ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ НОМЕР

том 16 № 5 2010

ЕКАТЕРИНБУРГ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 5 2010

УДК 517.911+517.93

АСИМПТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИ СЛАБО ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ[1]

Е. А. Панасенко, Л. И. Родина, Е. Л. Тонков

Статья написана на основе доклада, прочитанного на конференции "Актуальные проблемы теории устойчивости и управления" и посвященного распространению известной теоремы Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского (1952) об асимптотической устойчивости положения равновесия автономной системы дифференциальных уравнений. Наши основные усилия сосредоточены на неавтономных дифференциальных включениях с замкнутозначными (но необязательно компактнозначными) правыми частями, где в качестве положения равновесия выступает слабо инвариантное или статистически слабо инвариантное (относительно решений включения) заданное множество. Эти утверждения формулируются в терминах метрики Хаусдорфа — Бебутова, динамической системы сдвигов, сопутствующей правой части дифференциального включения и слабо инвариантного множества, отвечающего дифференциальному включению.

Ключевые слова: теория устойчивости, дифференциальные включения, слабо инвариантные и статистически слабо инвариантные множества.

E.A. Panasenko, L.I. Rodina, E.L. Tonkov. Asymptotically stable statistically weakly invariant sets for controlled systems.

This note is based on the talk given at the conference "Actual problems of stability and control theory" and dedicated to the extension of the known theorem by E.A. Barbashin and N.N. Krasovskii (1952) on asymptotic stability of an equilibrium state for an autonomous system of differential equations. Our efforts are mainly concentrated on nonautonomous differential inclusions with closed-valued (but not necessarily compact-valued) right-hand sides, where the equilibrium state is a given weakly invariant or statistically weakly invariant (with respect to the solutions of the inclusion) set. The statements are formulated in terms of the Hausdorff—Bebutov metric, the dynamical system of translations corresponding to the right-hand side of the differential inclusion, and the weakly invariant set corresponding to the inclusion.

Keywords: stability theory, differential inclusions, weakly invariant and statistically weakly invariant sets.

Введение

В 1952 г. Е.А. Барбашин и Н.Н. Красовский показали [1, 2], что в условиях теоремы А.М. Ляпунова об *асимптотической устойчивости* нулевого решения системы

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{0.1}$$

требование *отрицательной определенности* производной $\dot{V}_f$ функции Ляпунова V можно ослабить до требования $\dot{V}_f \leqslant 0$ при дополнительном условии, что множество $\dot{V}_f(x) = 0$ *не содержит целых траекторий* системы (0.1), кроме положения равновесия $x = 0$.

Эта теорема в силу своей эффективности вызвала поток исследований, посвященных асимптотической устойчивости конкретных систем, а также исследований, связанных с многочисленными обобщениями теоремы Барбашина и Красовского на нестационарные системы, системы уравнений с последействием и др.

В рамках отмеченной тематики в работе [3] теоремы об асимптотической устойчивости и асимптотической устойчивости в целом получены для нестационарного включения

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \tag{0.2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 09-01-97503, 10-01-00496), Программы "Развитие научного потенциала ВШ" (проект 2.1.1/1131) и Программы исследований Президиума РАН № 29 "Математическая теория управления".

с компактными образами правой части $F(t,x)$ и заданным множеством $M(t) \subset \mathbb{R}^n$, *инвариантным* относительно потока, порожденного включением (0.2) и играющим роль положения равновесия включения (0.2).

Здесь мы продолжаем исследования, начатые в работах [3, 4], распространяем (с оглядкой на управляемые системы без предположения компактности) теоремы Барбашина и Красовского на нестационарные включения (0.2) без предположения компактности образов правой части $F(t,x)$, а в отношении множества $M(t)$ предполагаем только *слабую* или *статистически слабую инвариантность* относительно потока, отвечающего включению (0.2).

Эти утверждения формулируются в терминах метрики, называемой нами *метрикой Хаусдорфа — Бебутова*, а также в терминах *динамической системы сдвигов* [5] сопутствующей включению (0.2). Важно отметить, что наши исследования дифференциального включения (0.2) ориентированы на управляемые системы

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad x \in M(t), \quad u \in U(t), \tag{0.3}$$

удовлетворяющие перечисленным ниже следующим условиям.

При изучении управляемой системы (0.3) мы, как правило, предполагаем, что $M(t)$ — компактное при каждом t множество в $\mathbb{R}^n$, а $U(t)$ — замкнутое при каждом t заданное множество в $\mathbb{R}^m$ (компактность множества $U(t)$ не предполагается, что позволяет включить в рассмотрение большой класс важных для приложений задач управления).

Цель этой статьи (во многом повторяющей наш доклад на конференции APSCT'2009) двойственна: во-первых, мы обсуждаем "технические условия", при которых потенциально верные утверждения о слабой или статистически слабой асимптотической устойчивости управляемых систем применимы на практике; во-вторых, мы формулируем утверждения, основанные на хорошо зарекомендовавших себя методах А.М. Ляпунова, Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского. Сформулированные ниже утверждения, снабженные звездочкой, доказаны, утверждения без звездочки правдоподобны.

1. Основные обозначения

Пусть $\mathbb{R}^n$ — стандартное евклидово пространство (т.е. евклидово пространство с фиксированным ортонормированным базисом) размерности n со скалярным произведением $\langle x,y\rangle$ и нормой $|x| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$, $\rho_{\mathbb{R}^n}(x,M) \doteq \min\limits_{y\in M}|x-y|$ — расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до замкнутого множества M в $\mathbb{R}^n$. Если r — положительное число, то через $O_r \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant r\}$ обозначим замкнутый шар в пространстве $\mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в нуле. Далее, если M — произвольное множество в $\mathbb{R}^n$, то $\operatorname{cl} M$ (или $\overline{M}$) — замыкание, $\operatorname{fr} M$ — граница, $\operatorname{int} M$ — внутренность, $\operatorname{co} M$ — выпуклая оболочка множества M относительно пространства $\mathbb{R}^n$.

Пространство непустых *компактных* подмножеств в $\mathbb{R}^n$ обозначим $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$. Определим в $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ метрику Хаусдорфа

$$\operatorname{dist}(A,B) = \max\{d(A,B), d(B,A)\}, \tag{1.1}$$

где $d(A,B) \doteq \max\limits_{a\in A}\rho_{\mathbb{R}^n}(a,B)$ — *полуотклонение* множества A от множества B. Подпространство в $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из *выпуклых компактных* подмножеств, обозначим через $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ и пространство всех непустых *замкнутых и выпуклых* (необязательно ограниченных) подмножеств в $\mathbb{R}^n$ — через $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$. Каждое из пространств $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ является полным в метрике (1.1). В [4] показано, что и в пространстве $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ можно определить метрику, относительно которой $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ будет полным метрическим пространствам. Действительно, пространство $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ снабдим метрикой

$$\operatorname{Dist}(F,G) = \max\bigl\{D(F,G),\, D(G,F)\bigr\}, \quad \text{где} \quad D(F,G) = \sup_{r>0}\min\Bigl\{\, d_r(F,G),\ 1/r\Bigr\}, \tag{1.2}$$

$d_r(F,G) = d(F_r, G_r)$, $F_r = F \bigcap m^r(F)$, $m^r(F) = \{ f_0 : |f_0| = \min_{f \in F} |f| \} + O_r$. Основное свойство введенной метрики (1.2) состоит в следующем.

Лемма 1*. *Пространство* $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ *является полным в метрике Хаусдорфа — Бебутова. Далее, равенство* $\lim_{i\to\infty} \operatorname{Dist}(F^i, F) = 0$ *обеспечивает равномерную на компактах* (*в метрике Хаусдорфа* dist *в* $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$) *сходимость последовательности* $\{F^i\}_{i=0}^{\infty}$ *к* $F \in \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$.

2. Дифференциальные включения

Будем рассматривать задачу

$$\dot{x} \in F(t,x), \quad x \in M(t), \tag{2.1}$$

при следующем предположении.

Предположение 1. Функция $(t,x) \to F(t,x)$ определена при всех $(t,x) \in \mathbb{R}^{1+n}$ и принимает значения в пространстве $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$, а функция $t \to M(t)$ со значениями в $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ определена для всех $t \in \mathbb{R}$. Кроме того, функция $t \to F(t,x)$ предполагается *равномерно непрерывной* (в метрике Хаусдорфа — Бебутова) на $\mathbb{R}$ для каждого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$, а функция $t \to M(t)$ — равномерно непрерывной на прямой $\mathbb{R}$.

Имея в виду изучение асимптотических свойств решений задачи (2.1) равномерных относительно начального момента времени t_0, введем в рассмотрение *динамическую систему сдвигов* (см. [5]) сопутствующую задаче (2.1). С этой целью будем рассматривать динамическую систему (Σ, h^t), где $\Sigma = \operatorname{cl}\{P_\tau(t,x) : \tau \in \mathbb{R}\}$, $P(t,x) \doteq \big(F(t,x), M(t)\big)$, $P_\tau(t,x) = P(t+\tau, x)$, $h^t P = P_\tau$, а замыкание cl берётся в метрике

$$\rho(P^1, P^2) \doteq \sup_{r>0} \min\Big\{ \max_{(t,x)\in O_r} \Big[\operatorname{Dist}\big(F^1(t,x), F^2(t,x)\big) + \operatorname{dist}\big(M^1(t), M^2(t)\big)\Big], r^{-1} \Big\}.$$

Лемма 2*. *При высказанных предположениях пространство* Σ *компактно и сходимость последовательности* $\{P_{\tau_i}(t,x)\}$ *к* $\widehat{P}(t,x) \in \Sigma$ *в метрике* (2) *означает сходимость равномерную на компактах: для любого* $r > 0$ *найдется такой номер* i_0, *что при всех* $i \geqslant i_0$ *и любых* $(t,x) \in [-\vartheta, \vartheta] \times O_r$ *выполнено неравенство* $\operatorname{Dist}\big(F_{\tau_i}(t,x), \widehat{F}(t,x)\big) + \operatorname{dist}\big(M_{\tau_i}(t), \widehat{M}(t)\big) \leqslant r^{-1}$.

Переписав теперь задачу (2.1) в терминах динамической системы (Σ, h^t) и изменив некоторые обозначения, получим задачу

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad x \in M(h^t\sigma), \tag{2.2}$$

относительно которой можно проводить все встречающиеся ниже рассуждения для произвольной (т.е. не обязательно только для динамической системы сдвигов) динамической системы, но с определенными свойствами. Относительно задачи (2.2) будем предполагать выполненным вытекающее из предположения 1

Предположение 2. Фазовое пространство Σ динамической системы (Σ, h^t) *компактно*, функция $(\sigma, x) \to F(\sigma, x)$ определена при всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ и принимает значения в $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$, функция $\sigma \to F(\sigma, x)$ *непрерывна* (в метрике Хаусдорфа — Бебутова) и при каждом σ множество $M(\sigma)$ принадлежит $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$.

В терминах полуотклонений $D(F,G)$, $D(G,F)$ и метрики Хаусдорфа — Бебутова $\operatorname{Dist}(F,G)$ формулируются свойства: 1) *полунепрерывности сверху*, $\lim_{(\sigma,x)\to(\sigma_0,x_0)} D(F(\sigma,x), F(\sigma_0,x_0)) = 0$,
2) *полунепрерывности снизу*, $\lim_{(\sigma,x)\to(\sigma_0,x_0)} D(F(\sigma_0,x_0), F(\sigma,x)) = 0$, и
3) *непрерывности*, $\lim_{(\sigma,x)\to(\sigma_0,x_0)} \operatorname{Dist}(F(\sigma,x), F(\sigma_0,x_0)) = 0$, в каждой точке $(\sigma_0, x_0) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$.

Следующие три утверждения посвящены условиям существования решений дифференциального включения (2.2).

Теорема 1*. *Если выполнено предположение* 2 *и функция* $(\sigma, x) \to F(\sigma, x)$ *полунепрерывна сверху, то для каждой точки* $(\sigma, x_0) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ *существует локальное решение задачи Коши*

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{2.3}$$

Пусть, кроме того, во всех точках (σ, x) *множества* $\Sigma \times M(\sigma)$ *выполнено условие*

$$F(\sigma, x) \bigcap T_x M(\sigma) \neq \varnothing,$$

где $T_x M(\sigma)$ *— конус, опорный к множеству* $M(\sigma)$ *в точке* $x \in M(\sigma)$ *(конус Булигана, см.* [6]*). Тогда для любой точки* $(\sigma, x_0) \in \Sigma \times M(\sigma)$ *существует локальное решение* $x(t, \sigma, x_0)$ *задачи*

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad x(t, \sigma, x_0) \in M(h^t\sigma). \tag{2.4}$$

Теорема 2*. *Пусть выполнено предположение* 2, *задача* (2.3) *обладает свойством существования локального решения, и найдутся положительная константа* k *и непрерывная функция* $z \to g(z) > 0$ *такие, что*

$$\mathrm{Dist}\big(F(\sigma, x), \{0\}\big) \leqslant kg(|x|), \quad \text{где} \quad \int_{z_0}^{\infty} \frac{dz}{g(z)} = \infty \quad \text{для всех} \quad z_0 \in \mathbb{R}.$$

Тогда по крайней мере одно решение $x(t, \sigma, x_0)$ *задачи Коши* (2.3) *существует при всех* $t \in \mathbb{R}$.

Теорема 3*. *Пусть выполнено предположение* 2, *задача* (2.4) *обладает свойством существования локального решения, и найдется такое* $\varepsilon > 0$, *что для любой точки* $(\sigma, x_0) \in \Sigma \times M(\sigma)$ *по крайней мере одно решение задачи* (2.4) *существует при всех* $|t| \leqslant \varepsilon$. *Тогда найдется решение* $x(t, \sigma, x_0)$ *задачи* (2.4) *определенное при всех* $t \in \mathbb{R}$. *Это же утверждение верно для задачи Коши* (2.3) *при любых* $(\sigma, x_0) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$.

3. Слабая равномерная устойчивость

Будем пользоваться следующими обозначениями:

$$M^r(\sigma) = M(\sigma) + O_r, \quad N_+^r(\sigma) = M^r(\sigma) \setminus M(\sigma), \quad \mathbb{R}_+ \doteq [0, \infty),$$

где $M^r(\sigma)$ — r-окрестность множества $M(\sigma)$, N_+^r — "внешняя" r-окрестность множества $M(\sigma)$, $\mathbb{R}_+$ — положительная полуось.

Определение 1. Множество M (которое можно трактовать как функцию $\sigma \to M(\sigma)$) будем называть *слабо равномерно устойчивым* относительно включения

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \tag{3.1}$$

если для некоторого положительного r и любого $\varepsilon \in (0, r)$ существует такое число $\delta \in (0, \varepsilon)$, что для всякой точки (σ, x_0) множества $\Sigma \times N_+^\delta(\sigma)$ найдется по крайней мере одно определенное при всех $t \in \mathbb{R}_+$ решение $t \to x(t, \sigma, x_0)$ включения (3.1), для которого выполнено включение $x(t, \sigma, x_0) \in M^\varepsilon(h^t\sigma)$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Напомним основные определения, касающиеся функций А.М. Ляпунова.

Определение 2. Пусть задано положительное число r. Локально липшицеву функцию $V\colon \Sigma \times M^r(\sigma) \to \mathbb{R}$ будем называть *функцией Ляпунова*, если при всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times M(\sigma)$ выполнено равенство $V(\sigma, x) = 0$, а при всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times N_+^r(\sigma)$ — неравенство $V(\sigma, x) > 0$.

Далее, функцию Ляпунова $(\sigma, x) \to V(\sigma, x)$ назовем *определенно положительной* на множестве $\Sigma \times M^r(\sigma)$, если для всякого $\varepsilon \in (0, r)$ найдется такое число $\delta > 0$, что при всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times \operatorname{fr} M^\varepsilon(\sigma)$ выполнено неравенство $V(\sigma, x) \geqslant \delta$, где $\operatorname{fr} M^\varepsilon(\sigma)$ — граница $M^\varepsilon(\sigma)$.[2]

Напомним, кроме того, что *обобщенной производной* Ф. Кларка (см. [7]) функции V по направлению вектора $q \in \mathbb{R}^n$ в точке (σ, x) называется предел

$$V^o(\sigma, x; q) \doteq \limsup_{(\vartheta, y, \varepsilon) \to (\sigma, x, +0)} \frac{V(h^\varepsilon \vartheta, y + \varepsilon q) - V(\vartheta, y)}{\varepsilon},$$

который существует в силу локальной липшицевости V.

Теорема 4*. *Пусть выполнено предположение 2, и при некотором положительном r существуют локально липшицева функция Ляпунова $V : \Sigma \times M^r(\sigma) \to \mathbb{R}$ и непрерывная функция $w : \Sigma \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что*

(1) $w(\sigma, 0) \equiv 0$, *уравнение $\dot z = w(h^t\sigma, z)$ обладает свойством единственности решения задачи Коши, и для любого достаточно малого положительного ε и каждого $\sigma \in \Sigma$ найдется такое $\delta \in (0, \varepsilon)$, что для всякого начального условия $z(0) = z_0$, $z_0 \in (0, \delta)$, решение $z(t; \sigma, z_0)$ уравнения $\dot z = w(h^t\sigma, z)$ определено на полуоси $\mathbb{R}_+$ и при всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено неравенство $z(t; \sigma, z_0) \leqslant \varepsilon$;*[3]

(2) *множество*

$$Q(\sigma, x) \doteq \{q \in F(\sigma, x) : V^o(\sigma, x; q) \leqslant w(\sigma, V(\sigma, x))\},$$

непусто при всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times M^r(\sigma)$ и для любой точки $(\sigma_0, x_0) \in \Sigma \times M^r(\sigma_0)$ задача Коши

$$\dot x \in Q(h^t\sigma, x), \quad x(0) = x_0 \in M^r(\sigma_0),$$

имеет хотя бы одно решение, определенное на полуоси $\mathbb{R}_+$.

Тогда множество $M(\sigma)$ слабо равномерно устойчиво относительно включения (3.1).

Определение 3. Пусть выполнено предположение 2. Множество M будем называть *слабо положительно инвариантным* относительно дифференциального включения (3.1), если найдется такое число $r > 0$, что для любой точки (σ, x_0) множества $\Sigma \times M(\sigma)$ найдется по крайней мере одно решение $t \to x(t, \sigma, x_0)$ включения (3.1) с начальным условием $x(0) = x_0$, удовлетворяющее при всех $t \in [0, \infty)$ включению $x(t, \sigma, x_0) \in M(h^t\sigma)$.

Простым следствием этой теоремы 4* является следующее

Следствие 1*. *Если множество M слабо равномерно устойчиво относительно включения* (3.1), *то оно слабо положительно инвариантно.*

4. Слабая асимптотическая устойчивость

Напомним, что мы пользуемся обозначениями $M^r(\sigma) = M(\sigma) + O_r$ и $N^r_+(\sigma) = M^r(\sigma) \backslash M(\sigma)$.

Определение 4. Заданное компактное при каждом $\sigma \in \Sigma$ множество $M(\sigma)$ назовем *слабо асимптотически устойчивым* относительно решений включения

$$\dot x \in F(h^t\sigma, x), \tag{4.1}$$

[2]Отметим здесь, что если выполнено предположение 2 и функция $V(\sigma, x)$ является функцией Ляпунова в указанном выше смысле, то она автоматически является и определенно положительной на множестве $\Sigma \times M^r(\sigma)$.

[3]Это условие не обеспечивает устойчивость тривиального решения уравнения $\dot z = w(h^t\sigma, z)$.

если оно слабо устойчиво в смысле определения 1 и для некоторого $r > 0$, любого $\sigma \in \Sigma$ и всякого $x_0 \in N_+^r(\sigma)$ найдется такое решение $\varphi(t;\sigma,x_0)$ включения (4.1), что

$$\lim_{t\to\infty} \rho_{\mathbb{R}^n}(\varphi(t;\sigma,x_0), M(h^t\sigma_0)) = 0.$$

Теорема 5*. *Пусть выполнено предположение 2, функция $(\sigma,x) \to F(\sigma,x)$ со значениями в пространстве $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывна сверху и существуют такие число $r > 0$ и функция $(V(\sigma,x), w(\sigma,z)) : \Sigma \times M^r(\sigma) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, что*

(1) *$V(\sigma,x)$ является определенно положительной функцией Ляпунова;*

(2) *множество*

$$Q(\sigma,x) = \{q \in F(\sigma,x) \colon \; V^o(\sigma,x;q) \leqslant w(\sigma, V(\sigma,x))\}$$

непусто при всех $(\sigma,x) \in \Sigma \times M^r$, и функция

$$(\sigma,x) \to S(\sigma,x) \doteq Q(\sigma,x) \bigcap O_p(0), \quad \text{где} \quad p = \sup_{(\sigma,x)\in\Sigma\times M^r(\sigma)} |Q(\sigma,x)|$$

непрерывна по (σ,x);

(3) *выполнено условие $w(\sigma,0) \equiv 0$; уравнение $\dot z = w(h^t\sigma,z)$ обладает свойством единственности решения задачи Коши; для любого достаточно малого положительного ε и каждого $\sigma \in \Sigma$ найдется такое $\delta \in (0,\varepsilon)$, что для всякого начального условия $z(0) = z_0$, $z_0 \in (0,\delta)$, решение $z(t;\sigma,z_0)$ уравнения $\dot z = w(h^t\sigma,z)$ определено на полуоси $\mathbb{R}_+$, при всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено неравенство $z(t;\sigma,z_0) \leqslant \varepsilon$ и, кроме того, найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что $\lim\limits_{t\to\infty} |z(t;\sigma,x_0)| \to 0$ при всех $z_0 \in (0,\varepsilon_0)$.*[4]

Тогда множество $M(\sigma)$ слабо асимптотически устойчиво относительно включения (4.1).

Перед формулировкой следующего утверждения, распространяющего теорему Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского на задачу

$$\dot x \in F(h^t\sigma,x), \quad x(0) = x_0 \in N_+^r(\sigma_0) \doteq M^r(\sigma_0) \setminus M(\sigma_0),$$

введем для функции Ляпунова $V \colon \Sigma \times M^r \to \mathbb{R}$ множество

$$\mathcal{Q}(\sigma,x) = \{q \in F(\sigma,x) \colon \; V^o(\sigma,x;q) \leqslant 0\} \tag{4.2}$$

и в предположении, что множество (4.2) *непусто* при $(\sigma,x) \in \Sigma \times M^r(\sigma)$, построим вспомогательное включение

$$\dot x \in \mathcal{S}(h^t\sigma,x) \doteq \mathcal{Q}(\sigma,x) \bigcap O_p(0), \quad p = \sup_{(\sigma,x)\in M^r(\sigma)} |\mathcal{Q}(\sigma,x)|. \tag{4.3}$$

Далее, для каждого $\alpha \geqslant 0$ введем с рассмотрение *поверхность уровня* $L_\alpha(V)$ функции V:

$$L_\alpha(V) \doteq \{(\sigma,x) \in \Sigma \times N_+^r(\sigma) : V(\sigma,x) = \alpha\}. \tag{4.4}$$

Напомним, что для заданной функции $\sigma \to M(\sigma) \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ функцию $L(\sigma,x)$ переменных (σ,x) мы называем *функцией Ляпунова*, если $V(\sigma,x) \leqslant 0$ при $x \in M(\sigma)$ и $V(\sigma,x) > 0$ при $x \in N_+^r(\sigma)$. Поэтому в силу непрерывности V для всех достаточно малых положительных α поверхности уровня $L_\alpha(L)$ расположены во множестве $\Sigma \times N_+^r(\sigma)$.

Определение 5. Будем говорить, что множество уровня $L_\alpha(V)$ *не содержит положительных полутраекторий* включения (4.3), если для любого $\sigma \in \Sigma$ и всякого решения $x(t,\sigma,x_0)$

[4]Как и в предыдущем случае, эти условия не обеспечивают устойчивость и, тем более, асимптотическую устойчивость тривиального решения уравнения $\dot z = w(h^t\sigma,z)$.

включения (4.3), удовлетворяющего начальному условию $x_0 \in N_+^r(\sigma)$, найдется момент времени $t_* > 0$ такой, что $V(\sigma, x(t_*, \sigma, x_0)) \neq \alpha$. То есть $L_\alpha(V)$ не содержит положительных полутраекторий включения (4.3), если всякое решение, начинающееся в $L_\alpha(V)$, покидает $L_\alpha(V)$ за конечное время.

Теорема 6*. *Пусть выполнено предположение* 2 *и функция* $F : \Sigma \times \mathbb{R}^n \to \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ *полунепрерывна сверху. Если при некотором* $r > 0$ *существует локально липшицева по* x *функция Ляпунова* $V : \Sigma \times M^r(\sigma) \to \mathbb{R}$ *такая, что при всех* $(\sigma, x) \in \Sigma \times M^r(\sigma)$ *множество* (4.2) *непусто и для любого* $\alpha \in (0, r)$ *и всех* $(\sigma, x) \in \Sigma \times M^r(\sigma)$ *множество уровня* (4.4) *не содержит положительных полутраекторий вспомогательного включения* $\dot{x} \in \mathcal{S}(h^t\sigma, x)$, *то множество* $M(\sigma)$ *слабо асимптотически устойчиво относительно включения* (4.1).

Определение 6. Пусть выполнено предположение 2. Будем говорить, что функция Ляпунова $(\sigma, x) \to V(\sigma, x)$ является *правильной* относительно множества $N_+^r(\sigma) \doteq M^r(\sigma) \setminus M(\sigma)$, если для каждого $\alpha \in (0, r)$ множество уровня (4.4) *не содержит целиком по крайней мере одну положительную полутраекторию* задачи

$$\dot{x} \in \mathcal{S}(h^t\sigma, x), \quad V(\sigma, x(t, \sigma, x_0)) = \alpha, \tag{4.5}$$

т.е. для каждого $\alpha \in (0, r)$ и любой начальной точки $(\sigma, x_0) \in \Sigma \times N_+^r(\sigma)$ найдутся решение $x(t, \sigma, x_0)$ включения (4.5) и момент времени $t_* > 0$ такие, что $V(\sigma, x(t_*, \sigma, x_0)) \neq \alpha$.

Следующее утверждение, обобщает теорему 6.

Теорема 7. *Пусть выполнено предположение* 2 *и функция* $F : \Sigma \times \mathbb{R}^n \to \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ *полунепрерывна сверху. Если найдется такое число* $r > 0$, *что существует локально липшицева по* x *функция Ляпунова* $V : \Sigma \times M^r(\sigma) \to \mathbb{R}$ *такая, что при всех* $(\sigma, x) \in \Sigma \times M^r(\sigma)$ *множество* (4.2) *непусто и функция Ляпунова является правильной относительно множества* $N_+^r(\sigma) \doteq M^r(\sigma) \setminus M(\sigma)$, *то множество* $M(\sigma)$ *слабо асимптотически устойчиво относительно включения* (4.1).

5. Теорема о статистически слабой инвариантности

Формулируемая в этом параграфе теорема призвана обобщить в будущем теорему 7.

Пусть, как и прежде, $r \geqslant 0$, $M^r(\sigma) = M(\sigma) + O_r(0)$, mes — мера Лебега на прямой $\mathbb{R}$.

Определение 7 (см. [8]). Множество M называется *статистически слабо инвариантным* относительно дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad (\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n, \tag{5.1}$$

если для любой точки $(\sigma, x) \in \Sigma \times M(\sigma)$ найдется по крайней мере одно решение $\varphi(t; \sigma, x)$ включения (5.1) такое, что решение $\varphi(t; \sigma, x)$ определено при всех $t \geqslant 0$ и *относительная частота пребывания* решения $\varphi(t; \sigma, x)$ в множестве M равна единице:

$$\operatorname{freq}^*(\varphi) \doteq \overline{\lim_{\vartheta \to \infty}} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : \varphi(t; \sigma, x) \in M(\sigma)\}}{\vartheta} = 1. \tag{5.2}$$

Теорема 8. *Пусть выполнено предположение* 2, *и при некотором* $r > 0$ *для всякой точки* $(\sigma, x) \in \Sigma \times M^r(\sigma)$ *найдется решение* $t \to \varphi(t; \sigma, x)$ *включения* (5.1), *определенное на полуоси* $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. *Пусть, далее, существуют локально липшицева скалярная функция* $V(\sigma, x)$ *переменных* $(\sigma, x) \in \mathbb{R}_+ \times M^r(\sigma)$ *и кусочно-непрерывная скалярная функция* $w(\sigma, z)$ *переменных* $(\sigma, z) \in \Sigma \times \mathbb{R}$ *такие, что*

1. *Для каждого* σ *верхнее решение* $z^*(t, \sigma)$ *задачи*

$$\dot{z} = w(h^t\sigma, z), \quad z(0) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{5.3}$$

понимаемое в смысле А.Ф. Филиппова [9], *определено при всех* $t \geqslant 0$ *и*

$$\varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : z^*(t,\sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta} = 1. \tag{5.4}$$

2. *Для каждого* σ *в области* $\Sigma \times M^r(\sigma)$ *функция* $V(\sigma, x)$ *является функцией Ляпунова и при всех* $(\sigma, x) \in \Sigma \times M^r(\sigma)$ *выполнено неравенство*

$$\min_{q\in F(\sigma,x)} V^o\big(\sigma, x; q)\big) \leqslant w\big(\sigma, V(\sigma, x)\big). \tag{5.5}$$

Тогда при каждом $\sigma \in \Sigma$ *множество* $M^r(\sigma)$ *статистически слабо инвариантно.*

Отметим, что свойство статистически слабой инвариантности множества $M^r(\sigma)$ относительно включения (5.1) автоматически не гарантирует слабую асимптотическую устойчивость множества $M^r(\sigma)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Барбашин Е.А., Красовский Н.Н.** Об устойчивости движения в целом // Докл. АН СССР. 1952. Т. 86, № 6. С. 146–152.
2. **Барбашин Е.А.** Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
3. **Панасенко Е.А., Тонков Е.Л.** Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Тр. Математического ин-та им. В.А. Стеклова РАН. 2008. Т. 262. С. 202–221.
4. **Панасенко Е.А., Тонков Е.Л.** Распространение теорем Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского об устойчивости на управляемые динамические системы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 185–201.
5. **Немыцкий В.В., Степанов В.В.** Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1949. 550 с.
6. **Aubin J.-P.** Viability Theory. Birkhauser. Boston; Basel; Berlin, 1991. 543 p.
7. **Кларк Ф.** Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 300 с.
8. **Родина Л.И., Тонков Е.Л.** Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения // Нелинейная динамака. 2009. Т. 5, № 2. С. 265–288.
9. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 223 с.

Поступила 15.02.2010

Панасенко Елена Александровна
канд. физ.-мат. наук
доцент каф. алгебры и геометрии
Тамбовский гос. ун-т им. Г.Р. Державина
e-mail: panlena_t@mail.ru.

Родина Людмила Ивановна
канд. физ.-мат. наук
доцент каф. математического анализа
Удмуртский гос. ун-т
e-mail: box0589@udmnet.ru.

Тонков Евгений Леонидович
д-р физ.-мат. наук
зав. каф. дифференциальных уравнений
Удмуртский гос. ун-т
e-mail: eltonkov@udm.ru.