



**РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СОЦИАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР РАН

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РАН

ИНСТИТУТ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА РАН

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ РАН

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ РАН ПО ТЕОРИИ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ
И АВТОМАТИЗАЦИИ**



ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА

Третьей международной конференции

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЦИАЛЬНОЙ И
ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ**

(MMSED-2010)

23-25 июня 2010 Москва, Россия



Секции

1. Математическое моделирование в экономике
2. Математическое моделирование в социологии
3. Развитие математических технологий исследования социально-экономических процессов. Образовательные технологии
4. Математическое моделирование в политологии
5. Социальные сети и Интернет
6. Математическое моделирование в финансах

7. Круглый стол: "Методы учета слабоформализуемых факторов при моделировании исторических процессов: имеющийся опыт и перспективы" (модератор – Малков С.Ю.)
8. Круглый стол: "Проблемы и перспективы создания общей теории циклической исторической динамики" (модератор – Турчин П.В.)
9. Круглый стол: "Возможности, ограничения и перспективы исторического прогноза" (модератор – Коротаев А.В.)



О МИНИМАЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ БАЛАНСОВОЙ МОДЕЛИ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ

Г.Г. Исламов, А. Г. Исламов

(Ижевск, Удмуртский госуниверситет)

Вопрос ценообразования в современных условиях требует пристального внимания со стороны государства по ряду причин. Стихийный рынок спроса и предложения ведёт к формированию правильных цен на товары и услуги лишь асимптотически, причём этот сложный процесс постоянно подвергается негативному влиянию со стороны различных монопольных соглашений и различного рода криминальных структур. Для компенсации этого отрицательного воздействия на рыночную экономику в дополнение к «невидимой руке» Адама Смита требуется «видимая рука» государства, которая стабилизирует процесс ценообразования. Мы исходим из того, что производственные потоки экономики первичны и являются ведущими, а финансовые потоки вторичны и оказываются ведомыми. Кроме того, мы относим балансовый метод описания структуры экономики к базовым инструментам прогнозирования развития как производственного, так и финансового сектора экономики. Этот метод мы используем для описания и анализа следующей модели ценообразования при минимальном вмешательстве государства.

Постановка задачи. В дискретные плановые периоды $n = 0, 1, 2, \dots$ рассматривается эволюция цен на производимую продукцию в многоотраслевой экономике со следующими экономическими показателями, соответствующими n -му периоду:

$p[n]$ - m -мерный неотрицательный вектор-строка цен произведённой продукции;

$q[n]$ - m -мерный вектор-строка прибыли экспорта-импорта (положительные компоненты отвечают экспорту, а отрицательные – импорту)

$u[n]$ - m -мерный неотрицательный вектор-строка управления ценообразованием, характеризующий денежную компенсацию из государственного резервного фонда.

Плановый показатель цен $p[n+1]$ на следующий период рассчитывается из балансового соотношения $p[n] + u[n] = p[n+1]A + q[n]$, где $m \times m$ -матрица A характеризует нормы затрат в сфере производства. В левой части этого векторного равенства находятся суммарная стоимость по каждому виду продукции на начало $(n+1)$ -го периода, которая покрывает себестоимость $p[n+1]A$ этого периода и прибыль экспорта-импорта $q[n]$ предыдущего периода.

Способы управления. Рассмотрим два принципиально различных способа формирования вектора управления $u[n]$. По первому способу $u[n] = p[n]H$ (H - матрица управления) дотация из государственного фонда при ценообразовании в следующем периоде рассчитывается по правилу запаздывающей связи. По второму способу, который мы называем корректирующей связью, управление рассчитывается по формуле $u[n] = p[n+1]H$. Мы видим, что при втором способе управления цены на произведённую продукцию в следующем периоде $n+1$ вычисляются по возмущённой матрице $A - H$. Эволюция цен при первом способе использования финансов государственного резерва описывается уравнением

$$p[n](E + H) = p[n+1]A + q[n], \quad (1)$$

где E - единичная матрица порядка m . При втором способе имеем уравнение

$$p[n] = p[n+1](A - H) + q[n]. \quad (2)$$

Пусть $\lambda > 0$ есть заданный темп изменения вектора прибыли экспорта-импорта, т. е. $q[n+1] = \lambda \cdot q[n]$, $n = 0, 1, 2, \dots$, где $q[0]$ задано. Для обеспечения такого темпа изменения вектора прибыли естественно потребовать аналогичного свойства и от цен на производимую продукцию: $p[n+1] = \lambda \cdot p[n]$, $n = 0, 1, 2, \dots$, где $p[0]$ следует рассчитать. В этих предположениях из (1) и (2) имеем соответственно

$$p[0](E + H) = \lambda p[0]A + q[0], \quad (1')$$

$$p[0] = \lambda(A - H)p[0] + q[0]. \quad (2')$$

Для того чтобы эти уравнения были разрешимы при любом выборе стартового вектора экспорта-импорта $q[0]$ необходимо и достаточно, чтобы матрицы $E + H - \lambda A$ и $E - \lambda(A - H)$ были невырожденными для заданного $\lambda > 0$. Ещё раз отметим, что вектор прибыли $q[0]$ может иметь координаты любого знака. Однако, решение $p[0]$ уравнений (1') и (2') должно иметь неотрицательные компоненты, ибо представляет собой стартовый вектор цен продукции производства.

Оценки снизу ранга матрицы управления. Оценим снизу значение минимально возможного ранга $\text{rank } H$ матрицы управления H . Рассмотрим сначала первый способ управления (правило запаздывающей связи). Пусть $\frac{1}{\lambda}\varphi - \varphi A = 0$. Тогда $\varphi = \varphi H(E + H - \lambda A)^{-1}$.

Следовательно, собственное подпространство матрицы A , отвечающее значению $\frac{1}{\lambda}$, лежит в линейном многообразии размерности $\text{rank } H$. Отсюда получаем оценку

$$\text{rank } H \geq \dim \ker \left(\frac{1}{\lambda} E - A \right), \quad (3)$$

где величина справа представляет собой геометрическую кратность числа $\frac{1}{\lambda}$ для матрицы норм затрат A . Во втором случае (правило корректирующей связи) из $\frac{1}{\lambda}\varphi - \varphi A = 0$ имеем

$\varphi = \varphi H \left(\frac{1}{\lambda} E - A + H \right)^{-1}$, и опять получаем оценку (3). Таким образом, для минимального значения ранга матрицы H государственного управления ценообразованием, обеспечивающего любой темп λ изменения прибыли экспорта-импорта из заданного диапазона $[\mu, \nu]$, имеем

$$\text{rank } H \geq \max_{\mu \leq \lambda \leq \nu} \dim \ker \left(\frac{1}{\lambda} E - A \right). \quad (4)$$

Мы показываем, что нижняя граница в неравенстве (4) достигается для обоих правил управления экономикой за счёт дотации производства из государственного финансового фонда. Те матрицы H , для которых эта граница достигается, порождают минимальную соответственно запаздывающую и корректирующую связи.

Алгоритм построения матрицы минимального ранга. Здесь предлагается высокопроизводительный алгоритм построения матрицы H минимальной запаздывающей и корректирующей связи в случае, когда матрица норм затрат A имеет базис Крылова. Все вычисления организованы в виде двумерной таблицы, первая из которых имеет вид

$$\begin{array}{cccccc} & & -s_1 & +s_2 & \dots & (-1)^n s_m \\ t_1 & b_1 & d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_m & b_m & d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mm} \end{array}.$$

В первой строке находятся s -переменные, которые обозначают коэффициенты характеристического многочлена матрицы A . В первом столбце находятся вспомогательные t -переменные, которые будут обмениваться с s -переменными на каждом шаге применения универсальной операции над матричными структурами [1]. Стратегия применения этой операции, правило пересчёта таблицы и математическое обоснование необходимых для наших целей свойств можно найти в работе [2]. Следующие столбцы исходной таблицы составлены из координат соответственно векторов $A^m e, A^{m-1} e, \dots, A e, e$, где e есть порождающий вектор базиса Крылова. Они, без учёта первого вектора, образуют *матрицу перехода* от единичного базиса к базису Крылова. После m -кратного применения универсальной операции получим последнюю таблицу, в первом столбце которой окажутся все s -переменные, во втором столбце будут находиться коэффициенты характеристического многочлена. В последних столбцах находится информация для получения *преобразующей матрицы*, которая вместе с матрицей перехода необходима для построения минимальной по рангу матрицы управления H в обоих случаях управления ценообразованием многоотраслевой экономики за счёт дотации из государственного финансового резерва. Все вычисления выполняются на базе графических процессоров компании NVIDIA, поддерживающих технологию CUDA [3].

1.3. Обобщение и направление дальнейших исследований

Дополнительно рассмотрен случай, когда различные компоненты вектора прибыли могут различаться темпами изменения: $q[n+1] = q[n] \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, где $\lambda_i > 0$ есть темп изменения прибыли i -го вида продукции. Отмеченный в предыдущем пункте алгоритм относится к типичному случаю, когда каждое собственное подпространство матрицы норм затрат A одномерно. Кратный случай отвечает ситуации, когда матрица A подобна прямой сумме матриц Фробениуса и требует специальной техники расщепления.

Литература

1. Исламов Г.Г. Универсальная операция над матричными структурами // Современные проблемы вычислительной математики и математической физики: Международная конференция, Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 16-18 июня 2009 г. Тезисы докладов. – М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова; Макс Пресс, 2009. – 396 с.
2. Исламов Г.Г., Коган Ю.В. Об одном алгоритме поиска базисного минора матрицы // Вестник удмуртского университета. – 2006. - № 1 : Математика. – С. 63 – 70.
3. NVIDIA CUDA Programming Guide Version 2.3 // www.nvidia.com.