

**Министерство образования и науки Российской Федерации
Дальневосточное отделение Российской академии наук**

**Правительство Хабаровского края
Тихоокеанский государственный университет
Вычислительный центр ДВО РАН**



Программа

международной научно-практической конференции

Суперкомпьютеры: вычислительные и информационные технологии

**30 июня – 2 июля 2010 года
г. Хабаровск**



Г.Г. Исламов, А.Г. Исламов, 2010

ОДНОРАНГОВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ МАТРИЦ С ПРОСТЫМ СПЕКТРОМ

Исламов Г.Г. – д.ф.-м.н., заведующий кафедрой «Высокопроизводительных вычислений и параллельного программирования» Удмуртского госуниверситета,

Исламов А.Г. – ведущий инженер кафедры «Высокопроизводительных вычислений и параллельного программирования» Удмуртского госуниверситета

Для матриц с простым спектром предлагается высокоэффективный алгоритм построения одноранговых возмущений, которые переводят их в матрицы с наперёд заданным спектром. Разработана параллельная программа на языке С построения таких возмущений на вычислительных устройствах, содержащих центральный процессор и систему графических процессоров компании NVIDIA, поддерживающих технологию многопоточного программирования CUDA[1].

Постановка проблемы

Изучение линейных непрерывных и дискретных динамических систем с обратной связью приводит к задаче управления спектром этих систем. Одно из направлений исследований состоит в реконструкции неустойчивых систем методом минимальной обратной связи [2]. В силу работ [2-4] размерность минимальной обратной связи совпадает с максимальной геометрической кратностью «нежелательных» точек спектра матрицы динамической системы. Поэтому обратная связь для динамических систем с простым спектром имеет наиболее простую природу: $ux = -ab^T x$, где a и b - вектора-столбцы длины n , T - символ транспонирования. В указанных работах приведена схема построения одноранговых возмущений ab^T для $n \times n$ -матрицы A с простым спектром $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, при которых возмущённая матрица $B = A - ab^T$ имеет наперёд заданный спектр $\mu_1, \dots, \mu_n$. Если $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i v_i^T$ есть спектральное разложение матрицы динамической

системы, то вектора a и b таких возмущений можно взять в виде $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$ и

$b = \sum_{i=1}^n \bar{\beta}_i v_i^T$. Здесь черта сверху обозначает комплексное сопряжение, а все величины α_i и β_i можно брать любыми скалярами, отличными от нуля и связанными условием

$$\alpha_i \beta_i = \prod_{j=1}^n (\lambda_i - \mu_j) / \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\lambda_i - \lambda_j).$$

Теоретические и практические результаты

На практике построение указанных векторов a и b мы производим следующим образом. Пусть $K = (A^{n-1}f, A^{n-2}f, \dots, Af, f)$ - матрица базиса Крылова с циклическим вектором f длины n , $g = A^n f$. Тогда столбец $h = -K^{-1}g$ даёт нам коэффициенты характеристического многочлена матрицы A . Добавим, справа, к противоположному столбцу $(-h)$ единичные столбцы так, чтобы получилась матрица Фробениуса F характеристического многочлена матрицы A . Непосредственно проверяется справедливость факторизации $A = KFK^{-1}$ матрицы динамической системы через эту

матрицу Фробениуса. По заданному многочлену $\prod_{j=1}^n (\lambda - \mu_j)$ возмущённой матрицы B построим матрицу Фробениуса $\tilde{F}$ такой же структуры, что и матрица F . Из очевидного разложения $A = K \tilde{F} K^{-1} + K(F - \tilde{F})K^{-1}$ находим, что спектр первого слагаемого состоит из набора $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$, а разность $F - \tilde{F}$ имеет структуру произведения вектора-столбца на вектор-строку $p \cdot (1, 0, \dots, 0)$. Здесь p обозначает вектор-столбец длины n , составленный из разностей коэффициентов характеристических многочленов матриц B и A . Теперь понятно как строить управляющие вектора: в качестве a можно взять $-Kp$, а b^T положить равным первой строке обратной матрицы K^{-1} .

Пусть $\|\cdot\|$ обозначает норму матрицы, согласованную с нормой вектора в координатном пространстве векторов-столбцов. Для того, чтобы обеспечить хорошую обусловленность матрицы базиса Крылова K ($\gamma(K) = \|K\| \cdot \|K^{-1}\| \leq 1 + \Delta$), поиск циклического вектора f производим методом случайного поиска до выполнения условия $\|I - K\| \leq \Delta / (\Delta + 2)$. Здесь I - единичная матрица порядка n , а в качестве значения параметра обусловленности Δ выбирается достаточно малое положительное число из условия компромисса между точностью вычислений и временем счёта.

Ввиду большого объёма вычислений все расчёты производятся на вычислительном устройстве с быстродействующим многоядерным центральным процессором, усиленным системой графических процессоров, поддерживающих технологию многопоточного программирования CUDA [1]. Поиск циклического вектора f и построение хорошо обусловленной матрицы базиса Крылова K выполняется на центральном процессоре. Однако вычисление столбца h коэффициентов характеристического многочлена матрицы динамической системы A , обратной матрицы K^{-1} к матрице базиса Крылова, детерминанта $\det K$ и управляющих векторов a и b осуществляется на системе графических процессоров одновременно в ходе одного и того же алгоритма, основанного на применении высокоэффективной универсальной матричной операции [5], применённой к расширенной матрице (g, K) с разными стратегиями выбора разрешающих элементов на позиции матрицы Крылова (см. [6]). Обмен информацией между центральным процессором и графическим устройством происходит лишь на этапе передачи матрицы K с центрального устройства на графическое устройство и выдачи управляющих векторов a и b на центральный процессор.

Библиографические ссылки

1. NVIDIA CUDA Programming Guide Version 3.0 / <http://www.nvidia.com>
2. Исламов Г.Г. Об управлении спектром динамической системы // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т.23, № 8. – С. 1299-1302.
3. Исламов Г.Г. Экстремальные возмущения замкнутых операторов // Известия вузов. Математика. – 1989. - № 1. – С. 35-41.
4. Исламов Г.Г. Свойства одноранговых возмущений // Известия вузов. Математика. – 1989. - № 4. – С. 29-35.
5. Исламов Г.Г. Универсальная операция над матричными структурами // Современные проблемы вычислительной математики и математической физики : Междунар. науч. конф., посвящ. памяти акад. А. А. Самарского в связи с 90-летием со дня рожд., М., 16-18 июня 2009 г. - М., 2009.
6. Исламов Г.Г., Коган Ю.В. Об одном алгоритме поиска базисного минора матрицы // Вестник Удмуртского университета. - 2006. - № 1, Математика. - С. 63-70.