# ТЕОРЕМА РЯБЕНЬКОГО-ФИЛИППОВА В ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Г.Г. Исламов, А.Г. Исламов
Удмуртский государственный университет, г. Ижевск

Теория функционально-дифференциальных уравнений описывает и изучает свойства таких динамических процессов, ход которых зависит от их предыстории и планируемого будущего состояния этих процессов [1-3]. Вопросы численного решения краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений до сих пор остаются плохо изученными , так как недостаточно исследована связь между понятиями аппроксимации, устойчивости и сходимости для таких уравнений. Абстрактная форма теоремы Рябенького-Филиппова о связи аппроксимации, устойчивости и сходимости для линейного уравнения (см., например, [4]) формулируется в терминах конечномерных аппроксимаций бесконечномерных нормированных пространств и операторов. Мы применяем её при анализе численного решения краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений методом минимальной конечномерной аппроксимации линейной компактной инъекции $\Lambda: B \to B$, порождающей функциональное пространство $D = \Lambda B \oplus E$, где второе слагаемое конечномерно, а $B$ - сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$. В пространстве $D$ вводится норма $\|x\|_D = \|\delta x\|_B + \sum_{j=1}^{n} |r_j(x)|$, относительно которой оно будет банаховым пространством. Здесь используется линейный оператор $\delta: D \to B$ и линейные функционалы $r_j(x), j = 1,\ldots,n$, которые однозначно определяются из аддитивно-мультипликативного представления тождественного оператора в пространстве $D$: $x = \Lambda\delta x + \sum_{j=1}^{n} u_j r_j(x),\ x \in D$, где $u_1,\ldots,u_n$ - фиксированный базис в $E$. Все указанные в этом представлении операторы будут ограниченными относительно введённой нормы.

Рассмотрим экстремальную задачу $rank\,K \to \min,\ \|\Lambda - K\| \le \varepsilon$, которая состоит в минимизации ранга конечномерного оператора $K: B \to B$, аппроксимирующего $\Lambda$ с точностью $\varepsilon$ по норме пространства ограниченных операторов. Минимальное значение функционала в этой задаче равно минимальному значению неотрицательного индекса $j$, для которого $j$-е аппроксимативное число $s_j(\Lambda) = \inf_{rank K < j} \|\Lambda - K\|$ не превосходит погрешности аппроксимации $\varepsilon$. Если $j^* = j(\varepsilon)$ есть решение последней задачи, то решение $K$ исходной экстремальной задачи даётся отрезком длины $j^*$ разложения Шмидта $\Lambda = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(\Lambda)\psi_i(\cdot,\varphi_i)$ оператора $\Lambda$. Здесь $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ - две системы ортонормированных векторов гильбертова пространства $B$. Обозначим $h = 1/j(\varepsilon)$. Заметим, что величины $h$ и $\varepsilon$ стремятся к нулю одновременно. При замене компактного оператора $\Lambda$ конечномерным оператором $\Lambda_h = \sum_{i=1}^{j(\varepsilon)} s_i(\Lambda)\psi_i(\cdot,\varphi_i)$ мы получим дискретную аппроксимацию $D_h = \Lambda_h B \oplus E \subset D$ функционального пространства $D$ минимальной размерности при указанной погрешности модели $\varepsilon$. Дискретная аппроксимация $B_h$ гильбертова пространства $B$ получается естественным образом: сужение оператора $\Lambda_h$ на эту аппроксимацию должно быть инъективно. Понятно, что в качестве базиса подпространства $B_h$ можно взять ортонормированную систему $\{\varphi_i\}_{i=1}^{j(\varepsilon)}$. При этом условие согласования норм в парах $(B_h, B)$ и $(D_h, D)$ будет выполнено автоматически.

Пусть $L: D \to B$ есть линейный ограниченный оператор. В силу указанной выше факторизации тождественного оператора пространства $D$ имеет место следующее представление $Lx = Q\delta x + \sum_{j=1}^{n} q_j r_j(x),\ x \in D$. Здесь $Q = L\Lambda : B \to B$ есть линейный ограниченный оператор, а элементы $q_j = Lu_j, j = 1,...,n$ принадлежат гильбертову пространству $B$. Аналогично запишем функционалы из сопряжённого пространства $D^*$:

$$l(x) = (\delta x, \varphi) + \sum_{j=1}^{n} c_j r_j(x),\ \varphi = l\Lambda \in B^*, (\delta x, \varphi) = \varphi(\delta x), c_j = l(u_j).$$

Конечномерные аппроксимации отображений $L$ и $l$ получаются отсюда заменой инъекции $\Lambda$ конечномерной инъекцией $\Lambda_h$. Используя понятия «*хорошо обусловленной с порядком* $\rho$ *дискретной аппроксимации*» и «*дискретной аппроксимации оператора с порядком* $\omega$» ([4], с. 763), теперь имеем возможность применять абстрактную форму теоремы Рябенького-Филиппова при численном решении краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений.

При фиксированном индексе $j$ величины $s_j, \varphi_j, \psi_j$ образуют тройку $(s, \varphi, \psi)$, которая может быть найдена из спектральной задачи $s^2\psi = \Lambda\varphi,\ \varphi = \Lambda^*\psi$, где $\Lambda^*$ - сопряженный оператор. Необходимые для численного решения полученной выше спектральной задачи математические и алгоритмические конструкции вытекают из следующего утверждения об эквивалентности этой задачи бесконечномерной системе уравнений. *Пусть* $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$*- произвольный ортонормированный базис гильбертова пространства* $B$ *и* $R$ *- вещественная прямая. Тогда исходная спектральная задача эквивалентна нахождению тройки* $(s, \varphi, \psi) \in R \times B \times B$ *с ненулевыми компонентами следующей системы уравнений* $s^2(\varphi, e_i) = (\Lambda\varphi, \Lambda e_i),\ s^2(\psi, e_i) = (\Lambda^*\psi, \Lambda^* e_i),\ i = 1,2,...$. Относительно коэффициентов Фурье $\alpha_i = (\varphi, e_i)$ и $\beta_i = (\psi, e_i)$ можно получить две системы с симметричными положительно определёнными матрицами бесконечной размерности. После усечения этих матриц до конечной длины $l$ применяется алгоритм приближённого построения спектра усечённых матриц и соответствующих собственных векторов $(\alpha_1, ..., \alpha_l)$ и $(\beta_1, ..., \beta_l)$. Эффективность предложенного подхода проверена на примере оператора $m$- кратного интегрирования $(\Lambda x)(t) = \int_a^t \frac{(t-s)^{(m-1)}}{(m-1)!} x(s) ds$, рассматриваемого в пространстве $L_2[a,b]$ квадратично суммируемых на отрезке $[a,b]$ скалярных функций.

**Литература**

1. *Исламов Г.Г.* Оценки минимального ранга конечномерных возмущений операторов Грина // Дифференц. уравнения, 1989, Т. 25, № 9. - С. 1496-1503.
2. *Исламов Г.Г.* О некоторых приложениях теории абстрактного функционально-дифференциального уравнения. I // Дифференц. уравнения, 1989, Т. 25, № 11. – С. 1872-1881.
3. *Исламов Г.Г.* О некоторых приложениях теории абстрактного функционально-дифференциального уравнения. II // Дифференц. уравнения, 1990, Т. 26, № 2. – С. 224-232.
4. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа, М.-Ижевск, НИЦ «РХД», 2002. – 848 с.