулах производится по-разному[3].

Таким образом, движущаяся внутри сфероида звезда покрывает поверхность прямого кругового цилиндра, ось симметрии которого совпадает с осью симметрии сфероида Ox_3. Граничной поверхности сфероидальной модели касаются только те цилиндры, у которых радиус C и высота $\tilde{C}$ связаны соотношением

$$\frac{C^2}{a_1^2} + \frac{\tilde{C}^2}{a_3^2} = 1. \tag{30}$$

Во вращающейся системе отсчета все три сфероидальные модели описываются фазовой функцией, получаемой из (47б):

$$f(\mathrm{x}, \dot{\mathrm{x}}) = \frac{\rho\delta(\dot{x}_1 - \lambda_3 x_2)\,\delta(\dot{x}_2 + \lambda_3 x_1)}{\pi\sqrt{R}\sqrt{1 - \tilde{m}^2 - \dot{x}_3'^2/R}}, \tag{31}$$

где

$$R = a_3^2 d = 2A_3 a_3^2. \tag{32}$$

[3] Формулы для описания движения звезды могут быть получены и из общих законов (38а). В случае (28) для этого необходимо считать $C_3 \to 0$ (чтобы произведение $l_\nu C_3$ оставалось конечным), а в случае (29) — соответственно $C_2 \to 0$ (чтобы конечным было произведение $l_\mu C_2$). В обоих случаях двухрукавная фигура (8б) вырождается в прямой круговой цилиндр с сечением $x_1^2 + x_2^2 = \mathrm{const}$.

Отлична от нуля только одна компонента дисперсии скоростей:

$$\sigma_{33}(\mathrm{x}) = A_3 a_3^2 \left(1 - \frac{r^2}{a_1^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2}\right). \tag{33}$$

Для расчета характеристик сфероидальных моделей достаточно указать, как находится, например, величина $q = n$ из (21а). Кубическое уравнение для n получим, подставив в (23) выражение для Ω_3^2 из (20а), причем в последнем следует положить $\Omega_2 = 0$ и заменить $2A_1$ с помощью вспомогательного уравнения (27а). Опуская промежуточные преобразования, найдем[4]

$$C_3 n^3 + C_2 n^2 + C_1 n + C_0 = 0, \tag{34}$$

где коэффициенты равны

$$C_3 = 2(A_1 - A_3), \quad C_2 = A_3\left(5+3\frac{a_3^2}{a_1^2}\right) - A_1\left(9 - \frac{a_3^2}{a_1^2}\right),$$
$$C_1 = 2\left[A_1\left(6 - \frac{a_3^2}{a_1^2}\right) - A_3\left(2+3\frac{a_3^2}{a_1^2}\right)\right], \quad C_0 = A_3\left(1+3\frac{a_3^2}{a_1^2}\right) - 4A_1. \tag{35}$$

Дискриминант кубического уравнения (34)

$$Q = \left(\frac{\tilde{p}}{3}\right)^3 + \left(\frac{\tilde{q}}{2}\right)^2, \tag{36}$$

где, как известно,

$$\tilde{p} = \frac{C_1}{C_3} - \frac{1}{3}\left(\frac{C_2}{C_3}\right)^3, \quad \tilde{q} = 2\left(\frac{C_2}{3C_3}\right)^3 - \frac{C_1C_2}{3C_3^2} + \frac{C_0}{C_3}. \tag{37}$$

Расчеты показали, что дискриминант обращается в нуль в точке

$$\left(\frac{a_3}{a_1}\right)_{\text{крит}} = 0{,}37203. \tag{38}$$

Следовательно, уравнение (34) имеет три вещественных корня отнюдь не на всей прямой $a_1 = a_2$, а только в точках выше указанной критической: в этих точках $Q > 0$ и существуют все три модели. Напротив, в точках, ниже указанной критической, $Q < 0$, и два корня из трех будут уже комплексными. Конкретно, при $Q < 0$ существует лишь сфероидальный вариант модели K V, в то время как модели K III и K IV «заканчиваются» в критической точке (38) на единой для них модели сфероида (в силу одинаковости двух корней уравнения (34) в этой точке).

Как видим, хотя сфероидальная модель сама по себе и не сложная, предельный переход от эллипсоида к ней требует строгого анализа. В связи с этим заметим, что при переходе к сфероиду в случае (28), дискриминант Δ из (12) в нуль никак не обратится. Дело здесь в том, что уравнение (11) было получено с помощью одного квадратичного интеграла (46а), а в этом случае предельный переход к сфероиду осуществим только при (29). Для случая же (28) надо получить аналог уравнения (11), и вместо интеграла (46а) следует взять другой интеграл (47а). Мы не будем здесь делать указанные выкладки, так как они не представляют принципиальных трудностей.

b) предельный переход к сфероидам при

[4] Конечно, уравнение (34) можно получить в сфероидальном пределе и прямо из уравнения, подобного общему уравнению (59б), но записанному для неизвестной n. Не следует также путать коэффициенты C_2 и C_3 в уравнении (34) с интегралами движения из (38а).

Таблица 1

Свойства сжатых и вытянутых сфероидов на прямой $a_1 = a_3$

Характеристики фигуры равновесия	K III	K IV	K V
$a_2/a_1 = 0{,}15$ $\Omega^{(0)} = 6{,}28353\cdot10^{-1}$ $\sigma^0_{22} = 3{,}61164\cdot10^{-2}$	Не существует	Не существует	$m = 1{,}26154$ $\lambda_2 = 3{,}03082$ $\Omega_2 = 2{,}40247$
$a_2/a_1 = 0{,}30$ $\Omega^{(0)} = 8{,}22982\cdot10^{-1}$ $\sigma^0_{22} = 1{,}19043\cdot10^{-1}$	Не существует	Не существует	$m = 1{,}34261$ $\lambda_2 = 3{,}22506$ $\Omega_2 = 2{,}40208$
$a_2/a_1 = 0{,}60$ $\Omega^{(0)} = 1{,}02385$ $\sigma^0_{22} = 3{,}42595\cdot10^{-1}$	$m = 3{,}20637\cdot10^{-1}$ $\lambda_2 = 4{,}83241\cdot10^{-1}$ $\Omega_2 = 1{,}50713$	$m = -2{,}95876\cdot10^{-1}$ $\lambda_2 = -2{,}33775\cdot10^{-1}$ $\Omega_2 = 7{,}90113\cdot10^{-1}$	$m = 1{,}44570$ $\lambda_2 = 3{,}32113$ $\Omega_2 = 2{,}29724$
$a_2/a_1 = 0{,}90$ $\Omega^{(0)} = 1{,}12976$ $\sigma^{(0)}_{22} = 5{,}86151\cdot10^{-1}$	$m = 2{,}91774\cdot10^{-1}$ $\lambda_2 = 4{,}65440\cdot10^{-1}$ $\Omega_2 = 1{,}59521$	$m = -9{,}32556\cdot10^{-1}$ $\lambda_2 = -5{,}45155\cdot10^{-1}$ $\Omega_2 = 5{,}84580\cdot10^{-1}$	$m = 1{,}51829$ $\lambda_2 = 3{,}30954$ $\Omega_2 = 2{,}17978$
$a_2/a_1 = 1{,}40$ $\Omega^{(0)} = 1{,}22572$ $\sigma^0_{22} = 9{,}75306\cdot10^{-1}$	$m = 2{,}44657\cdot10^{-1}$ $\lambda_2 = 3{,}97013\cdot10^{-1}$ $\Omega_2 = 1{,}62274$	$m = -2{,}09946$ $\lambda_2 = -8{,}30261\cdot10^{-1}$ $\Omega_2 = 3{,}95464\cdot10^{-1}$	$m = 1{,}60733$ $\lambda_2 = 3{,}24391$ $\Omega_2 = 2{,}01819$
$a_2/a_1 = 2$ $\Omega^{(0)} = 1{,}28564$ $\sigma^0_{22} = 1{,}38851$	$m = 2{,}00462\cdot10^{-1}$ $\lambda_2 = 3{,}22338\cdot10^{-1}$ $\Omega_2 = 1{,}60798$	$m = -3{,}72975$ $\lambda_2 = -1{,}01382$ $\Omega_2 = 2{,}71820\cdot10^{-1}$	$m = 1{,}68393$ $\lambda_2 = 3{,}16544$ $\Omega_2 = 1{,}87980$
$a_2/a_1 = 4$ $\Omega^{(0)} = 1{,}35985$ $\sigma^0_{22} = 2{,}41303$	$m = 1{,}15806\cdot10^{-1}$ $\lambda_2 = 1{,}78103\cdot10^{-1}$ $\Omega_2 = 1{,}53795$	$m = -11{,}28784$ $\lambda_2 = -1{,}24918$ $\Omega_2 = 1{,}10666\cdot10^{-1}$	$m = 1{,}82484$ $\lambda_2 = 3{,}00846$ $\Omega_2 = 1{,}64862$
$a_2/a_1 = 10$ $\Omega^{(0)} = 1{,}39980$ $\sigma^0_{22} = 4{,}05717$	$m = 4{,}05332\cdot10^{-2}$ $\lambda_2 = 5{,}91351\cdot10^{-2}$ $\Omega_2 = 1{,}45893$	$m = -56{,}0379$ $\lambda_2 = -1{,}37493$ $\Omega_2 = 2{,}45357\cdot10^{-2}$	$m = 1{,}94359$ $\lambda_2 = 2{,}88348$ $\Omega_2 = 1{,}48358$

Примечание. Для всех моделей $\lambda_3 = \Omega_3 = \sigma^0_{33} = 0$ и Ox_2 есть ось симметрии; $\Omega^{(0)}$ — угловая скорость вращения сфероида вокруг оси Ox_2 в инерциальной системе отсчета, одинаковая для всех трех моделей заданной формы; величины λ и Ω даны в единицах $\sqrt{\pi G\rho}$, а σ^0_{22} — в единицах $\pi G\rho a_1^2$.

$$a_3 \to a_1 \ (A_3 \to A_1) \tag{39}$$

осуществляется теми же методами, что и в случае (18). Мы не будем вдаваться в подробности, так как все формулы этого перехода можно получить из уже известных заменой индекса «2» на индекс «3». В сущности, это будут те же рассмотренные выше сфероиды, только развернутые на прямой угол $\pi/2$.

В табл. 1 приведены некоторые характеристики трех сфероидальных моделей вдоль предельного геометрического места точек $a_1 = a_3$.

4. О конвергенции моделей K III и K IV на некоторой предельной кривой

Мы уже обратили внимание на то, что модели K III и K IV отсутствуют среди тех сжатых сфероидов, сплюснутость которых больше критической. Связано это с обращением в нуль дискриминанта (36) у сфероидов с критическим сжатием. Возникает вопрос: а есть ли модели K III и K IV с аналогичным свойством $Q = 0$ среди трехосных невырожденных эллипсоидов? Ответ на него мы сейчас получим.

Характеристики моделей К III и К IV вдоль предельного геометрического места точек конвергенции данных моделей

a_2/a_1	a_3/a_1	Модели К III и К IV
1	0,37203	$A_1 = A_2 = 3{,}927429 \cdot 10^{-1}$; $A_3 = 1{,}2145144$ $n = 2{,}5603793 \cdot 10^{-1}$ $\lambda_2 = 0; \lambda_3 = 3{,}0501601 \cdot 10^{-1}$ $\Omega_2 = 0; \Omega_3 = 1{,}1912923$ $\sigma^0_{22} = 0; \sigma^0_{33} = 1{,}6909646 \cdot 10^{-1}; \sigma^0_{23} = 0$
1,05	$3{,}0990786 \cdot 10^{-1}$	$A_1 = 3{,}5195503 \cdot 10^{-1}$; $A_2 = 3{,}2943226 \cdot 10^{-1}$; $A_3 = 1{,}3186126$; $m = -1{,}7514749$ $\lambda_2 = -1{,}9709955 \cdot 10^{-1}$; $\lambda_3 = 3{,}3949087 \cdot 10^{-1}$ $\Omega_2 = 3{,}6311914 \cdot 10^{-1}$; $\Omega_3 = 1{,}0640383$ $\sigma^0_{22} = 5{,}4845207 \cdot 10^{-2}$; $\sigma^0_{33} = 9{,}6265614 \cdot 10^{-2}$; $\sigma^0_{23} = 7{,}2661564 \cdot 10^{-2}$
1,1	0,2448	$A_1 = 3{,}001769 \cdot 10^{-1}$; $A_2 = 2{,}6313811 \cdot 10^{-1}$; $A_3 = 1{,}436685$; $m = -2{,}5292791$ $\lambda_2 = -2{,}7715315 \cdot 10^{-1}$; $\lambda_3 = 3{,}5921551 \cdot 10^{-1}$ $\Omega_2 = 4{,}4762224 \cdot 10^{-1}$; $\Omega_3 = 9{,}3317747 \cdot 10^{-1}$ $\sigma^0_{22} = 8{,}222 \cdot 10^{-2}$; $\sigma^0_{33} = 4{,}741 \cdot 10^{-2}$; $\sigma^0_{23} = 6{,}243 \cdot 10^{-2}$
1,2018108	0,100000	$A_1 = 1{,}4599452 \cdot 10^{-1}$; $A_2 = 1{,}1188387 \cdot 10^{-1}$; $A_3 = 1{,}7421205$ $\lambda_2 = -3{,}1768776 \cdot 10^{-1}$; $\lambda_3 = 3{,}1512643 \cdot 10^{-1}$ $\Omega_2 = 4{,}0443225 \cdot 10^{-1}$; $\Omega_3 = 5{,}9302961 \cdot 10^{-1}$ $\sigma^0_{22} = 6{,}0500288 \cdot 10^{-2}$; $\sigma^0_{33} = 3{,}250433 \cdot 10^{-3}$ $m = -7{,}855154$; $\sigma^0_{23} = 1{,}4023254 \cdot 10^{-2}$
1,25	$2{,}321865 \cdot 10^{-2}$	$A_1 = 3{,}7337475 \cdot 10^{-2}$; $A_2 = 2{,}678935 \cdot 10^{-2}$; $A_3 = 1{,}9358728$ $\lambda_2 = -1{,}916405 \cdot 10^{-1}$; $\lambda_3 = 1{,}7519435 \cdot 10^{-1}$ $\Omega_2 = 2{,}2025406 \cdot 10^{-1}$; $\Omega_3 = 2{,}8785388 \cdot 10^{-1}$ $\sigma^0_{22} = 1{,}6183106 \cdot 10^{-2}$; $\sigma^0_{33} = 4{,}0614121 \cdot 10^{-5}$ $m = -37{,}473685$; $\sigma^0_{23} = 8{,}1071497 \cdot 10^{-4}$

Если в уравнении (59б) коэффициент C_3 не равен нулю[4], то подстановкой $m = m' - \frac{C_2}{3C_3}$ приведем его к виду

$$m'^3 + \tilde{p}m' + \tilde{q} = 0, \tag{40}$$

где выражения для $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$ даны в (37) [5]. Нас, следовательно, интересует геометрическое место точек на плоскости $(a_2/a_1, a_3/a_1)$, задаваемое уравнением

$$\left(\frac{\tilde{p}}{3}\right)^3 + \left(\frac{\tilde{q}}{2}\right)^2 = 0. \tag{41}$$

Как известно, при обращении в нуль дискриминанта кубического урав-

[4] Заметим, что $C_3 = 0$ только на прямой $a_2 = a_3$ и для нас на ней будет иметь значение лишь точка $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, означающая сферу. Предположение в тексте не умаляет общности, так как сфера — особая фигура равновесия, для которой равны нулю и остальные коэффициенты кубического уравнения.

[5] Разумеется, сейчас C_i в (37) надо взять из формул (60б) — (63б).

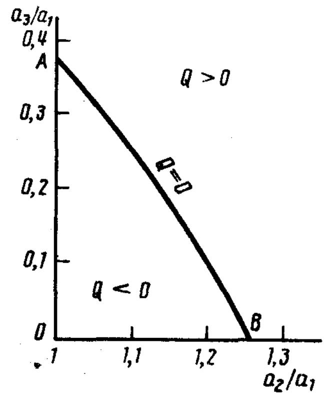

Рис. 3. Кривая AB на плоскости (a_2/a_1, a_3/a_1), определенная неявно уравнением (41). На этом геометрическом месте точек находится однопараметрическая последовательность эллипсоидов конвергенции моделей K III и K IV. Ниже кривой (где $Q < 0$) этих двух классов не существует

нения среди его решений два корня должны быть одинаковыми. В нашем случае корни будут равны

$$m_{\rm III} = m_{\rm IV} = -\sqrt[3]{-\tilde{q}/2} - \frac{C_2}{3C_3}\,; \quad m_{\rm V} = 2\sqrt[3]{-\tilde{q}/2} - \frac{C_2}{3C_3}\,. \tag{42}$$

Два одинаковых корня относятся к интересующим нас моделям K III и K IV, а последний корень описывает третью модель K V.

Фактически, ответ на поставленный вопрос оказывается положительным и дело сводится к анализу уравнения (41), связывающему в неявном виде отношения полуосей эллипсоидальных моделей. Решения уравнения (41) представлены в табл. 2 и на рис. 3. Таблица содержит также некоторые характеристики моделей K III и K IV на найденном предельном геометрическом месте точек. Как видно, на нем эти две модели действительно конвергируют к одной единственной модели.

5. Граничные последовательности эллипсоидов K III и K IV без дисперсии скоростей

Наряду с превращением в прямой круговой цилиндр, двухрукавная фигура (8б) может в результате некоторого предельного перехода быть превращена и в плоский эллипс. Но при таком сильном вырождении двухрукавной фигуры надо следить за тем, чтобы орбиты частиц по прежнему заполняли весь допустимый объем эллипсоида (1а).

Без учета последнего требования можно встать на ложный путь. Действительно, следуя статье [4], проще всего получить одиночный плоский эллипс, положив в формуле (8б) $C_2 = 0$ или $C_3 = 0$. В работе [4] данный способ приводил все же к заполнению орбитами объема эллипсоида, поскольку в силу существования в модели особой прямой центр двухрукавной фигуры мог находиться в любой точке последней. Но сейчас ситуация в принципе иная — в моделях нет особой прямой, и центры всех двухрукавных фигур обязаны совпадать с центром эллипсоида (1а). Другими словами, при вырождении фигуры (8б) при $C_2 = 0$ или $C_3 = 0$ сейчас получится лишь эллипс, плоскость которого должна обязательно пройти через центр симметрии эллипсоида. Нас же может устроить лишь целая стопка из множества эллипсов в параллельных плоскостях.

Но есть еще один способ превратить фигуру (8б) в плоский эллипс, причем без указанного выше изъяна[7]. Полагая в (8б)•

[7] Речь идет о получении уже не одиночного эллипса, а сразу целой их стопки.

$$D_2 = 0, \text{ т. е. } l_\mu = \frac{\lambda_3 a_3}{\lambda_2 a_2}, \text{ и } \mu = 0^{8}, \tag{43}$$

мы хотя и получим тот же эллипс (11б), однако без обязательного теперь требования $\xi = 0$ прохождения его плоскости через центр эллипсоида (1а) (сравните со случаем $C_2 = 0$ выше). Аналогично, положив в (8б)

$$D_3 = 0, \text{ т. е. } l_\nu = \frac{\lambda_3 a_3}{\lambda_2 a_2}, \text{ и } \nu = 0, \tag{44}$$

мы также получим эллипс

$$x_1^2 + \left(\frac{D_2}{l_\mu - l_\nu}\xi\right)^2 = D_2^2 C_2^2, \tag{45}$$

плоскость которого в общем случае не проходит через центр эллипсоида (1а). Действительно, в последнем варианте нет дополнительного требования $\eta = 0$ (как при $C_3 = 0$). В итоге, методом подбора значений для характеристик моделей мы получили: в случае (43) — стопку подобных эллипсов, центры которых находятся на оси $O\xi$[9], а в случае (44) — стопку эллипсов (45), центры симметрии которых находятся на оси $O\eta$.

Но рассматривая движение звезды по эллипсу, из двух частот μ и ν мы можем потребовать обращения в нуль (см. неравенства (37а)) именно последней. Следовательно, из двух способов получения эллипсов нам подходит лишь представленный в (44).

В случае (44) движение звезды описывается формулами

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_2 D_2 \sin(\mu t - \varepsilon_2), \\ x_2(t) &= C_3 + C_2 \cos(\mu t - \varepsilon_2), \\ x_3(t) &= l_\nu C_3 + l_\mu C_2 \cos(\mu t - \varepsilon_2), \end{aligned} \tag{46}$$

полученными из общих выражений (38а) в случае (44). Для наглядности представим это движение в главных косоугольных координатах:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_2 D_2 \sin(\mu\, t - \varepsilon_2), \\ \xi(t) &= C_2(l_\mu - l_\nu)\cos(\mu\, t - \varepsilon_2), \\ \eta &= \text{const}. \end{aligned} \tag{47}$$

Плоскость любого эллипса данной стопки сопряжена с направлением оси $O\eta$. В самом деле, другая ось $O\xi$ параллельна плоскостям этих эллипсов, а поскольку эта ось, как было установлено в (25б), сопряжена с осью $O\eta$ то справедливость первого утверждения становится очевидной. Центры эллипсов стопки — на оси $O\eta$. Из условия сопряженности осей $O\xi$ и $O\eta$ следует, что

$$l_\mu = -\frac{\lambda_2 a_3}{\lambda_3 a_2}. \tag{48}$$

С учетом $\nu = 0$, из (32а) и (33а) следуют соотношения

$$\mu^2 = a + d, \quad x(1 - 2n) + y(1 - 2m) = 1, \tag{49}$$

---

[8]Требование условия $\mu = 0$ следует из формул (38а), так как движение по эллипсу происходит, естественно, с одной какой-то частотой; отсюда и $\nu = 0$ в формулах (44).

[9]Прямая в плоскости $0x_2x_3$ с коэффициентом наклона $k = \frac{\lambda_3 a_3}{\lambda_2 a_2}$ совпадает с осью покоя звезд в равновесном эллипсоиде ([5], с. 169). Согласно же (3б) $l_\mu = \operatorname{tg}\varphi$, так что эта прямая покоя и есть ось $O\xi$.

где обозначено

$$x = \frac{\Omega_3^2}{2A_2}, \quad y = \frac{\Omega_2^2}{2A_3}. \tag{50}$$

Эти соотношения используются ниже.

В рассматриваемом случае поле скоростей отдельных звезд совпадает с полем скоростей центроидов, поэтому оба поля описываются формулами (17а) и (25а). Данное поле скоростей заведомо удовлетворяет условию сохранения эллипсоидальной границы модели.

Чтобы эллипсы (44) не «сползали» по оси $O\eta$, эта последняя должна совпадать с особой прямой. Итак, хотя в общем случае наши модели не содержат особой прямой с условием существования (5а), в эллипсоидах без дисперсии скоростей эта прямая все же появляется. Докажем это. В эллипсоиде, звезды которого движутся по подобным эллипсам, все компоненты дисперсии скоростей равны нулю. Последнее означает, что в общей формуле (52б) необходимо положить $N = 0$, или с учетом вида N из (42б),

$$\frac{\lambda_3 a_3}{\lambda_2 a_2} = -\frac{a}{b}. \tag{51}$$

Подставив сюда a и b из (29а), получим уравнение для неизвестной x:

$$\frac{n}{m} = \frac{1-2n}{1-2m} - \frac{1}{x(1-2m)}. \tag{52}$$

Решая его и учитывая второе уравнение из (49), находим

$$x = \frac{m}{m-n}, \quad y = -\frac{n}{m-n}. \tag{53}$$

Найденные значения x и y удовлетворяют, как легко видеть, условию (5а), что и требовалось доказать.

Для нахождения самих величин m и n, в дополнение к (27б) надо вывести еще одно уравнение. Для этого сложим решения (22а) и (23а), и с учетом того же (27б) найдем вспомогательное выражение

$$2A_1 - \Omega^2 = \frac{1}{Ka_1^2}\,[A_2 a_2^2 (n-2) - A_3 a_3^2 (m-2)]. \tag{54}$$

Но, с другой стороны, согласно (27а),

$$2A_1 - \Omega^2 = \frac{1}{a_1^2}\,[a_3^2\Omega_2^2 m (m-2) + a_2^2\Omega_3^2 n (n-2)]. \tag{55}$$

Исключив из последних двух выражений величину $(2A_1 - \Omega^2)$, после простых преобразований получим

$$A_2 a_2^2 (n-2)\,[2nKx - 1] + A_3 a_3^2 (m-2)\,[2mKy + 1] = 0. \tag{56}$$

Подставляя сюда выражения для x и y из (53), в итоге находим

$$\left(2K\frac{mn}{m-n} - 1\right)[A_2 a_2^2 (n-2) - A_3 a_3^2 (m-2)] = 0. \tag{57}$$

Удовлетворить же уравнению (57) можно единственным способом, полагая

$$\frac{m-n}{mn} = 2K. \tag{58}$$

Это и есть искомое второе уравнение для неизвестных m и n.

Решение системы двух уравнений (27б) и (58) сводится к нахождению корней квадратного уравнения

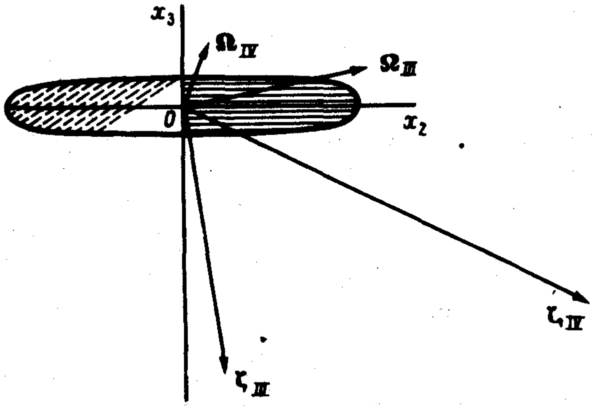

Рис. 4. Взаимное расположение векторов угловой скорости Ω и вихря ζ в сопряженных моделях К III и К IV без дисперсии скоростей. Все относительные размеры и направления векторов реальны и рассчитаны для моделей с $a_2/a_1 = 4$ и $a_3/a_1 = 0{,}60032$. Для коэффициентов наклона всех векторов выполняется равенство $k_\Omega k_\zeta = k_\Omega^+ k_\zeta^+$. Штриховкой показаны части тех плоскостей, в которых движутся звезды: слева — в модели К III, справа — в модели К IV

$$m^2 - 2\frac{a_1^2}{a_3^2}(1-K)\,m + \frac{a_1^2}{a_3^2} = 0. \tag{59}$$

Решая последнее, получим

$$m_{1,2} = \frac{a_1^2}{a_3^2}\left[(1-K) \pm \sqrt{(1-K)^2 - \frac{a_3^2}{a_1^2}}\,\right]. \tag{60}$$

Зная m, из уравнения (27б) легко получим и n.

Согласно (60), при заданных параметрах a_2/a_1 и a_3/a_1 существует два значения величины m (а значит, и n). Следовательно, рассматриваемый предельный переход дает сразу две модели эллипсоидов без дисперсии скоростей. И так как, согласно [59],

$$m_1 \cdot m_2 = a_1^2/a_3^2, \quad \text{т. е.} \quad p_1 p_2 = 1, \tag{61}$$

то предельные эллипсоиды являются сопряженными в духе теоремы Дедекинда (см. рис. 4, а также с. 121 монографии [5]). Очевидно, и

$$n_1 \cdot n_2 = a_1^2/a_2^2, \quad \text{т. е.} \quad q_1 \cdot q_2 = 1. \tag{62}$$

Легко убедиться, что обе модели находятся на геометрическом месте точек, представленном уравнением (6а). Действительно, записав выражения (53) в виде

$$\Omega_2^2 = -2A_3\frac{n}{m-n}, \quad \Omega_3^2 = 2A_2\frac{m}{m-n}, \tag{63}$$

подставим их затем в (55). После преобразований имеем такое уравнение

$$Ka_1^2(A_1 - A_2 - A_3) + A_2(a_2^2 - a_1^2) + A_3(a_1^2 - a_3^2) = 0. \tag{64}$$

Учитывая тождество $A_1 + A_2 + A_3 = 2\pi G\rho$, приводим (64) к виду

$$A_3(a_1^2 - a_3^2 - 2a_1^2K) - A_2(a_1^2 - a_2^2 + 2a_1^2K) + 2\pi G\rho\, a_1^2 K = 0. \tag{65}$$

Подставляя сюда K из (28б), в итоге и получим из (65) искомое соотношение (6а). Доказательство закончено.

Рассмотренный предельный переход имеет радикальный характер. Получающиеся модели без дисперсии скоростей являются замечательными аналогами жидких эллипсоидов Римана без давления. Функция фазовой плотности имеет вид

$$f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \rho\delta\,[\dot{x}_1 - \Omega_3 n x_2 + \Omega_2 m x_3]\,\delta\left[\dot{x}_2 + \right.$$
$$\left. + \frac{a_2^2}{a_1^2}\Omega_3 n x_1\right]\delta\left[\dot{x}_3 - \frac{a_3^2}{a_1^2}\Omega_2 m x_1\right]. \qquad (66)$$

Найденные модели — однопараметрические. Ясно, что двигаясь в плоскости свободных параметров (a_2/a_1, a_3/a_1) от сфероидов к эллипсоидам без дисперсии скоростей, нельзя пересечь кривую (6а) и очутиться вне ее (речь, напомним, идет о моделях K III и K IV), поскольку диагональные компоненты тензора дисперсии скоростей отрицательными быть не могут. Сказанное означает, что геометрическое место точек (6а) (см. [1], рис. 1, *б*) является одной из границ области существования данных моделей K III и K IV.

6. Модель K V на геометрическом месте точек (6а)

Как мы выяснили, на кривой (6а) модели K III и K IV претерпевают качественный скачок и ниже этой кривой они уже не существуют. Что же происходит на этой же кривой с третьей моделью K V?

Будем исходить из того, что на кривой (6а) кубическое уравнение (59б) допускает разложение на множители[10]

$$\left[m - 2\frac{a_2^2(A_3 - A_2) + a_1^2 A_2 K}{A_3 a_2^2 - A_2 a_3^2}\right]\cdot\left[m^2 - 2\frac{a_1^2}{a_3^2}(1 - K)\,m + \frac{a_1^2}{a_3^2}\right] = 0. \qquad (67)$$

Заметим, что разложение в виде (67) согласуется с фактом существования на геометрическом месте точек (6а) уравнения (59). Таким образом, для модели K V на кривой (6а) должны выполняться равенства

$$m = 2\frac{(A_3 - A_2)\,a_2^2 + A_2 a_1^2 K}{A_3 a_2^2 - A_2 a_3^2}, \quad n = 2\frac{(A_3 - A_2)\,a_3^2 + A_3 a_1^2 K}{A_3 a_2^2 - A_2 a_3^2}. \qquad (68)$$

Данные m и n будут удовлетворять, как легко видеть, уравнению

$$A_3(m - 2) = A_2(n - 2). \qquad (69)$$

Используя уравнение (69), из выражений (22а) — (23а) получим

$$\Omega_2^2 = 2\frac{n-2}{m-n}\,[A_2(2n - 3) - A_1],$$
$$\Omega_3^2 = 2\frac{m-2}{m-n}\,[A_1 - A_3(2m - 3)]. \qquad (70)$$

Величины (70) удовлетворяют условию (6а), так что и для модели K V на этом геометрическом месте точек существует особая прямая (ранее мы убедились в том, что это имеет силу и для моделей K III и K IV). Отмеченная закономерность — важный факт в теории равновесных эллипсоидов.

Как оказывается, модель K V на геометрическом месте точек (6а) и является той самой моделью, которая как предельный случай впервые была найдена в статье [4]. Взгляд на эту модель с двух разных точек зрения представляется нам замечательным шагом вперед в развитии теории.

Найденные формулы исчерпывают задачу. Вычисление величин λ_2, λ_3, компонентов тензора дисперсии скоростей и остальных характеристик модели K V на кривой (6а) не представляет затруднений (см. табл. 3).

[10] Доказательство этого нетривиального факта является громоздким и мы его вынуждены опустить.

Таблица 3

Свойства эллипсоидов К V вдоль геометрического места точек $A_3 - A_2 = \pi G\rho \dfrac{a_2^2 - a_3^2}{a_2^2 + a_3^2 - 2a_1^2}$

a_2/a_1	a_3/a_1	Характеристики модели К V
2,4	0,21426	$A_1 = 0{,}317386$; $A_2 = 0{,}090609$; $A_3 = 1{,}592005$ $m = 1{,}9152694$; $n = 0{,}511279$ $\lambda_2 = 0{,}818925$; $\lambda_3 = 0{,}831031$ $\Omega_2 = 1{,}026185$; $\Omega_3 = 0{,}348258$ $\sigma_{22}^0 = 3{,}8525\cdot 10^{-3}$; $\sigma_{33}^0 = 0{,}137433$; $\sigma_{23}^0 = 0{,}0230497$
2,8	0,35961	$A_1 = 0{,}480642$; $A_2 = 0{,}113819$; $A_3 = 1{,}405539$ $m = 1{,}880376$; $n = 0{,}522770$ $\lambda_2 = 0{,}830704$; $\lambda_3 = 0{,}468204$ $\Omega_2 = 1{,}236972$; $\Omega_3 = 0{,}322075$ $\sigma_{22}^0 = 0{,}0396215$; $\sigma_{33}^0 = 0{,}409662$; $\sigma_{23}^0 = 0{,}127410$
3,2	0,46340	$A_1 = 0{,}581477$; $A_2 = 0{,}116385$; $A_3 = 1{,}302138$ $m = 1{,}868495$; $n = 0{,}528698$ $\lambda_2 = 0{,}777638$; $\lambda_3 = 0{,}310864$ $\Omega_2 = 1{,}331788$; $\Omega_3 = 0{,}272470$ $\sigma_{22}^0 = 0{,}125614$; $\sigma_{33}^0 = 0{,}658073$; $\sigma_{23}^0 = 0{,}287490$
3,6	0,54031	$A_1 = 0{,}650571$; $A_2 = 0{,}111786$; $A_3 = 1{,}237643$ $m = 1{,}867299$; $n = 0{,}530798$ $\lambda_2 = 0{,}716237$; $\lambda_3 = 0{,}222622$ $\Omega_2 = 1{,}380845$; $\Omega_3 = 0{,}226611$ $\sigma_{22}^0 = 0{,}254175$; $\sigma_{33}^0 = 0{,}839099$; $\sigma_{23}^0 = 0{,}461817$
4	0,60032	$A_1 = 0{,}701377$; $A_2 = 0{,}104833$; $A_3 = 1{,}19379$ $m = 1{,}870989$; $n = 0{,}530880$ $\lambda_2 = 0{,}658727$; $\lambda_3 = 0{,}166625$ $\Omega_2 = 1{,}408297$; $\Omega_3 = 0{,}188419$ $\sigma_{22}^0 = 0{,}412628$; $\sigma_{33}^0 = 0{,}959212$; $\sigma_{23}^0 = 0{,}629109$
4,4	0,64781	$A_1 = 0{,}740144$; $A_2 = 0{,}097288$; $A_3 = 1{,}162568$ $m = 1{,}876972$; $n = 0{,}529848$ $\lambda_2 = 0{,}607414$; $\lambda_3 = 0{,}129084$ $\Omega_2 = 1{,}423901$; $\Omega_3 = 0{,}157822$ $\sigma_{22}^0 = 0{,}587441$; $\sigma_{33}^0 = 1{,}0305036$; $\sigma_{23}^0 = 0{,}7780206$
4,8	0,68659	$A_1 = 0{,}770934$; $A_2 = 0{,}089960$; $A_3 = 1{,}139106$ $m = 1{,}883775$; $n = 0{,}528312$ $\lambda_2 = 0{,}562416$; $\lambda_3 = 0{,}102458$ $\Omega_2 = 1{,}433077$; $\Omega_3 = 0{,}133153$ $\sigma_{22}^0 = 0{,}770772$; $\sigma_{33}^0 = 1{,}066895$; $\sigma_{23}^0 = 0{,}906835$

7. Заключение

В дополнение к сказанному заметим, что исследование различных предельных случаев имеет важное значение для выяснения самих областей существования моделей в плоскости $(a_2/a_1,\ a_3/a_1)$. Решению данной задачи будет посвящена четвертая, заключительная статья данного цикла.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кондратьев Б. П.*//Астрон. журн. 1992. Т. 69. С. 201.
2. *Кондратьев Б. П.*//Астрон. журн. 1992. Т. 69. С. 391.
3. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
4. *Кондратьев Б. П.*//Астрофизика. 1984. Т. 21. С. 499.
5. *Кондратьев Б. П.*//Динамика эллипсоидальных гравитирующих фигур. М.: Наука, 1989. 272 с.

Глазовский педагогический ин-т

Поступила в редакцию 4.VI.1990