

УДК 550.31

К ВОПРОСУ О ВЕЛИЧИНЕ СМЕЩЕНИЯ ВНУТРЕННЕГО ЯДРА ЗЕМЛИ

© 2004 г. В. А. Антонов¹, Б. П. Кондратьев²

¹Главная астрономическая обсерватория РАН, г. С.-Петербург

²Удмуртский государственный университет, г. Ижевск

Поступила в редакцию 28.11.2002 г.

Новым методом получены уравнения движения твердого внутреннего ядра Земли в окружающем его внешнем жидком ядре под действием приливной силы от небесных тел. Реальной является только приливная сила от Луны, а влиянием других небесных тел на внутреннее ядро нашей планеты можно пренебречь. Выяснено, что смещение твердого ядра возникает только от третьих гармоник возмущающего потенциала, причем приливная сила зависит от сплюснутости ядра и оказывает на него лишь незначительное воздействие. Конкретно установлено, что амплитуда колебаний ядра при учете Луны в качестве главного возмущающего тела оказывается ничтожно малой: в стационарном случае верхний предел смещения твердого ядра оказывается равным лишь $6,1 \times 10^{-4}$ см. Это на порядок меньше результата, полученного ранее Н.Н. Парийским и почти на семь порядков меньше оценок смещения ядра, полученных другими авторами.

Ключевые слова: внутреннее ядро Земли, приливные силы, гидродинамика.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время о динамике внутреннего твердого ядра Земли, а также о течениях в жидком ядре, нет четких представлений. В частности, вопрос о смещении внутреннего ядра как целого под действием приливных сил от внешних тел (практически надо учитывать только Луну) рассматривался в монографии [Авсюк, 1996], но, по нашему мнению, недостаточно полно и с погрешностями. Данная Авсюком оценка смещения ядра составляет около десяти метров (стр. 10 его монографии).

В работе [Чуйкова и др., 1997] сделана попытка анализа колебаний внутреннего ядра Земли под воздействием гравитационного и магнитного полей. Однако при конкретных расчетах все нелинейные члены в уравнениях движения были отброшены, то есть задача решалась в тривиальном линейном приближении. Данные расчетов оказались неполными; кроме частоты колебаний была дана только оценка стационарного смещения ядра Земли (оно оказалось равным порядка нескольких сотен метров; по порядку величины его можно оценить просто как следствие грушевидной формы Земли). В этой работе ничего, в частности, не говорилось о смещении ядра под воздействием других небесных тел. Но именно последнее и будет интересовать нас далее.

В оценке смещения твердого ядра Н.Н. Парийский [Парийский, 2000] дает совершенно другой результат. Используя потенциал гравитационного притяжения Луны на Землю в форме Мак-Кулло

$$V = -\frac{GMM_1}{r} - \frac{CM_1}{2r^3}[A + B + C - 3J] \quad (a)$$

(M_1 – масса Луны, r – расстояние между центрами тяжести Земли и Луны, A, B, C – главные моменты инерции Земли, J – момент инерции Земли относительно направления r), он находит величину радиального приливного ускорения на центр твердого ядра равным (δ – склонение Луны, v – истинная аномалия, a – экваториальный радиус Земли)

$$\Delta a_r(\delta, v) = 0.495 GM_1 \frac{a^2 C - A}{r^4 C} (1 - 3 \sin^2 \delta). \quad (б)$$

В итоге Н.Н. Парийский получил максимум смещения твердого ядра под воздействием Луны равным лишь 7×10^{-3} см.

В виду резкого различия в оценках смещения ядра у разных авторов необходимо рассмотреть этот вопрос заново, и желательно другим методом. Ниже вопрос о приливных эффектах и смещении внутреннего ядра мы рассмотрим, используя выражение приливного потенциала Луны на Землю.

Наш подход отличается от подхода Н.Н. Парийского (напомним, что он пользовался формулой Мак-Кулло), поскольку позволяет провести усреднение воздействия третьей гармоники на внутреннее ядро Земли. У Парийского никакого усреднения метод не предусматривает: действительно, Δa_r из формулы (б) выражает приливное воздействие Луны лишь на одну центральную точку ядра. Именно в наличии усреднения мы усматриваем причину некоторого отличия нашего

результата от смещения, найденного Н.Н. Парийским.

2. О СИЛЕ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА ВНУТРЕННЕЕ ЯДРО ЗЕМЛИ

Примем следующие обозначения: Φ – полный гравитационный потенциал внутри ядра, состоящий из двух частей $\Phi_1 + \Phi_2$, где Φ_1 – потенциал самой Земли, а Φ_2 – внешнего тела (Луны); ρ_e и ρ_i – плотности соответственно внешнего и внутреннего ядра Земли, предполагаемые здесь постоянными (эффекты неоднородности и сжимаемости практически не меняют результата); R_e и R_i – средние радиусы внешнего и внутреннего ядра Земли; T и S – область пространства и поверхность внутреннего ядра; $\mathbf{n}$ – вектор внешней единичной нормали на поверхности раздела внутреннего и внешнего ядра; p – давление внутри жидкого ядра (вязкостью и магнитным полем пренебрегаем); $\mathbf{v}(v_x, v_y, v_z)$ – вектор скорости течений в жидком ядре.

Ввиду крайней малости ожидаемых приливных течений, в уравнениях гидродинамики можно пренебречь инерционными членами, так что остается

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_e} \text{grad } p + \text{grad } \Phi, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (1)$$

Мы пользуемся системой координат, связанной с твердым телом Земли. Кроме того, в векторном уравнении (1) опущен член, представляющий центробежное ускорение, поскольку это ускорение заведомо мало и составляет всего 1–2% от внешней приливной гравитационной силы.

Формально уравнениям (1) удовлетворяет решение

$$v_x = v_y = v_z = 0, \quad p = \rho_e \Phi. \quad (2)$$

Это решение, однако, не совсем удовлетворяет граничным условиям, так как при движении ядра граница раздела, вообще говоря, подвижна. Обозначив вектор смещения центра инерции внутреннего ядра через $\mathbf{h}$ и соответствующую скорость через $\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{h}}{dt}$, находим решение системы (1) при нулевой правой части, но смещающейся границе раздела (Φ – потенциал скоростей)

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Phi, \quad p = -\rho_e \frac{d\Phi}{dt},$$

$$\Phi = \alpha \mathbf{w} \mathbf{r} + \beta \frac{\mathbf{w} \mathbf{r}}{r^3};$$

$$\left\{ \left(\alpha + \frac{\beta}{r^3} \right) \mathbf{w} - \frac{3\beta}{r^4} \mathbf{n}(\mathbf{w} \mathbf{r}) - \mathbf{w} \right\} \mathbf{n} = 0; \quad (r = R_i), \quad (3)$$

$$\left\{ \left(\alpha + \frac{\beta}{r^3} \right) \mathbf{w} - \frac{3\beta}{r^4} \mathbf{n}(\mathbf{w} \mathbf{r}) \right\} \mathbf{n} = 0, \quad (r = R_e),$$

или

$$\alpha - \frac{2\beta}{R_i^3} = 1, \quad \alpha - \frac{2\beta}{R_e^3} = 0. \quad (4)$$

Очевидно,

$$\alpha = \frac{1}{1 - \frac{R_e^3}{R_i^3}}; \quad \beta = \frac{1}{2} \frac{R_e^3}{1 - \frac{R_e^3}{R_i^3}}. \quad (5)$$

Полное решение получается суммированием обоих предыдущих

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Phi, \quad p = \rho_e \left(\Phi - \frac{d\Phi}{dt} \right). \quad (6)$$

Таким образом, поле скоростей и давление в жидком ядре найдены.

Изучим баланс сил, действующих на внутреннее ядро. Во-первых, это сила давления на него от жидкого окружения

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= -\int p \mathbf{n} dS = -\rho_e \int \left(\Phi - \frac{d\Phi}{dt} \right) \mathbf{n} dS = \\ &= -\rho_e \int \left[\Phi - \alpha \left(\frac{d\mathbf{w}}{dt} \mathbf{n} \right) R_i - \beta \left(\frac{d\mathbf{w}}{dt} \mathbf{n} \right) R_i^{-2} \right] \mathbf{n} dS = \\ &= -\rho_e \left[\int \Phi d\mathbf{n} - \frac{4\pi R_i^2}{3} \frac{d\mathbf{w}}{dt} \left(\alpha R_i + \frac{\beta}{R_i^2} \right) \right] = \end{aligned} \quad (7)$$

$$= -\rho_e \left[\iiint_T \text{grad } \Phi dx dy dz - \frac{4\pi R_i^3}{3} \frac{d\mathbf{w}}{dt} \frac{1 + \frac{R_e^3}{2R_i^3}}{1 - \frac{R_e^3}{R_i^3}} \right].$$

Во-вторых, есть сила непосредственного гравитационного воздействия на точки внутреннего ядра

$$\mathbf{F}_2 = \rho_i \iiint_T \text{grad } \Phi dx dy dz. \quad (8)$$

Полная сила равна $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$. Уравнения движения ядра имеют вид

$$\frac{4\pi\rho_i R_i^3 d^2 \mathbf{h}}{3 dt^2} = (\rho_i - \rho_e) \iiint_T \text{grad} \Phi dx dy dz + \frac{4\pi\rho_i R_i^3}{3} \frac{1 + \frac{R_e^3}{R_i^3}}{1 - \frac{R_e^3}{R_i^3}} \frac{d^2 \mathbf{h}}{dt^2}. \quad (9)$$

Следовательно,

$$\frac{4\pi R_i^2}{3} \left(\rho_i + \frac{2R_i^3 + R_e^3}{2(R_e^3 - R_i^3)} \rho_e \right) \frac{d^2 \mathbf{h}}{dt^2} = (\rho_i - \rho_e) \iiint_T \text{grad} \Phi dx dy dz. \quad (10)$$

Отметим, что коэффициент при второй производной содержит, кроме самой массы внутреннего ядра, также и присоединенную массу [Ламб, 1947].

Основную часть потенциала дает притяжение самой Земли. Притом в состоянии покоя $\Phi_1(x, y, z)$ — симметричная функция и поэтому интегрирование $\text{grad} \Phi_1$ дает нуль. Несимметричный член происходит от смещения внутреннего ядра. Это смещение дает как бы дополнительную плотность $\rho_i - \rho_e$ на фоне симметричного распределения, так что соответствующая добавка к потенциалу

$$\delta\Phi_1 = 2\pi G(\rho_i - \rho_e) \left[R_i^2 - \frac{1}{3}(\mathbf{r} + \mathbf{h})^2 \right] - 2\pi G(\rho_i - \rho_e) \left[R_i^2 - \frac{r^2}{3} \right] \approx -\frac{4}{3}\pi G(\rho_i - \rho_e) \mathbf{h} \mathbf{r}. \quad (11)$$

Гравитационным влиянием на ядро от мантии Земли здесь можно пренебречь [Кондратьев, 2003].

Нас интересует приливная сила от Луны. Пусть положение ее центра инерции в системе отсчета, связанной с твердой оболочкой Земли, дается вектором $\mathbf{r}'(x', y', z')$. Разлагаем гравитационный потенциал Луны, Φ_2 в ряд по степеням координат x, y, z (без штрихов!) внутренней точки Земли. Члены первого порядка несущественны, так как они дают ускорение, действующее на Землю целиком, исключаемое у нас фиксацией положения твердого тела Земли. Эффект от члена второго порядка (для краткости мы его не выписываем) симметричен относительно начала координат и также не относится к делу. Возможное воздействие начинается только с членов третьей степени

$$\Phi_2 = Gm' \frac{5(\mathbf{r} \mathbf{r}')^3 - 3r'^2(\mathbf{r} \mathbf{r}')r^2}{2r'^7}, \quad (12)$$

где m' — масса Луны. Тогда

$$\text{grad} \Phi_2 = Gm' \frac{[15(\mathbf{r} \mathbf{r}')^2 - 3r'^2 r^2] \mathbf{r}' - 6r'^2(\mathbf{r} \mathbf{r}') \mathbf{r}}{2r'^7}. \quad (13)$$

Очевидно, интеграл от этого $\text{grad} \Phi_2$, по точному шару был бы равен нулю, поскольку любая сферическая гармоника порядка ≥ 1 , усредняясь по всей сфере, дает нуль. Стало быть, в данном пункте приходится учитывать несферичность внутреннего ядра Земли. По современным данным [Буллен, 1978], оно имеет форму слегка сжатого сфероида с квадратом эксцентриситета $e^2 \approx 5 \times 10^{-3}$. Обозначим полуоси этого сфероида через a, c . Результаты интегрирования по телу ядра дают

$$\begin{aligned} \iiint_T (\mathbf{r} \mathbf{r}')^2 dx dy dz &= \iiint_T (xx' + yy' + zz')^2 dx dy dz = \\ &= \frac{4\pi\alpha^4 c}{15} (x'^2 + y'^2) + \frac{4\pi\alpha^2 c^3}{15} z'^2; \\ \iiint_T r^2 dx dy dz &= \frac{8\pi\alpha^4 c}{15} + \frac{4\pi\alpha^2 c^3}{15}; \\ \iiint_T (\mathbf{r} \mathbf{r}')^2 \mathbf{r} dx dy dz &= \\ &= \iiint_T [x(xx' + yy' + zz'), y(xx' + yy' + zz'), \\ &\quad z(xx' + yy' + zz')] dx dy dz = \\ &= \left(\frac{4\pi\alpha^4 c}{15} x', \frac{4\pi\alpha^4 c}{15} y', \frac{4\pi\alpha^2 c^3}{15} z' \right). \end{aligned}$$

Вместе:

$$\begin{aligned} \iiint_T \text{grad} \Phi_2 dx dy dz &= \\ &= \frac{2\pi Gm' \alpha^2 c}{5r'^7} \{ [5(\alpha^2(x'^2 + y'^2) + c^2 z'^2) - \\ &\quad - (2\alpha^2 + c^2)r'^2] \mathbf{r}' - 2r'^2(\alpha^2 x', \alpha^2 y', c^2 z') \} = \\ &= \frac{2\pi Gm' \alpha^2 c}{5r'^7} \{ [5\alpha^2(x'^2 + y'^2) + 5c^2 z'^2] \mathbf{x}' - \\ &\quad - (2\alpha^2 + c^2)r'^2 \mathbf{x}' - 2\alpha^2 x'(x'^2 + y'^2 + z'^2) + \\ &\quad + [5\alpha^2(x'^2 + y'^2) + 5c^2 z'^2] \mathbf{y}' - \\ &\quad - (2\alpha^2 + c^2)r'^2 \mathbf{y}' - 2\alpha^2 y'(x'^2 + y'^2 + z'^2) + \\ &\quad + [5\alpha^2(x'^2 + y'^2) + 5c^2 z'^2] \mathbf{y}' - \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
& -(2\alpha^2 + c^2)r'^2 z' - 2\alpha^2 z'(x'^2 + y'^2 + z'^2) \} = \\
& = \frac{2\pi G m' \alpha^2 c}{5r'^7} \{ x'(\alpha^2 - c^2)(x'^2 + y'^2 - 4z'^2) + \\
& \quad + y'(\alpha^2 - c^2)(x'^2 + y'^2 - 4z'^2) + \\
& \quad + z'(\alpha^2 - c^2)(3x'^2 + 3y'^2 - 2z'^2) \}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим, согласно (10), уравнение движения твердого ядра в x – направлении

$$\begin{aligned}
& \frac{4\pi R_i^3}{3} \left[\rho_i + \frac{2R_i^3 + R_e^3}{2(R_e^3 - R_i^3)} \rho_e \right] \frac{d^2 h_x}{dt^2} = \\
& = \frac{2\pi G m' R_i^5}{5r'^7} (\rho_i - \rho_e) e^2 (x'^2 + y'^2 - 4z'^2) x' - \\
& \quad - \frac{4\pi G R_i^3}{3} (\rho_i - \rho_e)^2 h_x,
\end{aligned} \quad (15)$$

где e – эксцентриситет ядра Земли. Нас интересует максимальная амплитуда смещения ядра. Для этого достаточно рассмотреть стационарное состояние. В стационарном состоянии производная по t выпадает. Остается стационарное смещение

$$\begin{aligned}
h_x &= \frac{3 m' e^2 (x'^2 + y'^2 - 4z'^2) R_i^2}{10 (\rho_i - \rho_e) r'^7} x'; \\
h_y &= \frac{3 m' e^2 (x'^2 + y'^2 - 4z'^2) R_i^2}{10 (\rho_i - \rho_e) r'^7} y'; \\
h_z &= \frac{3 m' e^2 (3x'^2 + 3y'^2 - 2z'^2) R_i^2}{10 (\rho_i - \rho_e) r'^7} z'.
\end{aligned} \quad (16)$$

Встречающиеся здесь постоянные равны

$$m' = 7.36 \times 10^{25} \text{ г},$$

$$e^2 \approx 5 \times 10^{-3},$$

$$R_e \approx 3485 \text{ км},$$

$$R_i \approx 1250 \text{ км},$$

$$\rho_i - \rho_e \approx 1.3 \frac{\text{г}}{\text{см}^3},$$

$$r' \approx 3.84 \times 10^5 \text{ км}.$$

Пренебрегая $z' \approx 0$, можно получить верхнюю оценку смещения ($h_z = 0$); полагая также $y' = 0$, то

есть $x' \approx r'$, находим

$$h_x \approx h_y \approx 6.1 \times 10^{-4} \text{ см}. \quad (17)$$

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, для смещения внутреннего ядра Земли под действием приливной силы от Луны мы получили верхний предел $h \approx 6 \times 10^{-4}$ см. Эта цифра на порядок меньше смещения, полученного Н.Н. Парийским и почти на семь порядков меньше цифр, полученных другими исследователями. Н.Н. Парийский получил физически правильный результат; однако его метод не предусматривает (см. выше Введение) усреднение приливного воздействия Луны на внутреннее ядро Земли. У нас же такое усреднение выполняется, что и делает наш результат несколько более точным.

Причину же разительного расхождения с Ю.Н. Авсюком мы видим в том, что при вычислении смещения твердого ядра от приливной силы следует учитывать только третьи гармоники возмущающего потенциала, а не вторые. В силу малости влияния третьей гармоники и малого сжатия ядра Земли и эффект смещения будет тогда мал. Подчеркнем, что учет только вторых гармоник возмущающего потенциала вообще не должен приводить к смещению ядра Земли в предположении его сфероидальной формы. Ожидаемые же отклонения формы ядра более высокого порядка дадут очень малую поправку к результату, полученному нами.

Мы выражаем благодарность В.П. Трубицыну за указание на неизвестную нам ранее работу Н.Н. Парийского.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Авсюк Ю.Н. Приливные силы и природные процессы. М.: Изд-во ОИФЗ РАН. 1996. 188 с.
- Буллен К.Е. Плотность Земли. М.: Мир. 1978.
- Кондратьев Б.П. Теория потенциала и фигуры равновесия. Москва–Ижевск: РХД. 2003.
- Ламб Г. Гидродинамика. М.–Л.: Гостехиздат. 1947. С. 928.
- Парийский Н.Н. О некоторых следствиях несферичности Земли. Избранные труды. М.: Изд-во ИФЗ РАН. 2000. С. 212–215.
- Чуйкова Н.А., Казарян С.А., Пасынок С.Л. Учет внутренних гравитационного и магнитного полей в анализе полярных колебаний внутреннего ядра Земли // Вестник московского университета. Серия. 3. Физика и Астрономия. 1997. № 2. С. 40–43.