МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

XLVI ВСЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ПРОБЛЕМАМ МАТЕМАТИКИ, ИНФОРМАТИКИ, ФИЗИКИ И ХИМИИ

Конференция посвящена 50-летнему юбилею Российского университета дружбы народов

19 – 23 апреля 2010 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

СЕКЦИЯ ФИЗИКИ

Москва
Российский университет дружбы народов
2010

ББК 22.3
В 85

Утверждено
*РИС Ученого совета
Российского университета
дружбы народов*

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ КОНФЕРЕНЦИИ

Председатель оргкомитета
В.М. Филиппов – д.ф.-м.н., профессор, академик РАО, ректор РУДН

Заместитель председателя
Р.Г. Мухарлямов – д.ф.-м.н., профессор

Давыдов В.В., д.х.н., профессор, декан, РУДН, **Башарин Г.П.**, д.т.н., профессор, засл. деят. науки РФ, РУДН, **Варламов А.В.**, д.х.н., профессор, РУДН, **Венсковский Н.У.**, к.х.н., доцент, РУДН, **Воскресенский Л.Г.**, к.х.н., доцент, РУДН, **Зубков Ф.И.**, к.х.н., доцент, РУДН, **Каширская Л.А.**, ст. преподаватель, РУДН, **Комоцкий В.А.**, д.т.н., профессор, РУДН, **Милантьев В.П.**, д.ф.-м.н., профессор, РУДН, **Михеев В.И.**, д.п.н., профессор, РУДН, **Рыбаков Ю.П.**, д.ф.-м.н., профессор, РУДН, **Самуйлов К.Е.**, д.ф.-м.н., профессор, РУДН, **Севастьянов Л.А.**, д.ф.-м.н., профессор, РУДН, **Скубачевский А.Л.**, д.ф.-м.н., профессор, РУДН, **Толмачев И.Л.**, к.ф.-м.н., профессор, РУДН, **Шаар Я.Н.**, к.ф.-м.н., доцент, РУДН, **Ягодовский В.Д.**, д.х.н., профессор, РУДН, **Кулябов Д.С.**, к.ф.-м.н., доцент, РУДН, **Ершова Ю.Д.**, аспирант, РУДН.

ИСПОЛНИТЕЛЬНЫЙ ОРГКОМИТЕТ

Председатель оргкомитета
Р.Г. Мухарлямов – д.ф.-м.н., профессор

Заместитель председателя
Р.Е. Сафир – к.х.н., доцент

Ответственный секретарь
И.К. Айриян – аспирант кафедры орг. химии

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ КОНФЕРЕНЦИИ

Кирабаев Н.С., д.ф.н., профессор, проректор по научной работе, РУДН, **Ланеев Е.Б.**, д.ф.-м.н., профессор, начальник УНИ РУДН, **Давыдов В.В.**, д.х.н., профессор, декан, РУДН, **Акуленко Л.Д.**, д.ф.-м.н., профессор, ИПМ РАН, **Андреев А.С.**, д.ф.-м.н., профессор, Ульяновский государственный университет, **Арутюнов А.В.**, д.ф.-м.н., профессор, РУДН, **Башарин Г.П.**, д.т.н., профессор, засл. деят. науки РФ, РУДН, **Болотник Н.Н.**, д.ф.-м.н., профессор, ИПМ РАН, **Варламов А.В.**, д.х.н., профессор, РУДН, **Васильев С.Н.**, академик РАН, директор ИПУ РАН, **Венсковский Н.У.**, к.х.н., доцент, РУДН, **Граник В.Г.**, НПО «Антибиотик», **Гребенков Е.А.**, д.ф.-м.н., профессор, ВЦ РАН, **Галиуллин И.А.**, д.ф.-м.н., профессор, МГТУ (АИ), **Дегтярев Г.Л.**, академик, НАН РТ, **Ерохин Н.С.**, д.ф.-м.н., профессор, ИКИ РАН, **Ильгисонис В.И.**, д.ф.-м.н., профессор, РНЦ «Курчатовский институт», **Ковалев А.М.**, д.ф.-м.н., профессор, член-корр. НАН Украины, директор ИПММ НАН, **Комоцкий В.А.**, д.т.н., профессор, РУДН, **Маркеев А.П.**, д.ф.-м.н., профессор, ИПМ РАН, **Мартыненко Ю.Г.**, д.ф.-м.н., профессор, предс. НМС по теор. мех. Минобрнауки РФ, МГУ, **Милантьев В.П.**, д.ф.-м.н., профессор, РУДН, **Михеев В.И.**, д.п.н., профессор, РУДН, **Мухаметзянов И.А.**, д.ф.-м.н., профессор, РУДН, **Новицкий М.А.**, д.х.н., НПО «Тайфун», **Рыбаков Ю.П.**, д.ф.-м.н., профессор, РУДН, **Самуйлов К.Е.**, д.ф.-м.н., профессор, РУДН, **Северцев Н.А.**, д.ф.-м.н., профессор, академик АКН, ВЦ РАН, **Севастьянов Л.А.**, д.ф.-м.н., профессор, РУДН, **Серов Ю.М.**, д.х.н., профессор, РУДН, **Сиразетдинов Т.К.**, академик НАН РТ, КГТУ (КАИ), **Скубачевский А.Л.**, д.ф.-м.н., профессор, РУДН, **Степанов В.Д.**, д.ф.-м.н., профессор, член-корр. РАН, РУДН, **Толмачев И.Л.**, к.ф.-м.н., профессор, РУДН, **Хохлов Ю.С.**, д.ф.-м.н., профессор, РУДН, **Черноусько Ф.Л.**, академик РАН, директор ИПМ РАН, **Шевченко В.В.**, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ РАН, **Ягодовский В.Д.**, д.х.н., профессор, РУДН.

В 85 **XLVI Всероссийская конференция по проблемам математики, информатики, физики и химии:** Тезисы докладов. Секция физики. – М.: РУДН, 2010. – 155 с.

ISBN 978-5-209-03449-0 ББК 22.3

ГРАВИТАЦИОННАЯ ЭНЕРГИЯ ЦИЛИНДРА. НАХОЖДЕНИЕ ЧЕРЕЗ СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ОБРАТНЫХ РАССТОЯНИЙ

Б.П. Кондратьев, А.С. Дубровский

«GRAVITATIONAL ENERGY OF CYLINDER. FINDING THROUGH AVERAGE VALUE OF INVERSE DISTANCES»

B.P. Kondratyev, A.S. Dubrovskiy

Удмуртский государственный университет
Ижевск, Россия
e-mail: kond@uni.udm.ru

Дан круговой цилиндр с радиусом основания R и высотой $2H$, заполненный однородным по плотности гравитирующим веществом. В монографии [1] гравитационная энергия такого тела была найдена специальным новым методом «прогонки» и результат выражался через обобщенные гипергеометрические функции. Здесь развит иной подход к решению данной задачи (ранее подобный метод был применен лишь к хорошо изученному шару – устное сообщение Орлова В.В. и Райкова А.А.).

Тело состоит из материальных точек со взаимными расстояниями y_{ij}. Тогда нахождение гравитационной энергии системы точек сводится к вычислению суммы [2]

$$W = -Gm^2 \sum_{i>j} \frac{1}{y_{ij}}. \qquad (1)$$

Модификация метода заключается в том, что при известном распределении $F(y)$ парных расстояний между случайными точками вычисление W сводится к определению математического ожидания величины $\frac{1}{y}$, обратной расстоянию y:

$$W = \frac{M^2 G}{2} \int_0^a \frac{dF(y)}{y}, \qquad (2)$$

где a – максимально возможное расстояние между точками тела. Пусть $\xi = y^2$. Тогда характеристическая функция этой случайной величины:

$$\varphi(t) = Me^{it\xi} = \int_0^a e^{itx^2} dF(x). \qquad (3)$$

Обращая это преобразование Фурье, находим

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-itx^2}}{it} \varphi(t) dt; \quad dF(x) = \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-itx^2} \varphi(t) dt \right) dx. \qquad (4)$$

Таким образом, гравитационная энергия, выраженная через характеристическую функцию

$$W = \frac{M^2 G}{2} \int_0^a \frac{dF(x)}{x} = \frac{M^2 G}{2\pi} \int_0^a \left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx^2} \varphi(t) dt \right) dx. \qquad (5)$$

Интеграл по x может быть представлен в виде

$$\int\limits_0^{2\sqrt{R^2+H^2}} e^{-itx^2}dx = -\frac{\sqrt{2\pi}\left(-C\left(\dfrac{2\sqrt{2t}\sqrt{R^2+H^2}}{\sqrt{\pi}}\right)+iS\left(\dfrac{2\sqrt{2t}\sqrt{R^2+H^2}}{\sqrt{\pi}}\right)\right)}{2\sqrt{t}}, \qquad (6)$$

где C и S - известные интегралы Френеля:

$$C(z)=\int\limits_0^z \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)dt; \quad S(z)=\int\limits_0^z \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)dt. \qquad (7)$$

После этого в (5) остается однократный интеграл по t. Разными способами можно показать, что для цилиндра характеристическая функция имеет вид:

$$\varphi(t)=\frac{1}{4H^2R^2t^2}\left\{\left[-1+e^{2iR^2}\left(J_0\left(2R^2t\right)-iJ_1\left(2R^2t\right)\right)\right]\times\right.$$
$$\left.\times\left[-1+e^{4iR^2t}+2H\sqrt{2\pi t}\left(iC\left(2H\sqrt{\frac{2t}{\pi}}\right)+S\left(2H\sqrt{\frac{2t}{\pi}}\right)\right)\right]\right\}. \qquad (8)$$

Перемножая (6) и (8), приводим (5) к интегралу

$$W=M^2G\int\limits_0^\infty\frac{1}{8H^2R^2\sqrt{\pi}t^{5/2}}\left\{2C\left(2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{H^2+R^2}\sqrt{t}\right)\left[2H\sqrt{\pi t}C\left(2H\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{t}\right)\left(-J_1\left(2R^2t\right)\times\right.\right.\right.$$
$$\times\cos\left(2R^2t\right)+J_0\left(2R^2t\right)\sin\left(2R^2t\right)\Big)+2H\sqrt{\pi t}S\left(2H\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{t}\right)\Big(-1+J_0\left(2R^2t\right)\cos\left(2R^2t\right)+$$
$$+J_1\left(2R^2t\right)\sin\left(2R^2t\right)\Big)+\sqrt{2}\sin\left(2H^2t\right)\Big(J_1\left(2R^2t\right)\cos\left(2\left(H^2+R^2\right)t\right)+\sin\left(2H^2t\right)-$$
$$-J_0\left(2R^2t\right)\sin\left(2\left(H^2+R^2\right)t\right)\Big)\Big]-S\left(2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{H^2+R^2}\sqrt{t}\right)\left[4H\sqrt{\pi t}S\left(2H\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{t}\right)\times\right.$$
$$\times\left(J_1\left(2R^2t\right)\cos\left(2R^2t\right)-J_0\left(2R^2t\right)\sin\left(2R^2t\right)\right)+4H\sqrt{\pi t}C\left(2H\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{t}\right)\times$$
$$\times\left(-1+J_0\left(2R^2t\right)\cos\left(2R^2t\right)+J_1\left(2R^2t\right)\sin\left(2R^2t\right)\right)+2\sqrt{2}\sin\left(2H^2t\right)\times$$
$$\left.\left.\times\left(\cos\left(2H^2t\right)-J_0\left(2R^2t\right)\cos\left(2\left(H^2+R^2\right)t\right)-J_1\left(2R^2t\right)\sin\left(2\left(H^2+R^2\right)t\right)\right)\right]\right\}dt \qquad (9)$$

Поскольку функция симметрична по t, интегрирование в (9) ведется в пределах $[0,\infty]$ с добавлением множителя 2.

Формула (9) и выражает искомую гравитационную энергию цилиндра. Численная проверка показала, что (9) эквивалентно выражению энергии, полученному в [1] совершенно другим способом.

Литература

[1] Кондратьев Б.П. Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. М.: Мир, 2007, 512 с.

[2] Огородников К.Ф. Динамика звездных систем. М.: Физматлит, 1958, 627 с.