Министерство образования Российской Федерации

Удмуртский государственный университет

В. А. Зайцев, С. Н. Попова

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Практикум по математическому анализу

Ижевск
2003

Вариант 1

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} x_n = 1; \quad \text{б) } \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty; \quad \text{в) } x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 2; \quad \text{г) } \lim_{n\to\infty} x_n \neq \infty.$$

2. Дана последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ и число a. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, если $x_n = \dfrac{2n+1}{n+1}, \quad a = 2.$

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{5n-1}{3n+1} = \frac{5}{3}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \frac{5n-1}{3n+1} \neq 2.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n^2+3}}{\sqrt[3]{n^6+4} - \sqrt[4]{n^4+1}}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+2n+3}{2n^2+2n+1}\right)^{3n^2-7}.$$

5. Последовательность x_n задана условиями

$$x_{n+1} = \frac{1}{4} + x_n^2, \quad x_1 = \frac{1}{4}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что произведение двух бесконечно больших функций при $x \to +\infty$ есть бесконечно большая функция.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани последовательности и проверить по определению sup и inf найденные значения, если

$$x_n = \frac{n}{n^3+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{x\to 1+0} f(x) = -2; \qquad \text{б) } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty;$$
$$\text{в) } f(x) \underset{x\to 2-0}{\not\to} 1; \qquad \text{г) } \lim_{x\to-\infty} f(x) \neq +\infty.$$

9. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, если

$$f(x) = x^2 + 2, \quad a = 1, \quad A = 3.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$а)\ \lim_{x\to 0}\frac{2x+3}{3x+2}=\frac{3}{2};\qquad б)\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x+4}{x^2+2}=0;$$

$$в)\ \lim_{x\to 2}\frac{3+x}{x^2-4}=\infty;\qquad г)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{3x+1}=\infty.$$

11. Вычислить пределы

$$а)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^4-x^3-7x^2+13x-6}{x^4+x^3-3x^2-x+2};\qquad б)\ \lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right);$$

$$в)\ \lim_{x\to\pi/2}\frac{e^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x};\qquad г)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x\cos 2x}{1+\sin x\cos 3x}\right)^{\operatorname{ctg} x^3}.$$

12. Доказать, что $\cos\dfrac{1}{x}-\sqrt[5]{\dfrac{x^3+2x}{1+x^3}}=o\left(\dfrac{1}{x}\right),\quad x\to\infty.$

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x)=x^2|x|,\quad x\in\mathbb{R}.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:

$$f(x)=\frac{e^{1/x}-e^{-1/x}}{e^{1/x}+e^{-1/x}}.$$

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$а)\ f(x)=\begin{cases}(x+1)^2, & x<-1,\\ \cos\dfrac{\pi x}{2}, & |x|\leqslant 1,\\ (x-1)^2, & x>1;\end{cases}\qquad б)\ f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+x|x|)e^{-nx}+1-x}{e^{-nx}+1}.$$

Вариант 2

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$а)\ \lim_{n\to\infty}x_n=-1;\quad б)\ \lim_{n\to\infty}x_n=-\infty;\quad в)\ x_n\underset{n\to\infty}{\not\to}2+0;\quad г)\ \lim_{n\to\infty}x_n\neq+\infty.$$

2. Дана последовательность x_n, $n=1,2,\ldots$ и число a. Определить для $\varepsilon=0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $N=N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n>N$ выполнено неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$, если $x_n=\dfrac{3n-2}{4n+4},\quad a=\dfrac{3}{4}.$

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$а)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{1-2n}=-\frac{3}{2};\qquad б)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{1-2n}\neq-1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{-\sqrt{n-6}-\sqrt[8]{n^8+6}}{\sqrt[4]{n^4+1}-\sqrt{n+1}}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3}\right)^{2n-1}.$$

5. Последовательность x_n задана условиями

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{6+x_n}, \quad x_1 = 3, \quad n = 1, 2, \ldots \ .$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что сумма двух бесконечно больших функций одного знака при $x \to -\infty$ есть бесконечно большая функция.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани последовательности и проверить по определению sup и inf найденные значения, если

$$x_n = \frac{n}{n^2+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{x\to 1-0} f(x) = 2; \qquad \text{б) } \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty;$$

$$\text{в) } f(x) \underset{x\to 2+0}{\not\to} 1-0; \qquad \text{г) } \lim_{x\to +\infty} f(x) \neq -\infty.$$

9. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x-a| < \delta$ следует неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$, если

$$f(x) = x^2 - 1, \quad a = 2, \quad A = 3.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{x\to 1} \frac{3x-2}{2x+3} = \frac{1}{5}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty} \frac{2x-4}{x^2+2} = 0;$$

$$\text{в) } \lim_{x\to -2} \frac{x-3}{x^2-4} = \infty; \qquad \text{г) } \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2}{3x-2} = \infty.$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x\to 1} \frac{2x^4+3x^3-9x^2+x+3}{3x^4+4x^3-2x^2+4x-9}; \quad \text{б) } \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1}-2\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}\right);$$

$$\text{в) } \lim_{x\to\pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\ln \operatorname{tg} x}; \qquad \text{г) } \lim_{x\to 0} \frac{(a^x-b^x)^2}{a^{x^2}-b^{x^2}}, \quad (a>0;\ b>0;\ a\neq b).$$

12. Доказать, что $e^{\sqrt{x^2+x+1}} = o\left(e^{x^{3/2}}\right), \quad x \to +\infty.$

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \frac{\cos x}{x}, \quad x \neq 0.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:
$$f(x) = \frac{3^{1/x} + 2^{1/x}}{3^{1/x} - 2^{1/x}}.$$

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} e^{1/x}, & x < 0, \\ x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ (x-2)^2, & x > 1; \end{cases} \qquad \text{б) } f(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^{2n} + (x-1)^{2n}}.$$

Вариант 3

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} x_n = 0; \quad \text{б) } \lim_{n\to\infty} x_n = \infty; \quad \text{в) } x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 2-0; \quad \text{г) } \lim_{n\to\infty} x_n \neq -\infty.$$

2. Дана последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ и число a. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, если $x_n = \dfrac{5-n}{3n+1}$, $\quad a = -\dfrac{1}{3}$.

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+1}{3n^2+1} = \frac{4}{3}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+1}{3n^2+1} \neq 1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{n! + (n+2)!}{(n-1)! + (n+2)!}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}\right)^{n^3}.$$

5. Последовательность x_n задана условиями

$$x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}, \quad x_1 = 2, \quad n = 1, 2, \ldots\ .$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что сумма двух бесконечно больших последовательностей одного знака есть бесконечно большая последовательность.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани последовательности и проверить по определению sup и inf найденные значения, если

$$x_n = \frac{n^3}{n^4+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

а) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$; б) $\lim\limits_{x\to +0} f(x) = +\infty$;

в) $f(x) \underset{x\to 2+0}{\not\to} 1+0$; г) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) \neq -\infty$.

9. Определить для $\varepsilon = 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001$ число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x-a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, если

$$f(x) = 2x^2 + 1, \quad a = 1, \quad A = 3.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

а) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x+3}{3x-2} = -\dfrac{1}{5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+4}{x^2+3} = 0$;

в) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x+1}{x^2-4} = \infty$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-3}{3x+2} = \infty$.

11. Вычислить пределы

а) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^4+2x^3-2x^2+2x-3}{x^4+3x^3-x^2-3x}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt[3]{\dfrac{x+a}{x+1}} - \sqrt[3]{\dfrac{x+b}{x-1}}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{5^{2x}-2^{3x}}{\sin x + \sin x^2}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}}{a+b}\right)^{(1+\operatorname{tg} x)/\sin x}$.

12. Доказать, что $\sqrt{x^4 + x^2\sqrt{x^4+1}} = x^2\sqrt{2} + o(1/x), \quad x \to +\infty$.

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x \neq 0.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:

$$f(x) = \frac{\cos(\pi x/2)}{x^3 - 4x^2 + 3x}.$$

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

а) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leqslant -1, \\ \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2}, & |x| < 1, \\ e^x, & x \geqslant 1; \end{cases}$ б) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2n}}, \ x \geqslant 0.$

Вариант 4

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} x_n = 2; \quad \text{б) } \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty; \quad \text{в) } x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 1; \quad \text{г) } \lim_{n\to\infty} x_n \neq \infty.$$

2. Дана последовательность x_n, $n = 1, 2, \dots$ и число a. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, если $x_n = \dfrac{2n-3}{3n-2}, \quad a = \dfrac{2}{3}$.

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{1-2n^2}{n^2+3} = -2; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \frac{1-2n^2}{n^2+3} \neq -1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{5n+2} - \sqrt[3]{8n^3+5}}{\sqrt[4]{n+7} - n}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1}\right)^{-n^2}.$$

5. Последовательность x_n задана условиями

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right), \quad x_1 = 2, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Пусть $x_n \to -\infty$ и $y_n \to b > 0$ при $n \to \infty$. Доказать, что $x_n y_n \to -\infty$ при $n \to \infty$.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению sup и inf найденные значения, если

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0; \qquad \text{б) } \lim_{x\to-0} f(x) = -\infty;$$

$$\text{в) } f(x) \underset{x\to 1-0}{\not\to} 2; \qquad \text{г) } \lim_{x\to+\infty} f(x) \neq +\infty.$$

9. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, если

$$f(x) = 2x^2 + 2, \quad a = 2, \quad A = 10.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{x\to 0}\frac{3x-2}{2x-3}=\frac{2}{3}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty}\frac{3x-4}{x^2+4}=0;$$

$$\text{в) } \lim_{x\to -2}\frac{2x-1}{x^2-4}=\infty; \qquad \text{г) } \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4}{3x-1}=\infty.$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x\to 1}\frac{x^4+3x^3-x^2-3x}{x^4+2x^3-2x^2+2x-3}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x^3+1}\sqrt[3]{1+3x^2}-1}{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1+x}};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to\infty} x[\sin\ln(x^2+1)-\sin\ln(x^2-1)]; \qquad \text{г) } \lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\operatorname{ctg} x}.$$

12. Доказать, что $\sqrt{x^4+x^2\sqrt{x^4+1}}=x^2\sqrt{2}+O^*(1/x^2), \quad x\to\infty.$

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}, \quad x>0.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:

$$f(x)=\operatorname{sign}\cos x.$$

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x)=\begin{cases}\cos(\pi x/2), & |x|\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{(x-1)^2}, & |x|>1;\end{cases} \qquad \text{б) } f(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+(x-1)^{2n}+\frac{1}{x^{2n}}}.$$

Вариант 5

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} x_n=-2; \quad \text{б) } \lim_{n\to\infty} x_n=-\infty; \quad \text{в) } x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 1+0; \quad \text{г) } \lim_{n\to\infty} x_n\neq +\infty.$$

2. Дана последовательность x_n, $n=1,2,\ldots$ и число a. Определить для $\varepsilon=0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $N=N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n>N$ выполнено неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$, если $x_n=\dfrac{1+3n}{n+2}, \quad a=3.$

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty}\frac{1-4n}{2+6n}=-\frac{2}{3}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty}\frac{1-4n}{2+6n}\neq -1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 7^n}{2^n + 7^{n-1}}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}.$$

5. Последовательность x_n задана условиями

$$x_{n+1} = 2x_n - x_n^2/2, \quad x_1 = 1, \quad n = 1, 2, \dots \ .$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Пусть $x_n \to a \neq 0$ и $y_n \to 0$ при $n \to \infty$. Доказать, что $x_n/y_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению sup и inf найденные значения, если

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 5}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{x\to+\infty} f(x) = -1; \qquad \text{б) } \lim_{x\to 0} f(x) = \infty;$$

$$\text{в) } f(x) \underset{x\to 1-0}{\not\to} 2-0; \qquad \text{г) } \lim_{x\to 2+0} f(x) \neq +\infty.$$

9. Определить для $\varepsilon = 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001$ число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, если

$$f(x) = 2x^2 - 1, \quad a = 1, \quad A = 1.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{x\to-1} \frac{3x+2}{2x+3} = -1; \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+1}{4x^2-2} = 1;$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 2} \frac{3x+1}{x^2-4} = \infty; \qquad \text{г) } \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-5}{4x+1} = \infty.$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x\to 1} \frac{3x^4 + 5x^3 - 5x^2 + x - 4}{3x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 5x + 2}; \quad \text{б) } \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{\cos x - 1} + x}{\operatorname{tg}(\pi/4 + x)}\right)^{1/(e^x - 1)};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to\pi/2} \frac{\sqrt[4]{\sin} x - \sqrt[3]{\sin} x}{\cos^2 x}; \qquad \text{г) } \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x - \sqrt{x}} - 2\sqrt{x}\right).$$

12. Доказать, что $\ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + 4x\right) = O^*(x), \quad x \to 0.$

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad x \neq 1.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:
$$f(x) = \frac{x-1}{1-e^{(x-1)/x}}.$$

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

а) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1}, & x < -1, \\ \ln(1+x), & -1 < x \leqslant 0, \\ e^{-1/x}, & x > 0; \end{cases}$ б) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2n} + \dfrac{1}{x^{2n}}}.$

Вариант 6

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$; в) $x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 1-0$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq -\infty$.

2. Дана последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ и число a. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, если $x_n = \dfrac{2n+4}{3-2n}$, $\quad a = -1$.

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а)} \lim_{n\to\infty} \frac{1+5n}{2-4n} = -\frac{5}{4}; \qquad \text{б)} \lim_{n\to\infty} \frac{1+5n}{2-4n} \neq -1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а)} \lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^{n+2}}; \qquad \text{б)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+n+1}{2n^2-n+1}\right)^{n^3/(1-n)}.$$

5. Последовательность x_n задана условиями

$$x_{n+1} = \sqrt{12 + x_n}, \quad x_1 = 3, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Пусть $x_n \to \infty$ и $y_n \to b \neq 0$ при $n \to \infty$, причем $b \neq \infty$. Доказать, что $x_n/y_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению sup и inf найденные значения, если
$$f(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

а) $\lim\limits_{x\to -1+0} f(x) = 0;$ б) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty;$

в) $f(x) \underset{x\to 1-0}{\not\to} 2+0;$ г) $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) \neq -\infty.$

9. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x-a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, если

$$f(x) = 2x^2 - 2, \quad a = 2, \quad A = 6.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x-3}{3x-2} = \dfrac{1}{4};$ б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2+4} = \dfrac{1}{2};$

в) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x-1}{x^2-4} = \infty;$ г) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{4x-2} = \infty.$

11. Вычислить пределы

а) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^4+x^3-6x^2-7x-2}{x^4+2x^3-x^2-4x-2};$ б) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt[4]{4x^4+1}}{x};$

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(a+x)+\cos(a-x)-2\cos a}{\ln(1+\sin^2 x)};$ г) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{4\sin^2 x}{\sin^2 2x}\right)^{1/\ln(1+x)}.$

12. Доказать, что $\ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right) = o(\sqrt{x}), \quad x \to 0.$

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:

$$f(x) = \frac{2^{1/x}-1}{2^{1/x}+1}.$$

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

а) $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x < 0, \\ 2-x, & 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ \dfrac{1}{2-x}, & x > 2; \end{cases}$ б) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (x+1)\operatorname{arctg} x^n.$

Вариант 7

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -3;$ б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty;$ в) $x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0;$ г) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq \infty.$

2. Дана последовательность x_n, $n = 1, 2, \dots$ и число a. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, если $x_n = \dfrac{3-3n}{2n+5}$, $\quad a = -\dfrac{3}{2}$.

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{3+6n}{1-2n} = -3; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \frac{3+6n}{1-2n} \neq -2.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n(n^5+9)} - \sqrt{(n^4-1)(n^2+5)}}{n^2+1}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n^2+2n+1}{4n^2+4n-1}\right)^{1-2n}.$$

5. Последовательность x_n задана условиями

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{6}{x_n}\right), \quad x_1 = 2, \quad n = 1, 2, \dots\ .$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ и в некоторой проколотой окрестности точки a $|\phi(x)| \geqslant m > 0$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)\phi(x) = \infty$.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению sup и inf найденные значения, если

$$f(x) = \frac{1}{x^2-9}, \quad x \in (-3, 3).$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{x\to -1-0} f(x) = 1; \qquad \text{б) } \lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty;$$
$$\text{в) } f(x) \underset{x\to+\infty}{\not\to} 3; \qquad \text{г) } \lim_{x\to 2-0} f(x) \neq +\infty.$$

9. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, если

$$f(x) = 3x^2 + 1, \quad a = 1, \quad A = 4.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{x\to -1} \frac{2x-3}{3x+2} = 5; \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-4}{x^2+1} = 2;$$
$$\text{в) } \lim_{x\to 0} \frac{2x+1}{x^2} = \infty; \qquad \text{г) } \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4}{4x+4} = \infty.$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x\to -1} \frac{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}{2x^4-x^3-6x^2-x+2}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{a+x} - \sqrt[n]{a-x}}{x}, \ (a > 0);$$

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x - 3\arcsin 4x}{\sin 5x - 6\operatorname{arctg} 7x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+\cos 3x + \sin x}{1+e^{2x}}\right)^{\operatorname{ctg} x}$.

12. Доказать, что $e^{\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+x}}} = o(e^{2x}), \quad x \to +\infty.$

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции
$$f(x) = \cos^2 x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:
$$f(x) = \frac{1}{1+2^{1/(x+1)}}.$$

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

а) $f(x) = \begin{cases} \ln|x|, & x < 0, \\ x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^2+1, & x > 1; \end{cases}$ б) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{nx}+x}{xe^{nx}+1}$.

Вариант 8

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1/2$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$; в) $x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0+$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq +\infty$.

2. Дана последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ и число a. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, если $x_n = \dfrac{1+5n}{1-2n}$, $\quad a = -\dfrac{5}{2}$.

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4-7n}{3+5n} = -\dfrac{7}{5}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4-7n}{3+5n} \neq -2$.

4. Вычислить пределы

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{(n+1)^3} - \sqrt{n(n-1)(n+3)}}{\sqrt{n}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2+2n+3}{3n^2+2n+1}\right)^{\frac{n^3+2}{n+1}}$.

5. Последовательность x_n задана условиями
$$x_{n+1} = \sqrt{20 + x_n}, \quad x_1 = 4, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to a} \phi(x) = A \neq 0$. Доказать, что
$$\lim_{x\to a} f(x)\phi(x) = \infty.$$

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению sup и inf найденные значения, если
$$f(x) = \frac{2x}{1-x^2}, \quad x \in (0,1).$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

а) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -1$; б) $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = -\infty$;

в) $f(x) \underset{x\to+\infty}{\not\to} 3+0$; г) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq +\infty$.

9. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x-a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, если
$$f(x) = 3x^2 - 2, \quad a = 2, \quad A = 10.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x+2}{2x-3} = -\dfrac{2}{3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+1}{3x^2-4} = \dfrac{2}{3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x-1}{x^2} = \infty$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-7}{4x-5} = \infty$.

11. Вычислить пределы

а) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^5+4x^4+3x^3+x^2+4x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[k]{x}-1}$, $n, k \in \mathbb{N}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sin(\sqrt{2x^2-3x-5} - \sqrt{1+x})}{\ln(x-1) - \ln(x+1) + \ln 2}$; г) $\lim\limits_{x\to +0} (1+x)^{\ln x}$.

12. Доказать, что $e^{x^2} - \cos x = O^*(\sin^2 x)$, $\quad x \to 0$.

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции
$$f(x) = \sin^2 x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род: $f(x) = \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$.

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

а) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x < 0, \\ x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ (x-2)^2, & x > 1; \end{cases}$ б) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (x+1)\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{x^{2n}+1}$.

Вариант 9

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -1/2$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$; в) $x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0-$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq -\infty$.

2. Дана последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ и число a. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, если $x_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$, $\quad a = \dfrac{1}{2}$.

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{2+3n}{1-8n} = -\frac{3}{8}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \frac{2+3n}{1-8n} \neq -1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} n^2 \left(\sqrt{n(n^4-1)} - \sqrt{n^5-8}\right); \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-5n+6}{n^2+6n-3}\right)^{n^2+7}.$$

5. Последовательность x_n задана условиями

$$x_{n+1} = \frac{1}{4} + x_n^2, \quad x_1 = 0, \quad n = 1, 2, \ldots \ .$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to a} \phi(x) = A \neq 0$, причем $A \neq \infty$. Доказать, что

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \infty.$$

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению sup и inf найденные значения, если

$$f(x) = \frac{2x}{1-x^2}, \quad x \in (-1, 0).$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1; \qquad \text{б) } \lim_{x\to 1-0} f(x) = +\infty;$$
$$\text{в) } f(x) \underset{x\to+\infty}{\not\to} 3-0; \qquad \text{г) } \lim_{x\to 2-0} f(x) \neq -\infty.$$

9. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x-a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, если

$$f(x) = 3x^2 - 1, \quad a = -1, \quad A = 2.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{x\to 1}\frac{2x+3}{3x+2}=1; \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4}{2x^2-1}=\frac{3}{2};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 0}\frac{3x+1}{x^2}=\infty; \qquad \text{г) } \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{4x-1}=\infty.$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x\to 2}\frac{x^5-6x^4+13x^3-14x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{-\sin^2 x}}{1+\ln\cos x}\right)^{1/\sin^2 2x};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg} x^2}; \qquad \text{г) } \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[n]{(1+x^2)(2+x^2)\cdot\ldots\cdot(n+x^2)}-x^2\right).$$

12. Доказать, что $\ln\cos\dfrac{\pi}{x}=O^*\left(\dfrac{1}{x^2}\right), \quad x\to\infty.$

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x)=x\cos x, \quad x\in\mathbb{R}.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род: $f(x)=\dfrac{\operatorname{ctg} 3x}{\operatorname{ctg} x}$.

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x)=\begin{cases}(x+1)^2, & x<-1,\\ \sqrt{1-x^2}, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 1/(1-x), & x>1;\end{cases} \qquad \text{б) } f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{nx}+x}{e^{nx}+1}.$$

Вариант 10

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty}x_n=-1/3; \quad \text{б) } \lim_{n\to\infty}x_n=+\infty; \quad \text{в) } x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} -1; \quad \text{г) } \lim_{n\to\infty}x_n\neq\infty.$$

2. Дана последовательность x_n, $n=1,2,\ldots$ и число a. Определить для $\varepsilon=0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $N=N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n>N$ выполнено неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$, если $x_n=\dfrac{2-3n}{4n-4}, \quad a=-\dfrac{3}{4}$.

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty}\frac{5+6n}{2+n}=6; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty}\frac{5+6n}{2+n}\neq 5.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+\sqrt{n}-1}{2+7+\cdots+(5n-3)}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^3+n-1}{2n^3+n^2+n}\right)^{3n-1}.$$

5. Последовательность x_n задана условиями

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right), \quad x_1 = 3, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, а функция $\phi(x)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a. Доказать, что $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+\phi(x)\big) = \infty$.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению sup и inf найденные значения, если

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, \quad x \in (0, +\infty).$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{x\to+\infty} f(x) = -2; \qquad \text{б) } \lim_{x\to 1} f(x) = +\infty;$$

$$\text{в) } f(x) \underset{x\to-\infty}{\not\to} 0; \qquad \text{г) } \lim_{x\to 2} f(x) \neq -\infty.$$

9. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x-a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, если

$$f(x) = 3x^2 - 4, \quad a = -2, \quad A = 8.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{x\to 0} \frac{3x-2}{2x+3} = -\frac{2}{3}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{3x^2+1} = 0;$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 0} \frac{3x-1}{x^2} = \infty; \qquad \text{г) } \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+1}{2x-1} = \infty.$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x\to 1} \frac{2x^4-5x^3+4x^2-2x+1}{x^5-2x^3+3x^2+x-3}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt[n]{1+ax}\,\sqrt[n]{1+bx}-1};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{sh} 3x} - e^{\operatorname{sh} x}}{\operatorname{th} x}; \qquad \text{г) } \lim_{x\to 1} \left(\frac{1+\sin(\pi x)}{1+\operatorname{tg}(\pi x)}\right)^{\cos(x-1)/\cos(\pi x/2)}.$$

12. Доказать, что $\ln(1+3x+x^2) = -\ln(1-3x+x^2) + O^*(x^2), \quad x \to 0.$

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции
$$f(x) = x \operatorname{tg} x, \quad x \neq \pi/2 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:
$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{1 - 2x - 3x^2}.$$

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

а) $f(x) = \begin{cases} (x+1)/x, & x < -1, \\ 1 - x^2, & |x| \leqslant 1, \\ x - 1, & x > 1; \end{cases}$ б) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (1 - x^2) \operatorname{arctg} \dfrac{x^{2n} + 1}{x^{2n} - 1}.$

Вариант 11

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1/3$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$; в) $x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} -1{+}0$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq +\infty$.

2. Дана последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ и число a. Определить для $\varepsilon = 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, если $x_n = \dfrac{n+4}{1-4n}$, $\quad a = -\dfrac{1}{4}$.

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что
$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{3n-2}{2n-1} = \frac{3}{2}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \frac{3n-2}{2n-1} \neq 1.$$

4. Вычислить пределы
$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+5} - \sqrt{3n^4+2}}{1 + 3 + \cdots + (2n-1)}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^3 + 3n^2 - 1}{2n^3 + 3n + 1} \right)^{2-3n}.$$

5. Последовательность x_n задана условиями
$$x_{n+1} = x_n^2 + 3x_n + 1, \quad x_1 = -\frac{5}{4}, \quad n = 1, 2, \ldots \ .$$
Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, достигает своей точной нижней грани.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению sup и inf найденные значения, если

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, \quad x \in (-\infty, 0).$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{x\to 2+0} f(x) = -1; \qquad \text{б) } \lim_{x\to -1-0} f(x) = -\infty;$$

$$\text{в) } f(x) \underset{x\to-\infty}{\not\to} 0-; \qquad \text{г) } \lim_{x\to 2} f(x) \neq \infty.$$

9. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x-a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, если

$$f(x) = 4x^2 + 5, \quad a = -1, \quad A = 9.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{x\to 2} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{3}{5}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2+2} = 1;$$

$$\text{в) } \lim_{x\to -3} \frac{1-x^2}{x+3} = \infty; \qquad \text{г) } \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-2}{2x+1} = \infty.$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4}{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{1+2x} - 1}{\sqrt[4]{1+x} - \sqrt{1-x}};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 0} \frac{\ln \operatorname{ch} 5x}{x^2}; \qquad \text{г) } \lim_{x\to +0} x^{1/\ln \operatorname{sh} x}.$$

12. Доказать, что $1 + e^{-x^2} = 2\cos x + o(x^2), \quad x \to 0.$

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = x \operatorname{ctg} x, \quad x \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род: $f(x) = \dfrac{1}{\ln|x-1|}$.

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 1 - x^3, & x < 1, \\ (x-1)^3, & 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ 4 - x, & x > 3; \end{cases} \qquad \text{б) } f(x) = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{x + 1/n} - \sqrt[3]{x}\right).$$

Вариант 12

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} x_n = 1/4; \quad \text{б) } \lim_{n\to\infty} x_n = \infty; \quad \text{в) } x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} -1-0; \quad \text{г) } \lim_{n\to\infty} x_n \neq -\infty.$$

2. Дана последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ и число a. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, если $x_n = \dfrac{2n+3}{3n+2}, \quad a = \dfrac{2}{3}.$

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{4n-1}{2n+1} = 2; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \frac{4n-1}{2n+1} \neq 1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{\sqrt{9n^4+1}}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{7n^2+11n+15}{7n^2+18n-15}\right)^{2-n}.$$

5. Последовательность x_n задана условиями

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{6 + x_n}, \quad x_1 = 1, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что если $y = f(x)$ — непрерывная функция, то функция $y = |f(x)|$ также непрерывна.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению sup и inf найденные значения, если

$$f(x) = \frac{1-x^2}{4-x^2}, \quad x \in (1, 2).$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{x\to 2-0} f(x) = -2; \qquad \text{б) } \lim_{x\to -1} f(x) = -\infty;$$

$$\text{в) } f(x) \underset{x\to-\infty}{\not\to} 0+; \qquad \text{г) } \lim_{x\to 1+0} f(x) \neq +\infty.$$

9. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, если

$$f(x) = 4x^2 - 5, \quad a = 1, \quad A = -1.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{x\to 1} \frac{2x+1}{x+1} = \frac{3}{2}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty} \frac{1-x}{2x+1} = -\frac{1}{2};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to -1} \frac{4x-3}{2x+2} = \infty; \qquad \text{г) } \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x+1} = \infty.$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x\to -1} \frac{x^3+4x^2+6x+3}{x^3+2x^2-x-2}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x} - 2\sqrt[4]{1-x}}{x};$$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2 - \ln\operatorname{ch} x^2)$;   г) $\lim\limits_{x\to+0}|\ln x|^{2x}$.

12. Доказать, что $e^{\sqrt[3]{x^3+3x^2+1}} = o(e^{2x})$, $x \to +\infty$.

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = 1/\sqrt[3]{x^2}, \quad x \neq 0.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род: $f(x) = \dfrac{x^2}{\sin^2 x}$.

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

а) $f(x) = \begin{cases} -1/x, & x < 0, \\ x^2 + 1, & 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ x + 3, & x > 2; \end{cases}$ б) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(x^n + x^{2n})^{1/n}$, $x \geqslant 0$.

Вариант 13

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -1/4$;   б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$;   в) $x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} -2$;   г) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq \infty$.

2. Дана последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ и число a. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, если $x_n = \dfrac{2-n}{3n-1}$, $a = -\dfrac{1}{3}$.

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty}\frac{2n-5}{3n+1} = \frac{2}{3}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty}\frac{2n-5}{3n+1} \neq 1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+5+9+\cdots+(4n-3)}{n+1} - \frac{4n+1}{2}\right); \quad \text{б) } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-n+1}{2n^2+n+1}\right)^{n^2}.$$

5. Последовательность x_n задана условиями

$$x_{n+1} = \frac{1}{4} + x_n^2, \quad x_1 = -\frac{1}{4}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $x \geqslant a$ и существует конечный $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, то функция $f(x)$ ограничена на данном промежутке.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани последовательности и проверить по определению sup и inf найденные значения, если
$$x_n = \frac{n^2}{n^2+4}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:
$$\text{а) } \lim_{x\to 2} f(x) = 2; \qquad \text{б) } \lim_{x\to -1+0} f(x) = +\infty;$$
$$\text{в) } f(x) \underset{x\to\infty}{\not\to} -1; \qquad \text{г) } \lim_{x\to 1+0} f(x) \neq -\infty.$$

9. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x-a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, если
$$f(x) = 4x^2+1, \quad a = -1, \quad A = 5.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что
$$\text{а) } \lim_{x\to 0} \frac{2x+1}{x+1} = 1; \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{1-x} = -2;$$
$$\text{в) } \lim_{x\to 1} \frac{3x+2}{x-1} = \infty; \qquad \text{г) } \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2}{x+1} = \infty.$$

11. Вычислить пределы
$$\text{а) } \lim_{x\to -1} \frac{2x^3+9x^2+12x+5}{x^3+4x^2+5x+2}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{5x^3-x}-2x}{\sqrt[5]{x^2}-1};$$
$$\text{в) } \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right); \qquad \text{г) } \lim_{x\to 0}\left(\frac{xe^x+2}{3+\sin x-\cos x}\right)^{\dfrac{\cos x}{(\sin 2x+\sin x)}}.$$

12. Доказать, что $\arccos \dfrac{x^2}{x^2+1} = O^*\left(\dfrac{1}{x}\right), \quad x \to +\infty.$

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции
$$f(x) = |x|^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род: $f(x) = \dfrac{1+\cos x}{x \sin \dfrac{1}{x}}$.

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций
$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} x+3, & x < -1, \\ 1-x^3, & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ (x-1)^3, & x > 1; \end{cases} \qquad \text{б) } f(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}}.$$

Вариант 14

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1/5$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$; в) $x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} -2+0$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq +\infty$.

2. Дана последовательность x_n, $n = 1, 2, \dots$ и число a. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, если $x_n = \dfrac{4-3n}{3n+4}$, $\quad a = -1$.

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{1-2n} = -\frac{3}{2}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{1-2n} \neq -1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)! - (n+2)!}{(n+3)!}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2+n+2}{3n^2+n-2}\right)^{n^2+n-1}.$$

5. Последовательность x_n задана условиями

$$x_{n+1} = \sqrt{12 + x_n}, \quad x_1 = 5, \quad n = 1, 2, \dots\ .$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что если функция $f(x)$ не ограничена на отрезке $[a, b]$, то в этом отрезке существует точка, в каждой окрестности которой функция $f(x)$ не ограничена.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению sup и inf найденные значения, если

$$f(x) = \frac{x}{1+x}, \quad x \in (0, +\infty).$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0; \qquad \text{б) } \lim_{x\to 2+0} f(x) = -\infty;$$
$$\text{в) } f(x) \underset{x\to\infty}{\not\to} -1+0; \qquad \text{г) } \lim_{x\to 1-0} f(x) \neq +\infty.$$

9. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, если

$$f(x) = 4x^2 - 1, \quad a = 1, \quad A = 3.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{x\to 0}\frac{x+1}{2x+1}=1; \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty}\frac{1-2x}{1+x}=-2;$$

$$\text{в) } \lim_{x\to -1/2}\frac{x+2}{2x+1}=\infty; \qquad \text{г) } \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x+1}=\infty.$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x\to -2}\frac{2x^3+8x^2+8x}{x^3+3x^2-4}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\right);$$

$$\text{в) } \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\sqrt[3]{1+2x^{-1}+x^{-3}}-2\sqrt[3]{1+x^{-1}+x^{-3}}+1\right); \quad \text{г) } \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} 3x}\right)^{1/x^2}.$$

12. Доказать, что $x^{\ln x}=o(e^x)$, $\quad x\to+\infty$.

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x)=x\sin x, \quad x\in\mathbb{R}.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род: $f(x)=\dfrac{x^2}{\sin x}$.

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x)=\begin{cases}1/x-1, & x<0,\\ 1-x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ (x-1)^2, & x>1;\end{cases} \qquad \text{б) } f(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+3(\sqrt{x})^n+x^n}.$$

Вариант 15

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty}x_n=-1/5; \quad \text{б) } \lim_{n\to\infty}x_n=\infty; \quad \text{в) } x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} -2-0; \quad \text{г) } \lim_{n\to\infty}x_n\neq-\infty.$$

2. Дана последовательность x_n, $n=1,2,\ldots$ и число a. Определить для $\varepsilon=0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $N=N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n>N$ выполнено неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$, если $x_n=\dfrac{2+3n}{5-2n}$, $\quad a=-\dfrac{3}{2}$.

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{5n+1}=\frac{3}{5}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{5n+1}\neq 1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[6]{n}+\sqrt[5]{32n^{10}+1}}{(n+\sqrt[4]{n})\sqrt[3]{n^3+2n}}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-n+3}{2n^2+n+3}\right)^{1-n^2}.$$

5. Последовательность x_n задана условиями

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{6}{x_n}\right), \quad x_1=3, \quad n=1,2,\ldots\ .$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — периодические функции с периодом $T>0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-g(x)\big)=0$. Доказать, что $f(x)=g(x)$.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению sup и inf найденные значения, если

$$f(x)=\frac{x+1}{x}, \quad x\in(0,+\infty).$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{x\to-\infty} f(x)=-2; \qquad \text{б) } \lim_{x\to2-0} f(x)=+\infty;$$

$$\text{в) } f(x) \underset{x\to\infty}{\not\to} -1-0; \qquad \text{г) } \lim_{x\to1-0} f(x)\neq-\infty.$$

9. Определить для $\varepsilon=0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $\delta>0$, при котором из неравенств $0<|x-a|<\delta$ следует неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$, если

$$f(x)=-x^2+2, \quad a=1, \quad A=1.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{x\to1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{2}{3}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty}\frac{1+x}{1-2x}=-\frac{1}{2};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to3}\frac{2x-1}{x-3}=\infty; \qquad \text{г) } \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3}{x+1}=\infty.$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x\to-1}\frac{2x^3+3x^2+x}{x^4+2x+1}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+\sqrt[3]{x^3-x^2+1}-2x\right);$$

$$\text{в) } \lim_{x\to0}\frac{\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx-n}{\sin x^2}; \qquad \text{г) } \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{\arcsin x}\right)^{1/x^2}.$$

12. Доказать, что $\cos x - e^{-x^2/2}=o(x^3), \quad x\to0.$

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род: $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$.

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 1/|x|, & x < 0, \\ 1-x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ (x-2)^2, & x > 1; \end{cases} \qquad \text{б) } f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1+x^n+x^{2n}}{1+3x^n+x^{2n}}.$$

Вариант 16

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} x_n = -2/3; \quad \text{б) } \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty; \quad \text{в) } x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 1/2; \quad \text{г) } \lim_{n\to\infty} x_n \neq \infty.$$

2. Дана последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ и число a. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, если $x_n = \dfrac{1-2n}{2-5n}$, $\quad a = \dfrac{2}{5}$.

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{5n+1}{10n-3} = \frac{1}{2}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \frac{5n+1}{10n-3} \neq 1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!-(2n+2)!}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+7n-1}{2n^2+7n+2}\right)^{1+2+\cdots+n}.$$

5. Последовательность x_n задана условиями

$$x_{n+1} = \sqrt{20+x_n}, \quad x_1 = 10, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Пусть $a_n \to a$, $b_n \to b$ при $n \to \infty$. Доказать, что при $n \to \infty$

$$\min(a_n, b_n) \to \min(a, b).$$

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению sup и inf найденные значения, если

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2}, \quad x \in (0, +\infty).$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{x\to -2+0} f(x) = 3; \qquad \text{б) } \lim_{x\to 2} f(x) = \infty;$$

$$\text{в) } f(x) \underset{x\to -1-0}{\not\to} 2; \qquad \text{г) } \lim_{x\to\infty} f(x) \neq +\infty.$$

9. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, если

$$f(x) = -x^2 - 2, \quad a = 1, \quad A = -3.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{x\to -1} \frac{2x+1}{x+2} = -1; \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{2x-1} = \frac{1}{2};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 0} \frac{3x+1}{2x} = \infty; \qquad \text{г) } \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3}{x-1} = \infty.$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x\to 2} \frac{x^4 - x^3 - 9x^2 + 16x - 4}{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - \sqrt[k]{1+bx}}{x};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx}{\sqrt{1+2x} - 1}; \qquad \text{г) } \lim_{x\to +0} (x^x - 1)\ln x.$$

12. Доказать, что $e - (1+x)^{1/x} = O^*(x), \quad x \to 0.$

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \frac{e^x}{x}, \quad x \neq 0.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род: $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$.

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 1/x^2, & x < 0, \\ \sqrt{x}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 - x, & x > 1; \end{cases} \qquad \text{б) } f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{nx} - 1}{e^{nx} + 1}.$$

Вариант 17

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} x_n = 2/3; \quad \text{б) } \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty; \quad \text{в) } x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 1/2+0; \quad \text{г) } \lim_{n\to\infty} x_n \neq +\infty.$$

2. Дана последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ и число a. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, если $x_n = \dfrac{n-1}{2n+1}, \quad a = \dfrac{1}{2}.$

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а)} \lim_{n\to\infty} \frac{2-2n}{4n+3} = -\frac{1}{2}; \qquad \text{б)} \lim_{n\to\infty} \frac{2-2n}{4n+3} \neq -1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а)} \lim_{n\to\infty} \frac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!(n-1)}; \qquad \text{б)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+5n+4}{n^2+5n-4}\right)^{\sqrt{n^4+n+1}}.$$

5. Последовательность x_n задана условиями

$$x_{n+1} = 2x_n - x_n^2/2, \quad x_1 = 3, \quad n = 1, 2, \dots \ .$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Пусть $a_n \to a$, $b_n \to b$ при $n \to \infty$. Доказать, что при $n \to \infty$

$$\max(a_n, b_n) \to \max(a, b).$$

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению sup и inf найденные значения, если

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а)} \lim_{x\to-2-0} f(x) = -3; \qquad \text{б)} \lim_{x\to-3+0} f(x) = -\infty;$$

$$\text{в)} f(x) \underset{x\to-1-0}{\not\to} 2-0; \qquad \text{г)} \lim_{x\to1} f(x) \neq +\infty.$$

9. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x-a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, если

$$f(x) = -x^2 + 4, \quad a = 3, \quad A = -5.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\text{а)} \lim_{x\to-1} \frac{x-2}{2x+1} = 3; \qquad \text{б)} \lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x-1} = 2;$$

$$\text{в)} \lim_{x\to2} \frac{4x+1}{x-2} = \infty; \qquad \text{г)} \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3}{x-2} = \infty.$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а)} \lim_{x\to-2} \frac{x^4+5x^3+10x^2+12x+8}{x^3+7x^2+16x+12}; \qquad \text{б)} \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[5]{x^5+2}}{x};$$

$$\text{в)} \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \dots + \operatorname{tg} nx}{\operatorname{arctg} x}; \qquad \text{г)} \lim_{x\to+0} x^{x^x-1}.$$

12. Доказать, что $\sin(\sin x) - \operatorname{tg} x = o(x^2), \quad x \to 0.$

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции
$$f(x) = \sqrt{x}\sin x, \quad x > 0.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род: $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а)}\ f(x) = \begin{cases} |x|, & x < 0, \\ \ln x, & 0 < x < 1, \\ \ln(2-x), & 1 \leqslant x < 2, \\ \dfrac{1}{x-2}, & x > 2; \end{cases} \qquad \text{б)}\ f(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}.$$

Вариант 18

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3/4$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$; в) $x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 1/2 - 0$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq -\infty$.

2. Дана последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ и число a. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, если $x_n = \dfrac{1+3n}{3-4n}, \quad a = -\dfrac{3}{4}$.

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-1}{4n^2+1} = \frac{3}{4}; \qquad \text{б)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-1}{4n^2+1} \neq 1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{1-2+3-4+\cdots+(2n-1)-2n}{\sqrt[3]{n^3+2n+2}}; \quad \text{б)}\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^3+3n+1}{2n^3+3n^2-1}\right)^{\sqrt{n^2+1}}.$$

5. Последовательность x_n задана условиями

$$x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}, \quad x_1 = 0, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, то функция $\varphi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ также непрерывна.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению sup и inf найденные значения, если

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2}, \quad x \neq 0.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{x\to-2} f(x) = -1; \qquad \text{б) } \lim_{x\to-3-0} f(x) = +\infty;$$

$$\text{в) } f(x) \underset{x\to-2+0}{\not\to} 2+0; \qquad \text{г) } \lim_{x\to\infty} f(x) \neq -\infty.$$

9. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x-a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, если

$$f(x) = -x^2 + 3, \quad a = 2, \quad A = -1.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{x\to0} \frac{2x+1}{x+2} = \frac{1}{2}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{3x+2} = 1;$$

$$\text{в) } \lim_{x\to1/2} \frac{x+1}{2x-1} = \infty; \qquad \text{г) } \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3}{x-1} = \infty.$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x\to-3} \frac{x^4+9x^3+30x^2+45x+27}{x^3+8x^2+21x+18}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[5]{x^5+2}}{x};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to\pi} \frac{1+\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\pi x^2}-\pi}; \qquad \text{г) } \lim_{x\to+\infty} (\operatorname{th} x)^{\operatorname{sh} 2x}.$$

12. Доказать, что $(\cos x)^{2\sin x} - 1 = O^*(x^3), \quad x \to 0.$

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = 2x^2 - 2x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род: $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$.

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leqslant 1, \\ 2-|x|, & |x| > 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \lim_{n\to\infty} n^2 \left(\sqrt[4]{x+\frac{1}{n^2}} - \sqrt[4]{x-\frac{1}{n^2}} \right).$$

Вариант 19

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} x_n = -3/4; \quad \text{б) } \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty; \quad \text{в) } x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 1/3; \quad \text{г) } \lim_{n\to\infty} x_n \neq \infty.$$

2. Дана последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ и число a. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, если $x_n = \dfrac{n-4}{1+4n}$, $\quad a = \dfrac{1}{4}$.

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{5-2n} = -\frac{3}{2}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{5-2n} \neq -2.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{1-3+5-7+\cdots+(4n-3)-(4n-1)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+n+1}}; \quad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-7n}{n^2+7}\right)^{n-1}.$$

5. Последовательность x_n задана условиями

$$x_{n+1} = \frac{4}{3}x_n - x_n^2, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots\ .$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что последовательность $x_n = \sin\dfrac{2\pi n}{3}$ расходится.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани последовательности и проверить по определению sup и inf найденные значения, если

$$x_n = \frac{n^2+4}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1; \qquad \text{б) } \lim_{x\to-3} f(x) = -\infty;$$
$$\text{в) } f(x) \underset{x\to-2+0}{\not\to} -1; \qquad \text{г) } \lim_{x\to1} f(x) \neq \infty.$$

9. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x-a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, если

$$f(x) = -2x^2 + 1, \quad a = 1, \quad A = -1.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{x\to 0}\frac{x+2}{2x+1}=2; \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{x+2}=3;$$
$$\text{в) } \lim_{x\to 2}\frac{x+3}{2-x}=\infty; \qquad \text{г) } \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+4}{x-2}=\infty.$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x\to 1}\frac{x^4+3x^3-5x^2-x+2}{x^3-2x^2+3x-2}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to 1}\frac{x^\alpha-x^\beta}{\sqrt[5]{x}-1};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to \pi}\frac{e^{\sin x}-e^{2\sin x}}{\sqrt[3]{\pi x^2}-\pi}; \qquad \text{г) } \lim_{x\to 1-0}\frac{\arccos x}{\sqrt{-\ln x}}.$$

12. Доказать, что $e^{\sqrt[3]{x^3+3x^2+1}}=O^*(e^x), \quad x\to+\infty.$

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x)=\sqrt{x}, \quad x\geqslant 0.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род: $f(x)=\dfrac{x}{\cos x}$.

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x)=\begin{cases}2^{-x}, & x<0,\\ x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & x>1;\end{cases} \qquad \text{б) } f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2e^{nx}+x}{e^{nx}+1}.$$

Вариант 20

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=4/5$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$; в) $x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 1/3+0$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq+\infty$.

2. Дана последовательность x_n, $n=1,2,\ldots$ и число a. Определить для $\varepsilon=0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $N=N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n>N$ выполнено неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$, если $x_n=\dfrac{2-3n}{2n+3}, \quad a=-\dfrac{3}{2}$.

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty}\frac{4+6n}{5-2n}=-3; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty}\frac{4+6n}{5-2n}\neq-2.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{3^n - 2^n}{3^{n-1} + 2^n}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 - n + 2}{n^2 + n + 2}\right)^{\dfrac{n^2}{\sqrt{n^2+2}}}.$$

5. Последовательность x_n задана условиями

$$x_{n+1} = x_n^2 + 3x_n + 1, \quad x_1 = -\frac{3}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots \ .$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что последовательность $x_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{(1-(-1)^n)n}$ расходится.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани последовательности и проверить по определению sup и inf найденные значения, если

$$x_n = \frac{2n^3 + 1}{n^3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -3; \qquad \text{б) } \lim_{x\to-2+0} f(x) = +\infty;$$

$$\text{в) } f(x) \underset{x\to-\infty}{\not\to} -1-0; \qquad \text{г) } \lim_{x\to1} f(x) \neq -\infty.$$

9. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, если

$$f(x) = -2x^2 - 2, \quad a = -1, \quad A = -4.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{x\to0} \frac{x+1}{3x+2} = \frac{1}{2}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x+1} = 2;$$

$$\text{в) } \lim_{x\to-2} \frac{2x+1}{x+2} = \infty; \qquad \text{г) } \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4}{2x+1} = \infty.$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x\to-1} \frac{2x^4 + x^3 + 2x^2 - 3x - 6}{x^4 + 4x^2 - 5}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+4} - \sqrt[4]{4x^4+1}}{x};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to e} \frac{\ln\ln x}{2x - 2e}; \qquad \text{г) } \lim_{x\to0} \big(\cos(\sin x)\big)^{1/\arcsin^2 x}.$$

12. Доказать, что $\pi - \operatorname{arcctg} x = O^*(1/x), \quad x \to -\infty$.

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:
$$f(x) = \frac{1/(x+1) - 1/(x+2)}{1/x - 1/(x+1)}.$$

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

а) $f(x) = \begin{cases} \cos \pi x, & |x| \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{|x|-1}, & |x| > 1; \end{cases}$ б) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (1+|x|)\dfrac{e^{nx} - e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}}.$

Вариант 21

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -4/5$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$; в) $x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 1/3-0$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq -\infty$.

2. Дана последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ и число a. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, если $x_n = \dfrac{4-n}{1-3n}$, $\quad a = \dfrac{1}{3}$.

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{2-2n}{1+5n} = -\frac{2}{5}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \frac{2-2n}{1+5n} \neq 0.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{(3-4n)^2}{(n-3)^3 - (n+3)^3}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^3 + 2n^2 - 1}{3n^3 - 2n^2 + 1}\right)^{2-3n}.$$

5. Последовательность x_n задана условиями

$$x_{n+1} = \frac{4}{3}x_n - x_n^2, \quad x_1 = \frac{1}{6}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что последовательность $x_n = 5^{(-1)^n n}$ расходится.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению sup и inf найденные значения, если
$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}, \quad x \in (-2, 2).$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{x\to 3+0} f(x)=1; \qquad \text{б) } \lim_{x\to -2-0} f(x)=-\infty;$$

$$\text{в) } f(x) \underset{x\to -2+0}{\not\to} -1+0; \qquad \text{г) } \lim_{x\to\infty} f(x)\neq\infty.$$

9. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x-a| < \delta$ следует неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$, если

$$f(x) = -2x^2+4, \quad a=1, \quad A=2.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{2x+1}=1; \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty}\frac{1-2x}{3+2x}=-1;$$

$$\text{в) } \lim_{x\to -1}\frac{2x+1}{x+1}=\infty; \qquad \text{г) } \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{2x-1}=\infty.$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x\to 1}\frac{4x^4-4x^3-3x^2+2x+1}{x^3+2x^2-x-2}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-1}-\sqrt[3]{x+5}};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}; \qquad \text{г) } \lim_{x\to\infty} x^2\left(4^{1/x}-4^{1/(x+1)}\right).$$

12. Доказать, что $\sqrt{x^2+1}-\sqrt[5]{x^5+2}=o(x), \quad x\to+\infty.$

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x)=\sqrt[4]{x}, \quad x\geqslant 0.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:

$$f(x)=\frac{1/x^2-1/(x+1)^2}{1/(x-1)^2-1/x^2}.$$

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x)=\begin{cases} e^x, & x\leqslant 0,\\ e^{1/x}, & x>0;\end{cases} \qquad \text{б) } f(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}+\frac{1}{(x-1)^{2n}}}.$$

Вариант 22

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} x_n=-3/2; \quad \text{б) } \lim_{n\to\infty} x_n=+\infty; \quad \text{в) } x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 2/3; \quad \text{г) } \lim_{n\to\infty} x_n\neq\infty.$$

2. Дана последовательность x_n, $n=1,2,\ldots$ и число a. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $N=N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n>N$ выполнено неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$, если $x_n=\dfrac{3n+4}{4-3n}, \quad a=-1.$

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{7n+4}{2n+1} = \frac{7}{2}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \frac{7n+4}{2n+1} \neq 1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n(n+5)} - n\right); \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^3-3n+2}{2n^3+3n^2-1}\right)^{n^2/(n+1)}.$$

5. Последовательность x_n задана условиями

$$x_{n+1} = 1 - x_n^2, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots \ .$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что последовательность $x_n = \cos\dfrac{2\pi n}{3}$ расходится.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению sup и inf найденные значения, если

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad x \in (-1, 1).$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{x\to 3-0} f(x) = -1; \qquad \text{б) } \lim_{x\to -2} f(x) = +\infty;$$

$$\text{в) } f(x) \underset{x\to+\infty}{\not\to} 1; \qquad \text{г) } \lim_{x\to -3+0} f(x) \neq -\infty.$$

9. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x-a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, если

$$f(x) = -2x^2 + 3, \quad a = -1, \quad A = 1.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{3x+2} = 0; \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty} \frac{3x+2}{1-3x} = -1;$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 1/2} \frac{3x+1}{2x-1} = \infty; \qquad \text{г) } \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-5}{2x-11} = \infty.$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x\to -1} \frac{(x^3-2x-1)^2}{x^4+2x+1}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to -8} \frac{10 - x - 6\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x^2+6x-8} + \sqrt[3]{x}};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin 3x}; \qquad \text{г) } \lim_{x\to \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}.$$

12. Доказать, что $e^{\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+x}}} = O^*(e^x), \quad x \to +\infty$.

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции
$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:
$$f(x) = \frac{\sin x}{e^{-1/x}+1}.$$

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

а) $f(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x| \leqslant 1, \\ (|x|-1)^2, & |x|>1; \end{cases}$ б) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (x^2-1)\operatorname{arctg}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$.

Вариант 23

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3/2$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$; в) $x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 2/3+0$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq +\infty$.

2. Дана последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ и число a. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, если $x_n = \dfrac{4-2n}{2+3n}, \quad a = -\dfrac{2}{3}$.

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что
$$\text{а) } \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n-2} = \frac{2}{3}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n-2} \neq 1.$$

4. Вычислить пределы
$$\text{а) } \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-\sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^6+2}-n}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+2n^2-n}{n^3-3n+1}\right)^{2-n}.$$

5. Последовательность x_n задана условиями
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), \quad x_1 = 1, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что последовательность $x_n = \sin\dfrac{\pi n}{4}$ расходится.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани последовательности и проверить по определению sup и inf найденные значения, если

$$x_n = \frac{n^3+1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{x\to 3} f(x) = 3; \qquad \text{б) } \lim_{x\to 4+0} f(x) = -\infty;$$

$$\text{в) } f(x) \underset{x\to+\infty}{\not\to} 1-0; \qquad \text{г) } \lim_{x\to -3+0} f(x) \neq +\infty.$$

9. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x-a| < \delta$ следует неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$, если

$$f(x) = -3x^2 - 1, \quad a = -1, \quad A = -4.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{x+1} = \frac{5}{3}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{3x+2} = \frac{1}{3};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to -3}\frac{2x-1}{x+3} = \infty; \qquad \text{г) } \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5}{2x+1} = \infty.$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{x^n};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{\sin 3x - \operatorname{tg} 2x}; \qquad \text{г) } \lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x}-x)^{1/x}.$$

12. Доказать, что $\ln\dfrac{2+x}{1+x} = O^*\left(\dfrac{1}{x}\right), \quad x \to +\infty.$

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \frac{1}{x^3}, \quad x \neq 0.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:

$$f(x) = \frac{1/(x^2-1) - 1/(x^2)}{1/(x^2) - 1/(x^2+1)}.$$

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} (|x|-1)^2, & |x| \leqslant 1, \\ \ln(|x|-1), & |x| > 1; \end{cases} \qquad \text{б) } f(x) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+(2\sin x)^{2n}}.$$

Вариант 24

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 4/3$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$; в) $x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 2/3-0$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq -\infty$.

2. Дана последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ и число a. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, если $x_n = \dfrac{3+2n}{3-4n}$, $\quad a = -\dfrac{1}{2}$.

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-5} = \frac{3}{2}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-5} \neq 1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)^3+(n+4)^3}{(n+3)^4-(n+4)^4}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+4n+1}{2n^2-4n+2}\right)^{\dfrac{2n^2+3}{n+2}}.$$

5. Последовательность x_n задана условиями

$$x_{n+1} = 2x_n - x_n^2, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots\ .$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что последовательность $x_n = \dfrac{n+1}{n} \sin \dfrac{2\pi n}{3}$ расходится.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани последовательности и проверить по определению sup и inf найденные значения, если

$$x_n = \frac{n^3}{2n^3+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

а) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$; б) $\lim\limits_{x\to 4-0} f(x) = +\infty$;

в) $f(x) \underset{x\to+\infty}{\not\to} 1+0$; г) $\lim\limits_{x\to -3-0} f(x) \neq -\infty$.

9. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x-a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, если

$$f(x) = -3x^2 + 5, \quad a = 1, \quad A = 2.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{x\to -2}\frac{x+1}{3x+2}=\frac{1}{4}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{3x-2}=1;$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 1}\frac{x^2}{x-1}=\infty; \qquad \text{г) } \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+2}{2x-1}=\infty.$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x\to -1}\frac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}; \quad \text{б) } \lim_{x\to 0}\frac{(x+\sqrt{x^2+1})^n-(-x+\sqrt{x^2+1})^n}{x};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-5x}}{2\sin x-\operatorname{tg} x}; \quad \text{г) } \lim_{x\to 0}(\cos 6x)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$$

12. Доказать, что $\sqrt{x^2+\sqrt{x^3+\sqrt{x^3}}}=O^*(x), \quad x\to+\infty.$

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x)=\frac{x-1}{x+2}, \quad x\neq -2.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:

$$f(x)=\frac{1}{x-1}e^{-1/(x^2)}.$$

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x)=\frac{2\operatorname{sign}(1-x)}{\operatorname{sign}(x+1)^2(x+1+(x-1)\operatorname{sign} x)}; \quad \text{б) } f(x)=\lim_{t\to+\infty}(1+x)\operatorname{th} tx.$$

Вариант 25

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty}x_n=-4/3; \quad \text{б) } \lim_{n\to\infty}x_n=+\infty; \quad \text{в) } x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 3/2; \quad \text{г) } \lim_{n\to\infty}x_n\neq\infty.$$

2. Дана последовательность x_n, $n=1,2,\ldots$ и число a. Определить для $\varepsilon=0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $N=N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n>N$ выполнено неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$, если $x_n=\dfrac{n+1}{2n-1}, \quad a=\dfrac{1}{2}.$

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty}\frac{4n-3}{2n+1}=2; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty}\frac{4n-3}{2n+1}\neq 1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3}\right); \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+2}{3n^2-1}\right)^{n-2}.$$

5. Последовательность x_n задана условиями

$$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}, \quad x_1=4, \quad n=1,2,\ldots\ .$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что последовательность $x_n=\dfrac{2n+1}{2n+5}\cos\dfrac{2\pi n}{3}$ расходится.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани последовательности и проверить по определению sup и inf найденные значения, если

$$x_n=\frac{n+1}{n^2}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{x\to+\infty} f(x)=2; \qquad \text{б) } \lim_{x\to 4} f(x)=\infty;$$

$$\text{в) } f(x) \underset{x\to-\infty}{\not\to} -2; \qquad \text{г) } \lim_{x\to-3-0} f(x)\neq+\infty.$$

9. Определить для $\varepsilon=0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001$ число $\delta>0$, при котором из неравенств $0<|x-a|<\delta$ следует неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$, если

$$f(x)=-3x^2+7, \quad a=2, \quad A=-5.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{x+2}=1; \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x^2+2}=2;$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 3}\frac{2x}{x-3}=\infty; \qquad \text{г) } \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+4}{2x+1}=\infty.$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x\to-2}\frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{\frac{x^3+2x^2}{x+1}}\right);$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-e^{2x}}{2\operatorname{tg}x-\sin x}; \qquad \text{г) } \lim_{x\to 0}(\cos x)^{-1/x^2}.$$

12. Доказать, что $\sqrt{x^4+3x^3+1}-x^2=O^*(x), \quad x\to\infty.$

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:

$$f(x) = \frac{1}{1 - e^{(x-1)/x}}.$$

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

а) $f(x) = \operatorname{sign}(\sin x + \cos x)$; б) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^n + (2x-2)^{2n}}$, $x \geqslant 0$.

Вариант 26

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2/5$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$; в) $x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 3/2+0$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq +\infty$.

2. Дана последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ и число a. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, если $x_n = \dfrac{4n+1}{3-2n}$, $\quad a = -2$.

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а)} \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{4n+3} = \frac{1}{2}; \qquad \text{б)} \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{4n+3} \neq 0.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - (n-1)^3}{(n+1)^4 - n^4}; \qquad \text{б)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5n^3 + 3n^2 - 1}{5n^3 - 3n^2 + 1}\right)^{\dfrac{n^3+2}{n^2-1}}.$$

5. Последовательность x_n задана условиями

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right), \quad x_1 = 1, \quad n = 1, 2, \ldots \ .$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что последовательность $x_n = \dfrac{2n-1}{3n+2} \sin \dfrac{\pi n}{4}$ расходится.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани последовательности и проверить по определению sup и inf найденные значения, если

$$x_n = \big(1 + (-1)^n\big)n + \frac{1-(-1)^n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{x\to -3+0} f(x) = -1; \qquad \text{б) } \lim_{x\to 3-0} f(x) = +\infty;$$

$$\text{в) } f(x) \underset{x\to-\infty}{\not\to} -2-0; \qquad \text{г) } \lim_{x\to -2} f(x) \neq -\infty.$$

9. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x-a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, если

$$f(x) = -3x^2 - 2, \quad a = 1, \quad A = -5.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{x\to 0} \frac{3x+2}{x+1} = 2; \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+2}{x^2-2} = 2;$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 1/2} \frac{x^2+2}{2x-1} = \infty; \qquad \text{г) } \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3}{2x-1} = \infty.$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x\to -1} \frac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}; \quad \text{б) } \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+3x} + \sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[5]{1-5x} - \sqrt[7]{1-7x}}{\sqrt[4]{1+4x} - \sqrt[6]{1-6x} - x};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1 - \sin x}{\ln(1+2x)}; \qquad \text{г) } \lim_{x\to 0} \big(\ln(e+x)\big)^{\operatorname{ctg} x}.$$

12. Доказать, что $e^{\sqrt{x^4+x^2\sqrt{x^4+1}}} = o(e^{2x^2}), \quad x \to \infty.$

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род: $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 2x}$.

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} |x+2|, & x < 0, \\ \sin \pi x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ |x-1|, & x > 1; \end{cases} \qquad \text{б) } f(x) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(1+e^{xt})}{\ln(1+e^t)}.$$

Вариант 27

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} x_n = -2/5; \quad \text{б) } \lim_{n\to\infty} x_n = \infty; \quad \text{в) } x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 3/2-0; \quad \text{г) } \lim_{n\to\infty} x_n \neq -\infty.$$

2. Дана последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ и число a. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, если $x_n = \dfrac{4n-1}{4-3n}$, $\quad a = -\dfrac{4}{3}$.

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2-3n} = -\frac{2}{3}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2-3n} \neq 0.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{6n^3 - \sqrt{n^5+1}}{\sqrt{4n^6+3} - n}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n^2-1}{4n^2+n+2}\right)^{2n-1}.$$

5. Последовательность x_n задана условиями

$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2}, \quad x_1 = \frac{3}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots\ .$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что последовательность $x_n = \dfrac{3n+1}{2n+1} \cos \dfrac{\pi n}{4}$ расходится.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани множества A и проверить по определению sup и inf найденные значения, если

$$A = \left\{\frac{1}{n^2+1}\right\} \bigcup \left\{\frac{n^2}{n+1}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{x\to -3-0} f(x) = 1; \qquad \text{б) } \lim_{x\to 3+0} f(x) = -\infty;$$
$$\text{в) } f(x) \underset{x\to -\infty}{\not\to} -2+0; \qquad \text{г) } \lim_{x\to -2} f(x) \neq +\infty.$$

9. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, если

$$f(x) = -4x^2 + 5, \quad a = 1, \quad A = 1.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{x\to 1} \frac{3x-1}{x+2} = \frac{2}{3}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2};$$
$$\text{в) } \lim_{x\to -3} \frac{2x+1}{x+3} = \infty; \qquad \text{г) } \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{3x} = \infty.$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}{x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to 0} \frac{-\sqrt{1-2x} + \sqrt[5]{1+3x^4}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos 5x}{\ln\cos 4x}; \qquad \text{г) } \lim_{x\to 0} (\cos x + \operatorname{arctg}^2 x)^{1/\operatorname{arctg}^2 x}.$$

12. Доказать, что $\sqrt{x^4+8x^2+3} - \sqrt{x^4+x^2} = O^*(1), \quad x\to\infty.$

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \cos\frac{1}{|x|}, \quad x \neq 0.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род: $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{\sin x}$.

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = [x]\cdot|\sin(\pi x/2)|; \qquad \text{б) } f(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{(x+1)^{2n}} + \frac{1}{(x-1)^{2n}}}.$$

Вариант 28

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} x_n = -3/5; \quad \text{б) } \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty; \quad \text{в) } x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 4/3; \quad \text{г) } \lim_{n\to\infty} x_n \neq \infty.$$

2. Дана последовательность x_n, $n=1,2,\ldots$ и число a. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $N=N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n>N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, если $x_n = \dfrac{3n+2}{3-2n}, \quad a = -\dfrac{3}{2}.$

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{4n-3}{1-2n} = -2; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \frac{4n-3}{1-2n} \neq -1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n(n-1)}\right); \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2+2n-1}{3n^2-2n-4}\right)^{\frac{n+1}{2}}.$$

5. Последовательность x_n задана условиями

$$x_{n+1} = \frac{1}{4} + x_n^2, \quad x_1 = \frac{1}{3}, \quad n = 1,2,\ldots\ .$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что произведение двух бесконечно больших последовательностей есть бесконечно большая последовательность.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани последовательности и проверить по определению sup и inf найденные значения, если

$$x_n = \big((-1)^n + 1\big)n^2 + \frac{(-1)^n - 1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{x\to -3} f(x) = 2; \qquad \text{б) } \lim_{x\to 3} f(x) = \infty;$$

$$\text{в) } f(x) \underset{x\to\infty}{\not\to} 0; \qquad \text{г) } \lim_{x\to -3} f(x) \neq -\infty.$$

9. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, если

$$f(x) = -4x^2 + 3, \quad a = -1, \quad A = -1.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{3x-1} = \frac{3}{2}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = 0;$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 1} \frac{1-2x}{1-x} = \infty; \qquad \text{г) } \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2}{3x+1} = \infty.$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4}; \quad \text{б) } \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{2x^2 + 10x + 1} - \sqrt[7]{x^2 + 10x + 1}}{x};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sqrt{1 + \sin x^2} - 1}; \qquad \text{г) } \lim_{x\to 0} \left(\frac{1 + \sin \pi x}{1 + \ln(1+x)}\right)^{1/\sin x}.$$

12. Доказать, что $e^{\sqrt{x^2+x+1}} = O^*(e^x), \quad x \to +\infty$.

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \frac{1}{|x|}, \quad x \neq 0.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род: $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \cos x \cdot \operatorname{sign}(\sin x); \qquad \text{б) } f(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + (x+1)^{2n} + (x-1)^{2n}}.$$

Вариант 29

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3/5$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$; в) $x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 4/3{+}0$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq +\infty$.

2. Дана последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ и число a. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, если $x_n = \dfrac{n+5}{3n-1}$, $\quad a = \dfrac{1}{3}$.

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+1}{1-2n^2} = -2; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+1}{1-2n^2} \neq -1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^4+3} - \sqrt{n^4-2}\right); \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n^2+1}.$$

5. Последовательность x_n задана условиями

$$x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}, \quad x_1 = 1, \quad n = 1, 2, \ldots\ .$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Пусть $x_n \to +\infty$ и $y_n \to b < 0$ при $n \to \infty$. Доказать, что $x_n y_n \to -\infty$ при $n \to \infty$.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению sup и inf найденные значения, если

$$f(x) = \frac{1}{x^2+4x+5}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 3; \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty;$$

$$\text{в) } f(x) \underset{x\to-2-0}{\not\to} -2+0; \qquad \text{г) } \lim_{x\to-3} f(x) \neq +\infty.$$

9. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, если

$$f(x) = -4x^2 - 1, \quad a = 1, \quad A = -5.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{x\to -1} \frac{3x-1}{x+2} = -4; \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x^2+2} = 0;$$

$$\text{в) } \lim_{x\to -1} \frac{2x-1}{x+1} = \infty; \qquad \text{г) } \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{3x-1} = \infty.$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x\to -2} \frac{x^4+4x^3+3x^2-4x-4}{x^3+7x^2+16x+12}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1+4/x}-\sqrt[4]{1+3/x}}{1-\sqrt[5]{1-5/x}};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 5x}-e^{\sin x}}{\ln(1+2x)}; \qquad \text{г) } \lim_{x\to 0} \left(\frac{xe^x+1}{x\pi^x+1}\right)^{1/\sin^2 x}.$$

12. Доказать, что $\ln\cos\dfrac{\pi}{x} = o\left(\dfrac{1}{x}\right), \quad x\to\infty.$

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad x \neq 0.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род: $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{\operatorname{tg}^2 x}$.

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \operatorname{sign}(|x|-1)\operatorname{sign}(2-|x|); \qquad \text{б) } f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}.$$

Вариант 30

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} x_n = -5/4; \quad \text{б) } \lim_{n\to\infty} x_n = \infty; \quad \text{в) } x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 4/3-0; \quad \text{г) } \lim_{n\to\infty} x_n \neq -\infty.$$

2. Дана последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ и число a. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, если $x_n = \dfrac{3-2n}{2n+4}, \quad a = -1.$

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{3+3n}{2-6n} = -\frac{1}{2}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \frac{3+3n}{2-6n} \neq -1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^3 - 8n^3}{(2n+1)^2 + 4n^2}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{7n^2 + 18n - 15}{7n^2 + 11n + 15} \right)^{n+2}.$$

5. Последовательность x_n задана условиями

$$x_{n+1} = 1 - x_n^2, \quad x_1 = \frac{1}{4}, \quad n = 1, 2, \dots \ .$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, то функция $\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ также непрерывна.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению sup и inf найденные значения, если

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}, \quad x \in (0, +\infty).$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{x\to-\infty} f(x) = 2; \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty;$$

$$\text{в) } f(x) \underset{x\to-2}{\not\to} -2; \qquad \text{г) } \lim_{x\to-2} f(x) \neq \infty.$$

9. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, если

$$f(x) = -4x^2 + 7, \quad a = 2, \quad A = -9.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{x\to-1} \frac{x+2}{3x-1} = -\frac{1}{4}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{1-x^2} = 0;$$

$$\text{в) } \lim_{x\to1} \frac{3x+4}{x^2-1} = \infty; \qquad \text{г) } \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4}{3x+1} = \infty.$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x\to-3} \frac{x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty} \left(\sin\sqrt{x^2+1} - \sin\sqrt{x^2-1} \right);$$

$$\text{в) } \lim_{x\to0} \frac{\sin 2x - 2\sin x}{\sin 3x \cdot \ln\cos 3x}; \qquad \text{г) } \lim_{x\to0} \frac{\ln(1+3x+x^2) + \ln(1-3x+x^2)}{1-\cos x}.$$

12. Доказать, что $e^{\sin 5x} - e^{\sin x} = O^*(\sin x), \quad x \to 0.$

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род: $f(x) = \dfrac{1+\cos x}{\operatorname{tg} 2x}$.

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а)}\ f(x) = \begin{cases} \ln\Bigl(-\dfrac{1}{x}\Bigr), & x < 0, \\ e^{-1/x}, & x \geqslant 0; \end{cases} \quad \text{б)}\ f(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{(x+1)^{2n}} + (x-1)^{2n}}.$$

Вариант 31

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а)} \lim_{n\to\infty} x_n = 5/4; \quad \text{б)} \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty; \quad \text{в)}\ x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} -1/3; \quad \text{г)} \lim_{n\to\infty} x_n \neq \infty.$$

2. Дана последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ и число a. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, если $x_n = \dfrac{4+2n}{2-3n}$, $\quad a = -\dfrac{2}{3}$.

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а)} \lim_{n\to\infty} \frac{3+7n}{1-4n} = -\frac{7}{4}; \qquad \text{б)} \lim_{n\to\infty} \frac{3+7n}{1-4n} \neq -2.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а)} \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-3)^3 - (n+5)^3}{(3n-1)^3 + (2n+3)^3}; \qquad \text{б)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-6n+5}{n^2-5n+5}\right)^{3n-2}.$$

5. Последовательность x_n задана условиями

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), \quad x_1 = 2, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Пусть $f(x)$ — непрерывная на промежутке X функция. Доказать, что функция

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) > 0, \\ 0, & \text{если } f(x) \leqslant 0 \end{cases}$$

непрерывна на промежутке X.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению sup и inf найденные значения, если

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty).$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а)} \lim_{x\to+0} f(x) = 4; \qquad \text{б)} \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty;$$

$$\text{в)} f(x) \underset{x\to-2+0}{\not\to} -2-0; \qquad \text{г)} \lim_{x\to-3} f(x) \neq \infty.$$

9. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, если

$$f(x) = -5x^2 + 10, \quad a = -2, \quad A = -10.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\text{а)} \lim_{x\to0} \frac{3x-1}{x+2} = -\frac{1}{2}; \qquad \text{б)} \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x^2+2} = 0;$$

$$\text{в)} \lim_{x\to-1} \frac{x+2}{x^2-1} = \infty; \qquad \text{г)} \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{3x-1} = \infty.$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а)} \lim_{x\to1} \frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4}{x^3 - 2x^2 + 3x - 2}; \qquad \text{б)} \lim_{x\to+\infty} x^3 \left(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}\right);$$

$$\text{в)} \lim_{x\to0} \left(\frac{2}{\sin 2x \cdot \sin x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right); \qquad \text{г)} \lim_{x\to0} \left(\frac{2 + \sin x - \cos x}{2 + \sin 2x - \cos 2x}\right)^{1/\ln(1+x)}.$$

12. Доказать, что $\sqrt{x^2+4} - \sqrt[4]{4x^4+1} = O^*(x), \quad x \to +\infty.$

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род: $f(x) = \dfrac{\operatorname{ctg} 2x}{1 - \cos x}$.

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а)} f(x) = \frac{\big||x-1| - 2\big|}{\big||x| - 1\big| - 2}; \qquad \text{б)} f(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + (x+1)^{2n} + \frac{1}{(x-1)^{2n}}}.$$

Вариант 32

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а)} \lim_{n\to\infty} x_n = 5/3; \quad \text{б)} \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty; \quad \text{в)} x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 1/5+0; \quad \text{г)} \lim_{n\to\infty} x_n \neq +\infty.$$

2. Дана последовательность x_n, $n = 1, 2, \dots$ и число a. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, если $x_n = \dfrac{4n+1}{5-7n}$, $\quad a = -\dfrac{4}{7}$.

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а)} \lim_{n\to\infty} \frac{7n-1}{n+1} = 7; \qquad \text{б)} \lim_{n\to\infty} \frac{7n-1}{n+1} \neq 1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а)} \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[4]{3n+1} + \sqrt{81n^4 - n^2 + 1}}{(n + \sqrt[3]{n})\sqrt{5 - n + n^2}}; \qquad \text{б)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2 - 5n}{3n^2 - 5n + 7}\right)^{n+1}.$$

5. Последовательность x_n задана условиями

$$x_{n+1} = 2x_n - x_n^2, \quad x_1 = \frac{3}{2}, \quad n = 1, 2, \dots\ .$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Пусть $f(x)$ — непрерывная на промежутке X функция. Доказать, что функция

$$f_-(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) < 0, \\ 0, & \text{если } f(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

непрерывна на промежутке X.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани последовательности и проверить по определению sup и inf найденные значения, если

$$x_n = \frac{n^2+1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а)} \lim_{x\to-0} f(x) = -2; \qquad \text{б)} \lim_{x\to-4+0} f(x) = +\infty;$$

$$\text{в)} f(x) \underset{x\to\infty}{\not\to} 0-; \qquad \text{г)} \lim_{x\to-1-0} f(x) \neq -\infty.$$

9. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, если

$$f(x) = -5x^2 + 7, \quad a = 1, \quad A = 2.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\text{а)} \lim_{x\to0} \frac{x+2}{3x-1} = -2; \qquad \text{б)} \lim_{x\to\infty} \frac{2x+9}{x^2+1} = 0;$$

$$\text{в)} \lim_{x\to1} \frac{2x-1}{x^2-1} = \infty; \qquad \text{г)} \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+1}{3x+1} = \infty.$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x\to 2}\frac{x^4-4x^3+3x^2+4x-4}{x^3-6x^2+12x-8}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right);$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}; \qquad \text{г) } \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x\cos x+x}{e^{-x}\cos x+x}\right)^{1/\sin x}.$$

12. Доказать, что $\arcsin x-\operatorname{arctg} x=o(x^2), \quad x\to 0.$

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции
$$f(x)=\operatorname{tg} x, \quad x\neq \pi/2+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род: $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sin x}$.

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x)=\frac{\big|2|x-1|-3\big|}{|x-1|-2}; \qquad \text{б) } f(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n}+x^{2n}}.$$

Вариант 33

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty}x_n=-5/3; \quad \text{б) } \lim_{n\to\infty}x_n=\infty; \quad \text{в) } x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 1/5-0; \quad \text{г) } \lim_{n\to\infty}x_n\neq-\infty.$$

2. Дана последовательность x_n, $n=1,2,\ldots$ и число a. Определить для $\varepsilon=0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $N=N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n>N$ выполнено неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$, если $x_n=\dfrac{1-6n}{3+5n}, \quad a=-\dfrac{6}{5}$.

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty}\frac{1-7n}{2n-1}=-\frac{7}{2}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty}\frac{1-7n}{2n-1}\neq -1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[6]{n^6+4}+\sqrt{n-4}}{\sqrt[6]{n^6+6}+\sqrt{n-6}}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+21n-7}{2n^2+18n+9}\right)^{2n+1}.$$

5. Последовательность x_n задана условиями

$$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}, \quad x_1=2, \quad n=1,2,\ldots\ .$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \neq 0$ и $\lim\limits_{x\to a} \phi(x) = 0$. Доказать, что
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \infty.$$

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению sup и inf найденные значения, если
$$f(x) = \frac{1}{2+x^3}, \quad x \in [0, +\infty).$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:
$$\text{а) } \lim_{x\to 0} f(x) = 1; \qquad \text{б) } \lim_{x\to -4-0} f(x) = +\infty;$$
$$\text{в) } f(x) \underset{x\to\infty}{\not\to} 0+; \qquad \text{г) } \lim_{x\to -1+0} f(x) \neq -\infty.$$

9. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x-a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, если
$$f(x) = -5x^2 - 3, \quad a = -1, \quad A = -8.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что
$$\text{а) } \lim_{x\to 1} \frac{2x+1}{x-2} = -3; \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty} \frac{3x+2}{x^2+2} = 0;$$
$$\text{в) } \lim_{x\to -1} \frac{2x+3}{x^2-1} = \infty; \qquad \text{г) } \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+2}{3x-1} = \infty.$$

11. Вычислить пределы
$$\text{а) } \lim_{x\to -2} \frac{2x^4 + 9x^3 + 11x^2 - 4}{x^3 + 7x^2 + 16x + 12}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x-1}\,\sqrt[3]{2-3x}+1}{\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x+3}};$$
$$\text{в) } \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2\sin 3x} - \sqrt{1-4\sin 5x}}{\sin 6x}; \qquad \text{г) } \lim_{x\to 0} \left(\frac{xe^x+1}{x\pi^x+1}\right)^{\frac{\cos x}{1-\cos x}}.$$

12. Доказать, что $\sin\ln(x^2+1) - \sin\ln(x^2-1) = o(1/x), \quad x \to \infty.$

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции
$$f(x) = \operatorname{ctg} x, \quad x \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род: $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$.

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций
$$\text{а) } f(x) = \frac{1}{\big|1 - |x-2|\big|}; \qquad \text{б) } f(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + (x+1)^{2n}}.$$

Вариант 34

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} x_n = -5/2; \quad \text{б) } \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty; \quad \text{в) } x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 1/4; \quad \text{г) } \lim_{n\to\infty} x_n \neq \infty.$$

2. Дана последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ и число a. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, если $x_n = \dfrac{5+3n}{2-5n}$, $\quad a = -\dfrac{3}{5}$.

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{1-2n}{3n-2} = -\frac{2}{3}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \frac{1-2n}{3n-2} \neq -1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[3]{n^3+5} - \sqrt[3]{n-5}}{\sqrt[7]{n^7+5} + \sqrt[5]{n-5}}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1}\right)^{n/2}.$$

5. Последовательность x_n задана условиями

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right), \quad x_1 = 2, \quad n = 1, 2, \ldots \ .$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что если $y = f(x)$ — непрерывная функция, то функция $y = f(|x|)$ также непрерывна.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению sup и inf найденные значения, если

$$f(x) = \sin x + \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{x\to+\infty} f(x) = -3; \qquad \text{б) } \lim_{x\to-4-0} f(x) = -\infty;$$

$$\text{в) } f(x) \underset{x\to2}{\not\to} -2+0; \qquad \text{г) } \lim_{x\to-1+0} f(x) \neq +\infty.$$

9. Определить для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x-a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, если

$$f(x) = 5x^2 - 4, \quad a = 1, \quad A = 1.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{x\to 0}\frac{x-2}{2x-1}=2; \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty}\frac{3x-2}{x^2+1}=0;$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 1}\frac{3x-1}{x^2-1}=\infty; \qquad \text{г) } \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{3x+1}=\infty.$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x\to -1}\frac{x^4+x^3-2x^2-3x-1}{x^4+4x^2-5}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}\sqrt[3]{1+3x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos 4x}-\sqrt[3]{\cos 5x}}{1-\cos 3x}; \qquad \text{г) } \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin^2 x}+\operatorname{arctg} x}{e^{\sin x}-x}\right)^{1/x}.$$

12. Доказать, что $e^{7x}-e^{4x}=o(\sqrt[3]{x}), \quad x\to 0$.

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x)=x^2|x|, \quad x\in\mathbb{R}.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род: $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\cos 2x}$.

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x)=(-1)^{[\sqrt{x}]}; \qquad \text{б) } f(x)=\lim_{n\to\infty}\big(x\operatorname{arctg}(n\operatorname{ctg} x)\big).$$

Вариант 35

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty}x_n=5/2; \quad \text{б) } \lim_{n\to\infty}x_n=-\infty; \quad \text{в) } x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 1/4+0; \quad \text{г) } \lim_{n\to\infty}x_n\neq+\infty.$$

2. Дана последовательность x_n, $n=1,2,\dots$ и число a. Определить для $\varepsilon=0,1;\ 0,01;\ 0,001$ число $N=N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n>N$ выполнено неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$, если $x_n=\dfrac{6-n}{5+6n}, \quad a=-\dfrac{1}{6}$.

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty}\frac{2n+4}{1-3n}=-\frac{2}{3}; \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty}\frac{2n+4}{1-3n}\neq 0.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}-\sqrt{(n-1)(n+3)}\right); \qquad \text{б) } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+n+1}{n^3+2}\right)^{2n^2}.$$

5. Последовательность x_n задана условиями

$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2}, \quad x_1 = 3, \quad n = 1, 2, \dots\ .$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Функция $f(x)$ непрерывна в точке a, а функция $g(x)$ разрывна в точке a. Доказать, что функция $(f+g)(x)$ разрывна в точке a.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению sup и inf найденные значения, если

$$f(x) = \sin x - \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{x\to-\infty} f(x) = 3; \qquad \text{б) } \lim_{x\to-4} f(x) = -\infty;$$

$$\text{в) } f(x) \underset{x\to2+0}{\not\to} -1-0; \qquad \text{г) } \lim_{x\to-1-0} f(x) \neq +\infty.$$

9. Определить для $\varepsilon = 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001$ число $\delta > 0$, при котором из неравенств $0 < |x-a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, если

$$f(x) = 5x^2 + 5, \quad a = -1, \quad A = 10.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{x\to-2} \frac{3x+2}{x+1} = 4; \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{x^2+2} = 0;$$

$$\text{в) } \lim_{x\to-1} \frac{3x+2}{x^2-1} = \infty; \qquad \text{г) } \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{3x-2} = \infty.$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x\to1} \frac{x^4 - 2x^3 + 3x - 2}{2x^4 - x^2 - 1}; \quad \text{б) } \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x} - \sqrt{x+3}\right);$$

$$\text{в) } \lim_{x\to2} \frac{\ln(x - \sqrt[3]{2x-3})}{\sin(\pi x/2) - \sin(x-1)\pi}; \qquad \text{г) } \lim_{x\to0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x \cos 2x}{1 + \operatorname{tg} x \cos 5x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg} 2x}.$$

12. Доказать, что $4^{1/x} - 4^{1/(x+1)} = o(1/x), \quad x \to \infty.$

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \ln|x|, \quad x \neq 0.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род: $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{1 + \cos x}$.

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \operatorname{sign}(\cos x \cdot \sin x); \qquad \text{б) } f(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + (2\cos x)^{2n}}.$$