



UDK 517.929/517.93

Г. Г. Исламов, А. Г. Исламов

О РЕДУКЦИИ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ К ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ В ПРОСТРАНСТВАХ $L[0, 2\pi]$ И $C[0, 2\pi]$

Введение. Известны различные модели описания периодических процессов в виде линейных функциональных уравнений, в которых учитывается „история“, „настоящее“ и „будущее“ изучаемого объекта. Не обсуждая всех условий существования указанных в уравнении величин, так как этому вопросу посвящена обширная литература, акцентируем внимание на следующих типах систем дифференциальных уравнений:

Уравнение с отклоняющимся аргументом

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^m A_k(t)x(h_k(t)), t \in R.$$

Уравнение Фредгольма-Стилтьеса

$$\dot{x}(t) = \int_0^{2\pi} d_s F(t, s)x(s), t \in R.$$

Уравнение с последствием

$$\dot{x}(t) = \int_{-2\pi}^0 d_s G(t, s)x(t+s), t \in R.$$

1. Интегральный вид периодической функции. Пусть

$$K_0(t, s) = h(t - s) - \frac{1}{2\pi}(2\pi - s), \quad h(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau > 0, \\ 1/2, & \text{при } \tau = 0, \\ 0, & \text{если } \tau < 0. \end{cases}$$

Если построить рекурсивно по правилу

$$\varphi_{k+1}(\tau) = \int_0^{2\pi} K_0(\tau, s)\varphi_k(s) ds, \tau \in [0, 2\pi)$$

последовательность функций $\varphi_k(\tau)$, $k = 1, 2, \dots$, где $\varphi_1(\tau) = h(\tau) - \frac{\tau + \pi}{2\pi}$, $\tau \in [0, 2\pi)$, и эти функции периодически распространить на всю числовую прямую R , то по формуле $D_k(\tau) = \pi\varphi_k(\tau)$ получим 2π -периодическую функцию Бернулли ([1], с. 59). В частности, $D_1(\tau) = \begin{cases} (\pi - \tau)/2, & \text{если } \tau \in (0, 2\pi), \\ 0, & \text{если } \tau = 0. \end{cases}$ В силу интегрального представления гладких 2π -периодических функций с нулевым средним на периоде имеем ([1], с. 96)

$$u(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_k(t-s)u^{(k)}(s) ds = \int_0^{2\pi} \varphi_k(t-s)u^{(k)}(s) ds.$$

Отсюда для 2π -периодической вектор-функции $x : R \rightarrow R^n$ с абсолютно непрерывной на $[0, 2\pi]$ $(k-1)$ -й производной имеем интегральное представление

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(s) ds + \int_0^{2\pi} \varphi_k(t-s)x^{(k)}(s) ds.$$

2. Интегральное уравнение в пространстве $L[0, 2\pi]$. Если подставить вместо $x(t)$ в правую часть любого из представленных во введении уравнений указанное выше интегральное представление, то при $k = 1$ получим интегральное уравнение в пространстве $L[0, 2\pi]$ абсолютно суммируемых вектор-функций

$$y(t) = \dot{x}(t), \quad y(t) = \int_0^{2\pi} K(t,s)y(s) ds + F(t) \int_0^{2\pi} x(s) ds, \quad t \in [0, 2\pi],$$

где $K(t, s)$ и $F(t)$ — подходящие матричные функции размерности $n \times n$.

3. Интегральное уравнение в пространстве $C[0, 2\pi]$. Уравнение в пространстве непрерывных вектор-функций $C[0, 2\pi]$ получим, если при $k = 1$ в правую часть интегрального представления периодической функции подставим выражение для $\dot{x}(t)$ из любого уравнения, заданного во введении. В любом случае получим уравнение вида

$$x(t) = \int_0^{2\pi} d_s K(t, s)x(s), \quad t \in [0, 2\pi],$$

где $K(t, s)$ — подходящее матричное ядро размерности $n \times n$.

4. Теоремы единственности. Для получения теорем единственности периодического решения указанных во введении систем дифференциальных уравнений мы используем приведенные в монографии [2] и работе [3] теоремы об оценке нормы и спектрального радиуса интегральных операторов, получаемых при описанной выше редукции к уравнениям в пространствах $L[0, 2\pi]$ и $C[0, 2\pi]$.

Аналогичным образом исследуется единственность тривиального решения линейных однородных дифференциальных уравнений и систем высших порядков с периодическими коэффициентами.

1. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. — М.: Наука, 1976. — 320 с.
2. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. Изд. 3-е.— М.: Едиториал УРСС, 2010. — 896 с.
3. Исламов Г. Г. Об оценке сверху спектрального радиуса // Доклады РАН.— 1992.—Т. 322, № 5.— С. 836—838.

Кафедра высокопроизводительных вычислений и параллельного программирования

Удмуртский государственный университет,

ул. Университетская, 1,

426034, г. Ижевск

ggislamov@udm.net