

УДК 517.977.1+517.926

УПРАВЛЕНИЕ СПЕКТРОМ В БИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

© 2010 г. В. А. Зайцев

Для билинейной стационарной управляемой системы получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи управления спектром в случае, когда коэффициенты имеют специальный вид.

Пусть $\mathbb{R}^n$ – евклидово пространство размерности n , $e_1, \dots, e_n$ – канонический базис в $\mathbb{R}^n$, т.е. $e_1 = \text{col}(1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = \text{col}(0, \dots, 0, 1)$; $M_{m,n}$ – пространство вещественных $m \times n$ -матриц; $M_n := M_{n,n}$; $I = [e_1, \dots, e_n] \in M_n$ – единичная матрица; $*$ – операция транспонирования вектора или матрицы; если $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор-столбец, то $x^* \in \mathbb{R}^{n*}$ – вектор-строка; $J_0 := I$; J_1 – первый единичный косоый ряд, т.е. $J_1 := \sum_{i=1}^{n-1} e_i e_{i+1}^* \in M_n$; $J_k := J_1^k$, $k \in \mathbb{N}$ (т.е. $J_k = 0 \in M_n$ при $k \geq n$); $\chi(A; \lambda)$ – характеристический многочлен матрицы A ; $\text{Sp } A$ – след матрицы A .

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad y = C^*(t)x, \quad (t, x, u, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k. \quad (1)$$

Пусть управление в системе (1) строится по принципу линейной неполной обратной связи в виде $u = Uy$. Тогда система (1) перейдет в однородную систему

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)UC^*(t))x. \quad (2)$$

Наряду с системой (2) рассмотрим билинейную управляемую систему

$$\dot{x} = (A(t) + u_1 A_1(t) + u_2 A_2(t) + \dots + u_r A_r(t))x, \quad u_l \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Всякую систему вида (2) можно записать в виде (3), если положить $r := mk$, в качестве u_l , $l = \overline{1, r}$, взять коэффициенты матрицы U , в качестве матриц $A_l(t)$, $l = \overline{1, r}$, – матрицы $b_i(t)c_j^*(t) \in M_n$, где $b_i(t)$, $i = \overline{1, m}$, – столбцы матрицы $B(t)$ и $c_j(t)$, $j = \overline{1, k}$, – столбцы матрицы $C(t)$:

$$\dot{x} = \left(A(t) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k u_{ij} (b_i(t)c_j^*(t)) \right) x.$$

Системы вида (2) изучались в работах [1–8], системы вида (3) – в [7, 9–11]. В работе [1] введено свойство согласованности для системы (2), в работе [9] – для системы (3). Это свойство исследовалось в работах [1, 4, 5, 7, 9]. Свойство согласованности использовалось для доказательства локальной управляемости показателей Ляпунова системы (2) [2–6], устойчивости показателей Ляпунова системы (2) [3], локальной достижимости и локальной ляпуновской приводимости системы (3) [9–11], локальной управляемости показателей Ляпунова [10] и показателей Изобова системы (3) [11].

В настоящей работе рассматриваются стационарные системы вида (2) и (3)

$$\dot{x} = (A + BUC^*)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4)$$

$$\dot{x} = (A + u_1 A_1 + \dots + u_r A_r)x, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (5)$$

В случае стационарных систем асимптотическое поведение системы характеризуется спектром матрицы системы. Нами исследуется задача о глобальном управлении спектром.

Определение 1. Будем говорить, что задача управления спектром матрицы $A + u_1 A_1 + \dots + u_r A_r$ системы (5) разрешима, если для любого многочлена n -й степени $p(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-1} + \dots + \gamma_n$ с вещественными коэффициентами γ_i найдется постоянное управление $u = \text{col}(u_1, \dots, u_r) \in \mathbb{R}^r$, обеспечивающее для характеристического многочлена χ матрицы коэффициентов системы равенство

$$\chi(A + u_1 A_1 + \dots + u_r A_r; \lambda) = \lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-1} + \dots + \gamma_n. \quad (6)$$

По-другому эта задача называется также задачей о размещении (назначении) собственных значений [12, с. 159]. В случае $C = I$ задача управления спектром в системе (4) разрешима тогда и только тогда, когда система (1) вполне управляема [13, 14]. В работе [12, с. 179–181] приведен обзор известных достаточных и необходимых условий разрешимости этой задачи для системы (4). В работе [15] получены новые условия разрешимости этой задачи для системы (4), отличные от условий, приведенных в [12], которые являются необходимыми и достаточными. В настоящей работе результаты работы [15], полученные для системы (4), обобщаются на систему (5).

Пусть коэффициенты системы (5) имеют вид: матрица A имеет форму Хессенберга, а в матрицах A_l , $l = \overline{1, r}$, первые $p-1$ строк и последние $n-p$ столбцов равны нулю, т.е.

$$\begin{aligned} A &= \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n, \quad a_{i,i+1} \neq 0, \quad i = \overline{1, n-1}; \quad a_{ij} = 0, \quad j > i+1; \\ A_l &= \{a_{ij}^l\}_{i,j=1}^n, \quad a_{ij}^l = 0, \quad i = \overline{1, p-1}, \quad j = \overline{1, n}; \\ a_{ij}^l &= 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{p+1, n}; \quad l = \overline{1, r}; \quad p \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Обозначим через $\lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n$ характеристический многочлен матрицы A .

По матрице $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ построим матрицу S так же, как в работе [15]. А именно сначала построим матрицу

$$S_1 = \{s_{ij}^1\}_{i,j=1}^n, \quad s_{11}^1 := 1, \quad s_{1j}^1 := 0, \quad j = \overline{2, n}; \quad s_{ij}^1 := a_{i-1,j}, \quad i = \overline{2, n}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Далее для каждого $l = \overline{2, n}$ по матрице $S_{l-1} = \{s_{ij}^{l-1}\}_{i,j=1}^n$ построим матрицу $S_l = \{s_{ij}^l\}_{i,j=1}^n$ с элементами $s_{11}^l := 1$, $s_{1j}^l := s_{j1}^{l-1} := 0$, $j = \overline{2, n}$; $s_{ij}^l := s_{i-1,j-1}^{l-1}$, $i, j = \overline{2, n}$. Положим $S = S_n S_{n-1} \dots S_1$. Все матрицы S_l и S нижние треугольные, невырожденные. Далее построим матрицы $H_i := S A_i S^{-1}$, $i = \overline{1, r}$, и $H := S A S^{-1}$. Тогда матрицы H_i , $i = \overline{1, r}$, имеют такой же вид, как и матрицы A_i , $i = \overline{1, r}$, т.е. первые $p-1$ строк и последние $n-p$ столбцов матриц H_i , $i = \overline{1, r}$, нулевые. Матрица H имеет следующий вид [15, лемма 3]: $H = J_1 + e_n \xi$, где $\xi = (-\alpha_n, \dots, -\alpha_1) \in \mathbb{R}^{n*}$. Имеем

$$\chi(A + u_1 A_1 + \dots + u_r A_r; \lambda) = \chi(H + u_1 H_1 + \dots + u_r H_r; \lambda). \quad (8)$$

Построим матрицу $G := \sum_{i=1}^n \alpha_{i-1} J_{i-1}^*$, где $\alpha_0 := 1$.

Пусть $h_j^i \in \mathbb{R}^n$ — j -й столбец матрицы H_i , $i = \overline{1, r}$. По матрицам $H_i = [h_1^i, h_2^i, \dots, h_n^i]$, $i = \overline{1, r}$, построим $n \times r$ -матрицы $P_1 = [h_1^1, \dots, h_1^r]$, $\dots$, $P_n = [h_n^1, \dots, h_n^r]$. Затем построим $n \times r$ -матрицу $Q = J_0 G P_1 + J_1 G P_2 + \dots + J_{n-1} G P_n$.

Теорема 1. Пусть дана система (5) с матрицами (7) и

$$\lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-1} + \dots + \gamma_n := \chi(A + u_1 A_1 + \dots + u_r A_r; \lambda).$$

Тогда коэффициенты γ_i характеристического многочлена матрицы $A + u_1 A_1 + \dots + u_r A_r$ выражаются через коэффициенты системы (5), (7) следующим образом:

$$\gamma = \alpha - Qu, \quad (9)$$

где $\gamma = \text{col}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $\alpha = \text{col}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Теорема 2. Задача управления спектром для системы (5) с матрицами (7) разрешима тогда и только тогда, когда строки матрицы Q линейно независимы, при этом управление u , приводящее $\chi(A + u_1 A_1 + \dots + u_r A_r; \lambda)$ к заданному многочлену $p(\lambda)$ с коэффициентами γ_i , находится из системы (9).

Теорема 2 очевидно вытекает из теоремы 1. Действительно, если строки матрицы Q линейно независимы, то для любого γ линейная система уравнений (9) относительно u разрешима, и решение u этой системы обеспечивает равенство (6). Если же строки матрицы Q линейно зависимы, то не для всякого γ система (9) разрешима, следовательно, задача управления спектром неразрешима. Остается доказать теорему 1.

Замечание 1. Из теоремы 2 следует, что необходимым условием разрешимости задачи управления спектром в системе (5) является условие $r \geq n$.

Замечание 2. Среди матриц P_i , $i = \overline{1, n}$, последние $n - p$ матриц нулевые, поэтому в качестве Q можно брать матрицу $Q = J_0 G P_1 + J_1 G P_2 + \dots + J_{p-1} G P_p$.

Доказательство теоремы 1. Для доказательства нам понадобится лемма 4 [15].

Пусть дана система (5) с матрицами (7) и выполняется равенство (6). Построим по матрицам A , A_i , $i = \overline{1, r}$, матрицы H , H_i , $i = \overline{1, r}$. В силу равенства (8) получаем, что $\chi(H + u_1 H_1 + \dots + u_r H_r; \lambda) = \lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-1} + \dots + \gamma_n$. Таким образом, по лемме 4 [15] мы получаем равенства

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \alpha_i - \text{Sp}(u_1 H_1 + \dots + u_r H_r) J_{i-1} G = \\ &= \alpha_i - (u_1 \text{Sp}(H_1 J_{i-1} G) + \dots + u_r \text{Sp}(H_r J_{i-1} G)), \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (10)$$

Равенства (10) можно записать в векторном виде $\gamma = \alpha - T u$. Здесь $T \in M_{n, r}$,

$$T = \|\text{Sp}(H_j J_{i-1} G)\|, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, r}.$$

Остается показать, что $T = Q$. Введем в рассмотрение отображение $\text{vec} : M_n \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$, которое "разворачивает" матрицу $F \in M_n$, $F = \{f_{ij}\}$, $i, j = \overline{1, n}$, по строкам в вектор-столбец

$$\text{vec } F := \text{col}(f_{11}, \dots, f_{1n}, \dots, f_{n1}, \dots, f_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}.$$

Очевидно, что $\text{Sp}(F_1^* F_2) = (\text{vec } F_1)^* (\text{vec } F_2) = (\text{vec } F_2)^* (\text{vec } F_1)$. Рассмотрим первую строку матрицы T . Тогда для всех $l = \overline{1, r}$ имеем $\text{Sp}(H_l J_0 G) = (\text{vec}(J_0 G))^* (\text{vec}(H_l^*))$. Аналогично для второй строки матрицы T выполнено равенство

$$\text{Sp}(H_l J_1 G) = (\text{vec}(J_1 G))^* (\text{vec}(H_l^*)), \quad l = \overline{1, r},$$

и т.д. для i -й строки матрицы T ($i = \overline{1, n}$) имеем равенства

$$\text{Sp}(H_i J_{i-1} G) = (\text{vec}(J_{i-1} G))^* (\text{vec}(H_i^*)), \quad i = \overline{1, r}.$$

Построим матрицы

$$L = \begin{bmatrix} (\text{vec}(J_0 G))^* \\ (\text{vec}(J_1 G))^* \\ \dots \\ (\text{vec}(J_{n-1} G))^* \end{bmatrix} \in M_{n, n^2}, \quad N = \|\text{vec}(H_1^*), \dots, \text{vec}(H_r^*)\| \in M_{n^2, r}.$$

Тогда $T = LN$.

Рассмотрим матрицы $J_i G$. Имеем

$$J_0 G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad J_1 G = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad J_{n-1} G = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Развернем эти матрицы по строкам в вектор-столбцы, транспонируем их в строки и составим из них матрицу L . Тогда можно заметить, что эта матрица будет иметь блочный вид:

$$L = \left\| [J_0 G], [J_1 G], \dots, [J_{n-1} G] \right\| \in M_{n, n^2}.$$

Рассмотрим теперь матрицу N . Имеем

$$\text{vec}(H_1^*) = \begin{bmatrix} h_1^1 \\ h_2^1 \\ \vdots \\ h_n^1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2}, \quad \dots, \quad \text{vec}(H_r^*) = \begin{bmatrix} h_1^r \\ h_2^r \\ \vdots \\ h_n^r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2} \quad \Rightarrow \quad N = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} \in M_{n^2, r}.$$

Следовательно, $T = LN = J_0 G P_1 + J_1 G P_2 + \dots + J_{n-1} G P_n = Q$. Теорема 1 доказана.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 06-01-00258).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попова С.Н., Тонков Е.Л. Управление показателями Ляпунова согласованных систем. I // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 10. С. 1687–1696.
2. Попова С.Н., Тонков Е.Л. Управление показателями Ляпунова согласованных систем. II // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 11. С. 1949–1957.
3. Попова С.Н., Тонков Е.Л. Управление показателями Ляпунова согласованных систем. III // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 2. С. 228–238.
4. Попова С.Н., Тонков Е.Л. К вопросу о равномерной согласованности линейных систем // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 4. С. 723–724.
5. Попова С.Н., Тонков Е.Л. Согласованные системы и управление показателями Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 2. С. 226–235.
6. Макаров Е.К., Попова С.Н. О локальной управляемости характеристических показателей Ляпунова с некрратными показателями // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 4. С. 495–499.
7. Зайцев В.А. Согласованность и управление показателями Ляпунова // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. Ижевск, 1999. Вып. 2 (17). С. 3–40.
8. Попова С.Н. К свойству локальной достижимости линейных управляемых систем // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 1. С. 50–56.
9. Зайцев В.А., Тонков Е.Л. Достижимость, согласованность и метод поворотов В.М. Миллионщикова // Изв. вузов. Математика. 1999. № 2 (441). С. 45–56.
10. Tonkov E.L. Uniform attainability and Lyapunov reducibility of bilinear control system // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. Suppl. 1. 2000. P. S228–S253.
11. Тонков Е.Л. Ляпуновская приводимость линейной системы, стабилизация и управление показателями Изобова // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. Минск, 2000. Т. 4. С. 146–155.
12. Леонов Г.А., Шумафов М.М. Методы стабилизации линейных управляемых систем. СПб., 2005.
13. Попов В.М. Гиперустойчивость автоматических систем. М., 1970.
14. Wonham W.M. On pole assignment in multi-input controllable linear systems // IEEE Trans. on Automat. Control. 1967. V. AC-12. № 6. P. 660–665.
15. Зайцев В.А. Управление спектром в линейных системах с неполной обратной связью // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 9. С. 1320–1328.

Удмуртский государственный университет,
г. Ижевск

Поступила в редакцию
28.03.2008 г.