

УДК 521.1

© 1993 г. КОНДРАТЬЕВ Б. П.

НОВЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ НЬЮТОНОВСКОГО ПОТЕНЦИАЛА. О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ОДНОРОДНЫХ ГРАВИТИРУЮЩИХ ТЕЛ СХОДЯЩИМИСЯ РЯДАМИ

Развит метод представления потенциальной энергии однородных гравитирующих (а также электрически заряженных) тел в виде особых рядов. Эти ряды содержат члены, состоящие из произведений соответствующих коэффициентов, появляющихся при разложении внешних и внутренних ньютоновских потенциалов в ряды по полиномам Лежандра. Представление потенциальной энергии через такие ряды возможно в нескольких вариантах. Попутно выведена формула, выражающая потенциальную энергию не через объемный, как общепринято, а через интеграл по поверхности тела. Метод проверен для частных случаев шара и эллипсоида. Доказана сходимость найденных рядов.

NEW METHODS IN THE THEORY OF NEWTONIAN POTENTIAL. ON REPRESENTATION OF POTENTIAL ENERGY OF HOMOGENEOUS GRAVITATING BODIES BY MEANS OF CONVERGING SERIES, by Kondrat'ev B. P. — A method is developed for representation of potential energy of homogeneous gravitating (or charged with static electricity) in the form of special series. These series contain terms which consist of products of corresponding coefficients appearing in expansion of external and internal Newtonian potentials in Legendre polynomial series. Representation of potential energy in such series is possible in several ways. In particular, a formula is derived which expresses potential energy not as a commonly accepted volume integral but as an integral over the body surface. The method has been tested for the particular cases of sphere and ellipsoid.

1. Введение

В физике и астрономии при решении многих задач требуется знать потенциальную или, как принято в теории притяжения, ньютоновскую энергию тел разной формы. Вычисление потенциальной энергии необходимо уже потому, что именно эта величина входит в вириальные уравнения второго порядка, являющиеся важным инструментом в исследовании равновесия и устойчивости тел [1].

Рассматривая потенциальную энергию мы подразумеваем, что силовое взаимодействие между элементами тела подчиняется закону обратных квад-

ратов. Таким образом, имеются в виду как тела, гравитирующие по закону Ньютона, так и тела, с электрическим зарядом, элементы которого притягиваются или отталкиваются по закону Кулона.¹

Напомним некоторые известные формулы. Пусть даны две массы M_1 и M_2 , распределенные в объемах T_1 и T_2 с плотностями $\rho_1(x)$ и $\rho_2(x)$ соответственно. Любая из масс является источником гравитационного поля с потенциалом

$$\varphi_i(x) = G \iiint_{T_i} \frac{\rho_i(x')}{|x - x'|} dV', \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

и, находясь в поле притяжения партнера, имеет гравитационную энергию

$$W_{ij} = - \iiint_{T_i} \rho_i \varphi_j dV, \quad i, j = 1, 2. \quad (2)$$

Так, $W_{1,2}$ есть энергия первой массы в силовом поле второй. Подчеркнем, что речь идет о взаимных потенциальных энергиях двух тел, когда выполняется важное равенство

$$W_{12} = - \iiint_{T_1} \rho_1 \varphi_2 dV = - \iiint_{T_2} \rho_2 \varphi_1 dV. \quad (3)$$

Равенство (3) следует рассматривать как проявление фундаментального принципа механики: действие равно по величине противодействию.

В том важном частном случае, когда оба тела тождественно совпадают, энергия массы в собственном поле оказывается равной

$$W = W_{ii} = -1/2 \iiint_T \rho \varphi dV \quad (4)$$

(множитель $1/2$ появился потому, что при составлении потенциальной энергии тела на самого себя все его элементы массы учитывались дважды). Известным способом (4) приводится к интегралу

$$W = - \frac{1}{8\pi G} \iiint (\text{grad } \varphi)^2 dV, \quad (5)$$

распространенному на все пространство. Но независимо от формы представления, потенциальная энергия есть та работа, которую необходимо совершить, чтобы удалить все элементы массы на бесконечное расстояние друг от друга (поскольку именно состояние полной распыленности массы и принимается за нуль-пункт отсчета энергии).

Нужно отметить, что потенциальная энергия изолированного от внешнего влияния тела равна вириалу сил притяжения внутри него:

$$W = -1/2 \iiint_T \rho \varphi dV = \iiint_T \rho x \text{ grad } \varphi dV. \quad (6)$$

На практике прямое вычисление потенциальной энергии по указанным выше формулам приводит к цели весьма редко. Причина ясна: в конечной аналитической форме даже сам потенциал φ известен лишь для очень небольшого числа тел; следующий же шаг — нахождение потенциальной

¹ Далее для краткости говорится только о гравитирующих телах, но все выводы верны и для электрического поля неподвижных зарядов при условии $G = 1$, ρdV понимается под заряд в объеме dV , а знак потенциальной энергии меняется на обратный.

энергии тела — предполагает еще и вычисление объемных интегралов, под знаком которых стоит этот потенциал. Поэтому, если только не ограничиваться одними однородными или слоисто-неодородными шарами и трехосными эллипсоидами (и некоторыми их вырожденными формами²), нахождение потенциальной энергии аналитическими средствами наталкивается на труднопреодолимые преграды³. Причиной этому является еще одно обстоятельство. Потенциальная энергия не относится к величинам, аддитивным по массе (заряду), и даже зная энергию какого-то тела, нельзя ничего сказать об энергии его отдельных частей. Приведем пример. Известно, что гравитационная энергия однородного шара с радиусом R равна

$$W = -\frac{3}{5} \frac{M^2 G}{R}. \quad (7)$$

Однако любая попытка найти энергию какой-либо части того же шара, будь то сегмент или шаровой слой, опираясь на обычные методы анализа, оказывается безрезультатной вследствие аналитических трудностей. Все это говорит о том, что прежние методы себя исчерпали и требуется что-то новое, чтобы идти дальше в этой трудной области математической физики.

В данной статье развит новый метод вычисления потенциальной энергии тел, которые ради упрощения мы принимаем однородными. В следующем разделе показано, каким образом объемный интеграл (4) можно свести к интегралу по поверхности рассматриваемого тела. В разд. 3 будет установлено, каким образом вычисление потенциальной энергии может быть сведено к суммированию особых функциональных рядов, составленных из пар тех коэффициентов, которые получаются при разложении потенциалов тела во внешней и внутренней гочках. Число членов в ряде зависит от геометрической симметрии рассматриваемого тела. Далее показано, что представление потенциальной энергии функциональным рядом может быть сделано не единственным способом.

2. О вычислении потенциальной энергии с помощью поверхностного интеграла.

Интегрируя по объему T известное равенство векторной алгебры

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{f} \mathbf{x}) = 3\rho \mathbf{f} + \mathbf{x} \operatorname{grad}(\rho \mathbf{f}), \quad (8)$$

имеем

$$\iiint_T \operatorname{div}(\rho \mathbf{f} \mathbf{x}) dV = 3 \iiint_T \rho \mathbf{f} dV + \iiint_T \mathbf{x} \operatorname{grad}(\rho \mathbf{f}) dV. \quad (9)$$

Заменяя первый член справа согласно (4) на $(-6W)$, получим соотношение

$$6W - \iiint_T \mathbf{x} \operatorname{grad}(\rho \mathbf{f}) dV = - \iiint_T \operatorname{div}(\rho \mathbf{f} \mathbf{x}) dV. \quad (10)$$

Полагая теперь плотность ρ не зависящей от координат

$$\rho = \text{const}, \quad (11)$$

в левой части (10) получим с учетом (6) величину $5W$. Следовательно,

$$W = -\frac{1}{5} \rho \iiint_T \operatorname{div}(\mathbf{f} \mathbf{x}) dV. \quad (12)$$

² Слоисто-неодородные эллипсоиды и эллипсоидальные оболочки детально рассмотрены в монографии [2].

³ Что касается численных методов, то не оспаривая их важности заметим, что развитие теории опирается в основном именно на аналитический метод.

Далее, пользуясь формулой Остроградского—Гаусса, преобразуем в (12) объемный интеграл в поверхностный. В итоге получим выражение

$$W = -1/5 \rho \iiint_V \varphi x dS, \quad (13)$$

где S — поверхность, ограничивающая тело, а dS — ее векторный элемент⁴. Обозначив через $n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ единичную нормаль к поверхности S в точке x , где α_i — направляющие косинусы этой нормали, имеем

$$x dS = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) dS. \quad (14)$$

В сферических же координатах (не путать угол φ в (15) и (19) с потенциалом)

$$x dS = r^3 d\omega = r^3 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (15)$$

Напомним еще равенство

$$\iiint_V x dS = 3V. \quad (16)$$

Итак, вычисление потенциальной энергии однородных тел по формуле (13) сводится к интегрированию известных функций не по объему, как ранее, а по поверхности этих тел. Такой прием имеет не только методическое, но и большое практическое значение.

Вот два несложных примера на применение формулы (13). Первый: вычислить энергию однородного шара с радиусом R и массой M . На границе сферы потенциал равен постоянному значению $\varphi|_S = GM/R$. Вынесем это $\varphi|_S$ за знак интеграла в (13), тогда, учитывая (16), сразу получим искомое выражение (7).

Второй пример: найти потенциальную энергию однородного трехосного эллипсоида, ограниченного поверхностью

$$x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 + x_3^2/a_3^2 = 1. \quad (17)$$

Известно, что потенциал такого эллипсоида равен (с. 4. (2.85))

$$\varphi(x) = \pi G \rho \left[I - \sum_{i=1}^3 A_i r_i^2 \right]. \quad (18)$$

Подставим (18) в (13) и интегрирование будем проводить в сферических координатах. Учитывая формулу (15) и то, что уравнение поверхности (17) имеет теперь вид

$$r^2(\varphi, \theta) = \left[\sin^2 \theta \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{a_2^2} \right) + \frac{\cos^2 \theta}{a_3^2} \right]^{-1}, \quad (19)$$

легко найдем интегралы

$$\iiint_V x_i^2 r^3 d\omega = V a_i^2 = 4/3 \pi a_1 a_2 a_3 a_i^2. \quad (20)$$

⁴ Претензий на новизну формулы (13) у нас нет: в несколько чной форме она содержится у Ляпунова [3]. Подчеркнем, однако, что маститый автор не придал этой формуле почти никакого внимания. Заметим, что, хотя формула Остроградского—Гаусса непосредственно применима лишь к пространственно-односвязным областям, интеграл (13) можно распространить и на тела с внутренними полостями, если учесть, что на границе этих каверн направление нормали будет обратным. Очевидно также, что формула (13) не тождественна малоизвестному, в общем-то, выражению (см. [4], с. 95) $W = -G/12\rho^2 \iint dS \iint R \cos \varphi \cdot \cos \varphi' dS'$, представляющему потенциальную энергию однородного тела четырехкратным интегралом, дважды распространенным на граничную поверхность этого тела.

Учитывая это, мы и приходим к выражению энергии однородного эллипсоида

$$W = -2/5 \pi G \rho M I. \quad (21)$$

Другие примеры на применение формулы (13) мы опускаем из-за отсутствия места. Важно подчеркнуть, что формула (13) имеет для нас не только методическое значение. Ее можно применить, например, к телам с полостями, энергию которых обычными методами найти очень трудно. Кроме того, используя формулу (13), ниже будет развит еще один новый метод вычисления потенциальной энергии однородных тел.

3. Нахождение потенциальной энергии с помощью особых рядов

Ограничимся ради упрощения выкладок телами, имеющими круговую (ротационную) симметрию, причем пока плотность считаем неоднородной. Рассмотрим гравитирующее тело T , потенциал которого во *внешней* точке r представлен рядом по полиномам Лежандра:

$$\varphi(r, \theta) = G \sum_{n=0}^{\infty} D_n r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta), \quad (22)$$

причем коэффициенты равны

$$D_n = \iiint_T \rho(r', \theta') (r')^n P_n(\cos \theta') dV' \quad (23)$$

и представляют, как известно, мультипольные моменты масс. Пусть в этом поле $\varphi(r, \theta)$, которое будем считать внешним, находится второе тело T' с объемной плотностью $\tilde{\rho}(r, \theta)$. И первая, и вторая массы имеют ротационную симметрию относительно некоторой прямой, от которой и измеряется угол θ . Нас интересует теперь потенциал второго тела *во внутренней точке* g , который также можно представить рядом по полиномам Лежандра⁵.

$$\tilde{\varphi}(r, \theta) = G \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{D}_n r^n P_n(\cos \theta), \quad (24)$$

причем коэффициенты здесь равны

$$\tilde{D}_n = 2\pi \iint_{\Sigma} \tilde{\rho}(r', \theta') (r')^{1-n} P_n(\cos \theta') \sin \theta' dr' d\theta'. \quad (25)$$

Выяснив это, поставим целью найти *взаимную* гравитационную энергию обеих масс. Как мы уже знаем из равенства (3), для того достаточно будет найти, например, энергию второй массы в поле первой. Согласно формуле (2), величина этой энергии будет представлена интегралом

$$W_{\text{вз}} = -2\pi \iint_{\Sigma} \tilde{\rho}(r', \theta') \varphi(r', \theta') (r')^2 \sin \theta' dr' d\theta'. \quad (26)$$

Подставляя сюда выражение для φ из (22), после перегруппировки получим

$$W_{\text{вз}} = -G \sum_{n=0}^{\infty} D_n \left[2\pi \iint_{\Sigma} \tilde{\rho}(r', \theta') (r')^{1-n} P_n(\cos \theta') \sin \theta' dr' d\theta' \right]. \quad (27)$$

⁵ Начало системы отсчета находится вне самого тела.

С учетом же (25) выражение (27) может быть представлено в изящной форме ряда

$$W_{\text{вз}} = -G \sum_{n=0}^{\infty} D_n \tilde{D}_n. \quad (28)$$

Полученный результат (28) весьма примечателен: для вычисления взаимной потенциальной энергии двух масс оказывается достаточным знать только коэффициенты при разложении в ряд внешнего потенциала одной массы, и внутреннего потенциала другой массы.

Самое главное, однако, заключается в том, что ряд (28) можно, оказывается, приспособить и для нахождения потенциальной энергии изолированного однородного тела. Эта возможность отчетливо выявляется в связи с новой интерпретацией формулы (13), выведенной нами выше. Действительно, опираясь на тот факт, что интегрирование в формуле (13) ведется по поверхности тела, мы мысленно можем рассматривать произведение

$$\sigma(r, \theta) = -1/5 \rho (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) \quad (29)$$

как поверхностную плотность бесконечно тонкого гомотетического слоя вещества.

Слой с поверхностной плотностью (29) будет гомотетическим именно потому, что его толщина, в полном согласии с геометрией, пропорциональна длине перпендикуляра $l = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$, проведенного из центра к касательной плоскости в той точке, где эта толщина измеряется. Масса этого слоя оказывается равной $3/5$ массы исходного тела, на поверхности которого лежит слой. Очевидно, этот гомотетический слой не является, в общем случае, уровненным а будет таковым только на эллипсоиде.

Мысленное выделение гомотетического слоя с поверхностной плотностью (29) сразу позволит нам записать формулу (13) в виде

$$W = - \iint_S \sigma \varphi dS, \quad (30)$$

представляющем потенциальную энергию объемного тела как взаимную потенциальную энергию данного слоя в силовом поле самого исходного тела. В результате такой интерпретации формулы (13) теперь открывается возможность применить ряд (28) к вычислению уже не взаимной энергии, а энергии тела «на самого себя», т. е. обычной потенциальной энергии тела.

Для реализации нашего замысла следует найти потенциал гомотетического слоя с поверхностной плотностью (29). Формально этот потенциал дается поверхностным интегралом

$$\tilde{\varphi}(r') = G \iint \frac{\sigma dS}{\sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2}}. \quad (31)$$

Преобразовывая этот интеграл по формуле Остроградского—Гаусса в объемный, получим

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(r') &= \frac{G\rho}{5} \iiint_T \left[\frac{3}{r} - \frac{x_1(x_1 - x_1') + x_2(x_2 - x_2') + x_3(x_3 - x_3')}{r^3} \right] dV = \\ &= \frac{G\rho}{5} \iiint_T \left[\frac{2}{r} - \frac{x_1'(x_1 - x_1') + x_2'(x_2 - x_2') + x_3'(x_3 - x_3')}{r^3} \right] dV. \end{aligned} \quad (32)$$

Но так как

$$\varphi(r') = G\rho \iiint_T \frac{dV}{r}, \quad x_i' \frac{\partial \varphi}{\partial x_i'} = G\rho \iiint_T \frac{x_i'(x_i - x_i')}{r^3} dV, \quad (33)$$

то искомый потенциал слоя с поверхностной плотностью (29) оказывается связанным с исходным потенциалом тела $\varphi(r)$ формулой

$$\tilde{\varphi}(r) = 1/5 (2\varphi - r \operatorname{grad} \varphi). \quad (34)$$

Этой формулой выражается еще одно замечательное свойство рассматриваемого гомотетического слоя вещества (заряда). В частном случае, когда слой лежит на эллипсоиде, внутренний, например, потенциал этого слоя согласно (34) не будет зависеть от координат и равен $2/5$ потенциала в центре однородного эллипсоида $\pi G \rho I$. В последнем легко убедиться, подставив φ из (18) в правую часть (34).

Относительно формулы (34) заметим также следующее. Если требуется знать внутренний потенциал слоя, то в правую часть следует подставлять внутренний потенциал исходного тела и наоборот, чтобы получить внешний потенциал слоя, в правую часть (34) следует подставить внешний потенциал тела.

Подставив в правую часть (34) ряд (24), где «тильду» можно убрать, находим ряд для внутреннего потенциала гомотетического слоя в виде

$$\tilde{\varphi}(r) = 1/5 \sum_{n=0}^{\infty} (2-n) \tilde{D}_n r^n P_n(\cos \theta). \quad (35)$$

Таким образом, чтобы формула (28) «работала» для изолированного тела, в ней, согласно (35), вместо $\tilde{D}_n$ надо поставить выражение

$$\frac{2-n}{5} \tilde{D}_n. \quad (36)$$

В итоге, формула (28) в случае изолированного тела принимает вид

$$W = -1/5 G \sum_{n=0}^{\infty} (2-n) D_n \tilde{D}_n, \quad (37)$$

где D_n и $\tilde{D}_n$ являются коэффициентами в разложениях в ряд по полиномам Лежандра потенциала тела во внешней и внутренней точках соответственно. Коэффициенты эти даны в формулах (23) и (25). Тем самым поставленная задача решена.

Чтобы убедиться в правильности формулы (37), рассмотрим три примера. Для однородного шара радиусом R имеют место равенства

$$\begin{aligned} D_0 &= M, \quad D_1' = D_2 = \dots = 0, \\ \tilde{D}_0 &= \frac{3}{2} \cdot \frac{M}{R}, \quad \tilde{D}_1 = \tilde{D}_2 = \dots = 0, \end{aligned} \quad (38)$$

с учетом которых (37) сразу дает правильный результат (7).

Для однородного сфероида различаем случаи сжатого ($a_3 \leq a_1$) и вытянутого ($a_3 \geq a_1$) сфероидов. Можно доказать, что коэффициенты в разложении внешнего потенциала равны

$$D_0 = M, \quad D_{2n+1} = 0, \quad D_{2n} = \begin{cases} 3M \frac{(-1)^n (a_1^2 - a_3^2)^n}{(2n+1)(2n+3)}, & a_1 \geq a_3, \\ 3M \frac{(a_3^2 - a_1^2)^n}{(2n+1)(2n+3)}, & a_1 \leq a_3. \end{cases} \quad (39)$$

Для внутреннего же потенциала нас интересует только коэффициент

$$\bar{D}_0 = \pi \rho \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sin^2 \theta/a_1^2 + \cos^2 \theta/a_3^2} = \begin{cases} \frac{3}{2} \frac{M}{a_1} \frac{\arcsin e}{e}, & a_1 \geq a_3, \\ \frac{3}{4} \frac{M}{a_3} \frac{1}{e} \ln \frac{1+e}{1-e}, & a_1 \leq a_3, \end{cases} \quad (40)$$

так как $\bar{D}_2$ выпадает, а остальные просто равны нулю. Подставляя D_0 и $\bar{D}_0$ из (39) и (40) в ряд (37), получим известные выражения

$$W_{\text{сж}} = -\frac{3M^2G}{5a_1} \frac{\arcsin e}{e}, \quad e^2 = 1 - a_3^2/a_1^2, \quad (41)$$

$$W_{\text{выт}} = -\frac{3}{10} \frac{M^2G}{a_3} \frac{1}{e} \ln \frac{1+e}{1-e}, \quad e^2 = 1 - a_1^2/a_3^2$$

для потенциальной энергии сжатого и вытянутого сфероидов.

4. Другие представления потенциальной энергии в виде функциональных рядов

Является ли представление потенциальной энергии в виде ряда (37) единственно возможным? Для ответа на этот вопрос надо шире взглянуть на то, что мы до сих пор делали.

Прежде всего, если задана форма однородного гравитирующего тела, то пользуясь известными формулами, можно всегда найти два комплекта коэффициентов D_n и $\bar{D}_n$. Весьма интересна обратная постановка вопроса: всегда ли можно по заданным коэффициентам восстановить форму однородного тела. Исключая особые случаи, на этот вопрос, насколько мы знаем, можно ответить положительно. Известна, например (см. [4], с. 117), теорема Дива о том, что квадратичный внутренний потенциал может иметь только эллипсоид и никакая другая однородная ограниченная фигура. Сходное положение существует и для внешних потенциалов. Поэтому знание обоих комплектов коэффициентов D_n и $\bar{D}_n$ несет в себе даже излишнюю, а по сути двойную, информацию о самом теле. Но это и означает, что потенциальную энергию однородного тела можно представить через D_n и $\bar{D}_n$ не одним, как было показано в предыдущем разделе, способом, а многими.

Чтобы убедиться в этом, дадим второе (вслед за рядом (37)) представление W через упомянутые выше коэффициенты. Пусть задано однородное тело T с круговой симметрией. Полагая размеры тела ограниченными, окружим его сферой с однородной плотностью (одинаковой с плотностью тела T) и радиусом R . Таким образом, первоначально заданное тело дополнено до сферы оболочкой той же плотности. Естественно считать теперь, что потенциал исходного тела $\bar{\varphi}$ на внутреннюю точку r есть разность между внутренним потенциалом сферы

$$\bar{\varphi}_{\text{сф}} = 2\pi G\rho (R^2 - r^2/3) \quad (42)$$

и потенциалом упомянутой оболочки

$$\bar{\varphi}_{\text{об}} = G \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A}_n r^n P_n(\cos \theta),$$

где

$$\tilde{A}_n = \rho \iiint_{T_{\text{ос}}} \frac{P_n(\cos \theta')}{(r')^{n+1}} dV', \quad (43)$$

т. е.

$$\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_{\text{сф}} - \tilde{\varphi}_{\text{ос}}. \quad (44)$$

В силу (44) имеет место равенство

$$\rho \sum_{n=0}^{\infty} \left[r^n P_n(\cos \theta) \iiint_{T_{\text{сф}}} \frac{P_n(\cos \theta')}{(r')^{n+1}} dV' \right] = \sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{A}_n + \tilde{D}_n) r^n P_n(\cos \theta), \quad (45)$$

$$\text{где} \quad \tilde{D}_n = \rho \iiint_T \frac{P_n(\cos \theta')}{(r')^{n+1}} dV',$$

из которого с учетом легко доказываемого соотношения

$$\begin{aligned} \rho \sum_{n=0}^{\infty} \left[r^n P_n(\cos \theta) \iiint_{T_{\text{сф}}} \frac{P_n(\cos \theta')}{(r')^{n+1}} dV' \right] = \\ = 2\pi\rho \int_0^R \int_0^\pi \frac{P_0(\cos \theta')}{r'} (r')^2 \sin \theta' dr' d\theta' = 2\pi\rho R^2 \end{aligned} \quad (46)$$

находим

$$G \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A}_n r^n P_n(\cos \theta) = 2\pi G \rho R^2 - G \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{D}_n r^n P_n(\cos \theta). \quad (47)$$

Подставляя теперь (42) и (47) в (44), находим потенциал тела T во внутренней точке r' :⁶

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(r, \theta') = 2\pi G \rho \left(R^2 - \frac{r'^2}{3} \right) + G \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{D}_n (r')^n P_n(\cos \theta') - 2\pi G \rho R^2 = \\ = G \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{D}_n (r')^n P_n(\cos \theta') - \frac{2}{3} \pi G \rho r'^2. \end{aligned} \quad (48)$$

Подставим теперь потенциал (48) в формулу (4):

$$\begin{aligned} W = -\frac{1}{2} \rho \iiint_T \tilde{\varphi}(r', \theta') dV' = -\frac{G}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{D}_n \left[\iiint_T (r')^n P_n(\cos \theta') dV' \right] + \\ + \frac{\pi G}{3} \rho^2 \iiint_T r'^2 dV'. \end{aligned} \quad (49)$$

Последний интеграл в правой части (49) определяет момент инерции однородного тела относительно начала координат, и этот момент мы обозначим через

$$J = \rho \iiint_T r'^2 dV'. \quad (50)$$

В первом же члене в правой части того же выражения (49) в квадратных

⁶ Выражение (48) следует сравнить с ранее полученным (24). Появление в (48) дополнительного члена $(-\frac{2}{3} \pi G \rho r'^2)$ объясняется тем, что начало системы отсчета находится теперь внутри самого тела.

скобках стоит коэффициент $\tilde{D}_n$ из (23). С учетом всего этого, потенциальную энергию однородного тела T можно представить в виде

$$W = - \frac{G}{2} \sum_{n=0}^{\infty} D_n \tilde{D}_n + 1/3 \pi G \rho J. \quad (51)$$

Сравнивая это выражение для потенциальной энергии с выражением (37), мы видим, если в (51) все члены ряда одинакового знака, то в (37) члены суммы при $n < 2$ и при $n > 2$ имеют уже разные знаки, причем при $n = 2$ члены вообще выпадают.

Комбинируя тем или иным способом ряды (37) и (51), можно получить и другие выражения для потенциальной энергии тел вращения. Умножим, например, (51) на 2 и вычтем ряд (37). Получим формулу

$$W = - \frac{G}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (n+3) D_n \tilde{D}_n + 2/3 \pi G \rho J. \quad (52)$$

От характера задачи зависит, какое выражение для W следует использовать.

5. О сходимости рядов для потенциальной энергии

Очень важен вопрос о том, сходятся ли ряды (28), (37) или (51) и (52), которыми представлена потенциальная энергия однородных тел. Для сравнения уместно напомнить столь же важную проблему в математической физике о сходимости рядов (22) и (24), которыми представлены внешний и внутренний потенциалы гравитирующего тела. Почти всегда вопрос о сходимости рядов требует нетривиальных и тонких рассуждений. В нашем же случае удивительно именно то, что ответ на вопрос о сходимости ряда для потенциальной энергии удастся дать без выяснения того, сходятся ли ряды для потенциалов тела.

Мы докажем сейчас следующее: независимо от того, сходятся или расходятся где-либо ряды для ньютоновских потенциалов первого и второго тела, сам ряд

$$W = -G \sum_{n=0}^{\infty} D_n \tilde{D}_n$$

всегда будет сходитьсся и представлять собой конечную физическую величину — гравитационную энергию.

Доказательство. Увеличим в λ раз все размеры внешнего тела, а новые значения коэффициентов и энергии обозначим штрихами. Тогда, очевидно,

$$\tilde{D}_n' = \lambda^{2-n} \tilde{D}_n, \quad (53)$$

и поэтому энергия

$$W' = -G \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n \tilde{D}_n}{\lambda^n}. \quad (54)$$

Однако степенной ряд Лорана при достаточно большом λ конечно же сходится. Тогда, по второй теореме Абеля, которая гласит: сумма степенного ряда есть непрерывная функция внутри радиуса сходимости (см., например, [5]), мы и заключаем, что и при $\lambda \rightarrow 1$ ряд (54) обязательно будет сходитьсся и давать правильное значение W . На этом доказательство закончено.

С л е д с т в и е: поскольку вывод рядов (37), (51) и (52) был основан на все той же формуле для ряда (28), заключение о сходимости ряда (28) переносится и на другие упомянутые ряды.

6. Заключение

Развитый метод вычисления потенциальной энергии с помощью рядов аналогично распространяется и на однородные тела, не имеющие осевой симметрии. Для этого ряды, которыми представляются внешние и внутренние потенциалы такого тела, следует брать в их общем стандартном виде. Итоговые выражения получить нетрудно, и мы их здесь не выписываем.

В некоторых специальных случаях ряды для потенциальной энергии могут быть просуммированы и результат выражен в конечном виде через известные функции от параметров рассматриваемого тела. Некоторые из таких примеров будут изложены в следующей статье.

Автор признателен В. А. Антонову за замечания, способствовавшие улучшению содержания статьи.

Список литературы

1. Чандрасекар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973. 288 с.
2. Кондратьев Б. П. Динамика эллипсоидальных гравитирующих фигур. М.: Наука, 1989. 272 с.
3. Ляпунов А. М. // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1959. Т. 1. С. 27.
4. Сретенский Л. Н. Теория ньютоновского потенциала. М.: Гостехиздат, 1946. 318 с.
5. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1977.

Удмуртский госуниверситет

Поступила в редакцию
3.П.1992