

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРОЕКТОРОВ

Г.Г. Исламов, А. Г. Исламов

Удмуртский государственный университет, Ижевск

Пусть $B = H_\nu$ и H_μ - конечномерные вещественные гильбертовы пространства размерности соответственно ν и μ , причём $\nu \ll \mu$. Пусть, далее, $\Lambda : B \rightarrow H_\mu$ - линейное инъективное отображение и $\Lambda^* : H_\mu \rightarrow B$ - сопряжённый с ним оператор. Следующее утверждение очевидно.

Лемма. Самосопряжённый оператор $S = \Lambda^* \Lambda : B \rightarrow B$ положительно определён и обратим, $P = \Lambda S^{-1} \Lambda^* : H_\mu \rightarrow H_\mu$ - ортогональный проектор. Кроме того, операторы $\delta = S^{-1} \Lambda^* : H_\mu \rightarrow B$ и $\delta^* = \Lambda S^{-1} : B \rightarrow H_\mu$ есть обобщённые обратные отображения к операторам соответственно к Λ и Λ^* , т. е. $\Lambda \delta \Lambda = \Lambda$ и $\Lambda^* \delta^* \Lambda^* = \Lambda^*$.

Введём каноническое представление произвольного элемента $x \in H_\mu$. Имеем:

$$x = Px + (I - P)x = \Lambda \delta x + \sum_{j=1}^{\mu-\nu} u_j r_j(x).$$
 Нетрудно видеть, что система элементов

$u_1, \dots, u_{\mu-\nu}$ в этом представлении принадлежит пространству H_μ , образует базис ядра оператора δ и биортогональна системе функционалов $r_1, \dots, r_{\mu-\nu}$. Далее, так как $I - P$ есть ортогональный проектор, то в качестве второго слагаемого канонического разложения можно взять спектральное разложение этого проектора, т. е. считать, что система $u_1, \dots, u_{\mu-\nu}$ ортонормирована и $r_j(x) = (x, u_j)$, $j = 1, \dots, \mu - \nu$. Всюду $(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение в гильбертовом пространстве H_μ . Ввиду условия $\nu \ll \mu$ разность $\mu - \nu$ может оказаться достаточно большой. Поэтому целесообразно

ввести более узкое пространство $D = \{x \in H_\mu : x = \Lambda \delta x + \sum_{j=1}^n u_j r_j(x)\}$, в котором мы

будем далее рассматривать линейные уравнения с дополнительными линейными ограничениями. Нетрудно видеть, что это пространство имеет размерность $n + \nu$ ($n \leq \mu - \nu$) и получается в результате расширения образа ΛB оператора Λ за счёт первых n элементов ядра оператора δ . При этом элементы $u_1, \dots, u_n$ образуют базис ядра сужения оператора δ на линейное многообразие D . В пространстве D

введём норму $\|x\|_D = \|\delta x\|_B + \sum_{j=1}^n |r_j(x)|$. Каноническая форма представления элементов из

D позволяет получить канонические представления для линейных операторов и функционалов, определённых на D . Пусть $L : D \rightarrow B$ есть линейный ограниченный оператор. В силу указанной выше факторизации тождественного оператора построенного пространства D имеет место следующее представление

$$Lx = Q \delta x + \sum_{j=1}^n q_j r_j(x), \quad x \in D.$$
 Здесь $Q = L \Lambda : B \rightarrow B$ есть линейный оператор, а элементы $q_j = L u_j$, $j = 1, \dots, n$ принадлежат гильбертову пространству B .

Приведём критерий разрешимости в пространстве D уравнения $Lx = f$ с линейными неравенствами $l_i(x) \geq \beta_i$, $i = 1, \dots, m$, где $l_i \in D^*$, $f \in B$. В терминах

канонических представлений оператора $Lx = Q\delta x + \sum_{j=1}^n q_j r_j(x)$, $Q = L\Lambda$, $q_j = Lu_j$ и

функционалов $l_i(x) = (\delta x, \varphi_i) + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} r_j(x)$, $\varphi_i = l_i \Lambda \in B^*$, $(\delta x, \varphi_i) = \varphi_i(\delta x)$, $\alpha_{ij} = l_i(u_j)$ имеет

место следующий аналог теоремы Фредгольма о разрешимости уравнения с линейными неравенствами [3]. Пусть вещественные числа $\beta_i, i=1, \dots, m$ таковы, что система неравенств $l_i(x) \geq \beta_i, i=1, \dots, m$ совместна.

Теорема. Для того чтобы существовало решение $x \in D$ уравнения $Lx = f$ с линейными неравенствами $l_i(x) \geq \beta_i, i=1, \dots, m$ необходимо и достаточно, чтобы для любых $y \in B$ и неотрицательных $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} Q^* y = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i, \\ (q_i, y) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \alpha_{ij}, j=1, \dots, n, \end{cases}$$

выполнялось неравенство $(f, y) \geq \sum_{i=1}^m \lambda_i \beta_i$.

Рассмотрим теперь задачу на собственные значения для проектора $P = \Lambda S^{-1} \Lambda^* : H_\mu \rightarrow H_\mu$. При численных расчётах все операторы заменяются представляющими их матрицами. Спектр P состоит из нуля и единицы. Поэтому собственные векторы находятся из уравнений $\Lambda^* u = 0$ и $Pu = u$. Из первого уравнения находим необходимую нам систему линейно независимых элементов $u_1, \dots, u_n$ из H_μ .

Для этого к транспонированной матрице Λ^* применяется алгоритм поиска базисного минора матрицы [2], в основе которого лежит универсальная операция над матричными структурами [1]. Все решения второго уравнения $Pu = u$ даются формулой $u = Pz$, где z - произвольный вектор из H_μ . Следовательно, для произвольного базиса $f_1, \dots, f_\nu$ пространства H_ν решения $x_i = \Lambda f_i$ в пространстве D уравнений $\delta x = f_i, r_j(x) = 0, j=1, \dots, n; i=1, \dots, \nu$ дают базис собственного подпространства, отвечающего единице, самосопряженной матрицы P . Численные расчёты матриц S^{-1} , P и базисных векторов $u_1, \dots, u_n$ выполнены на системе графических процессоров, поддерживающих технологию многопоточного программирования CUDA [4].

Литература

1. Исламов Г.Г. Универсальная операция над матричными структурами // Современные проблемы вычислительной математики и математической физики: Международная конференция, Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 16-18 июня 2009 г. Тезисы докладов. – М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова; Макс Пресс, 2009. – 396 с.
2. Исламов Г.Г., Коган Ю.В. Об одном алгоритме поиска базисного минора матрицы // Вестник удмуртского университета. – 2006. - № 1 : Математика. – С. 63 – 70.
3. Исламов Г.Г. Критерий разрешимости уравнений с краевыми неравенствами // Известия ин-та математики и информатики, 1994, Вып. 2. Ижевск, УдГУ. – С. 3-24.
4. NVIDIA CUDA Programming Guide Version 3.0 // <http://www.nvidia.com>.