Математический институт им. В.А. Стеклова
Владимирский государственный университет
Владимирский государственный гуманитарный университет
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ И ДИНАМИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ

Тезисы докладов

Суздаль
2 – 7 июля 2010 г.

Москва 2010

УДК 517.911/.958
ББК 22.161.6
М43

В сборник включены тезисы докладов, представленных на Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам.

Представляет интерес для научных работников, студентов и аспирантов.

ISBN 5-98419-040-X

[3] Radkevich E. V. Irreducible Chapman–Enskog Projections and Navier–Stokes Approximations// Instability in Models Connected with Fluid Flows. II. Edited by Claude Bardos and Andrei Fursikov; International Mathematical Series, Vol. 6, pp. 85-151, Springer(2007)

[4] Е. В. Радкевич Проекции Чепмена-Энскога и проблемы Навье-Стокс приближения.// Труды Мат. Инст. им. Стеклова, т. 250(2005), стр. 219-225 Перевод: Proceedings of the Steclov Institute of Mathematics, v.250(2005), pp. 1-7

[5] V. V. Palin, E. V. Radkevich Hyperbolic Regularization of Conservation Laws//ISSN 1061-9208, Russian J. of Math. Phys., Vol. 15, N 3, pp 401-421(2008)

[6] V. V. Palin, E. V. Radkevich, Mathematical aspects of the Maxwell problem//Applicable Analysis, Vol. 88, No. 8(2009), pp. 1233-1264

Статистически инвариантные множества управляемой системы, параметризованной динамической системой[57]

Родина Л. И. (Россия)
Удмуртский государственный университет
rdl@uni.udm.ru
Тонков Е. Л. (Россия)
Удмуртский государственный университет
eltonkov@udm.ru

Продолжая исследования работ [1],[2], мы рассматриваем ряд новых задач, связанных со свойствами статистических характеристик асимптотического поведения множеств достижимости управляемых систем. Рассматриваются системы, правая часть которых параметризована с помощью топологической динамической системы (Σ, h^t) и имеет замкнутые, но не обязательно компактные образы. Для исследования поведения решений таких систем в работе [1] введено пространство $\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$ *непустых замкнутых* (но не обязательно ограниченных) подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$, и подпространство в $\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из *выпуклых замкнутых* подмножеств, которое обозначается через $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$. В пространстве $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ определена метрика, которая названа метрикой Хаусдорфа-Бебутова; такая метрика принимает только конечные значения и сходимость в этой метрике означает сходимость, равномерную на компактах в $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим топологическую динамическую систему (Σ, h^t) с полным метрическим фазовым пространством Σ и *однопараметрической группой преобразований* h^t пространства Σ в себя, непрерывной по (t, σ) и удовлетворяющей начальному условию $h^t\sigma|_{t=0} = \sigma$. Для заданного множества $U \subset \mathbb{R}^m$ рассмотрим пространство с мерой $(U, \mathfrak{A}, \eta)$, где $\mathfrak{A}$ — борелевская сигма-алгебра подмножеств U, η — мера Радона, сосредоточенная на множестве U. Мерой Радона с носителем U называется конечная регулярная счетно-аддитивная функция $\eta : A \to \mathbb{R}$ множеств $A \in \mathfrak{A}$.

Предполагаем, что задана непрерывная функция $f(\sigma, x, u)$ переменных $(\sigma, x, u) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ и функция $U(\sigma, x)$ со значениями в пространстве $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^m)$, *полунепрерывная сверху* в смысле метрики Хаусдорфа-Бебутова при всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$. Мы исследуем статистически инвариантные множества управляемой системы, порожденной динамической системой (Σ, h^t) и функциями f и U. Эта система задаётся при каждом $\sigma \in \Sigma$ множеством *допустимых процессов*, определенных следующим образом. *Допустимым процессом* управляемой системы при каждом фиксированном $\sigma \in \Sigma$ называется всякая функция $t \to (\varphi(t, \sigma), \eta_t)$ переменного t, определённая на $[0, s)$ и удовлетворяющая следующим условиям: 1) управление $t \to \eta_t$ является измеримой по Лебегу мерозначной функцией со значениями в пространстве $\operatorname{rpm}(U_0(t))$ вероятностных мер Радона с носителем $U_0(t) \doteq U(h^t\sigma, \varphi(t, \sigma))$; 2) функция $t \to \varphi(t, \sigma)$ является абсолютно непрерывным решением системы

$$\dot{x}(t) = \int_{U_0(t)} f(h^t\sigma, x(t), u)\eta_t(du), \quad t \in [0, s), \tag{1}$$

где $[0, s)$ — правый максимальный интервал существования решения φ системы (1).

По функциям f и U построим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad F(\sigma, x) = \operatorname{co}\{y \in \mathbb{R}^n \ y = f(\sigma, x, u),\ u \in U(\sigma, x))\}, \tag{2}$$

[57]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 10-01-00496-а) и программы фундаментальных исследований Президиума РАН №29 «Математическая теория управления».

где $\overline{\mathrm{co}}\, G$ — замыкание выпуклой оболочки множества G.

Для каждого $X \in \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ и момента времени $t \geqslant 0$ обозначим через $A(t, \sigma, X)$ множество достижимости системы (1) в момент t из начального множества X. Предположим, что задана непрерывная функция $\mathbb{A} : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ переменных (t, ω), где $\omega = (\sigma, X)$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\mathbb{A}(t,\omega)\big|_{t=0} = X, \quad \mathbb{A}(t+s,\omega) = \mathbb{A}\big(t, h^s\sigma, \mathbb{A}(s,\omega)\big), \quad t, s \in \mathbb{R}_+. \tag{3}$$

Для фиксированного множества $X_0 \in \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим множество

$$\alpha(\vartheta, \omega) \doteq \{t \in [0, \vartheta] : A(t,\omega) \subseteq \mathbb{A}(t, \omega_0)\}, \quad \omega_0 = (\sigma, X_0).$$

Характеристику $\mathrm{freq}(\omega) \doteq \lim\limits_{\vartheta\to\infty} \dfrac{\mathrm{mes}\, \alpha(\vartheta,\omega)}{\vartheta}$ будем называть *относительной частотой поглощения* множества достижимости $A(t,\omega)$ системы (1) заданным множеством $\mathbb{A}(t,\omega_0)$. Если указанный предел не существует, то рассматриваются характеристики $\mathrm{freq}^*(\omega)$ и $\mathrm{freq}_*(\omega)$ — верхняя и нижняя относительные частоты поглощения множества достижимости $A(t,\omega)$ системы (1) множеством $\mathbb{A}(t,\omega_0)$. Обозначим

$$\mathfrak{A}(\sigma) \doteq \big\{(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n : x \in \mathbb{A}(t,\omega_0)\big\}, \quad \omega_0 = (\sigma, X_0),$$

$$\mathfrak{A}^r(\sigma) \doteq \big\{(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n : \rho_{\mathbb{R}^n}\big(x, \mathbb{A}(t,\omega_0)\big) \leqslant r(t,\sigma)\big\}, \quad \mathfrak{B}^r(\sigma) \doteq \mathfrak{A}^r(\sigma) \setminus \mathfrak{A}(\sigma),$$

где $r(t,\sigma)$ — неотрицательная непрерывная функция переменных $(t,\sigma) \in \mathbb{R}_+ \times \Sigma$.

Скалярную функцию $V(\sigma, x)$ будем называть *функцией Ляпунова* в области $\mathfrak{A}^r(\sigma)$, если она локально липшицева по (σ, x) равномерно относительно σ на Σ и для каждого $\sigma \in \Sigma$ выполнены условия: $V(h^t\sigma, x) \leqslant 0$ при всех $(t,x) \in \mathfrak{A}(\sigma)$, $V(h^t\sigma, x) > 0$ для всех $(t,x) \in \mathfrak{B}^r(\sigma)$. Обозначим через $V^o(\sigma, x; q)$ обобщенную производную функции $V(\sigma,x)$ в точке (σ, x) по направлению вектора $(1, q) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, через $V^o_{\max}(\sigma,x) \doteq \max_{q\in F(\sigma,x)} V^o(\sigma,x;q)$ — *верхнюю производную* функции V в силу включения (2).

Теорема 1. *Фиксируем множества $X_0, X \in \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$, $X \subseteq X_0$, функцию $\mathbb{A}(t,\omega_0)$, где $\omega_0 = (\sigma, X_0)$, удовлетворяющую условиям (3) и множество достижимости $A(t,\omega)$ системы (1), $\omega = (\sigma, X)$. Пусть существуют непрерывные скалярные функции $V(\sigma,x)$ и $w(\sigma,z)$ переменных $(\sigma,x) \in \Sigma\times\mathbb{R}^n$ и $(\sigma,z) \in \Sigma\times\mathbb{R}$ такие, что:*

1. *Для каждого σ верхнее решение $z^*(t,\sigma)$ задачи*

$$\dot z = w(h^t\sigma, z), \quad z(0) = 0, \quad t \geqslant 0,$$

определено при всех $t \geqslant 0$.

2. *Для каждого $\sigma \in \Sigma$ бесконечно большая функция $V(\sigma,x)$ является функцией Ляпунова в области $\mathfrak{A}^{1+r}(\sigma)$, где $r = r(t,\sigma) \doteq \max\{z^*(t,\sigma), 0\}$ и при всех $(t,x) \in \mathfrak{A}^{1+r}(\sigma)$ выполнено неравенство $V^o_{\max}(h^t\sigma, x) \leqslant w\big(h^t\sigma, V(h^t\sigma,x)\big)$.*

Тогда множество достижимости $A(t,\omega)$ существует для всех $t \geqslant 0$ и для каждого $\sigma \in \Sigma$ выполнены неравенства $\mathrm{freq}^*(\omega) \geqslant \varkappa^*(\sigma)$, $\mathrm{freq}_*(\omega) \geqslant \varkappa_*(\sigma)$, где

$$\varkappa^*(\sigma) \doteq \overline{\lim}_{\vartheta\to\infty} \frac{\mathrm{mes}\{t \in [0,\vartheta] : z^*(t,\sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta}, \quad \varkappa_*(\sigma) \doteq \underline{\lim}_{\vartheta\to\infty} \frac{\mathrm{mes}\{t \in [0,\vartheta] : z^*(t,\sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta}.$$

Если $\mathrm{freq}(\omega) = 1$ для каждого $\sigma \in \Sigma$, то множество $\mathfrak{A}(\sigma)$ называется *статистически инвариантным* относительно управляемой системы (1). Также получены условия, при которых множество $\mathfrak{A}(\sigma)$ является *статистически слабо инвариантным* относительно системы (1). Это означает, что для любой точки $x_0 \in X_0$ найдется такое решение $\varphi(t,\sigma)$ включения (2), что $\varphi(t,\sigma)$ определено при всех $t \geqslant 0$, $\varphi(0,\sigma) = x_0$ и верхняя относительная частота попадания данного решения в множество $\mathbb{A}(t,\omega_0)$ равна единице.

Литература

[1] Панасенко Е. А., Тонков Е. Л. Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 2008. Т. 262, С. 202-221.

[2] Родина Л.И., Тонков Е.Л. Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 2, С. 265-288.