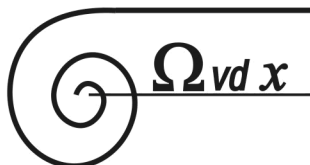


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ»



Международная математическая конференция
«Пятые Богдановские чтения
по обыкновенным дифференциальным уравнениям»
Тезисы докладов

7 – 10 декабря 2010 года

Минск
Республика Беларусь

МИНСК 2010

УДК 517
ББК 22.161.61я43
М43

Редакторы:
С. Г. Красовский, А. А. Леваков, С. А. Мазаник

Международная математическая конференция «Пятые Богдановские
М43 **чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям»: тез. докладов**
Международной научной конференции. Минск, 7–10 декабря 2010 г. — Мн.: Институт
математики НАН Беларуси, 2010. — 152 с.

ISBN 978-985-6499-65-7

Сборник содержит тезисы докладов, представленных на Международной математической конференции «Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям». В сборник вошли тезисы докладов по вопросам аналитической, качественной и асимптотической теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости, теории управления движением, стохастическим дифференциальным уравнениям, методике преподавания математики.

система (1) стабилизируема тогда и только тогда, когда $\xi = (\beta_0 - \beta_1\gamma_0)/(1 + \beta_2\gamma_0) < 0$. Стабилизирующий регулятор имеет вид:

$$\begin{aligned}
 u(t) = & \begin{bmatrix} -\left(\frac{\beta_0^2\beta_2 + \beta_0(\beta_1 + \beta_2) + \beta_1}{\beta_2\gamma_0 + 1} + a_{10}\right) \\ -\left(\frac{\beta_0\beta_2\gamma_0 + \beta_1\gamma_0 + \beta_2\gamma_0 + 1}{\beta_2\gamma_0 + 1} + a_{20}\right) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} -\left(\frac{\beta_1(\beta_0\beta_2 + \beta_1 + \beta_2)}{\beta_2\gamma_0 + 1} + a_{11}\right) \\ -\left(\frac{\beta_0\beta_2 + \beta_1 + \beta_2}{\beta_2\gamma_0 + 1} + a_{21}\right) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} x_1(t-h) \\ x_2(t-h) \end{bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} -\left(\frac{\beta_2(\beta_0\beta_2 + 2\beta_1 + \beta_2)}{\beta_2\gamma_0 + 1} + a_{12}\right) \\ -\left(\frac{\beta_2}{\beta_2\gamma_0 + 1} + a_{22}\right) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t-h) \\ \dot{x}_2(t-h) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\beta_2^2}{\beta_2\gamma_0 + 1} \\ 0 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t-h) \\ \ddot{x}_2(t-h) \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

CONSISTENT SYSTEMS AND POLE ASSIGNMENT PROBLEM

V. A. Zaitsev (Izhevsk, Russia)

Consider a bilinear control system

$$\dot{x} = (A(t) + u_1(t)A_1(t) + \dots + u_r(t)A_r(t))x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{K}^n, \quad \mathbb{K} = \mathbb{C} \vee \mathbb{R}, \quad (1)$$

with bounded piecewise continuous functions $A(\cdot)$, $A_l(\cdot)$, $u_l(\cdot)$, $l = \overline{1, r}$. The system (1) is said to be *consistent on* $[t_0, t_1]$ [1] if for any matrix $G \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ there exists a bounded piecewise continuous control function $\hat{u} = (\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_r) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{K}^r$ such that the solution of the matrix initial value problem $\dot{Z} = A(t)Z + (\hat{u}_1(t)A_1(t) + \dots + \hat{u}_r(t)A_r(t))X(t, t_0)$, $Z(t_0) = 0$ satisfies condition $Z(t_1) = G$; $X(t, s)$ denotes the Cauchy matrix of the system $\dot{x} = A(t)x$. Let us assume that system (1) is time-independent:

$$\dot{x} = (A + u_1A_1 + \dots + u_rA_r)x, \quad x \in \mathbb{K}^n. \quad (2)$$

We consider pole assignment problem for system (2). We shall say that system (2) is *arbitrarily pole assignable* if for a given polynomial $p(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \dots + \gamma_n$ with $\gamma_i \in \mathbb{K}$ there exists a control $\hat{u} = (\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_r) \in \mathbb{K}^r$ such that $\det(\lambda I - (A + \hat{u}_1A_1 + \dots + \hat{u}_rA_r)) = p(\lambda)$. Consider a linear control system with static output feedback

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = C^*x, \quad u = Uy, \quad (x, u, y) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^k.$$

The matrix $U \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ is a compensator. The closed-loop system has the form

$$\dot{x} = (A + BUC^*)x, \quad x \in \mathbb{K}^n. \quad (3)$$

System (3) is a special case of system (2). Let us construct the matrix $Q = \{Q_{ij}\}$ from the system (2) as follows: $Q_{ij} = \text{Sp}(A_j A^{i-1})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, r}$. Let J be first unit

superdiagonal matrix that is $J = \sum_{i=1}^{n-1} e_i e_{i+1}^* \in M_{n,n}(\mathbb{K})$. Set $\Omega_k = \{S = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^n : s_{ij} = 0 \text{ for } i < j + k\} \in M_{n,n}(\mathbb{K}), \quad k = \overline{0, n-1}$.

Theorem 1. Suppose the matrix A of system (3) has the Hessenberg form that is $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$; $a_{i,i+1} \neq 0, \quad i = \overline{1, n-1}$; $a_{ij} = 0, \quad j > i + 1$ and the first $(p-1)$ rows of matrix B and the last $(n-p)$ rows of matrix C are equal to zero ($p \in \{1, \dots, n\}$). Then implications $1 \implies 2 \iff 3$ hold for the following assertions:

1. System (3) is consistent.
2. The matrices $C^*B, C^*AB, \dots, C^*A^{n-1}B$ are linearly independent.
3. System (3) is arbitrarily pole assignable.

Moreover, the implication $2 \implies 1$ holds if one of the following conditions is satisfied:

(a) $\text{rank } B = n$; (b) $\text{rank } C = n$; (c) $A = J$; (d) $\text{rank } B + \text{rank } C \geq n + 1$; (e) $n < 6$.

Theorem 2. Suppose the matrix A of system (2) has the Hessenberg form and the first $(p-1)$ rows and the last $(n-p)$ columns of matrices $A_l, \quad l = \overline{1, r}$ are equal to zero ($p \in \{1, \dots, n\}$). Then implications $4 \implies 5 \iff 6$ hold for the following assertions:

4. System (2) is consistent.
5. $\text{rank } Q = n$.
6. System (2) is arbitrarily pole assignable.

Moreover, the implication $5 \implies 4$ holds if one of the following conditions is satisfied:

(a) $A = J$; (b) $n < 3$.

Theorem 3. Suppose the matrix A of system (2) has the Hessenberg form, $r = n$, and $A_l \in \Omega_{l-1}, \quad l = \overline{1, n}$. Then implications $4 \iff 5 \iff 6$ hold.

References. 1. Zaitsev V.A., Tonkov Ye.L. // Russian mathematics. 1999. Vol. 43, № 2. P. 42–52.