

Министерство образования и науки РФ
Межгосударственный совет по физике прочности и пластичности
Кузбасский научный центр Сибирского отделения
Международной академии наук высшей школы
Кемеровский государственный университет
Сибирский государственный индустриальный университет
Институт гидродинамики им. М.А.Лаврентьева Сибирского отделения РАН
Новокузнецкий филиал-институт Кемеровского государственного
университета
Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича
Сибирского отделения РАН

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

ТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК НАУЧНЫХ СТАТЕЙ

Том 2

Новокузнецк 2010

ББК 22
УДК 517+518+539. 52.60
К 78

Рецензенты:

член-корреспондент РАН В.В. Васильев;
доктор физико-математических наук, профессор В.И. Самсонов

К78 Краевые задачи и математическое моделирование [Текст]: тематич. сб. науч. ст.: в 3 т.
Т. 2. / НФИ ГОУ ВПО «КемГУ»; под общ. Ред. В.О. Каледина. – Новокузнецк, 2010. –
235 с.

ISBN13 978-5-8353-0761-6

В сборнике приведены тексты статей по математическому моделированию естественных, технических и экономических объектов, краевым задачам и методам их решения.

Сборник предназначен для научных работников и аспирантов, специализирующихся в области математического моделирования и решения краевых задач для уравнений математической физики.

Редакционная коллегия:

доктор технических наук, профессор В.О. Каледин;
доктор технических наук, профессор С.П. Казаков;
кандидат физико-математических наук Е.А. Седова

ББК 22
УДК 517+518+539. 52.60

© Новокузнецкий филиал-институт
государственного образовательного
учреждения высшего профессионального
образования «Кемеровский
государственный
университет», 2010
© Авторы, 2010

ISBN13 978-5-8353-0761-6

УДК 519.651 + 517.518.823

В.И. Родионов, Н.В. Родионова

Удмуртский государственный университет, г. Ижевск

ТОЧНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ НЕВЯЗКИ СПЕЦИАЛЬНОГО АППРОКСИМИРУЮЩЕГО СПЛАЙНА ПРОСТЕЙШЕГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Определяется конечномерное пространство специальных квадратичных сплайнов двух переменных. В качестве решения начально-граничной задачи для простейшего уравнения теплопроводности предлагается сплайн, дающий наименьшую невязку, представляющую собой норму в пространстве L_2 . Для этого сплайна и для его невязки получены точные формулы. Формула для невязки представляет собой положительно определенную квадратичную форму от конечных разностей дискретно заданных начальных и граничных условий исходной задачи. Коэффициенты формы вычислимы через многочлены Чебышева 1-го и 2-го рода.

Пусть точки $x_0, x_1, \dots, x_n \in R^n$ таковы, что векторы $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$ (где $\Delta x_i \doteq x_i - x_0$) попарно ортогональны, а числа p_{ij} , $i, j = 0, 1, \dots, n$, таковы, что $p_{ij} = p_{ji}$. В семействе всех квадратичных полиномов вида $P(\xi) = (A\xi, \xi) + (b, \xi) + c$, $\xi \in R^n$, существует ровно один такой, что: 1) матрица A симметрична; 2) $P(\frac{1}{2}x_r + \frac{1}{2}x_s) = p_{rs}$ для всех $r, s = 0, 1, \dots, n$. Согласно [1] он представим в виде

$$P(\xi) = 2 \sum_{i,j} (p_{ij} - p_{i0} - p_{0j} + p_{00}) \varphi_i(\xi) \varphi_j(\xi) - \sum_m (p_{mm} - 4p_{m0} + 3p_{00}) \varphi_m(\xi) + p_{00}, \quad (1)$$

где $\varphi_m(\xi) \doteq (\xi - x_0, \Delta x_m) / \|\Delta x_m\|^2$, $m = 1, \dots, n$.

1. *Постановка задачи.* Мы применяем формулу (1) при численном решении задач математической физики, а в рамках настоящей работы изучается начально-граничная задача для простейшего уравнения теплопроводности (здесь $n = 2$, а $\xi = (\xi_1, \xi_2) = (t, x) \in R^2$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(0, x) = \phi(x), \quad x \in [0, 1]; \quad u(t, 0) = \alpha(t), \quad u(t, 1) = \beta(t), \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Пусть $\tau > 0$, и через Ω обозначим прямоугольник $[0, 2\tau] \times [0, 1]$. Пусть, далее, $h = \frac{1}{2N}$, где $N \in \mathbb{N}$, а точки $(\tau_i, h_j) \in \Omega$ таковы, что $\tau_i = i\tau$, $i = 0, 1, 2$, $h_j = jh$, $j = 0, 1, \dots, 2N$. Среди всего многообразия триангуляций множества Ω сетка $\{(\tau_i, h_j)\}$ порождает следующие две:

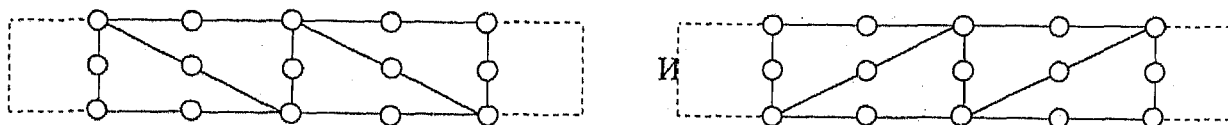


Рисунок 1 – «Левая» и «правая» триангуляции прямоугольника Ω

Зафиксируем числа u_{ij} , $i = 0, 1, 2$, $j = 0, 1, \dots, 2N$, такие, что $u_{0j} = \phi(h_j)$, $j = 0, 1, \dots, 2N$, $u_{10} = \alpha(\tau_1)$, $u_{20} = \alpha(\tau_2)$, $u_{1,2N} = \beta(\tau_1)$, $u_{2,2N} = \beta(\tau_2)$. Каждому узлу сетки $\{(\tau_i, h_j)\}$ сопоставим значение u_{ij} . Тогда на каждом треугольнике обеих триангуляций явно вычислимы полиномы вида (1), причем значения полиномов двух соседних треугольников совпадают на их общей границе.

Последнее обстоятельство позволяет, в частности, определить однозначные непрерывные функции $u_L : \Omega \rightarrow R$ и $u_R : \Omega \rightarrow R$, «склеенные» из данных полиномов

(соответственно для левой и правой триангуляций, см. рисунок 1), и функцию $u \doteq (u_L + u_R)/2$, которую мы называем специальным сплайном. Разнообразие таких сплайнов определяется лишь наборами чисел u_{ij} , $i=1,2$, $j=1, \dots, 2N-1$. Это означает, что сплайны образуют конечномерное линейное пространство размерности $4N-2$. Обозначим его $\sigma(\Omega)$.

Определим оператор $\Delta: \sigma(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ следующим образом. Сплайн $u \in \sigma(\Omega)$ имеет частные производные во всех точках множества Ω , за исключением множества меры нуль:

$$\{t=0\} \cup \{t=2\tau\} \cup \{x=h_j\}_{j=0}^{2N} \cup \{x+\frac{h}{\tau}t=h_{2k}\}_{k=1}^N \cup \{x-\frac{h}{\tau}t=h_{2k-2}\}_{k=1}^N. \quad (3)$$

Пусть $(\Delta u)(t, x) \doteq 0$ во всех точках множества (3), а в остальных точках прямоугольника Ω полагаем $(\Delta u)(t, x) \doteq \frac{\partial u}{\partial t} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Таким образом, в качестве приближенного решения исходной задачи (2) можно принять сплайн наилучшего приближения задачи

$$J = J(u) \doteq \|\Delta u\|_{L_2(\Omega)}^2 \rightarrow \min, \quad u \in \sigma(\Omega),$$

решение которой, в конечном счете, сводится к поиску чисел u_{ij}^* , $i=1,2$, $j=1, \dots, 2N-1$, реализующих минимум функционала J и порождающих оптимальное решение $u^* \in \sigma(\Omega)$.

Числа u_{ij}^* удовлетворяют системе уравнений $\partial J / \partial u_{ij} = 0$, $i=1,2$, $j=1, \dots, 2N-1$, и мы переходим к обсуждению вопроса о ее однозначной разрешимости.

2. О построении сплайна. Зафиксируем числа u_{ij} , $i=0,1,2$, $j=0,1, \dots, 2N$, и введем вспомогательные обозначения:

$$x_j \doteq u_{2j} - u_{0j}, \quad y_j \doteq u_{2j} - 2u_{1j} + u_{0j}, \quad j=0,1, \dots, 2N, \\ X_k \doteq x_{2k-2} - 2x_{2k-1} + x_{2k}, \quad Y_k \doteq (y_{2k-2} + 6y_{2k-1} + y_{2k})/4, \quad Z_k \doteq u_{0,2k-2} - 2u_{0,2k-1} + u_{0,2k}, \quad k=1, \dots, N.$$

Сетка $\{(\tau_i, h_j)\}$ и матрица (u_{ij}) позволяют определить следующие четыре серии полиномов, порождающие сплайны $u_L: \Omega \rightarrow R$ и $u_R: \Omega \rightarrow R$. В приводимых ниже построениях индекс $k=1, \dots, N$ фиксирован.

Совокупность точек сетки $\{(\tau_i, h_j)\}$ и элементов матрицы (u_{ij}) :

$$\begin{array}{ccccc} (\tau_2, h_{2k-2}) & & & & u_{2,2k-2} \\ (\tau_1, h_{2k-2}) & (\tau_1, h_{2k-1}) & & \text{и} & u_{1,2k-2} \quad u_{1,2k-1} \\ (\tau_0, h_{2k-2}) & (\tau_0, h_{2k-1}) & (\tau_0, h_{2k}) & & u_{0,2k-2} \quad u_{0,2k-1} \quad u_{0,2k} \end{array} \quad (4)$$

порождают квадратичный полином вида (1)

$$P^{1k}(t, x) = a_{11}^{1k} \left(\frac{t}{2\tau} \right)^2 + 2a_{12}^{1k} \frac{t}{2\tau} \frac{x-h_{2k-2}}{2h} + a_{22}^{1k} \left(\frac{x-h_{2k-2}}{2h} \right)^2 + b_1^{1k} \frac{t}{2\tau} + b_2^{1k} \frac{x-h_{2k-2}}{2h} + c^{1k},$$

удовлетворяющий на элементах (4) условию $P^{1k}(\tau_i, h_j) = u_{ij}$. Легко проверить, что

$$a_{11}^{1k} = 2y_{2k-2}, \quad a_{12}^{1k} = a_{21}^{1k} = x_{2k-1} - x_{2k-2} - y_{2k-1} + y_{2k-2}, \quad a_{22}^{1k} = 2Z_k, \\ b_1^{1k} = x_{2k-2} - 2y_{2k-2}, \quad b_2^{1k} = -u_{0,2k} + 4u_{0,2k-1} - 3u_{0,2k-2}, \quad c^{1k} = u_{0,2k-2}.$$

2. Совокупность точек сетки $\{(\tau_i, h_j)\}$ и элементов матрицы (u_{ij}) :

$$\begin{array}{ccccc} (\tau_2, h_{2k-2}) & (\tau_2, h_{2k-1}) & (\tau_2, h_{2k}) & & u_{2,2k-2} \quad u_{2,2k-1} \quad u_{2,2k} \\ & (\tau_1, h_{2k-1}) & (\tau_1, h_{2k}) & \text{и} & u_{1,2k-1} \quad u_{1,2k} \\ & & (\tau_0, h_{2k}) & & u_{0,2k} \end{array} \quad (5)$$

порождают квадратичный полином вида (1)

$$P^{2k}(t, x) = a_{11}^{2k} \left(\frac{2\tau - t}{2\tau} \right)^2 + 2a_{12}^{2k} \frac{2\tau - t}{2\tau} \frac{h_{2k} - x}{2h} + a_{22}^{2k} \left(\frac{h_{2k} - x}{2h} \right)^2 + b_1^{2k} \frac{2\tau - t}{2\tau} + b_2^{2k} \frac{h_{2k} - x}{2h} + c^{2k},$$

удовлетворяющий на элементах (5) условию $P^{2k}(\tau_i, h_j) = u_{ij}$. Легко проверить, что

$$a_{11}^{2k} = 2y_{2k}, \quad a_{12}^{2k} = a_{21}^{2k} = -x_{2k-1} + x_{2k} - y_{2k-1} + y_{2k}, \quad a_{22}^{2k} = 2(X_k + Z_k), \\ b_1^{2k} = -x_{2k} - 2y_{2k}, \quad b_2^{2k} = -u_{0,2k-2} + 4u_{0,2k-1} - 3u_{0,2k}, \quad c^{2k} = u_{0,2k}.$$

3. Совокупность точек сетки $\{(\tau_i, h_j)\}$ и элементов матрицы (u_{ij}) :

$$\begin{array}{ccccc} & & (\tau_2, h_{2k}) & & u_{2,2k} \\ & & & & \\ & (\tau_1, h_{2k-1}) & (\tau_1, h_{2k}) & \text{и} & u_{1,2k-1} \quad u_{1,2k} \\ & & & & \\ (\tau_0, h_{2k-2}) & (\tau_0, h_{2k-1}) & (\tau_0, h_{2k}) & u_{0,2k-2} & u_{0,2k-1} \quad u_{0,2k} \end{array} \quad (6)$$

порождают квадратичный полином вида (1)

$$P^{3k}(t, x) = a_{11}^{3k} \left(\frac{t}{2\tau} \right)^2 + 2a_{12}^{3k} \frac{t}{2\tau} \frac{h_{2k} - x}{2h} + a_{22}^{3k} \left(\frac{h_{2k} - x}{2h} \right)^2 + b_1^{3k} \frac{t}{2\tau} + b_2^{3k} \frac{h_{2k} - x}{2h} + c^{3k},$$

удовлетворяющий на элементах (6) условию $P^{3k}(\tau_i, h_j) = u_{ij}$. Легко проверить, что

$$a_{11}^{3k} = 2y_{2k}, \quad a_{12}^{3k} = a_{21}^{3k} = x_{2k-1} - x_{2k} - y_{2k-1} + y_{2k}, \quad a_{22}^{3k} = 2Z_k, \\ b_1^{3k} = x_{2k} - 2y_{2k}, \quad b_2^{3k} = -u_{0,2k-2} + 4u_{0,2k-1} - 3u_{0,2k}, \quad c^{3k} = u_{0,2k}.$$

4. Совокупность точек сетки $\{(\tau_i, h_j)\}$ и элементов матрицы (u_{ij}) :

$$\begin{array}{ccccc} (\tau_2, h_{2k-2}) & (\tau_2, h_{2k-1}) & (\tau_2, h_{2k}) & u_{2,2k-2} & u_{2,2k-1} \quad u_{2,2k} \\ & & & & \\ (\tau_1, h_{2k-2}) & (\tau_1, h_{2k-1}) & & \text{и} & u_{1,2k-2} \quad u_{1,2k-1} \\ & & & & \\ (\tau_0, h_{2k-2}) & & & u_{0,2k-2} & \end{array} \quad (7)$$

порождают квадратичный полином вида (1)

$$P^{4k}(t, x) = a_{11}^{4k} \left(\frac{2\tau - t}{2\tau} \right)^2 + 2a_{12}^{4k} \frac{2\tau - t}{2\tau} \frac{x - h_{2k-2}}{2h} + a_{22}^{4k} \left(\frac{x - h_{2k-2}}{2h} \right)^2 + b_1^{4k} \frac{2\tau - t}{2\tau} + b_2^{4k} \frac{x - h_{2k-2}}{2h} + c^{4k},$$

удовлетворяющий на элементах (7) условию $P^{4k}(\tau_i, h_j) = u_{ij}$. Легко проверить, что

$$a_{11}^{4k} = 2y_{2k-2}, \quad a_{12}^{4k} = a_{21}^{4k} = -x_{2k-1} + x_{2k-2} - y_{2k-1} + y_{2k-2}, \quad a_{22}^{4k} = 2(X_k + Z_k), \\ b_1^{4k} = -x_{2k-2} - 2y_{2k-2}, \quad b_2^{4k} = -u_{0,2k} + 4u_{0,2k-1} - 3u_{0,2k-2}, \quad c^{4k} = u_{0,2k-2}.$$

Через Ω^{1k} обозначим выпуклую оболочку точек сетки $\{(\tau_i, h_j)\}$, входящих в совокупность (4), а через Ω^{2k} – выпуклую оболочку точек, входящих в совокупность (5). Возможность непрерывной стыковки полиномов, определенных на двух соседних треугольниках левой триангуляции (см. рисунок 1), позволяет определить на Ω непрерывную функцию

$$u_L(t, x) \doteq \begin{cases} P^{1k}(t, x), & \text{если существует } k \text{ такое, что } (t, x) \in \Omega^{1k} \\ P^{2k}(t, x), & \text{если существует } k \text{ такое, что } (t, x) \in \Omega^{2k} \end{cases} \quad (8)$$

Обозначим, далее, через Ω^{3k} выпуклую оболочку точек, входящих в совокупность (6), а через Ω^{4k} – выпуклую оболочку точек, входящих в совокупность (7). Правая триангуляция (см. рисунок 1) также порождает на Ω непрерывную функцию

$$u_R(t, x) \doteq \begin{cases} P^{3k}(t, x), & \text{если существует } k \text{ такое, что } (t, x) \in \Omega^{3k} \\ P^{4k}(t, x), & \text{если существует } k \text{ такое, что } (t, x) \in \Omega^{4k} \end{cases} \quad (9)$$

3. *Представление для функционала невязки.* Пусть $u \doteq (u_L + u_R)/2$ – усредненный сплайн. Пусть, далее, $G^{1k} \doteq \Omega^{1k} \cap \Omega^{3k}$, $G^{2k} \doteq \Omega^{2k} \cap \Omega^{4k}$, $G^{3k} \doteq \Omega^{3k} \cap \Omega^{2k}$, $G^{4k} \doteq \Omega^{4k} \cap \Omega^{1k}$ для всех k , и для каждого $\ell = 1, \dots, 4$ определим интегралы $J^{\ell k} \doteq \int_{G^{\ell k}} (\Delta u)^2(\xi) d\xi$. Тогда

$$J = J(u) = \|\Delta u\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (\Delta u)^2(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^4 J^{lk}.$$

Далее будем применять обозначения $\nu \doteq h/3\tau$, $\theta \doteq \gamma^2\tau/h^2$ и элементарную формулу

$$\int_0^s du \int_{-u}^u dv \left(\frac{pu}{s} + \frac{qv}{s} + r \right)^2 = \frac{s^2}{18} [p^2 + 3q^2 + 2(2p+3r)^2], \quad p, q, r, s \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

$s \neq 0$.

Зафиксируем индексы ℓ, k и точку $(t, x) \in \text{int } G^{\ell k}$.

1. Если $\ell = 1$, то для всех $f \in C(\Omega)$ имеет место цепочка равенств

$$\int_{G^{1k}} f(\xi) d\xi = \int_0^{\tau} dt \int_{h_{2k-2} + \frac{h}{\tau}t}^{h_{2k} - \frac{h}{\tau}t} dx f(t, x) = \frac{\tau}{h} \int_0^h du \int_{-u}^u dv f\left(\tau - \frac{\tau}{h}u, h_{2k-2} + h + v\right) \quad (11)$$

(здесь и ниже применяем замену $t = \tau - \frac{\tau}{h}u$, $x = h_{2k-2} + h + v$), и

$$(\Delta u)(t, x) = \frac{1}{2} [(\Delta u_L)(t, x) + (\Delta u_R)(t, x)] = \frac{1}{2} [(\Delta P^{1k})(t, x) + (\Delta P^{3k})(t, x)] = \frac{1}{2\tau} \left(\frac{pu}{h} + \frac{qv}{h} + r \right),$$

где $p \doteq -\frac{1}{2}(a_{11}^{1k} + a_{11}^{3k})$, $q \doteq \frac{1}{2}(a_{12}^{1k} - a_{12}^{3k})$, $r \doteq \frac{1}{2}(a_{11}^{1k} + a_{12}^{1k} + b_1^{1k} - \theta a_{22}^{1k}) + \frac{1}{2}(a_{11}^{3k} + a_{12}^{3k} + b_1^{3k} - \theta a_{22}^{3k})$.

Согласно (10) и (11) имеет место цепочка равенств

$$J^{1k} = \int_{G^{1k}} (\Delta u)^2(\xi) d\xi = \frac{1}{4\tau h} \int_0^h du \int_{-u}^u dv \left(\frac{pu}{h} + \frac{qv}{h} + r \right)^2 = \frac{\nu}{24} [(A^{1k})^2 + 3(B^{1k})^2 + 2(C^{1k})^2],$$

где $A^{1k} \doteq p$, $B^{1k} \doteq q$, $C^{1k} \doteq 2p + 3r$. Другими словами,

$$A^{1k} = -y_{2k-2} - y_{2k}, \quad B^{1k} = -\frac{1}{2}x_{2k-2} + \frac{1}{2}x_{2k} + \frac{1}{2}y_{2k-2} - \frac{1}{2}y_{2k}, \quad C^{1k} = 3x_{2k-1} - 2Y_k - 6\theta Z_k.$$

2. Если $\ell = 2$, то для всех $f \in C(\Omega)$ имеет место цепочка равенств

$$\int_{G^{2k}} f(\xi) d\xi = \int_{\tau}^{2\tau} dt \int_{h_{2k} - \frac{h}{\tau}t}^{h_{2k-2} + \frac{h}{\tau}t} dx f(t, x) = \frac{\tau}{h} \int_0^h du \int_{-u}^u dv f\left(\tau + \frac{\tau}{h}u, h_{2k-2} + h + v\right) \quad (12)$$

(здесь и ниже применяем замену $t = \tau + \frac{\tau}{h}u$, $x = h_{2k-2} + h + v$), и

$$(\Delta u)(t, x) = \frac{1}{2} [(\Delta u_L)(t, x) + (\Delta u_R)(t, x)] = \frac{1}{2} [(\Delta P^{2k})(t, x) + (\Delta P^{4k})(t, x)] = \frac{1}{2\tau} \left(\frac{pu}{h} + \frac{qv}{h} + r \right),$$

где $p \doteq \frac{1}{2}(a_{11}^{2k} + a_{11}^{4k})$, $q \doteq \frac{1}{2}(a_{12}^{2k} - a_{12}^{4k})$, $r \doteq -\frac{1}{2}(a_{11}^{2k} + a_{12}^{2k} + b_1^{2k} + \theta a_{22}^{2k}) - \frac{1}{2}(a_{11}^{4k} + a_{12}^{4k} + b_1^{4k} + \theta a_{22}^{4k})$.

Согласно (10) и (12) имеет место цепочка равенств

$$J^{2k} = \int_{G^{2k}} (\Delta u)^2(\xi) d\xi = \frac{1}{4\tau h} \int_0^h du \int_{-u}^u dv \left(\frac{pu}{h} + \frac{qv}{h} + r \right)^2 = \frac{\nu}{24} [(A^{2k})^2 + 3(B^{2k})^2 + 2(C^{2k})^2],$$

где $A^{2k} \doteq p$, $B^{2k} \doteq q$, $C^{2k} \doteq 2p + 3r$. Другими словами,

$$A^{2k} = y_{2k-2} + y_{2k}, \quad B^{2k} = -\frac{1}{2}x_{2k-2} + \frac{1}{2}x_{2k} - \frac{1}{2}y_{2k-2} + \frac{1}{2}y_{2k}, \\ C^{2k} = 3x_{2k-1} - 6\theta X_k + 2Y_k - 6\theta Z_k.$$

3. Если $\ell = 3$, то для всех $f \in C(\Omega)$ имеет место цепочка равенств

$$\int_{G^{3k}} f(\xi) d\xi = \int_{h_{2k-2}+h}^{h_{2k}} dx \int_{\frac{\tau}{h}(h_{2k}-x)}^{\frac{\tau}{h}(x-h_{2k-2})} dt f(t, x) = \frac{h}{\tau} \int_0^{\tau} du \int_{-u}^u dv f\left(\tau + v, h_{2k-2} + h + \frac{h}{\tau}u\right) \quad (13)$$

(здесь и ниже применяем замену $t = \tau + v$, $x = h_{2k-2} + h + \frac{h}{\tau}u$), и

$$(\Delta u)(t, x) = \frac{1}{2} [(\Delta u_L)(t, x) + (\Delta u_R)(t, x)] = \frac{1}{2} [(\Delta P^{2k})(t, x) + (\Delta P^{3k})(t, x)] = \frac{1}{2\tau} \left(\frac{pu}{\tau} + \frac{qv}{\tau} + r \right),$$

где $p \doteq \frac{1}{2}(a_{12}^{2k} - a_{12}^{3k})$, $q \doteq \frac{1}{2}(a_{11}^{2k} + a_{11}^{3k})$, $r \doteq -\frac{1}{2}(a_{11}^{2k} + a_{12}^{2k} + b_1^{2k} + \theta a_{22}^{2k}) + \frac{1}{2}(a_{11}^{3k} + a_{12}^{3k} + b_1^{3k} - \theta a_{22}^{3k})$.

Согласно (10) и (13) имеет место цепочка равенств

$$J^{3k} = \int_{G^{3k}} (\Delta u)^2(\xi) d\xi = \frac{h}{4\tau^3} \int_0^\tau du \int_{-u}^u dv \left(\frac{pu}{\tau} + \frac{qv}{\tau} + r \right)^2 = \frac{\nu}{24} \left[(A^{3k})^2 + 3(B^{3k})^2 + 2(C^{3k})^2 \right],$$

где $A^{3k} \doteq p$, $B^{3k} \doteq q$, $C^{3k} \doteq 2p+3r$. Другими словами, $A^{3k} = -x_{2k-1} + x_{2k}$, $B^{3k} = 2y_{2k}$, $C^{3k} = x_{2k-1} + 2x_{2k} - 3\theta X_k - 6\theta Z_k$.

4. Если $\ell = 4$, то для всех $f \in C(\Omega)$ имеет место цепочка равенств

$$\int_{G^{4k}} f(\xi) d\xi = \int_{h_{2k-2}}^{h_{2k-1}+h} dx \int_{\frac{x}{h}(x-h_{2k-2})}^{\frac{x}{h}(h_{2k-1}-x)} dt f(t, x) = \frac{h}{\tau} \int_0^\tau du \int_{-u}^u dv f(\tau+v, h_{2k-2}+h-\frac{h}{\tau}u) \quad (14)$$

(здесь и ниже применяем замену $t = \tau + v$, $x = h_{2k-2} + h - \frac{h}{\tau}u$), и

$$(\Delta u)(t, x) = \frac{1}{2} \left[(\Delta u_L)(t, x) + (\Delta u_R)(t, x) \right] = \frac{1}{2} \left[(\Delta P^{1k})(t, x) + (\Delta P^{4k})(t, x) \right] = \frac{1}{2\tau} \left(\frac{pu}{\tau} + \frac{qv}{\tau} + r \right),$$

где $p \doteq \frac{1}{2}(-a_{12}^{1k} + a_{12}^{4k})$, $q \doteq \frac{1}{2}(a_{11}^{1k} + a_{11}^{4k})$, $r \doteq \frac{1}{2}(a_{11}^{1k} + a_{12}^{1k} + b_1^{1k} - \theta a_{22}^{1k}) - \frac{1}{2}(a_{11}^{4k} + a_{12}^{4k} + b_1^{4k} + \theta a_{22}^{4k})$.

Согласно (10) и (14) имеет место цепочка равенств

$$J^{4k} = \int_{G^{4k}} (\Delta u)^2(\xi) d\xi = \frac{h}{4\tau^3} \int_0^\tau du \int_{-u}^u dv \left(\frac{pu}{\tau} + \frac{qv}{\tau} + r \right)^2 = \frac{\nu}{24} \left[(A^{4k})^2 + 3(B^{4k})^2 + 2(C^{4k})^2 \right],$$

где $A^{4k} \doteq p$, $B^{4k} \doteq q$, $C^{4k} \doteq 2p+3r$. Другими словами, $A^{4k} = x_{2k-2} - x_{2k-1}$, $B^{4k} = 2y_{2k-2}$, $C^{4k} = 2x_{2k-2} + x_{2k-1} - 3\theta X_k - 6\theta Z_k$.

Таким образом, функционал J приобретает вид

$$J = \frac{\nu}{24} \sum_{m=1}^N \sum_{\ell=1}^4 \left[(A^{\ell m})^2 + 3(B^{\ell m})^2 + 2(C^{\ell m})^2 \right], \quad (15)$$

где значения $A^{\ell m}, B^{\ell m}, C^{\ell m}$ вычислимы через величины x_j, y_j , $j = 0, 1, \dots, 2N$, которые, в свою очередь, вычислимы через исходный массив u_{ij} , $i = 0, 1, 2$, $j = 0, 1, \dots, 2N$.

4. Градиент функционала J . 1. Имеют место равенства

$$\frac{\partial J}{\partial x_{2k-1}} = \frac{\nu}{12} \sum_{\ell=1}^4 \left[A^{\ell k} \frac{\partial A^{\ell k}}{\partial x_{2k-1}} + 3B^{\ell k} \frac{\partial B^{\ell k}}{\partial x_{2k-1}} + 2C^{\ell k} \frac{\partial C^{\ell k}}{\partial x_{2k-1}} \right], \quad k = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{\ell=1}^4 A^{\ell k} \frac{\partial A^{\ell k}}{\partial x_{2k-1}} = -A^{3k} - A^{4k} = -X_k, \quad \sum_{\ell=1}^4 B^{\ell k} \frac{\partial B^{\ell k}}{\partial x_{2k-1}} = 0,$$

$$\sum_{\ell=1}^4 C^{\ell k} \frac{\partial C^{\ell k}}{\partial x_{2k-1}} = 3(C^{1k} + C^{2k}) + (C^{3k} + C^{4k}) + 6\theta(2C^{2k} + C^{3k} + C^{4k}) =$$

$$= 18[x_{2k-1} - \theta X_k - 2\theta Z_k] + 2[x_{2k-2} + x_{2k-1} + x_{2k} - 3\theta X_k - 6\theta Z_k] +$$

$$+ 12\theta[x_{2k-2} + 4x_{2k-1} + x_{2k} - 9\theta X_k + 2Y_k - 12\theta Z_k].$$

Следовательно, введя обозначения $R \doteq (7 + 32\theta + 48\theta^2)/8$ и $r \doteq 1 + 3\theta$, получаем

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial J}{\partial x_{2k-1}} = 2r x_{2k-2} + 2r x_{2k} - 2[R + 3\theta^2]X_k + 4\theta Y_k - 8\theta r Z_k, \quad k = 1, \dots, N. \quad (16)$$

2. Имеют место равенства

$$\frac{\partial J}{\partial y_{2k-1}} = \frac{\nu}{12} \sum_{\ell=1}^4 \left[A^{\ell k} \frac{\partial A^{\ell k}}{\partial y_{2k-1}} + 3B^{\ell k} \frac{\partial B^{\ell k}}{\partial y_{2k-1}} + 2C^{\ell k} \frac{\partial C^{\ell k}}{\partial y_{2k-1}} \right], \quad k = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{\ell=1}^4 A^{\ell k} \frac{\partial A^{\ell k}}{\partial y_{2k-1}} = 0, \quad \sum_{\ell=1}^4 B^{\ell k} \frac{\partial B^{\ell k}}{\partial y_{2k-1}} = 0, \quad \sum_{\ell=1}^4 C^{\ell k} \frac{\partial C^{\ell k}}{\partial y_{2k-1}} = 3(-C^{1k} + C^{2k}) = 3[-6\theta X_k + 4Y_k],$$

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial J}{\partial y_{2k-1}} = -3\theta X_k + 2Y_k, \quad k = 1, \dots, N. \quad (17)$$

3. Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial x_{2k}} &= \frac{\nu}{12} \sum_{\ell=1}^4 \left[A^{\ell k} \frac{\partial A^{\ell k}}{\partial x_{2k}} + 3 B^{\ell k} \frac{\partial B^{\ell k}}{\partial x_{2k}} + 2 C^{\ell k} \frac{\partial C^{\ell k}}{\partial x_{2k}} \right] + \\ &+ \frac{\nu}{12} \sum_{\ell=1}^4 \left[A^{\ell, k+1} \frac{\partial A^{\ell, k+1}}{\partial x_{2k}} + 3 B^{\ell, k+1} \frac{\partial B^{\ell, k+1}}{\partial x_{2k}} + 2 C^{\ell, k+1} \frac{\partial C^{\ell, k+1}}{\partial x_{2k}} \right], \quad k = 1, \dots, N-1, \\ \sum_{\ell=1}^4 A^{\ell k} \frac{\partial A^{\ell k}}{\partial x_{2k}} &= A^{3k} = -x_{2k-1} + x_{2k}, \quad \sum_{\ell=1}^4 B^{\ell k} \frac{\partial B^{\ell k}}{\partial x_{2k}} = \frac{1}{2} (B^{1k} + B^{2k}) = \frac{1}{2} [-x_{2k-2} + x_{2k}], \\ \sum_{\ell=1}^4 C^{\ell k} \frac{\partial C^{\ell k}}{\partial x_{2k}} &= 2C^{3k} - 3\theta (2C^{2k} + C^{3k} + C^{4k}) = \\ &= 2[x_{2k-1} + 2x_{2k} - 3\theta X_k - 6\theta Z_k] - 6\theta [x_{2k-2} + 4x_{2k-1} + x_{2k} - 9\theta X_k + 2Y_k - 12\theta Z_k], \\ \sum_{\ell=1}^4 A^{\ell, k+1} \frac{\partial A^{\ell, k+1}}{\partial x_{2k}} &= A^{4, k+1} = x_{2k} - x_{2k+1}, \\ \sum_{\ell=1}^4 B^{\ell, k+1} \frac{\partial B^{\ell, k+1}}{\partial x_{2k}} &= -\frac{1}{2} (B^{1, k+1} + B^{2, k+1}) = \frac{1}{2} [x_{2k} - x_{2k+2}], \\ \sum_{\ell=1}^4 C^{\ell, k+1} \frac{\partial C^{\ell, k+1}}{\partial x_{2k}} &= 2C^{4, k+1} - 3\theta (2C^{2, k+1} + C^{3, k+1} + C^{4, k+1}) = \\ &= 2[2x_{2k} + x_{2k+1} - 3\theta X_{k+1} - 6\theta Z_{k+1}] - 6\theta [x_{2k} + 4x_{2k+1} + x_{2k+2} - 9\theta X_{k+1} + 2Y_{k+1} - 12\theta Z_{k+1}]. \end{aligned}$$

Таким образом, для всех $k = 1, \dots, N-1$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu} \frac{\partial J}{\partial x_{2k}} &= -6\theta x_{2k-1} + 2x_{2k} - 6\theta x_{2k+1} + \\ &+ [R - r^2 + 12\theta^2](X_k + X_{k+1}) - 2\theta(Y_k + Y_{k+1}) - 2\theta(1 - 6\theta)(Z_k + Z_{k+1}). \end{aligned} \quad (18)$$

4. Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial y_{2k}} &= \frac{\nu}{12} \sum_{\ell=1}^4 \left[A^{\ell k} \frac{\partial A^{\ell k}}{\partial y_{2k}} + 3 B^{\ell k} \frac{\partial B^{\ell k}}{\partial y_{2k}} + 2 C^{\ell k} \frac{\partial C^{\ell k}}{\partial y_{2k}} \right] + \\ &+ \frac{\nu}{12} \sum_{\ell=1}^4 \left[A^{\ell, k+1} \frac{\partial A^{\ell, k+1}}{\partial y_{2k}} + 3 B^{\ell, k+1} \frac{\partial B^{\ell, k+1}}{\partial y_{2k}} + 2 C^{\ell, k+1} \frac{\partial C^{\ell, k+1}}{\partial y_{2k}} \right], \quad k = 1, \dots, N-1, \\ \sum_{\ell=1}^4 A^{\ell k} \frac{\partial A^{\ell k}}{\partial y_{2k}} &= -A^{1k} + A^{2k} = 2[y_{2k-2} + y_{2k}], \\ \sum_{\ell=1}^4 B^{\ell k} \frac{\partial B^{\ell k}}{\partial y_{2k}} &= \frac{1}{2} (-B^{1k} + B^{2k} + 4B^{3k}) = \frac{1}{2} [-y_{2k-2} + 9y_{2k}], \\ \sum_{\ell=1}^4 C^{\ell k} \frac{\partial C^{\ell k}}{\partial y_{2k}} &= \frac{1}{2} (-C^{1k} + C^{2k}) = -3\theta X_k + 2Y_k. \end{aligned}$$

Симметричным образом легко получить равенства $\sum_{\ell=1}^4 A^{\ell, k+1} \frac{\partial A^{\ell, k+1}}{\partial y_{2k}} = 2[y_{2k} + y_{2k+2}]$,

$$\sum_{\ell=1}^4 B^{\ell, k+1} \frac{\partial B^{\ell, k+1}}{\partial y_{2k}} = \frac{1}{2} [9y_{2k} - y_{2k+2}], \quad \sum_{\ell=1}^4 C^{\ell, k+1} \frac{\partial C^{\ell, k+1}}{\partial y_{2k}} = -3\theta X_{k+1} + 2Y_{k+1}.$$

Таким образом, для всех $k = 1, \dots, N-1$ справедливо равенство

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial J}{\partial y_{2k}} = -\frac{1}{2} \theta (X_k + X_{k+1}) + \frac{1}{8} y_{2k-2} + \frac{1}{2} y_{2k-1} + \frac{1}{4} y_{2k} + \frac{1}{2} y_{2k+1} + \frac{1}{8} y_{2k+2}. \quad (19)$$

Вычислив следующие четыре линейные комбинации из выражений (16) – (19) для частных производных:

$$\frac{\partial J}{\partial y_{2k-1}}, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial J}{\partial x_{2k-1}} - \theta \frac{\partial J}{\partial y_{2k-1}}, \quad - \frac{\partial J}{\partial y_{2k-1}} + 6 \frac{\partial J}{\partial y_{2k}} - \frac{\partial J}{\partial y_{2k+1}},$$

$$\frac{1}{2} [R-r] \frac{\partial J}{\partial x_{2k-1}} + R \frac{\partial J}{\partial x_{2k}} + \frac{1}{2} [R-r] \frac{\partial J}{\partial x_{2k+1}} + \theta r \frac{\partial J}{\partial y_{2k-1}} + \theta r \frac{\partial J}{\partial y_{2k+1}}$$

(две первые комбинации – для всех $k=1, \dots, N$, а две вторые – для всех $k=1, \dots, N-1$), и приравняв их нулю, получим систему уравнений

$$y_{2k-2} + 6y_{2k-1} + y_{2k} = 6\theta(x_{2k-2} - 2x_{2k-1} + x_{2k}), \quad k=1, \dots, N, \quad (20)$$

$$[r-R]x_{2k-2} + 2Rx_{2k-1} + [r-R]x_{2k} = 4\theta r Z_k, \quad k=1, \dots, N, \quad (21)$$

$$y_{2k-2} + 6y_{2k} + y_{2k+2} = 0, \quad k=1, \dots, N-1, \quad (22)$$

$$[5-8R]x_{2k-2} + 2[5+8R]x_{2k} + [5-8R]x_{2k+2} = 20\theta(Z_k + Z_{k+1}), \quad k=1, \dots, N-1. \quad (23)$$

Совокупность уравнений (23) имеет самостоятельный характер: ее уравнения связывают между собой лишь переменные вида x_{2m} . Очевидно, матрица системы уравнений (23) имеет трехдиагональный вид, и ниже мы установим, что система (23) однозначно разрешима (в частности, методом прогонки). Аналогичным образом однозначно разрешима система (22), содержащая лишь переменные вида y_{2m} : матрица системы здесь тоже трехдиагональная (метод прогонки также применим). Из уравнений (21) легко находим все значения x_{2k-1} . Наконец, из уравнений (20) вычисляем значения y_{2k-1} . Все эти значения позволяют, в конечном счете, найти искомые величины u_{ij}^* , $i=1, 2$, $j=1, \dots, 2N-1$.

5. О многочленах Чебышева. Зафиксируем числа $x \in R$, $n \in N$ и составим матрицу $A(x) = (A_{ij}(x))$ порядка n такую, что $A_{ij}(x) \doteq \delta_{i,j+1} + 2x\delta_{ij} + \delta_{i,j-1}$, где δ_{ij} – символ Кронекера. Пусть $U_n(x) \doteq \det(A_{ij}(x))$. Составим, далее, матрицу $B(x) = (B_{ij}(x))$ порядка n :

$$B_{ij}(x) \doteq (-1)^{i+j} \begin{cases} U_{i-1}(x)U_{n-j}(x), & \text{если } i \leq j \\ U_{j-1}(x)U_{n-i}(x), & \text{если } i \geq j \end{cases}.$$

Легко проверить, что $U_{n+2}(x) = 2xU_{n+1}(x) - U_n(x)$ (достаточно разложить определитель $U_{n+2}(x)$ по элементам первой строки). Очевидно, $U_1(x) = 2x$, $U_2(x) = 4x^2 - 1$, поэтому все функции $U_n(x)$ – это многочлены Чебышева 2-го рода [2, с. 96]. Доопределим последовательность значений $U_0(x) \doteq 1$. При $x \in (-1, 1)$ для $U_n(x)$ имеет место представление

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\Theta}{\sin \Theta}, \quad \cos \Theta = x,$$

а функция

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n-k}{k} (2x)^{n-2k}, \quad x \in R,$$

является аналитическим продолжением этой функции [3, с. 67]. Здесь и далее $[n/2]$ – целая часть числа $n/2$. В силу элементарного тригонометрического тождества

$$\sin(n+1)\Theta \sin(m+1)\Theta - \sin n\Theta \sin m\Theta = \sin(n+m+1)\Theta \sin \Theta$$

справедливо тождество

$$U_n(x)U_m(x) - U_{n-1}(x)U_{m-1}(x) = U_{n+m}(x), \quad x \in R. \quad (24)$$

Теорема 1. Имеет место равенство $A(x)B(x) = U_n(x)E_n$, где E_n – единичная матрица порядка $n \geq 1$.

Доказательство теоремы осуществляется непосредственным вычислением элементов произведения $A(x)B(x)$ и опирается на тождество (24).

Следствие. Каждая из систем уравнений (22) и (23) имеет единственное решение.

Действительно, матрицы систем (22) и (23) имеют трехдиагональный вид: элементами матриц являются числа вида $A_{ij}(x) \doteq \delta_{i,j+1} + 2x\delta_{ij} + \delta_{i,j-1}$; в первом случае имеем $x = 31 > 1$,

а во втором $x = \frac{5+8R}{5-8R} = -\left(1 + \frac{5}{1+16\theta+24\theta^2}\right) < -1$. Поскольку все нули многочленов $U_n(\cdot)$ лежат в интервале $(-1,1)$ (см. [2, с. 96]), то вне этого интервала имеем $U_n(\cdot) \neq 0$, поэтому в силу теоремы 1 матрицы обеих систем (22) и (23) обратимы.

Замечание. Далее мы используем также многочлены Чебышева 1-го рода $T_n(x)$. При $x \in (-1,1)$ для $T_n(x)$ имеет место представление $T_n(x) = \cos n\Theta$, $\cos \Theta = x$, а функция

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} (2x)^{n-2k}, \quad x \in R, \quad n \in \mathbb{N},$$

является аналитическим продолжением этой функции [3, с. 62]. Имеет место тождество

$$2T_n(x) = U_n(x) - U_{n-2}(x), \quad x \in R, \quad n \in N \quad (25)$$

(см. [3, с. 67]). Заметим еще, что мы полагаем по определению $U_{-1}(x) \doteq 0$.

6. *Точная формула для функционала невязки.* Пусть J^* – значение функционала J на решении системы (20) – (23) (другими словами, J^* – это минимальное значение J в пространстве $\sigma(\Omega)$). В силу (20) имеем $2Y_k = 3\theta X_k$, следовательно, исключив величину Y_k из выражений для C^{1k} и C^{2k} , получим, что $C^{1k} = C^{2k} = 3x_{2k-1} - 3\theta X_k - 6\theta Z_k$. Тем самым, в величинах $A^{\ell m}, B^{\ell m}, C^{\ell m}$ исчезает явная зависимость от значений y_{2k-1} , $k = 1, \dots, N$.

Пусть $P_k \doteq x_{2k-2} + x_{2k}$, $p_k \doteq x_{2k-2} - x_{2k}$, $Q_k \doteq y_{2k-2} + y_{2k}$, $q_k \doteq y_{2k-2} - y_{2k}$, $S_k \doteq P_k - 4\theta Z_k$. В силу (21) справедливо равенство $x_{2k-1} = \frac{1}{2}P_k - \frac{r}{2R}S_k$, следовательно, исключив величину x_{2k-1} из выражений для A^{3k} , A^{4k} и всех $C^{\ell k}$, получим, что в величинах $A^{\ell m}, B^{\ell m}, C^{\ell m}$ исчезает явная зависимость также и от значений x_{2k-1} , $k = 1, \dots, N$, а именно:

$$\begin{aligned} A^{1k} &= -Q_k, & B^{1k} &= -\frac{1}{2}p_k + \frac{1}{2}q_k, & C^{1k} &= -\frac{3}{2R}\left(\frac{1}{8} + \theta\right)S_k, \\ A^{2k} &= Q_k, & B^{2k} &= -\frac{1}{2}p_k - \frac{1}{2}q_k, & C^{2k} &= -\frac{3}{2R}\left(\frac{1}{8} + \theta\right)S_k, \\ A^{3k} &= -\frac{1}{2}p_k + \frac{r}{2R}S_k, & B^{3k} &= 2y_{2k}, & C^{3k} &= -p_k + \frac{1}{2R}\left(\frac{13}{8} + 3\theta\right)S_k, \\ A^{4k} &= \frac{1}{2}p_k + \frac{r}{2R}S_k, & B^{4k} &= 2y_{2k-2}, & C^{4k} &= p_k + \frac{1}{2R}\left(\frac{13}{8} + 3\theta\right)S_k. \end{aligned}$$

Таким образом, $\frac{24}{V} J^* = \sum_{k=1}^N \sum_{\ell=1}^4 (A^{\ell k})^2 + 3 \sum_{k=1}^N \sum_{\ell=1}^4 (B^{\ell k})^2 + 2 \sum_{k=1}^N \sum_{\ell=1}^4 (C^{\ell k})^2 = \sum_x + \sum_y$, где

$$\begin{aligned} \sum_x &\doteq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N p_k^2 + \frac{r^2}{2R^2} \sum_{k=1}^N S_k^2 + \frac{3}{2} \sum_{k=1}^N p_k^2 + \frac{9}{R^2} \left(\frac{1}{8} + \theta\right)^2 \sum_{k=1}^N S_k^2 + 4 \sum_{k=1}^N p_k^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{13}{8} + 3\theta\right)^2 \sum_{k=1}^N S_k^2, \\ \sum_y &\doteq 2 \sum_{k=1}^N Q_k^2 + \frac{3}{2} \sum_{k=1}^N q_k^2 + 12 \sum_{k=1}^N y_{2k}^2 + 12 \sum_{k=1}^N y_{2k-2}^2 = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N (62y_{2k-2}^2 + 4y_{2k-2}y_{2k} + 62y_{2k}^2) = \\ &= \frac{1}{4} \left(62y_0^2 + \sum_{k=2}^N y_{2k-2}(-y_{2k-4} - y_{2k}) \right) + \sum_{k=1}^N y_{2k-2}y_{2k} + \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^{N-1} y_{2k}(-y_{2k-2} - y_{2k+2}) + 62y_{2N}^2 \right). \end{aligned}$$

Воспользовались равенствами (22), записанными в виде $62y_{2k} = -y_{2k-2} - y_{2k+2}$. В итоге, после массовых сокращений, получаем, что $\sum_y = \frac{1}{2} (31y_0^2 + y_0y_2 + y_{2N-2}y_{2N} + 31y_{2N}^2)$, и замечаем, что это выражение зависит лишь от величин y_2 и y_{2N-2} . В силу теоремы 1 для матрицы $A(x)$ системы (22) имеем $A^{-1}(x) = \frac{1}{U_n(x)} B(x)$, где $x = 31$, $n = N-1$. Следовательно, для любого $k = 1, \dots, n$ имеет место равенство $y_{2k} = \frac{1}{U_n(31)} (-B_{k1}(31)y_0 - B_{kn}(31)y_{2N})$, в частности, $y_2 = \frac{1}{U_n(31)} (-U_{n-1}(31)y_0 + (-1)^n y_{2N})$, $y_{2N-2} = \frac{1}{U_n(31)} ((-1)^n y_0 - U_{n-1}(31)y_{2N})$. В силу формулы (25) справедливо тождество $x U_n(x) - U_{n-1}(x) = T_{n+1}(x)$, следовательно,

$\sum_y = \frac{1}{2 U_n(31)} (T_{n+1}(31)y_0^2 + 2(-1)^n y_0 y_{2N} + T_{n+1}(31)y_{2N}^2)$ — положительно определенная квадратичная форма от исходных параметров y_0, y_{2N} .

Для суммы $\sum_x$, зависящей лишь от величин x_{2k} , $k = 1, \dots, N-1$, имеют место равенства

$$\sum_x = 6 \sum_{k=1}^N p_k^2 + \frac{15}{4R} \sum_{k=1}^N S_k^2 = \frac{3}{4R} \left[8R \sum_{k=1}^N p_k^2 + 5 \sum_{k=1}^N P_k^2 \right] - \frac{30\theta}{R} \sum_{k=1}^N P_k Z_k + \frac{60\theta^2}{R} \sum_{k=1}^N Z_k^2.$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, обозначим через $\sum$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum &= \sum_{k=1}^N \left((5+8R)x_{2k-2}^2 + 2(5-8R)x_{2k-2}x_{2k} + (5+8R)x_{2k}^2 \right) = \\ &= \left((5+8R)x_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^N x_{2k-2} \left(-(5-8R)(x_{2k-4} + x_{2k}) + 20\theta(Z_{k-1} + Z_k) \right) \right) + 2(5-8R) \sum_{k=1}^N x_{2k-2}x_{2k} + \\ &+ \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} x_{2k} \left(-(5-8R)(x_{2k-2} + x_{2k+2}) + 20\theta(Z_k + Z_{k+1}) \right) + (5+8R)x_{2N}^2 \right). \end{aligned}$$

Использовали равенства (23): $(5+8R)x_{2k} = \frac{1}{2} (-(5-8R)(x_{2k-2} + x_{2k+2}) + 20\theta(Z_k + Z_{k+1}))$. В итоге, после массовых сокращений, получаем, что

$$\sum = (5+8R)(x_0^2 + x_{2N}^2) + (5-8R)(x_0x_2 + x_{2N-2}x_{2N}) + 20\theta \sum_{k=1}^{N-1} x_{2k}(Z_k + Z_{k+1}),$$

а так как $\sum_{k=1}^N P_k Z_k = x_0 Z_1 + x_{2N} Z_N + \sum_{k=1}^{N-1} x_{2k}(Z_k + Z_{k+1})$, то

$$\begin{aligned} \sum_x &= \frac{3}{4R} (5+8R)(x_0^2 + x_{2N}^2) + \frac{3}{4R} (5-8R)(x_0x_2 + x_{2N-2}x_{2N}) - \frac{30\theta}{R} (x_0 Z_1 + x_{2N} Z_N) - \\ &- \frac{15\theta}{R} \sum_{k=1}^{N-1} x_{2k}(Z_k + Z_{k+1}) + \frac{60\theta^2}{R} \sum_{k=1}^N Z_k^2. \end{aligned}$$

В силу теоремы 1 для матрицы $A(x)$ системы (23) имеем $A^{-1}(x) = \frac{1}{U_n(x)} B(x)$, где $x = (5+8R)/(5-8R)$, $n = N-1$. Очевидно, $5-8R = 10/(1+x)$ и $5+8R = 10x/(1+x)$, поэтому в силу системы (23) имеем равенства

$$\begin{aligned}
 x_{2k} &= \frac{1}{U_n(x)} \left(-B_{k1}(x)x_0 - B_{kn}(x)x_{2N} + 2\theta(1+x) \sum_{j=1}^n B_{kj}(x)(Z_j + Z_{j+1}) \right), \quad k=1, \dots, N-1, \\
 x_2 &= \frac{1}{U_n(x)} \left(-U_{n-1}(x)x_0 + (-1)^n x_{2N} + 2\theta(1+x) \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} U_{n-j}(x)(Z_j + Z_{j+1}) \right), \\
 x_{2N-2} &= \frac{1}{U_n(x)} \left((-1)^n x_0 - U_{n-1}(x)x_{2N} + 2\theta(1+x) \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} U_{j-1}(x)(Z_j + Z_{j+1}) \right), \\
 \sum_x &= \frac{15x}{2R(1+x)} (x_0^2 + x_{2N}^2) + \\
 &+ \frac{15}{2R(1+x)} x_0 \frac{1}{U_n(x)} \left(-U_{n-1}(x)x_0 + (-1)^n x_{2N} + 2\theta(1+x) \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} U_{n-j}(x)(Z_j + Z_{j+1}) \right) + \\
 &+ \frac{15}{2R(1+x)} x_{2N} \frac{1}{U_n(x)} \left((-1)^n x_0 - U_{n-1}(x)x_{2N} + 2\theta(1+x) \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} U_{j-1}(x)(Z_j + Z_{j+1}) \right) - \\
 &- \frac{30\theta}{R} (x_0 Z_1 + x_{2N} Z_N) - \\
 &- \frac{15\theta}{R} \sum_{k=1}^n \frac{1}{U_n(x)} \left(-B_{k1}(x)x_0 - B_{kn}(x)x_{2N} + 2\theta(1+x) \sum_{j=1}^n B_{kj}(x)(Z_j + Z_{j+1}) \right) (Z_k + Z_{k+1}) + \\
 &+ \frac{60\theta^2}{R} \sum_{k=1}^N Z_k^2.
 \end{aligned}$$

Итак, $\sum_x$ — тоже положительно определенная квадратичная форма от исходных параметров $x_0, Z_1, \dots, Z_N, x_{2N}$, а для вычисления J^* нам остается лишь привести подобные члены в сумме $\sum_x$. Таким образом, в терминах введенных обозначений справедлива

Теорема 2. Минимум J^* функционала J достигается на решении системы (20) – (23), и для него имеет место точная формула:

$$\begin{aligned}
 J^* &= \frac{\nu}{48 U_n(31)} (T_N(31) y_0^2 + 2(-1)^n y_0 y_{2N} + T_N(31) y_{2N}^2) + \\
 &+ \frac{5\nu}{16 R U_n(x)} \frac{1}{1+x} (T_N(x) x_0^2 + 2(-1)^n x_0 x_{2N} + T_N(x) x_{2N}^2) + \\
 &+ \frac{5\theta\nu}{4 R U_n(x)} \left(x_0 \sum_{j=1}^N (-1)^j (U_{N-j}(x) - U_{n-j}(x)) Z_j + x_{2N} \sum_{j=1}^N (-1)^{n-j} (U_{j-1}(x) - U_{j-2}(x)) Z_j \right) - \\
 &- \frac{5\theta^2\nu}{4 R U_n(x)} (1+x) \sum_{k,j=1}^n B_{kj}(x) (Z_k + Z_{k+1}) (Z_j + Z_{j+1}) + \frac{5\theta^2\nu}{2R} \sum_{k=1}^N Z_k^2.
 \end{aligned}$$

7. **Пример.** Зафиксируем $T > 0$, и пусть $\tau \doteq T/2$. Если $\alpha(t) = \alpha_0 t + \alpha_1$, $\beta(t) = \beta_0 t + \beta_1$, $\phi(x) = \phi_0 x + \phi_1$ — линейные функции (такие, что $\alpha(0) = \phi(0)$, $\beta(0) = \phi(1)$, то есть $\alpha_1 = \phi_1$, $\beta_1 = \phi_0 + \phi_1$), то, очевидно, $x_0 = T\alpha_0$, $x_{2N} = T\beta_0$, $y_0 = y_{2N} = 0$, $Z_k = 0$, $k = 1, \dots, N$, поэтому

$$J^* = \frac{5T^2\nu}{16 R U_n(x)} \frac{1}{1+x} (T_N(x) \alpha_0^2 + 2(-1)^n \alpha_0 \beta_0 + T_N(x) \beta_0^2).$$

Для упрощения полагаем $\alpha_0 = \beta_0$. Тогда определена последовательность $\{J_n\}$ такая, что

$$J_n \doteq J^* = \frac{5T\alpha_0^2}{24} \frac{1}{R(1+x)} \frac{T_{n+1}(x) + (-1)^n}{(n+1)U_n(x)}.$$

Легко показать эквивалентность

последовательностей $\{J_n\}$ и $\{I_n\}$, где $I_n \doteq \frac{5\alpha_0^2}{24^2\gamma^4 T(n+1)^4} = \frac{5\alpha_0^2}{24^2\gamma^4 T N^4}$. Таким образом, если задана точность вычислений $\varepsilon > 0$, то неравенство $\sqrt{J_n} \approx \sqrt{I_n} < \varepsilon$ дает нам нижнюю оценку для количества участков разбиения сетки $\{(\tau_i, h_j)\}$, а именно, при заданном $T > 0$ следует брать N такое, что $N > \sqrt[4]{\frac{5\alpha_0^2}{24^2\gamma^4 T \varepsilon^2}}$. Заметим еще, что неравенство $\sqrt{J_n} < \varepsilon$ легко решить и программным образом.

Одним из преимуществ предложенного метода является следующее обстоятельство: здесь нет надобности в дроблении по переменной $t \in [0, T]$, что характерно для традиционных методов решения уравнения теплопроводности, основанных на послойном вычислении, где накапливаются ошибки. Это выгодно еще и с точки зрения быстродействия: мы всего лишь один раз решаем систему (20) – (23).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Родионов В.И. Об аппроксимации функций многих переменных специальными сплайнами [Электронный ресурс] / В.И. Родионов // Трехмерная визуализация научной, технической и социальной реальности. Кластерные технологии моделирования: Сб. докл. I междунар. конф., Ижевск, – 2009. – Т. 1. – С. 164–168. Режим доступа: <http://conf3d.udsu.ru/2008/images/stories/files/tom1.pdf>. – (дата обращения 13.10.2010)
2. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены [Текст] / П.К. Суетин. – М.: Наука, 1976. – 328 с.
3. Риордан Дж. Комбинаторные тождества [Текст] / Дж. Риордан. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

УДК 621.785

О.Ю. Шарпова

Самарский государственный технический университет, г. Самара

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ИНДУКЦИОННОГО НАГРЕВА МЕТАЛЛА НА БАЗЕ КОНЕЧНО – ЭЛЕМЕНТНОГО ПРОГРАММНОГО ПАКЕТА FLUX

На базе конечно-элементного программного пакета FLUX создается численная двумерная модель взаимосвязанных электромагнитных и тепловых полей в процессе индукционного нагрева металлических заготовок. Рассмотрены основные этапы создания модели: построение геометрии, генерация сетки, задание электромагнитных, теплофизических свойств материалов. Представлены некоторые результаты, полученные при расчете данной модели.

Введение. В современном промышленном производстве широко применяется нагрев заготовок из черных и цветных металлов перед различными операциями пластической деформации: прокаткой, прессованием, штамповкой, волочением. В этих целях используют индукционные нагревательные установки (ИНУ) различных принципов действия и самого разнообразного конструктивного исполнения.

При малой производительности и сравнительно большой длине заготовки используют ИНУ периодического действия. В периодических нагревателях одно или несколько изделий нагревается до требуемой температуры, после чего загрузка индуктора полностью заменяется (рисунок 1).