АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ОРДЕНА ЛЕНИНА

ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

имени П. Н. Лебедева

Препринт № 244

(физика космоса)

ОДНОРОДНАЯ МОДЕЛЬ САМОГРАВИТИРУЮЩЕГО СЖАТОГО СФЕРОИДА С АНИЗОТРОПИЕЙ ДИСПЕРСИИ СКОРОСТЕЙ

Б.П.Кондратьев

Москва - 1978

HOMOGENEOUS MODEL OF A SELF-GRAVITATING OBLATE SPHEROID WITH ANISOTROPIC VELOCITY DISPERSION

Homogeneous model of a collisionless self-gravitating oblate spheroid with anisotropic velocity dispersion is investigated. The condition of dynamic equilibrium is obtained. For large ellipticities this model gives the values T_{rot}/T_{rand} which are typical for S0 galaxies.

ОДНОРОДНАЯ МОДЕЛЬ САМОГРАВИТИРУЮЩЕГО СПЛАТОГО СФЕРОИДА С АНИЗОТРОПИЕЙ СКОРОСТЕЙ

Кондратьев Б.П.

Аннотация

Исследована однородная модель бесстолкновительного самогравитирующего сфероида, имеющего глобальную анизотропию дисперсии скоростей. Найдены условия динамического равновесия и дифференциальности вращения в системе. Кинетическая энергия модели разделена на энергию регулярного вращения и энергию хаотического движения частиц. При больших сплюснутостях модель хорошо передает динамику S0 галактик.

I. Введение

В исследовании пространственно-кинематической и динамической структуры галактик наряду с наблюдениями определенную роль играют аналитические самосогласованные модели. При этом данные наблюдений служат для проверки предпосылок, на которых построены модели. Неплохое количественное совпадение с наблюдениями имеют модели эллиптических галактик (Вилсон, 1975; Готт, 1975; Ларсон, 1975). Из сравнения свойств этих моделей с наблюдениями была выяснена важная деталь - сплюснутость в эллиптических галактиках прямо не связана с их вращением, а отражает остаточную анизотропию дисперсии скоростей звезд (Бинни, 1976).

Исследование моделей обычно связано с рядом трудностей, носящих математический характер. Не всегда удается решить соответствующие уравнения для фазовой функции распределения и найти необходимое число интегралов движения, от которых эта функция зависит. Исследованию поддаются лишь некоторые варианты моделей и, по-видимому, наиболее простыми из них являются однородные по плотности.

Одной из первых была рассмотрена модель однородного бесстолкновительного трехосного эллипсоида (Фриман, 1966). На этой модели были исследованы токи вещества, имеющие интересное свойство: направление их движения противоположно вращению самой конфигурации, что вызывает появление противотоков в инерциальной системе координат. Существование противотоков указывает на то, что необходимо различать твердотельное вращение системы и систематические вихревые движения вещества в ней.

Другим вариантом однородной бесстолкновительной модели яв-

ляется сжатый сфероид. В самом простом случае распределение скоростей в такой модели принимается изотропным (Готт и Тхуан, 1975). Более последовательным является подход с нахождением анизотропной фазовой функции распределения (Поляченко, 1976; см. также Поляченко и Фридман, 1976). Однако анизотропная модель сжатого сфероида подробно не исследована. Приведенная в монографии Поляченко и Фридмана (1976) функция имеет вид

$$f(\vec{r},\vec{v})=\frac{8\rho_0}{\pi^2 Cc}\frac{\sqrt{m}}{m-n}\cdot\delta\left[1-m-\frac{2T_z}{C^2c^2}\right], \qquad (I^*)$$

где ρ_0 - плотность, T_z - z - компонента интеграла энергии, m и n характеризуют геометрию орбит частиц, $\delta[\ldots]$-дельта-функция.

С помощью функции (I^*) можно найти[x)] только один набор основных характеристик модели (компонент дисперсии скоростей, энергию вращения и т.д.), что не позволяет сформулировать необходимое и достаточное условие стационарности сфероида. Кроме того, функция (I^*) не определена на оси $X=Y=0$; вследствии этого формула для скорости вращения

$$\overline{v}_\varphi=\frac{1}{\pi}\left\{1+\frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}}\ln\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right\} \qquad (II^*)$$

дает неверный результат $\lim\limits_{z\to 0}\overline{v}_\varphi\neq 0$.

В данной статье проведено детальное исследование модели однородного сжатого сфероида с анизотропией скоростей. Дополнен и уточнен метод нахождения функции распределения и выяснена причина ее вырожденности (наличия дельта-функции Дирака).

x) В статье Поляченко (1976), характеристики модели не были получены.

В функцию распределения введены два параметра (раздел 2): первый из них исключает из рассмотрения орбиты частиц, вырожденные в прямую линию и проходящие через ось $X = Y = 0$, что дает $\lim_{r \to 0} \overline{v_\varphi} = 0$ (раздел 3.2); второй параметр K регулирует состав орбит по сжатию и входит во все характеристики модели, что позволяет найти условие стационарности сфероида (раздел 4.I). Кинетическая энергия частиц разделена на энергию регулярного вращения E_{rot} и энергию хаотического движения E_{kink}. Выяснено, что при любом сжатии сфероида модель не удовлетворяет критерию устойчивости Пиблса и Острайкера (1973).

2. Вывод функции распределения.

2.I. Исходные формулы.

Принятая модель - это однородный сфероид Маклорена, состоящий из звезд равной массы, движение которых происходит в самосогласованном гравитационном поле. Орбиты частиц сконструированы так, чтобы была анизотропия дисперсии скоростей. Вращение всех частиц происходит в одном направлении. Функция распределения зависит от трех интегралов движения, которые могут быть найдены. Определенные таким образом модели, разделим на "холодные" в плоскости вращения (дисперсия радиальной компоненты скорости $\langle \overline{v_r^2} \rangle = 0$)* и "горячие" с $\langle \overline{v_r^2} \rangle \neq 0$. Функция распределения получена в этом разделе только для последних (модель с $\langle \overline{v_r^2} \rangle = 0$ более проста и рассмотрена в разделе 3.2 без помощи функции распределения).

Имеем: $\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ уравнение поверхности, (I)

$\rho = \rho_0 \cdot \eta \left[1 - \frac{r^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}\right]$ плотность внутри сфероида, (2)

* "холодная" модель - частный случай трехосного эллипсоида (Фриман, 1966).

где $\zeta(x)=0$ при $x<0$ и $\zeta(x)=1$ при $x\geqslant 0$.

Гравитационный потенциал хорошо известен и в цилиндрических координатах имеет вид

$$\varphi = \mathrm{const} + \frac{A^2 r^2}{2} + \frac{C^2 z^2}{2} . \qquad (3a)$$

Здесь a и C – полуоси сфероида, причем $a \geqslant C$. Выражения для A^2 и C^2 таковы (Чандрасекхар, 1973):

$$A^2 = 2\pi G \rho_0 \left\{ \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3} \arcsin e - \frac{1-e^2}{e^2} \right\} , \qquad (3b)$$

$$C^2 = \frac{4\pi G \rho_0}{e^2} \left\{ 1 - \sqrt{1-e^2}\, \frac{\arcsin e}{e} \right\} . \qquad (3c)$$

Задача заключается в нахождении самосогласованной функции $f(\vec{r},\vec{v})$ из интегрального уравнения

$$\rho_0 \zeta \left[1 - \frac{r^2}{a^2} - \frac{z^2}{C^2} \right] = \iiint f(\vec{r},\vec{v})\, d\vec{v} . \qquad (4)$$

Условие самосогласованности требует, чтобы $f(\vec{r},\vec{v})$ зависела только от интегралов движения частицы. Интеграл энергии $T = \frac{v^2}{2} + \varphi(x,y,z)$ распадается (ввиду $\varphi(x,y,z) = \varphi(r) + \varphi(z)$) на два первых интеграла:

$$T_z = \frac{v_z^2}{2} + \frac{C^2 z^2}{2} . \qquad (5a)$$

$$T_\perp = \frac{v_x^2 + v_y^2}{2} + \frac{A^2 (x^2 + y^2)}{2} . \qquad (5b)$$

Имеется также интеграл момента

$$K_z = x v_y - y v_x . \qquad (5c)$$

Для решения уравнения (4) перейдем от переменных (v_x, v_y, v_z) к новым ($T_\perp, T_z, K_z$), см. Приложение I; тогда

$$\rho_0 \zeta \left[1 - \frac{r^2}{a^2} - \frac{z^2}{C^2} \right] = \iiint \frac{f(T_\perp, T_z, K_z)\, dT_\perp\, dT_z\, dK_z}{\sqrt{2T_z - C^2 z^2}\, \sqrt{2T_\perp r^2 - A^2 r^4 - K_z^2}} . \qquad (6)$$

Для нахождения пределов интегрирования рассмотрим движение одной частицы.

2.2. Нахождение пределов интегрирования.

Первые интегралы K_z и $T_\perp$ описывают движение частицы в плоскости, перпендикулярной оси OZ. Перейдем к полярным координатам

$$K_z = r \cdot U_\varphi ,$$

$$T_\perp = \frac{U_r^2 + U_\varphi^2}{2} + \frac{A^2 r^2}{2} .$$

Отсюда легко получить соотношение, описывающее движение частицы по эллипсу

$$2T_\perp r^2 - K_z^2 - A^2 r^4 = U_r^2 r^2 . \qquad (7)$$

Сам эллипс лежит в плоскости, перпендикулярной оси OZ. Обозначив в нем (см. рис.2)

$$r^2_{max} = m , \quad r^2_{min} = n ,$$

легко получить (положив $U_r = 0$):

$$m = \frac{T_\perp + \sqrt{T_\perp^2 - A^2 K_z^2}}{A^2} , \qquad (8a)$$

$$n = \frac{T_\perp - \sqrt{T_\perp^2 - A^2 K_z^2}}{A^2} . \qquad (8b)$$

Согласно интегралу T_z из (5а), частица осциллирует по гармоническому закону в направлении, параллельном OZ. Перейдем в (6) к переменным (m, n, T_z), т.к. для них проще найти пределы интегрирования. Из (8) имеем:

$$K_z = A\sqrt{mn} , \qquad (9a)$$

$$T_\perp = \frac{m+n}{2} A^2 . \qquad (9b)$$

Якобиан перехода легко найти

$$J = \frac{A^2}{4} \frac{m-n}{\sqrt{mn}} .$$

В результате получим уравнение (Поляченко и Фридман, 1976)

$$\rho_0 \eta\left[1-\frac{r^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}\right]=\frac{A}{4}\iiint\frac{f(m,n,T_z)\sqrt{m\cdot n}\,dm\,dn\,dT_z}{\sqrt{2T_z-C^2z^2}\cdot\sqrt{(m-r^2)(r^2-n)}} \quad (10)$$

Найдем фазовый объем в пространстве (m, n, T_z), по которому нужно интегрировать в (10). Рассмотрим внутри модели произвольную точку $P(r,z)$ и определим пределы по m, n, T_z для орбит частиц, проходящих через нее (см. рис.1 и 2). Согласно рис.1 $(CD)^2=c^2\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)$, следовательно

$$\frac{C^2z^2}{2}\leqslant T_z\leqslant\frac{C^2c^2}{2}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right) \quad . \quad (11)$$

Пределы по m и n найдем из рис.2, где изображено сечение AB рис.1. Имеем: $R=a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$ и $r^2\leqslant m\leqslant a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$. Частица с данным m может находится на расстоянии $z\leqslant z_{max}=c\sqrt{1-\frac{m^2}{a^2}}$, а для частиц, которые могут доходить до z_{max} (не останавливаясь в промежуточных точках) выполняется условие $z^2_{max}=\frac{2T_z}{C^2}$. Для этих частиц справедливо тождество $\frac{m}{a^2}+\frac{2T_z}{C^2c^2}\equiv 1$.

Геометрически это условие означает, что частицы с m и T_z, подчиненными тождеству, в процессе колебания касаются поверхности сфероида. В этом случае две независимые переменные m и T_z оказываются связанными между собой, что значительно упрощает решение уравнения (10) (суть упрощений изложена в разделе 2.4). Иными словами, для модели, в которой все орбиты частиц касаются поверхности сфероида, существует только вырожденное решение уравнения (10) и справедливо тождество

$$m\equiv a^2\left(1-\frac{2T_z}{C^2c^2}\right) \quad . \quad (12)$$

До того момента мы находились в согласии с изложенным в монографии Поляченко и Фридмана (1976), где было принято $0\leqslant n\leqslant r^2$.

Однако нижний предел для n нельзя брать равным нулю. Нужно исключить из рассмотрения орбиты, вырождающиеся в сечении АВ в линию и проходящие через ось OZ. Из-за неправильного нижнего предела для n в монографии получена формула для вращения (Π^*) (см. Введение), дающая $\lim\limits_{z\to 0}\overline{v}_p \neq 0$, что не имеет смысла. Мы примем:

$$\varkappa^2 \leqslant n \leqslant K^2 \cdot z^2 , \qquad (13)$$

где $\varkappa$ можно брать произвольно малой, но отличной от нуля, а параметр K ($0 < K \leqslant 1$) регулирует состав проекций орбит в сечении Ав рис.2 по сжатию: при $K = 1$ допускаются эллипсы с любым сжатием включая окружности, а при $K \to 0$ происходит их вырождение в линию. Этот параметр войдет в искомую функцию $f(\vec{z},\vec{v})$ и в интегральные характеристики модели. Подбирая K, можно установить необходимое условие динамического равновесия в модели (см. раздел 4.1).

2.3. Решение интегрального уравнения.

Условие (12) устанавливает связь между переменными m и T_z что позволяет записать (10) в удобном для интегрирования виде:

$$\frac{4\rho_0}{A} z\left[1-\frac{z^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}\right] = \int \frac{dT_z}{\sqrt{2T_z - C^2 z^2}} \iint \frac{(m-n)\, f(m,n,T_z)\, dm\, dn}{\sqrt{m\cdot n}\,\sqrt{(n-z^2)(z^2-n)}} . \qquad (14)$$

Пределы интегрирования в уравнении (14) приведены в формулах (11) и (13) (пределы по m зависят от пределов по T_z). Простота случая вырожденности заключается в том, что сложное уравнение (10) сводится к интегральному уравнению Абеля по переменной T_z (см. Приложение 2):

$$\frac{4\rho_0}{A^2}\,\eta(x)=\int_0^x \frac{\Phi(J)}{\sqrt{x-J}}\,dJ\,.$$

решая его стандартным способом, получим*)

$$\frac{8\rho_0}{\pi ACc}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{z^2}{a^2}-\frac{2T_z}{C^2c^2}}}=\iint_0^{\kappa^2 z^2}\frac{(m-n)f(m,n,T_z)\,dm\,dn}{\sqrt{mn}\,\sqrt{(m-z^2)(z^2-n)}}\,. \qquad (15)$$

Продолжая использовать простоту случая вырождения, подстановкой тождества (12) в уравнение (15) приходим к простому интегральному уравнению

$$\frac{8a\rho_0}{\pi ACc}=\int_0^{\kappa^2 z^2}\frac{f(m,n,T_z)\left[a^2\left(1-\frac{2T_z}{C^2c^2}\right)-n\right]}{\sqrt{nz^2-n^2}\cdot\sqrt{a^2\left(1-\frac{2T_z}{C^2c^2}\right)}}\,dn\,. \qquad (15a)$$

Искомая функция равна:

$$f(m,n,T_z)=\frac{8a\rho_0}{\pi ACcL(\kappa)}\cdot\frac{\sqrt{a^2\left(1-\frac{2T_z}{C^2c^2}\right)}}{\left[a^2\left(1-\frac{2T_z}{C^2c^2}\right)-n\right]}\,, \qquad (16)$$

где

$$L(\kappa)=\frac{\pi}{2}+\arcsin\left[2\kappa^2-1\right]\,. \qquad (16a)$$

В функции (16) присутствует вырождение по m, так как в $f(m,n,T_z)$ три аргумента, а справа только два. С помощью тождества (12) запишем решение (16) с дельта функцией:

$$f(m,n,T_z)=\frac{8a\rho_0}{\pi ACcL(\kappa)}\,\frac{\sqrt{m}}{m-n}\,\delta\left[m-a^2\left(1-\frac{2T_z}{C^2c^2}\right)\right]. \qquad (17)$$

---

*) Чтобы не усложнять выкладок, взято $\varkappa=0$; но при получении формулы для вращения (см. раздел 3.2) необходимо брать $\varkappa$ отличной от нуля.

Отметим, что функция (16) (или (17)) отличается от функции (I^*) (см. Введение) наличием в первой функции от параметра $L(K)$. Вследствии этого, основные характеристики модели также зависят от параметра K; выбором величины последнего в разделе 4.1 найдено условие динамического равновесия сфероида.

Функция (17) зависит от трех интегралов движения, что позволяет включить случай анизотропии дисперсии скоростей. Найти какие-либо другие решения исходного уравнения (10), не используя простоту случая вырождения, не удается.

3. Вывод основных характеристик модели.

3.1. Компоненты дисперсии скорости $\langle \overline{v_z^2} \rangle$ и $\langle \overline{v_z^2} \rangle$.

Из (7) и (8) найдем радиальную компоненту скорости:

$$v_z^2 = \frac{A^2}{z^2}(m - z^2)(z^2 - n). \tag{18}$$

Величина v_z^2 в произвольной точке внутри сфероида индивидуальна для каждой орбиты, проходящей через эту точку. Усредним v_z^2 по пространству скоростей

$$\overline{v_z^2} = \frac{1}{\rho_0}\iiint v_z^2 f(\vec{z},\vec{v})\, d^3v .$$

Переходя к переменным ($T_\perp, T_z, K_z$) с якобианом перехода Приложения I, а затем к переменным (m, n, T_z) с якобианом $\frac{A^2}{4}\frac{m-n}{\sqrt{m\cdot n}}$, получим

$$\overline{v_z^2} = \frac{2aA^2}{\pi C c L(K)} \int\limits_{\frac{C^2c^2}{2}\alpha}^{\frac{C^2c^2}{2}\beta} \frac{dT_z}{\sqrt{2T_z - C^2c^2}} \iint\limits_0^{K^2z^2} \frac{\sqrt{(m-z^2)(z^2-n)}\,\delta\left[m - a^2\left(1 - \frac{2T_z}{C^2c^2}\right)\right]}{z^2\sqrt{n}}\, dm\, dn .$$

$$\overline{v_z^2} = \frac{A^2a^2}{2}\frac{g(K)}{L(K)}(\beta - \alpha) , \tag{19}$$

где

$$\beta = 1 - \frac{z^2}{a^2}\ ;\quad \alpha = \frac{z^2}{c^2}\ , \tag{20a}$$

$$g(\kappa) = \kappa\sqrt{1-\kappa^2} + \operatorname{arctg}\frac{\kappa}{\sqrt{1-\kappa^2}}\ . \tag{20b}$$

Легко проверить, что $\overline{v_z} = \frac{1}{\rho_0}\iiint v_z f(z,\vec{v})\, d^3v = 0$, следовательно $\overline{v_z^2}$ является компонентой дисперсии скоростей. Рассмотрим (I9). Хотя v_z^2 из (I8) от z не зависит, но усредненное (I9) есть функция $\alpha = \frac{z^2}{c^2}$. Противоречия здесь нет – при усреднении учитывались орбиты с разными z; как показано на рис.I, в точку $P(r,z)$ могут попадать частицы из точек I,2,3...i... . Поверхности $\overline{v_r^2} = \mathrm{const}$ – это подобные сфероиды вращения. С удалением от центра $\overline{v_r^2}$ убывает и обращается в нуль на поверхности модели, где $\alpha = \beta$. Целесообразно усреднить (I9) по объему сфероида. Обозначив среднее по объему V скобками $\langle \overline{v_r^2} \rangle$, имеем:

$$\langle \overline{v_r^2} \rangle = \frac{1}{V}\iiint_V \overline{v_z^2}\, dx\, dy\, dz\ .$$

Подставив (I9) и опуская промежуточные вычисления, запишем результат

$$\langle \overline{v_r^2} \rangle = \frac{1}{5}\frac{g(\kappa)}{L(\kappa)} A^2 a^2\ . \tag{2I}$$

Зависимость $\langle \overline{v_r^2} \rangle \sim a^2$ объясняется упругой силой, действующей на частицы в плоскости AB (легко видеть, что вследствие $\varphi(r) = \frac{A^2 r^2}{2}$ соответствующая компонента силы $F \sim r$).

Получим теперь $\langle \overline{v_z^2} \rangle$. Из интеграла T_z следует

$$v_z^2 = 2T_z - C^2 z^2\ .$$

Сказанное выше об усреднении v_r^2 относится и к усреднению v_z^2.

Находим: $\overline{v_z^2} = \frac{1}{\rho_0} \iiint v_z^2 f(\vec{r},\vec{v})\, d^3v$,

и $$\overline{v_z^2} = \frac{C^2c^2}{\pi} \int_\alpha^\beta \sqrt{\frac{l-\alpha}{l-\beta}}\, dl = \frac{C^2c^2}{2}(\beta-\alpha), \qquad (22)$$

где α и β определены в (20а).

Поверхности $\overline{v_z^2} = const$ также подобные сфероиды; эта компонента убывает от центра и обращается в нуль на граничной поверхности сфероида. Легко убедиться в том, что $\overline{v_z} = 0$, поэтому $\overline{v_z^2}$ является компонентой дисперсии скоростей. Ее усреднение по объему сфероида дает

$$\langle \overline{v_z^2} \rangle = \frac{1}{5} C^2c^2 . \qquad (23)$$

Как и для компоненты $\langle \overline{v_r^2} \rangle$, пропорциональность $\langle \overline{v_z^2} \rangle \sim C^2$ прямо следует из наличия упругой силы, действующей на частицы в направлении, параллельном оси OZ.

3.2. <u>Скорость вращения.</u>

Из (9а) легко видеть, что $v_\varphi = \frac{\sqrt{m \cdot n}}{r} A$; взяв пределы $\varkappa^2 \leq n \leq K^2 r^2$ и опуская промежуточные вычисления, находим

$$\overline{v_\varphi} = \frac{1}{\rho_0} \iiint v_\varphi f(\vec{r},\vec{v})\, d\vec{v} = \frac{Aa}{\pi} \frac{\tau}{L(K)} \int_\alpha^\beta \sqrt{\frac{1-l}{(l-\alpha)(\beta-l)}}\, dl .$$

Этот интеграл табличный (Градштейн и Рыжик, 1962):

$$\overline{v_\varphi} = \frac{2Aa}{\pi} \frac{\tau}{L(K)} \sqrt{1-\alpha}\, E\left(\frac{\pi}{2}; \sqrt{\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}}\right), \qquad (24)$$

где α и β определены в (20а) $E(\ldots)$ – полный эллиптический интеграл 2-го рода, а $\tau = 2\left(\sqrt{1-\frac{\varkappa^2}{r^2}} - \sqrt{1-K^2}\right)$. При $r = \frac{\varkappa}{K}$ обращается в нуль τ ; взяв $\varkappa$ произвольно малым, но отличным

от нуля, получим $\overline{v}_\varphi = 0$ в малой окрестности оси OZ (см. рис.4).

Формула (24) задает дифференциальное вращение, причем $\overline{v}_\varphi$ зависит не только от z, но и от R. На рис.4 показаны кривые вращения на разных расстояниях от плоскости $Z=0$; при данном z скорость вращения возрастает к плоскости $Z=0$.

Интересно проследить токи вещества на поверхности сфероида. Для этого нужно положить $\alpha = \beta$ в (24); легко видеть, что $\overline{v}_\varphi \sim \frac{z}{a}$, т.е. угловая скорость вращения на поверхности модели постоянна, а сама граничная поверхность вращается как твердая скорлупа. Это любопытное свойство легко увидеть и из рис.4: все кривые вращения при разных $\frac{R}{c}$ имеют одну касательную (т.е. $\Omega = const$) для точек, лежащих на граничной поверхности. Подставив $\alpha = \beta$ в формулы (19) и (22), найдем $\overline{v}_z^2 = \overline{v}_R^2 = 0$; это можно объяснить так: в произвольной точке на граничной поверхности отсутствуют все движения частиц, нарушающие жесткость скорлупы. Токи на поверхности текут в перпендикулярных оси OZ плоскостях. Жесткость скорлупы не означает, что она состоит из одних и тех же звезд.

Во вращающейся системе отсчета, жестко связанной с граничной скорлупой, существуют токи вещества, текущие в обратном направлении по отношению к вращению скорлупы. Это объясняется тем, что угловая скорость вращения возрастает от центра к поверхности, где ее величина $\Omega = \frac{2A}{\pi}$. При исследовании модели однородного трехосного эллипсоида (Фриман, 1966) были обнаружены токи вещества с направлением движения, обратным вращению всей фигуры (в системе отсчета вращающейся вместе с эллипсоидом). Но

противотоки в эллипсоиде существуют и в инерциальной системе отсчета (где сама фигура вращается), а в сфероиде в этом случае направление токов совпадает с направлением вращения граничной поверхности.

Тривиальным является вращение "холодной" модели, т.е. в сфероиде с $\overline{v_z^2}=0$. Положив в формулах (8а) и (8b) $m=n$, получим $T_\perp = A^2K_z^2$. Подстановкой этого значения $T_\perp$ в (7) легко находим уравнение (предварительно положив $v_z^2=0$)

$$v_\varphi^2 - 2Arv_\varphi + A^2r^2 = 0 .$$

Решение уравнения дает $v_\varphi = Ar$, т.е. твердотельное вращение с $\Omega = A$. Резюмируем: если модель сфероида "горячая" в плоскости вращения, т.е. $\overline{v_z^2}\neq 0$, - то вращение в ней дифференциальное, а если "холодная" ($\overline{v_z^2}=0$) - то твердотельное. Переход от твердотельного к дифференциальному вращению сопровождается перераспределением части энергии вращения в энергию хаотического движения звезд в плоскости вращения (появлением $\overline{v_r^2}\neq 0$), что повышает устойчивость модели (см. раздел 4.I).

Отметим, что угловая скорость твердотельного вращения $\Omega = A$ больше максимальной угловой скорости вращения в "горячей" модели $\Omega_{max} = \frac{2}{\pi}A$. Причиной этого является, как легко видеть, наличие в последней модели $\overline{v_r^2}\neq 0$.

3.3. Азимутальная компонента дисперсии скоростей.

Выше было показано, что $\overline{v_\varphi}\neq 0$, поэтому $\overline{v_\varphi^2}$ не является компонентой дисперсии скоростей. Последнюю можно найти из простого соотношения $\sigma_\varphi^2 = \overline{v_\varphi^2} - (\overline{v_\varphi})^2$. Найдем вначале $\overline{v_\varphi^2}$; из (9а) следует, что $v_\varphi^2 = \frac{A^2}{r^2}m\cdot n$, и средний квадрат этой величины равен

$$\overline{v_\varphi^2} = \frac{1}{\rho_0}\iiint v_\varphi^2 f(\vec{r},\vec{v})\, d^3v =$$

$$= \frac{1}{\rho}\iiint \frac{K_z^2}{r^2} f(T_\perp, T_z, K_z) \frac{dT_\perp\, dT_z\, dK_z}{\sqrt{2T_z - C^2r^2}\sqrt{2T_\perp r^2 - A^2r^4 - K_z^2}} =$$

$$= \frac{2A^2a}{\pi C c L(K)} \int_{\frac{C^2c^2}{2}\alpha}^{\frac{C^2c^2}{2}\beta} \frac{dT_z}{\sqrt{2T_z - C^2r^2}} \iint_0^{K^2r^2} \frac{m\sqrt{n}\,\delta\left[m - a^2\left(1 - \frac{2T_z}{C^2c^2}\right)\right]}{\sqrt{(m - r^2)(r^2 - n)}}\, dm\, dn .$$

На величину фазового среднего не повлияет, если взять $\gamma = 0$ и пределы $0 \leq n \leq K^2r^2$.

$$\overline{v_\varphi^2} = A^2a^2 \frac{\gamma(K)}{L(K)}\left(1 - \frac{\alpha + \beta}{2}\right), \tag{25}$$

где

$$\gamma(K) = \operatorname{arctg}\frac{K}{\sqrt{1-K^2}} - K\sqrt{1-K^2}, \tag{26}$$

α и β определены в (20а).

Усреднение $\overline{v_\varphi^2}$ по объему дает

$$\langle \overline{v_\varphi^2} \rangle = \frac{3}{5}\frac{\gamma(K)}{L(K)} A^2a^2 . \tag{27}$$

Для нахождения $\langle(\overline{v_\varphi})^2\rangle$ воспользуемся формулой (24):

$$\langle(\overline{v_\varphi})^2\rangle = \frac{1}{V}\iiint_V (\overline{v_\varphi})^2\, dx\, dy\, dz .$$

В квадратурах этот интеграл не берется, его можно взять численно. Расчеты дают

$$\langle(\overline{v_\varphi})^2\rangle \approx 0{,}24\, A^2a^2 . \tag{28}$$

Мы взяли при вычислении $K = 1$ (это дало $L(K) = \pi$), что соответствует случаю стационарности системы (об этом в разделе 4.1), а также $\gamma = 0$. Найдем дисперсию, полагая $K = 1$ в (27)

$$\langle \sigma_\varphi^2 \rangle = \langle \overline{v_\varphi^2} \rangle - \langle(\overline{v_\varphi})^2\rangle \approx 0{,}06\, A^2a^2 . \tag{29}$$

Величины (28) и (29) позволяют найти отдельно энергии регуляр-

ного вращения и хаотического движения звезд.

4.I. Условие динамического равновесия.

Запишем теорему вириала

$$2E + W = 0 , \qquad (30)$$

где

$E = E_k + E_r + E_\varphi$ есть полная кинетическая энергия движущихся звезд, а W – гравитационная энергия их взаимодействия. Компоненты кинетической энергии найдем с помощью соотношений (2I), (23) и (27)

$$E_r = \frac{M}{2} \cdot \langle \overline{v_r^2} \rangle = \frac{M}{10} \frac{g(K)}{L(K)} A^2 a^2 , \qquad (3Ia)$$

$$E_z = \frac{M}{2} \cdot \langle \overline{v_z^2} \rangle = \frac{M}{10} C^2 c^2 , \qquad (3Ib)$$

$$E_\varphi = \frac{M}{2} \cdot \langle \overline{v_\varphi^2} \rangle = \frac{3M}{10} \frac{\gamma(K)}{L(K)} A^2 a^2 , \qquad (3Ic)$$

где M –полная масса системы.

Гравитационная энергия однородного сфероида хорошо известна (см. например, Чандрасекхар (I973))

$$W = -\frac{3M^2G}{5a} \cdot \frac{\arcsin e}{e} . \qquad (32)$$

Подставляя формулы (3I) и (32) в (30), получим условие на величину параметра K, при котором система находится в стационарном состоянии. Удобно вывести соотношения (с помощью формул (3b, c), (3I a, b, c) и (32)

$$\frac{E_r}{|W|} = \frac{1}{2}\left(1 - f(e)\right) , \qquad (33a)$$

$$\frac{E_z}{|W|} = \frac{1}{4}\,\frac{g(K)}{L(K)}\cdot f(e)\,, \tag{33b}$$

$$\frac{E_\varphi}{|W|} = \frac{3}{4}\,\frac{\gamma(K)}{L(K)}\cdot f(e)\,, \tag{33c}$$

где

$$f(e) = \frac{1}{e^2} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e\,\arcsin e}\,, \tag{34}$$

и e – эксцентриситет меридиального сечения сфероида. Подставив формулы (33) в (30), получим факторизованное по e и K выражение:

$$f(e)\cdot\left\{\frac{1}{4}\,\frac{g(K)}{L(K)} + \frac{3}{4}\,\frac{\gamma(K)}{L(K)} - \frac{1}{2}\right\} = 0\,. \tag{35}$$

Так как $f(e)$ не обращается в нуль при $0 \leqslant e \leqslant 1$ ($f(e) = 2/3$ при $e = 0$ и $f(e) = 1$ при $e = 1$), то выражение в скобках приравниваем нулю. Функции $L(K)$, $g(K)$ и $\gamma(K)$ даются формулами (16а), (20 b) и (26). Легко видеть, что выражение

$$\frac{1}{4}\,\frac{g(K)}{L(K)} + \frac{3}{4}\,\frac{\gamma(K)}{L(K)} - \frac{1}{2} = 0$$

справедливо при $K = 1$. Итак, во всех характеристиках модели, находящейся в стационарном состоянии, нужно K принять равным 1. Равновесная модель сфероида описывается следующими формулами:

компоненты дисперсии скоростей (усредненные по объему сфероида):

$$\langle \overline{v_r^2} \rangle = 0.10\,A^2 a^2\,, \tag{36}$$

$$\langle \overline{v_z^2} \rangle = 0.20\,C^2 c^2\,, \tag{37}$$

$$\langle b_\varphi^2 \rangle = 0.06\,A^2 a^2\,, \tag{38}$$

скорость вращения

$$\overline{v_\varphi} = \frac{2Aa}{\pi^2}\,c\sqrt{1-\alpha}\,E\left(\frac{\pi}{2};\sqrt{\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}}\right). \tag{39}$$

вспомогательные величины:

$$\langle(\overline{v_r})^2\rangle = 0{,}24 A^2 a^2 , \tag{40}$$

$$\langle\overline{v_\varphi^2}\rangle = 0{,}80 A^2 a^2 . \tag{41}$$

Производные величины:

$$\left.\begin{aligned} E_r &= 0{,}05 M A^2 a^2 \\ E_z &= 0{,}10 M C^2 c^2 \\ E_{rot} &= 0{,}12 M A^2 a^2 \end{aligned}\right\} \text{ компоненты энергии хаотического движения} \tag{42, 43, 44}$$

$$\frac{E_r}{|W|} = 0{,}125 f(e) , \tag{45}$$

$$\frac{E_z}{|W|} = 0{,}50(1-f(e)) , \tag{46}$$

$$\frac{E_{rot}}{|W|} \simeq 0{,}30 f(e) , \tag{47}$$

$$\frac{E_\varphi}{|W|} = 0{,}375 f(e) , \tag{48}$$

$$\frac{E_{rand}}{|W|} = 0{,}50 - 0{,}30 f(e) , \tag{49}$$

$$\frac{E_{rot}}{E_{rand}} = \frac{0{,}30 f(e)}{0{,}50 - 0{,}30 f(e)} . \tag{50}$$

(51)

Здесь E_{rot} –энергия вращения, E_{rand} –энергия хаотического движения.

Важной характеристикой модели является $\frac{E_{rot}}{|W|}$ (формула (48)); согласно критерию устойчивости (Пибле и Острайкер, 1973), осесимметричные гравитирующие системы устойчивы при $\frac{E_{rot}}{|W|} \leqslant 0{,}14$. Согласно же (48), для однородного сфероида этот критерий не выполняется: $0{,}20 \leqslant \frac{E_{rot}}{|W|} \leqslant 0{,}30$ (см.рис.5).

Характерно, что отношение $\frac{E_{rot}}{E_r} \simeq 2{,}4$ не зависит от степени сжатия $\varepsilon \equiv 1 - \frac{c}{a}$. Далее, в области $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 0{,}7$ выполняется неравенство $E_{rand} > E_{rot}$, а при $\varepsilon \gtrsim 0{,}7$ знак неравенства

обратный (рис.5).

Отметим, что при $\mathcal{E}=0$ (сфера) модель имеет отличную от нуля E_{rot} – это одна из особенностей динамики бесстолкновительных систем с анизотропией дисперсии скоростей (известно, что для жидких фигур и бесстолкновительных систем с изотропным давлением энергия вращения обращается в нуль при $\mathcal{E}=0$). На рис.6 изображены графики формул (46), (47), (49). Сумма трех графиков при любом сжатии равна I/2 (теорема вириала).

5. Заключение.

Исследованная модель однородного бесстолкновительного сфероида имеет анизотропию дисперсии скоростей, и в этом отношении является альтернативной сфероиду с изотропным "давлением". Различие этих моделей проявляется уже в том, что при $\mathcal{E}=0$ (сфера) сфероид с анизотропией имеет отличную от нуля энергию регулярного вращения, а сфероид с изотропным "давлением" вращения не имеет. Существенно отличие и в динамике – в анизотропном сфероиде дифференциальное вращение (если $\overline{v_r^2}\neq 0$), а изотропном оно твердотельное. Интересным является то, что у первой модели вращение граничной поверхности твердотельное, но эта скорлупа не состоит из одних и тех же звезд. Третьим важным отличием моделей сфероида является разная величина предельных сжатий, получаемых с их помощью (см. статью Озерного и Кондратьева (1978), в которой модель применена к галактикам $S0$).

Найденное для модели с анизотропией отношение $E_{rot}/|W|$ не удовлетворяет критерию устойчивости Либла и Остайкера ни при каком сжатии. В вопросе применения модели к галактикам $S0$ это

свидетельствует о том, что кроме дисковой компоненты существует четко наблюдаемая сфероидальная составляющая, вследствии чего $E_{rot}/|W|$ уменьшается.

В системе отсчета, связанной с граничной скорлупой сфероида, направление токов вещества противоположно вращению поверхности. В отличии от токов в однородном эллипсоиде, найденных Фриманом, в сфероиде отсутствуют противотоки вещества в инерциальной системе отсчета.

Характерно, что отношение $\frac{E_{rot}}{E_r}$ не зависит от сжатия сфероида. В области сжатий $0 \leq \varepsilon \leq 0{,}7$ энергия хаотического движения частиц превышает энергию регулярного вращения, но при $\varepsilon \geq 0{,}7$ $E_{rot} > E_{rand}$. Это находит отражение в том, что E_{rot}/E_{rand} при больших сжатиях модели больше единицы и хорошо согласуется с оценкой этого отношения для $S0$ галактик.

Автор признателен Л.М.Озерному за большую помощь в работе над данной статьей.

Литература

Бинни (Binney J.J.), 1976, Monthly Not. Roy. Astron. Soc., 177,19.

Вилсон (Wilson C.P.), 1975, Astron. J., 80, 175.

Готт (Gott J.R.), 1975, Astrophys. J., 201, 296.

Готт и Тхуан (Gott J.R., Thuan T.X.), 1975, Nature, 257, 774.

Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., ГИФМЛ, 1962.

Озерной Л.М. Кондратьев Б.П., Astron. Astrophys. (в печати.

Ларсон(Larson R.B.), 1975, Monthly Not. Roy. Astron. Soc., 173,671.

Острайкер и Пиблс (Ostriker J.P., Peebles P.J.E.), 1973, Astrophys. J., 186, 467.

Поляченко В.Л., 1976, ДАН СССР, 229, 1335.

Поляченко В.Л., Фридман А.М., "Равновесие и устойчивость гравитирующих систем", "Наука", М., 1976.

Фримен (Freeman K.C.), 1966, Monthly Not. Roy. Astron. Soc., 134, 1.

Чандрасекхар С., Эллипсоидальные фигуры равновесия". "Мир", М., 1973.

Приложение I.

Переход в интегральном уравнении (4) от переменных (v_x, v_y, v_z) к новым (T_z , $T_\perp$, K_z)

Для перехода нужно вычислить якобиан:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial T_\perp} & 0 & \frac{\partial v_y}{\partial K_z} \\ \frac{y}{x}\frac{\partial v_x}{\partial T_\perp} & 0 & \frac{\partial v_y}{\partial K_z} \\ 0 & \frac{\partial v_z}{\partial T_z} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial v_z}{\partial T_z} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial T_\perp}\left[-\frac{\partial v_y}{\partial K_z} + \frac{y}{x}\frac{\partial v_x}{\partial K_z}\right] . \qquad (I)$$

Имеем

$$\left.\begin{aligned} T_\perp &= \frac{v_x^2 + v_y^2}{2} + \frac{A^2 r^2}{2} \\ T_z &= \frac{v_z^2}{2} + \frac{C^2 z^2}{2} \\ K_z &= x v_y - y v_x \end{aligned}\right\} , \qquad (2)$$

откуда находим

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -\frac{y K_z}{r^2} \pm \sqrt{\frac{2T_\perp x^2}{r^2} - A^2 x^2 - \frac{x^2 K_z^2}{r^4}} \\ v_y &= \frac{K_z + y v_x}{x} \\ v_z &= \sqrt{2T_z - C^2 z^2} \end{aligned}\right\} . \qquad (3)$$

Находим производные:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial T_\perp} &= \pm \frac{x^2/r^2}{\sqrt{\frac{x^2 K_z^2}{r^4} + 2\frac{x^2 T_\perp}{r^2} - A^2 x^2 - \frac{K_z^2}{r^2}}} \\ \frac{\partial v_y}{\partial K_z} &= \frac{1}{x} + \frac{y}{x}\frac{\partial v_x}{\partial K_z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial T_z} &= \left(2T_z - C^2 z^2\right)^{-1/2} \end{aligned}\right\} . \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (1), легко находим якобиан

$$J=\frac{1}{X}\frac{\partial v_2}{\partial T_2}\frac{\partial v_2}{\partial T_1}=\frac{1}{\sqrt{2T_2-C^2z^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2T_1r^{-2}-K_2^2-A^2r^{-4}}}, \qquad (5)$$

что и решает поставленную задачу.

Приложение 2.

Первый этап в решении уравнения (I4).

Обозначим в этом уравнении

$$\iint\frac{m-n}{\sqrt{mn}}\frac{f(m,n,T_2)}{\sqrt{(m-r^2)(r^2-n)}}\,dm\,dn=\Phi(T_2,x\text{ и }y). \qquad (I)$$

Тогда (I4) примет вид

$$\frac{4\rho_0}{A^2}\eta\left(1-\frac{r^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)=\int\limits_{\frac{c^2z^2}{2}}^{c^2z^2\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)}\frac{\Phi(T_2,x\text{ и }y)}{\sqrt{2T_2-c^2z^2}}\,dT_2\ . \qquad (2)$$

Обозначив:

$$X=1-\frac{r^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2},$$

$$J=X+\frac{z^2}{c^2}-\frac{2T_2}{c^2z^2},$$

получим уравнение Абеля

$$\frac{4\rho_0}{A^2}\eta(X)=\int\limits_0^X\frac{\Phi(J)}{\sqrt{X-J}}\,dJ. \qquad (3)$$

Оно имеет стандартное решение

$$\Phi(J)=\frac{1}{\pi}\frac{4\rho_0}{A^2}\frac{d}{dJ}\int\limits_0^J\frac{\eta(X)}{\sqrt{J-X}}\,dX, \qquad (4)$$

откуда и получаем уравнение (I5) основного текста.

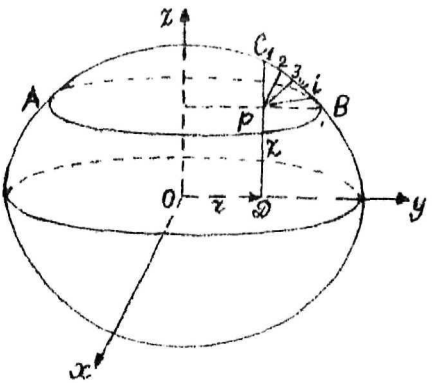

Рис.I. Сжатый сфероид с системой координат (O, x, y, z).
Показаны сечение АВ через точку P и индексы I,2,3...
i... орбит, которые могут проходить через эту точку.

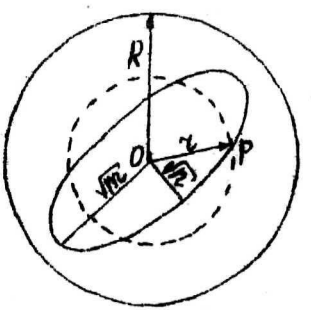

Рис.2. Сечение АВ рис.I. Показана проекция на это сечение одной из орбит с ее большой и малой полуосями.

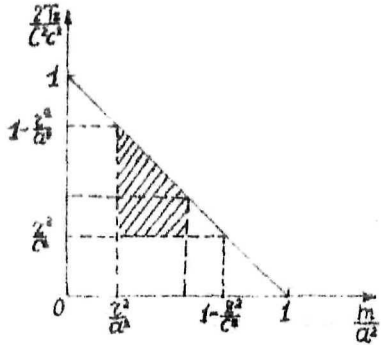

Рис.3. Заштрихована фазовая площадь интегрирования в случае вырождения функции распределения.

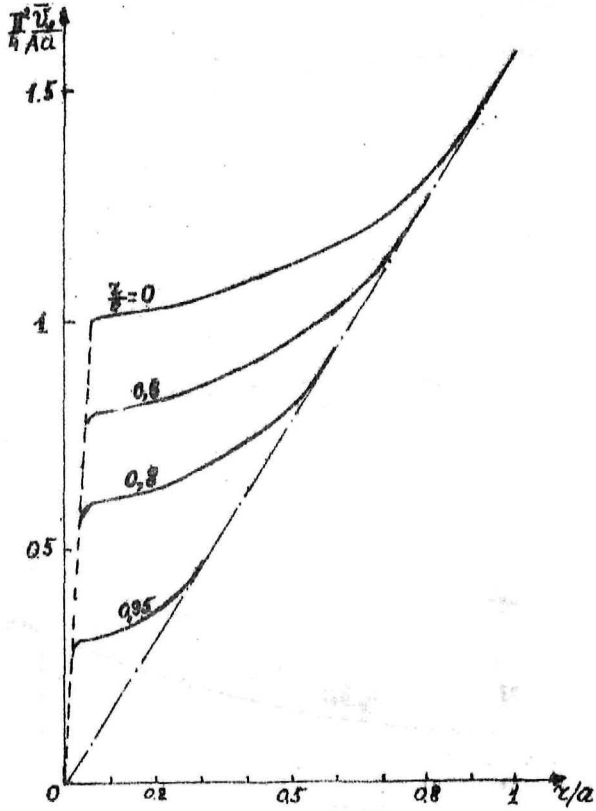

Рис.4. Кривые вращения для различных $\frac{\varkappa}{c}$; начала всех кривых изображены пунктиром и не имеют физического смысла ($\varkappa$ -окрестность оси $O\vec{z}$). Показана касательная к графикам для точек, находящихся на поверхности сфероида.

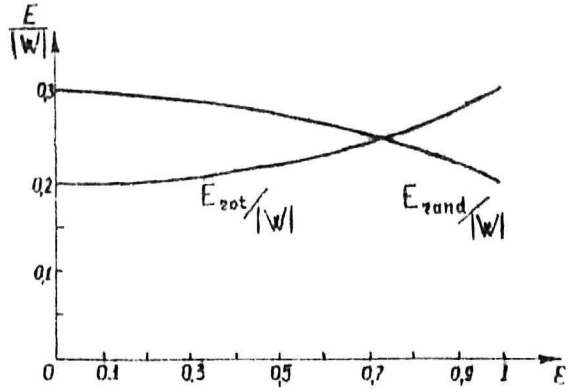

Рис.5. Графики $\frac{E_{rand}}{|W|}$ и $\frac{E_{rot}}{|W|}$ как функции сжатия ε сфероида.

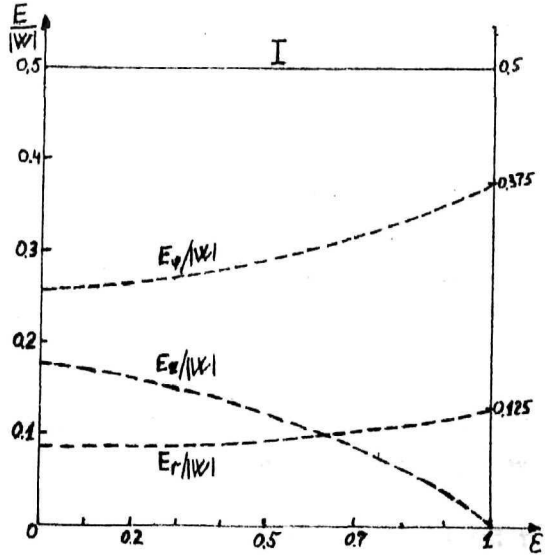

Рис.6. Графики $\frac{E_z}{|W|}$, $\frac{E_r}{|W|}$ и $\frac{E_\varphi}{|W|}$. График (I) – их сумма.

Т - 19596

Подписано в печать 1/XI 19 78 г.
Заказ № 577. Тираж 100 п/л 1,4

Отпечатано в Редакционно-издательском отделе ФИАН СССР

Москва, В-312, Ленинский проспект, 53