КРИТЕРИЙ РАЗРЕШИМОСТИ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КРАЕВЫМИ НЕРАВЕНСТВАМИ

Исламов Г.Г., Исламов А.Г.
Ижевск, Удмуртский госуниверситет

Изучаются теоретические вопросы численного исследования задач разрешимости и представления решений для функционально-дифференциальных уравнений с краевыми неравенствами и рассматриваются эффективные алгоритмы и параллельные программы их реализации для многопроцессорных систем.

Solvability criterion and representation of solutions of functional-differential equations with boundary inequalities.

Islamov G., Islamov A.

There are study theoretical questions about computing investigation of solvability criterion and representation of solutions for functional-differential equations with boundary inequalities and consider effective algorithms and parallel programs of its realization for multiprocessors systems.

Пусть B вещественное банахово пространство, Λ - модельный инъективный линейный оператор, определённый на этом пространстве, вещественное линейное многообразие D можно представить в виде прямой суммы $D = \Lambda B \oplus E$, где второе слагаемое конечномерно. В пространстве D вводится норма $\|x\|_D = \|\delta x\|_B + \sum_{j=1}^{n} |r_j(x)|$, относительно которой оно будет банаховым пространством. Здесь используется линейный оператор $\delta : D \to B$ и линейные функционалы $r_j(x), j = 1,\ldots,n$, которые однозначно определяются из аддитивно-мультипликативного представления тождественного оператора в пространстве D: $x = \Lambda\delta x + \sum_{j=1}^{n} u_j r_j(x),\ x \in D$, где $u_1,\ldots,u_n$ - фиксированный базис в E. Все указанные в этом представлении операторы будут ограниченными относительно введённой нормы.

Предположим, что заданный линейный ограниченный оператор $L : D \to B$ имеет замкнутую область значений. Приведём два критерия разрешимости [1] в пространстве D уравнения $Lx = f$ с краевыми неравенствами $l_i(x) \ge \beta_i, i=1,...,m$, где функционалы принадлежат сопряженному пространству: $l_i \in D^*$. В терминах канонических представлений оператора $Lx = Q\delta x + \sum_{j=1}^{n} q_j r_j(x)$, $Q = L\Lambda, q_j = Lu_j$ и функционалов $l_i(x) = (\delta x, \varphi_i) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} r_j(x)$, $\varphi_i = l_i\Lambda \in B^*, (\delta x, \varphi_i) = \varphi_i(\delta x), \alpha_{ij} = l_i(u_j)$ имеет место следующий аналог теоремы Фредгольма. Пусть $f \in B$ и вещественные числа $\beta_i, i=1,...,m$ таковы, что система неравенств $l_i(x) \ge \beta_i, i=1,...,m$ совместна.

Теорема 1. *Для того чтобы существовало решение $x \in D$ уравнения $Lx = f$ с краевыми неравенствами $l_i(x) \ge \beta_i, i=1,...,m$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $y \in B^*$, удовлетворяющего при каких-либо неотрицательных числах $\lambda_1,...,\lambda_m$ системе уравнений*

$$\begin{cases} Q^* y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i, \\ (q_i, y) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_{ij}, \; j=1,...,n, \end{cases}$$

выполнялось неравенство $(f, y) \ge \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \beta_i$.

В приложениях встречается случай, когда B изоморфно и изометрично пространству X^*, сопряженному с некоторым банаховым пространством X. Природа элементов второго сопряжённого пространства может оказаться весьма сложной (как в случае $X = L^n{}_1[a,b], B = L^n{}_\infty[a,b]$) и это вызывает определённые трудности. Ниже выделяется такой класс операторов L и функционалов l_i из D^*, для которых утверждение о разрешимости уравнений с краевыми неравенствами можно формулировать в терминах двойственного пространства X.

Теорема 2. *Пусть билинейная форма $<\cdot,\cdot>$ задаёт двойственность между пространствами X и B, оператор Q сопряжен к некоторому оператору $\Gamma : X \to X$ и $l_i(x) \equiv <\varphi_i, \delta x> + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} r_j(x), \varphi_i \in X, i=1,...,m$. Задача $Lx = f$, $l_i(x) \ge \beta_i, i=1,...,m$ разрешима в D, если и только если для любого $\varphi \in X$, удовлетворяющего при некоторых числах $\lambda_1 \ge 0,...,\lambda_m \ge 0$ системе уравнений*

$$
\begin{cases}
\Gamma\varphi = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i, \\
<\varphi, q_i> = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_{ij},\ j = 1, \ldots, n,
\end{cases}
$$

выполняется неравенство $<\varphi, f> \geq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \beta_i$.

Эффективность предложенного подхода проверена на примере оператора m- кратного интегрирования $(\Lambda x)(t) = \int_a^t \frac{(t-s)^{(m-1)}}{(m-1)!} x(s)ds$, рассматриваемого в пространстве $B = L_2[a,b]$ квадратично суммируемых на отрезке $[a,b]$ вещественнозначных скалярных функций. Расширение образа ΛB производилось за счёт сплайнов конечного дефекта с фиксированными узлами на $[a,b]$. Рассматривались конкретные классы дифференциальных уравнений высших порядков с запаздывающим аргументом и нелокальными краевыми неравенствами. Представление решений получено через функцию Грина вспомогательной краевой задачи. Реализация предложенной схемы исследования задачи разрешимости и представления решений для этих классов проводилась на гибридных системах, состоящих из многоядерного быстродействующего процессора и системы графических процессоров, поддерживающих технологию многопоточного параллельного программирования CUDA [2].

Литература

1. *Исламов Г.Г.* Критерий разрешимости уравнений с краевыми неравенствами // Известия ин-та математики и информатики, 1994, Вып. 2. Ижевск, УдГУ. – С. 3- 24.

2. NVIDIA CUDA Programming Guide 3.0 // www.nvidia.com.