АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени П. Н. Лебедева

Физика космоса

Препринт № 52

Б.П.Кондратьев

ПОТЕНЦИАЛЫ И ДИНАМИКА СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОГО ЭЛЛИПСОИДА

Москва - 1981

АННОТАЦИЯ

В первой части статьи решается задача о нахождении потенциала неоднородного эллипсоида, в котором слои равной плотности представлены семейством соосных, в общем случае не подобных друг другу эллипсоидов. Доказывается, что найденный потенциал имеет все свойства ньютоновского потенциала. Получены выражения для механических и динамических характеристик эллипсоида. Во второй части исследуется влияние внутренней структуры конфигурации - распределения вещества и профиля сплюснутости слоев равной плотности - на динамические свойства неоднородных эллипсоидов. Рассматриваются и сравниваются модели, у которых слои имеют форму сжатого и вытянутого сфероидов. Учет влияния внутренней структуры на динамику сжатого сфероида ставит под сомнение старое представление о том, что все эллиптические галактики со сжатием больше Е4 неустойчивы относительно образования трехосного бара.

The potentials and dynamics of heterogeneous ellipsoid, by B.P.Kondratjev. In the first part of the paper the problem of determination of the potential of heterogeneous ellipsoid in which constant density strata are presented by family of co-axial, in general nonsimilar ellipsoids, is colved. The derived potential has all the properties of a standart potential. The mechanical and dynamical characteristics fof the ellipsoid are found. In the second part the influence of intrinsic structure - the mass distribution and the ellipticity profil of strata - on the dynamical properties of ellipsoids is investigated. The models with the strata having the form of oblate and prolate spheroids are analised. Taking into account the influence of internal structure on the dynamics of oblate spheroid leads to refinement of early concept that all E-galaxies with ellipticity more than E4 are non-stable with respect to formation of 3-axial buldge.

I. Введение.

Определение потенциала сил притяжения [x] эллипсоидальных фигур является одной из основных задач теории потенциала. Исторически первыми были исследованы однородные эллипсоиды, для которых потенциалы во внутренней и внешней точке с координатами x_i соответственно равны:

$$\varphi_i^0 = \pi G \rho a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{dv}{\Delta(v)}\left(1 - \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{a_i^2 + v}\right); \qquad (1)$$

$$\varphi_e^0 = \pi G \rho a_1 a_2 a_3 \int_\lambda^\infty \frac{dv}{\Delta(v)}\left(1 - \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{a_i^2 + v}\right), \qquad (2)$$

где $a_2 \geqslant a_1 \geqslant a_3$ - полуоси эллипсоида, а символ Δ равен

$$\Delta^2(v) = (a_1^2 + v)\cdot(a_2^2 + v)\cdot(a_3^2 + v) . \qquad (3)$$

λ в формуле (2) - это эллипсоидальная координата рассматриваемой точки относительно граничной поверхности эллипсоида, являющаяся положительным корнем уравнения

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{a_i^2 + \lambda} = 1 . \qquad (4)$$

Последующим предметом исследований стали неоднородные эллипсоиды, для которых в постановку задачи входит задание рукой распределения плотности. Ферререс первым поставил задачу о потенциалах эллип-

---

x) В небесной механике используется также термин "силовая функция".

соида, плотность которого является степенной функцией координат (см., например, Муратов [I]). Для прикладных целей важно исследовать другой тип неоднородного эллипсоида (так называемого слоисто-неоднородного), у которого плотность постоянна на эллипсоидальных поверхностях, но изменяется от слоя к слою. Задача определения потенциалов таких конфигураций значительно упрощается в том случае, когда слои равной плотности представляют собой эллипсоиды, подобные и концентрические с граничным эллипсоидом. Причина упрощения конечно в том, что вклад, вносимый в общий потенциал от элементарной гомеоидальной оболочки, хорошо известен. Выражение для потенциала эллипсоида с подобными слоями было получено в ряде работ (Пицетти [2], Чаплыгин [3], Дубошин [4]). Систематическому изложению результатов исследований по данному вопросу посвящена глава о потенциалах в монографии Чандрасекхара [5] . Распределение плотности у такого эллипсоида является функцией только одного параметра $\rho=\rho(m^2)$, где $m^2=\sum\limits_{i=1}^{3}\frac{x_i^2}{a_i^2}$ есть уравнение слоя равной плотности. Потенциалы во внутренней и внешней точке с координатами x_i даются формулами:

$$\varphi=\pi G a_1 a_2 a_3\int\limits_0^\infty\frac{du}{\Delta(u)}\int\limits_{m^2(u)}^1 dm^2\rho(m^2)\ ; \tag{5}$$

$$\varphi=\pi G a_1 a_2 a_3\int\limits_\lambda^\infty\frac{du}{\Delta(u)}\int\limits_{m^2(u)}^1 dm^2\rho(m^2)\ , \tag{6}$$

где функция $m^2(u)$ находится из уравнения

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i^2}{a_i^2+u}=m^2\ , \tag{7}$$

а Δ и λ имеют тот же смысл, что и для однородного эллипсоида (формулы (3) и (4)). Положив в (5) и (6) $\rho = const$, получим выражения для потенциалов однородного эллипсоида (I) и (2).

Часто, однако, при решении задач физики и астрономии нельзя считать слои подобными друг другу и требуется знать потенциалы таких слоисто-неоднородных эллипсоидов, у которых сплюснутость слоев равной плотности меняется от одного слоя к другому. Наглядный пример из астрономии: эллиптические галактики, об изменении сплюснутости слоев у которых известно из наблюдений. О необходимости исследовать эллипсоиды с переменной сплюснутостью слоев говорят и теоретические аргументы. Вспомним известную теорию Клеро, согласно которой изменение сплюснутости эллипсоидальных слоев у медленно вращающихся конфигураций есть общая закономерность.

Впервые задачу нахождения потенциалов слоисто-неоднородных эллипсоидов с переменной сплюснутостью слоев поставил Робертс [6]. По-прежнему, задавая закон плотности в виде $\rho = \rho(m^2)$, он записывает уравнение слоя следующим образом

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{a_i^2(m)} = m^2 , \qquad (8)$$

где $0 \leq m \leq m_s$. Заметим, что $a_i(m)$ в (8) не являются полуосями эллипсоида. Для нахождения потенциала тела, Робертс делит его на элементарные эллипсоидальные оболочки и оригинальным способом оценивает вклад от одной такой оболочки, ограниченной поверхностями $S(m)$ и $S(m+dm)$

$$d\varphi = dm\, \rho(m) \frac{d}{dm} \varphi^0(m) , \qquad (9)$$

где $\varphi^0(m)$ – потенциал однородного эллипсоида единичной плотности с граничной поверхностью $S(m)$. Суммируя по оболочкам, он находит полный потенциал тела

$$\varphi = \int\limits_0^{m_s} dm \rho(m^2) \frac{d}{dm} \varphi^0(m) . \qquad (10)$$

Далее общей формулы (10) Робертс, однако, не пошел и потенциалы эллипсоида им не были получены. Следует заметить, что сама формула (10) является правильной только при определении потенциала эллипсоида во внешней точке, но не верна для случая внутренней точки. Данная статья разделена на две части. В первой части получены точные выражения для потенциала слоисто-неоднородного эллипсоида во внешней и внутренней точке (глава I). В главе II доказывается, что найденные потенциалы имеют все необходимые и достаточные свойства, которым должен удовлетворять потенциал. В главе III получены механические характеристики эллипсоида. Найдено, в частности, точное выражение тензора вириала для эллипсоида-подсистемы. Показано, что Бинни [7] допустил при нахождении тензора вириала подсистемы серьезную неточность. В остальной части работы исследуется динамика эллипсоида (глава IV и далее). Отдельно обсуждается вопрос о том, что эллипсоид рассмотренного типа при описании динамики вращающихся конфигураций является только приближенной моделью.

Часть I.

I. Потенциалы слоисто-неоднородного эллипсоида.

Пусть a_i обозначают полуоси граничного эллипсоида, а уравнение слоя равной плотности представляет собой эллипсоид с полуосями $m \cdot \alpha_i(m) \cdot a_i$

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{\alpha_i^2(m)\cdot a_i^2} = m^2 , \tag{II}$$

где m - параметр, непрерывно изменяющийся от нуля до единицы (для сплошного эллипсоида) или от некоторого нижнего предела до единицы (для эллипсоидальной оболочки). Рассматриваются неоднородные эллипсоиды с распределением плотности

$$\rho = \rho(m^2) . \tag{I2}$$

Формулой (II) описывается однопараметрическое семейство концентрических эллипсоидов, не подобных друг другу в общем случае зависимости функций α_i от m. Функции $\alpha_i(m)$ должны удовлетворять следующим условиям:

а). Они непрерывны вместе со своими первыми производными;

в) Поверхности равной плотности (II) не должны пересекаться друг с другом;

с) На граничной поверхности эллипсоида $\alpha_i(m=1)=1$.

Частный случай эллипсоида с подобными слоями мы получим, положив в (II) $\alpha_i(m)\equiv 1$.

<u>Теорема I.</u> Потенциал в точке x_i, внешней по отношению к неоднородному эллипсоиду описанного типа, равен

$$\varphi = \pi G a_1 a_2 a_3 \int_{\lambda}^{\infty} du \int_{m^2(u)}^{1} dm^2 \rho(m^2) \frac{d}{dm^2}\left[\frac{\prod_{i=1}^{3}\alpha_i(m)}{\Delta(m,u)}\left(m^2 - \sum_{i=1}^{3}\frac{x_i^2}{\alpha_i^2(m)a_i^2+u}\right)\right], \tag{I3}$$

где функция $m(u)$ неявно определяется уравнением

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{\alpha_i^2(m)a_i^2+u} = m^2 ; \tag{I4}$$

λ есть эллипсоидальная координата точки X_i относительно граничного эллипсоида, являющаяся положительным корнем уравнения (4), а символ Δ равен

$$\Delta^2(m,u) = \prod_{i=1}^{3}(\alpha_i^2(m)a_i^2 + u) . \tag{15}$$

Доказательство. Рассмотрим сплошной эллипсоид как состоящий из серии бесконечно тонких эллипсоидальных оболочек. Вносимый в общий потенциал вклад от одной элементарной оболочки, ограниченной поверхностями $S(m)$ и $S(m+dm)$, пропорционален разности вкладов от однородных эллипсоидов с полуосями $m\alpha_i(m)a_i$ и $(m+dm)\alpha_i(m+dm)\cdot a_i$. Этот вклад равен $d\varphi$ и дается формулой (9), где в качестве $\varphi^0(m)$ нужно взять данный в (2) потенциал φ_e^0, предварительно заменив там a_i на полуоси промежуточного эллипсоида $m\alpha_i(m)a_i$. Тогда λ в формуле (2) является эллипсоидальной координатой точки X_i относительно промежуточного эллипсоида (ее мы обозначим через $\lambda(m^2)$), причем определяется последняя как положительный корень уравнения

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{X_i^2}{m^2\alpha_i^2(m)a_i^2+\lambda} = 1 , \tag{16}$$

а символ Δ равен

$$\Delta^2(m,v) = \prod_{i=1}^{3}(m^2\alpha_i^2(m)a_i^2 + v) . \tag{17}$$

Полагая

$$v = m^2 u \quad \text{и} \quad \lambda(m^2) = m^2\cdot\mu(m^2) , \tag{18}$$

где $\mu(m^2)$ неявно определяется уравнением

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i^2}{\alpha_i^2(m)a_i^2+\mu}=m^2\,, \tag{19}$$

запишем выражение для $\varphi_e^0(m)$ в форме

$$\varphi_e^0(m)=\pi G a_1 a_2 a_3\prod_{i=1}^{3}\alpha_i(m)\int\limits_{\mu(m^2)}^{\infty}\frac{du}{\Delta(m,u)}\left(m^2-\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i^2}{\alpha_i^2(m)a_i^2+u}\right). \tag{20}$$

В формуле (20) $\Delta(m,u)$ дано в (I5). Подставляя (20) в формулу (9) и интегрируя по m^2 от 0 до I, получим выражение для полного потенциала

$$\varphi=\pi G a_1 a_2 a_3\int\limits_0^1 dm^2\rho(m^2)\int\limits_{\mu(m^2)}^{\infty}du\,\frac{d}{dm^2}\left[\frac{\prod_{i=1}^{3}\alpha_i(m)}{\Delta(m,u)}\left(m^2-\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i^2}{\alpha_i^2(m)a_i^2+u}\right)\right]. \tag{2I}$$

Рассмотрим теперь на рис.I область интегрирования в равенстве (2I). Легко видеть, что в двойном интеграле можно изменить порядок интегрирования и вместо прежних пределов считать, что u изменяется от $\lambda(m=1)$ до ∞, а m – от определяемого уравнением (I4) значения $m^2(u)$ до I. Поскольку $\lambda(m=1)$ есть положительный корень уравнения (4), то изменение порядка интегрирования в (2I) приводит к требуемому результату (I3).

Замечание I. Потенциал в точке на граничном эллипсоиде (для которой $\lambda(m=1)=0$) равен

$$\varphi=\pi G a_1 a_2 a_3\int\limits_0^{\infty}du\int\limits_{m^2(u)}^{1}dm^2\rho(m^2)\frac{d}{dm^2}\left[\frac{\prod_{i=1}^{3}\alpha_i(m)}{\Delta(m,u)}\left(m^2-\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i^2}{\alpha_i^2(m)a_i^2+u}\right)\right]. \tag{22}$$

Замечание 2. Потенциал во внешней для эллипсоида точке, данный в (I3), зависит от ее координат x_i явно и неявно (в последнем случае через нижние пределы интегрирования λ и $m^2(u)$).

Замечание 3. Полагая в (I3),(I4) и (I5) $\alpha_i(m)\equiv 1$, получим уже известное выражение (6) для потенциала эллипсоида с подобными слоями. Это есть необходимое (но не достаточное) условие того, что φ из (I3) действительно является потенциалом слоисто-неоднородного эллипсоида. В главе II показано, что найденный потенциал обладает всеми свойствами обычного потенциала.

Теорема 2. Потенциал во внутренней точке x_i неоднородной эллипсоидальной оболочки, ограниченной эллипсоидами с полуосями a_i и $n\cdot\alpha_i(n)\cdot a_i$, дается выражением

$$\varphi=\pi G a_1 a_2 a_3\int_0^\infty du\int_{n^2}^1 dm^2\rho(m^2)\frac{d}{dm^2}\left[\frac{\prod_{i=1}^{3}\alpha_i(m)}{\Delta(m,u)}\left(m^2-\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i^2}{\alpha_i^2(m)a_i^2+u}\right)\right]. \quad (23)$$

Доказательство. Вклад в потенциал φ от внешней для x_i элементарной оболочки мы получим, если в формулу (9) в качестве $\overset{0}{\varphi}(m)$ подставим данный в (I) потенциал однородного эллипсоида $\overset{0}{\varphi_i}$, заменив там a_i на полуоси промежуточного эллипсоида $m\alpha_i(m)a_i$. Полагая $v=m^2u$, получим

$$\overset{0}{\varphi_i}(m)=\pi G a_1 a_2 a_3\prod_{i=1}^{3}\alpha_i(m)\int_0^\infty\frac{du}{\Delta(m,u)}\left(m^2-\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i^2}{\alpha_i^2(m)a_i^2+u}\right), \quad (24)$$

где $\Delta(m,u)$ определено в (I5). Подставляя (24) в (9) и интегрируя по m^2 от n^2 до I, находим полный потенциал

$$\varphi=\pi G a_1 a_2 a_3\int_{n^2}^1 dm^2\rho(m^2)\int_0^\infty du\frac{d}{dm^2}\left[\frac{\prod_{i=1}^{3}\alpha_i(m)}{\Delta(m,u)}\left(m^2-\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i^2}{\alpha_i^2(m)a_i^2+u}\right)\right]. \quad (25)$$

Изменив порядок интегрирования в (25) (что легко сделать, т.к. пределы по m не зависят от u), мы получим требуемый результат (23).

Замечание 4. Если сплюснутость слоев изменяется с расстоянием, потенциал эллипсоидальной оболочки во внутренней точке явно зависит от ее координат x_i. В частном случае подобных слоев потенциал не зависит от x_i и становится равным некоторой постоянной.

Теорема 3. Потенциал во внутренней точке x_i неоднородного эллипсоида рассмотренного типа дается выражением

$$\varphi=\pi G a_1 a_2 a_3\int_0^\infty du\int_{m^2(u)}^1 dm^2\rho(m^2)\frac{d}{dm^2}\left[\frac{\prod_{i=1}^3\alpha_i(m)}{\Delta(m,u)}\left(m^2-\sum_{i=1}^3\frac{x_i^2}{\alpha_i^2(m)a_i^2+u}\right)\right]. \quad (26)$$

Доказательство. Полный потенциал во внутренней точке складывается из вклада от сплошного эллипсоида, для которого рассматриваемая точка не является внутренней, и вклада от эллипсоидальной оболочки, для которой точка x_i не является внешней. Пусть $n\alpha_i(n)a_i$ есть полуоси эллипсоида равной плотности, проходящей через точку x_i.

. Тогда, в силу равенств (22) и (23), эти вклады равны

$$\varphi^{I}=\pi G a_1 a_2 a_3\int_0^\infty du\int_{m^2(u)}^{n^2} F(m^2,u)\,dm^2$$

и

$$\varphi^{II}=\pi G a_1 a_2 a_3\int_0^\infty du\int_{n^2}^{1} F(m^2,u)\,dm^2\,,$$

где $F(m^2,u)$ - интегрируемая функция. Складывая потенциалы φ^I и φ^{II}, получим формулу (26).

Замечание 5. Потенциал во внутренней точке эллипсоида (26) зависит от ее координат x_i двояким образом: явно, и неявно через нижний предел интегрирования $m^2(u)$.

Замечание 6. Полагая в формуле (26) $\alpha_i(m)\equiv 1$, получим потенциал эллипсоида с подобными слоями во внутренней точке (5).

II. Свойства потенциала.

I. Докажем, что потенциал эллипсоида во внешней точке (I3) удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\sum \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2} = 0 . \tag{27}$$

Вначале из уравнения (I4) находим, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i} m^2(u) = \frac{2x_i/(\alpha_i^2(m)a_i^2+u)}{1+\sum_k} , \tag{28}$$

где для краткости обозначено

$$\sum_k \equiv \sum_{k=1}^{3} \frac{x_k^2 a_k^2 \frac{d}{dm^2}\alpha_k^2(m)}{(\alpha_k^2(m)a_k^2+u)^2} . \tag{29}$$

Дифференцируя φ из (I3) по x_i и учитывая, что $m^2(u=\lambda)=1$ (это дает возможность считать λ постоянной при взятии производной от интегралов типа $\int_\lambda^\infty du \int_{m^2(u)}^{1} F(m^2,u)\,dm^2$), находим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -2\pi G a_1 a_2 a_3 \cdot x_i \int_\lambda^\infty du \left\{ \frac{\rho(m^2)\cdot \prod_{i=1}^{3}\alpha_i(m)}{\Delta(m,u)\cdot(\alpha_i^2(m)a_i^2+u)} + \right.$$
$$\left. + \int_{m^2(u)}^{1} dm^2 \rho(m^2)\frac{d}{dm^2}\left[\frac{\prod_{i=1}^{3}\alpha_i(m)}{\Delta(m,u)\cdot(\alpha_i^2(m)a_i^2+u)}\right]\right\} . \tag{30}$$

Дифференцируя по x_i выражение (30) и учитывая формулу (28), а также тождество $\alpha_i(1)\equiv 1$ и равенство $m^2(u=\lambda)=1$, находим (опуская элементарные промежуточные преобразования)

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}=-2\pi G a_1 a_2 a_3\int\limits_{\lambda}^{\infty}du\left\{\frac{\rho_s}{\Delta(1,u)(a_i^2+u)}-\int\limits_{m^2(u)}^{1}\frac{\prod\limits_{i=1}^{3}\alpha_i(m)\ \frac{d\rho(m^2)}{dm^2}}{\Delta(m,u)(\alpha_i^2(m)a_i^2+u)}\,dm^2+\right.$$

$$\left.+2x_i\left[\frac{\frac{d\rho(m)}{dm^2}\cdot\prod\limits_{i=1}^{3}\alpha_i(m)}{\Delta(m,u)(\alpha_i^2(m)a_i^2+u)\cdot(1+\sum\limits_k)}\right]_{m=m(u)}\right\}+2\pi G a_1 a_2 a_3 x_i\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\frac{\rho_s}{\Delta(1,\lambda)(a_i^2+\lambda)},$$

где $\rho_s=\rho(m=1)$. Проводя суммирование вторых производных по i и учитывая выражения (которые нетрудно доказать)

$$\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{x_i^2}{(\alpha_i^2(m)a_i^2+u)^2}\right]_{m=m(u)}=-\frac{dm^2(u)}{du}\cdot\left[1+\sum_k\right]_{m=m(u)};\tag{31}$$

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{\alpha_i^2(m)\cdot a_i^2+u}\right)=\frac{2}{\Delta(m,u)}\cdot\frac{d}{du}\Delta(m,u);\tag{32}$$

и

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i^2}{a_i^2+\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}=2,\tag{33}$$

получим
$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}=4\pi G a_1 a_2 a_3\left(\frac{\rho_s}{\Delta(1,\lambda)}-\int\limits_{\lambda}^{\infty}du\left\{-\rho_s\frac{d}{du}\left(\frac{1}{\Delta(1,u)}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int\limits_{m^2(u)}^{1}\prod_{i=1}^{3}\alpha_i(m)\frac{d\rho(m^2)}{dm^2}\frac{d}{du}\left(\frac{1}{\Delta(m,u)}\right)dm^2-\left[\frac{\prod\alpha_i(m)}{\Delta(m,u)}\right]_{m=m(u)}\cdot\frac{d}{du}\rho(m^2(u))\right\}\right).\tag{34}$$

Легко показать, что

$$\int\limits_{m^2(u)}^{1}\prod_{i=1}^{3}\alpha_i(m)\frac{d\rho(m^2)}{dm^2}\frac{d}{du}\left(\frac{1}{\Delta(m,u)}\right)dm^2=\frac{d}{du}\int\limits_{m^2(u)}^{1}\frac{\prod\limits_{i=1}^{3}\alpha_i(m)}{\Delta(m,u)}\frac{d\rho(m^2)}{dm^2}dm^2+$$

$$+\left[\frac{\prod\limits_{i=1}^{3}\alpha_i(m)}{\Delta(m,u)}\frac{d\rho(m^2)}{dm^2}\right]_{m=m(u)}\cdot\frac{d}{du}m^2(u).$$

Поэтому (34) можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}=4\pi G a_1 a_2 a_3\left(\frac{\rho_s}{\Delta(1,\lambda)}-\int\limits_{\lambda}^{\infty}du\frac{d}{du}\left\{-\frac{\rho_s}{\Delta(1,u)}+\int\limits_{m^2(u)}^{1}\frac{\prod\alpha_i(m)}{\Delta(m,u)}\frac{d\rho(m^2)}{dm^2}dm^2\right\}\right).$$

Беря по частям интеграл в фигурных скобках, получим

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}=4\pi G q_1 q_2 q_3\left[\frac{\rho_s}{\Delta(1,\lambda)}+\int_{\lambda}^{\infty}du\frac{d}{du}\left\{\left[\frac{\prod_{i=1}^{3}\alpha_i(m)}{\Delta(m,u)}\rho(m^2)\right]_{m=m(u)}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_{m^2(u)}^{1}\rho(m^2)\frac{d}{dm^2}\left[\frac{\prod_{i=1}^{3}\alpha_i(m)}{\Delta(m,u)}\right]dm^2\right\}\right]. \tag{35}$$

Обратим теперь внимание на то, что

$$\left[\int_{m^2(u)}^{1}\rho(m^2)\frac{d}{dm^2}\left[\frac{\prod_{i=1}^{3}\alpha_i(m)}{\Delta(m,u)}\right]dm^2\right]_{u=\lambda}^{u=\infty}=0. \tag{36}$$

Действительно, при $u=\infty$ $\Delta^{-1}=0$, а при $u=\lambda$ $m^2(u)=1$, что и доказывает равенство (36). Оставшийся в (35) интеграл дает, как легко видеть

$$\left[\frac{\prod_{i=1}^{3}\alpha_i(m(u))}{\Delta(m(u),u)}\rho(m^2(u))\right]_{u=\lambda}^{u=\infty}=-\frac{\rho_s}{\Delta(1,\lambda)}. \tag{37}$$

С учетом (36) и (37) мы приходим в (35) к доказательству теоремы Лапласа (27).

2) <u>Докажем, что потенциал эллипсоида во внутренней точке (26) удовлетворяет уравнению Пуассона:</u>

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}=-4\pi G\rho. \tag{38}$$

Учитывая равенство (28), находим первую производную

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=-2\pi G a_1 a_2 a_3 x_i\int_0^\infty du\left\{\left[\rho(m^2)\frac{\prod_{i=1}^{3}\alpha_i(m)}{\Delta(m,u)(\alpha_i^2(m)a_i^2+u)}\right]_{m=m(u)}+\right.$$
$$\left.+\int_{m^2(u)}^{1}dm^2\rho(m^2)\frac{d}{dm^2}\left[\frac{\prod_{i=1}^{2}\alpha_i(m)}{\Delta(m,u)}\cdot\frac{1}{(\alpha_i^2(m)a_i^2+u)}\right]\right\}. \tag{39}$$

Дифференцируя (39) по x_i , суммируя полученные производные и учитывая равенства (28),(31) и (32) мы, совершенно как и выше, получаем выражение для лапласиана

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}=-4\pi G a_1 a_2 a_3\int_0^\infty du\frac{d}{du}\left\{\left[\rho(m^2)\frac{\prod\alpha_i(m)}{\Delta(m,u)}\right]_{m=m(u)}+\right.$$
$$\left.+\int_{m^2(u)}^{1}\rho(m^2)\frac{d}{dm^2}\left[\frac{\prod_{i=1}^{3}\alpha_i(m)}{\Delta(m,u)}\right]dm^2\right\}. \tag{40}$$

Нетрудно видеть, что

$$\left[\int_{m^2(u)}^{1}\rho(m^2)\frac{d}{dm^2}\left[\frac{\prod_{i=1}^{3}\alpha_i(m)}{\Delta(m,u)}\right]dm^2\right]_{u=0}^{u=\infty}=0\ . \tag{41}$$

Действительно, при $u=\infty$ $\Delta^{-1}=0$, а при $u=0$ имеем $\Delta=a_1a_2a_3\prod_{i=1}^{3}\alpha_i(m)$, вследствии чего

$$\frac{d}{dm^2}\left[\frac{1}{\Delta(m,0)}\prod_{i=1}^{3}\alpha_i(m)\right]=0,$$

что и доказывает равенство (41).

Окончательно, получаем

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}=4\pi G a_1 a_2 a_3\left[\rho(m^2(u))\frac{\prod_{i=1}^{3}\alpha_i(m)}{\Delta(m(u),u)}\right]_{u=0}^{u=\infty}=-4\pi G\rho, \tag{42}$$

что и доказывает теорему Пуассона (38) .

<u>Замечание 7.</u> Потенциал φ является непрерывной функцией координат x_i во всем пространстве. Это следует из срав-

нения формул (22) и (26).

Замечание 8. Найденный потенциал эллипсоида φ всюду в пространстве имеет непрерывные первые производные. В частности, величины $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ не имеют разрыва на границе эллипсоида, что следует из сравнения выражений (30) (где нужно положить $\lambda = 0$) и (39).

Замечание 9. Потенциал эллипсоида во внешней точке (I3) и его частные производные (30) на бесконечности обращаются в нуль, т.к. при $x_i \to 0$ нижний предел интегрирования $\lambda \to \infty$ и становится равным верхнему пределу.

Мы доказали, что найденный потенциал слоисто-неоднородного эллипсоида имеет все свойства ньютоновского потенциала.

Ш. Механические характеристики эллипсоида.

Для практического применения модели неоднородного эллипсоида важно знать его механические характеристики. Некоторые из них мы сейчас получим.

а) Масса и моменты инерции. Масса $M(m)$ и тензор инерции (в главных осях) $J_{ij}(m)$ промежуточного эллипсоида, ограниченного поверхностью равной плотности $S(m)$ (II) суть

$$\left.\begin{aligned} M(m) &= \int\limits_{m'<m} \rho(\vec{x}')\, d\vec{x}' \\ J_{ij}(m) &= \delta_{ij} \int\limits_{m'<m} \rho(\vec{x}')\, x_i'^2\, d\vec{x}' \end{aligned}\right\} .$$

После преобразований находим

$$M(m)=\frac{4}{3}\pi a_1 a_2 a_3\int_0^{m^2} dm'^2\rho(m'^2)\frac{d}{dm'^2}\Big[m'^3\prod_{i=1}^{3}\alpha_i(m')\Big]$$

$$J_{ij}(m)=\frac{4}{15}\pi a_1 a_2 a_3 a_i a_j\delta_{ij}\int_0^{m^2} dm'^2\rho(m'^2)\frac{d}{dm'^2}\Big[m'^5\alpha_i^2(m')\prod_{i=1}^{3}\alpha_i(m')\Big] \qquad (43)$$

Ниже понадобятся также разности моментов инерции

$$N_{k,l}(m)=J_{kk}(m)-J_{ll}(m) \text{ где } k,l=1,2,3. \qquad (44)$$

б). Тензор гравитационной энергии. Выражение для гравитационной энергии W исследуемого эллипсоида имеет самый простой вид в том случае, когда конфигурация собирается из слоев равной плотности, начиная с наружного. Символическая формула, выражающая этот способ, выглядит так [6]

$$W=-\int_m\Big[\int_{m'<m} d\vec{x}'\rho(\vec{x}')\,d\varphi(\vec{x}')\Big], \qquad (45)$$

где $d\varphi(\vec{x}')$ из (9), причем в качестве $\varphi^0(m)$ нужно взять потенциал однородного эллипсоида во внутренней точке (24).

Заменяя в формуле (9) потенциал $\varphi^0(m)$ тензорным потенциалом однородного эллипсоида во внутренней точке [5]

$$\varphi^0_{ij}(m)=\pi G\Big[2\big(A_j-m^2\alpha_i^2(m)a_i^2A_{ij}\big)x_ix_j+m^2\alpha_i^2(m)a_i^2\delta_{ij}\Big(A_i-\sum_{l=1}^{3}A_{il}x_l^2\Big)\Big] \qquad (46)$$

и используя тензорное обобщение выражения (45)

$$W_{ij}=-\int_m\Big[\int_{m'<m} d\vec{x}'\rho(\vec{x}')\,d\varphi_{ij}(\vec{x}')\Big],$$

получим формулу для тензора гравитационной энергии [6]

$$W_{iJ}=-\pi G\delta_{iJ}\int_0^1 dm^2\rho(m^2)\Big[2\mathcal{J}_{ii}(m)\frac{d}{dm^2}\left(A_i-m^2\alpha_i^2(m)a_i^2A_{ii}\right)+$$

$$+M(m)\frac{d}{dm^2}\left(m^2\alpha_i^2(m)a_i^2A_i\right)-\sum_{l=1}^{3}\mathcal{J}_{ll}(m)\frac{d}{dm^2}\left(m^2\alpha_i^2(m)a_i^2A_{il}\right)\Big]. \quad (47)$$

Введенные Чандрасекхаром [5] символы A_{iJ} определяются равенством

$$A_{iJ}=a_1a_2a_3\prod_{i=1}^{3}\alpha_i(m)\int_0^\infty\frac{m^2\,du}{\Delta(m,u)\left[m^2(\alpha_i^2(m)a_i^2+u)\right]\left[m^2(\alpha_J^2(m)a_J^2+u)\right]} \quad (48)$$

и удовлетворяют тождествам (по дважды встречающемуся индексу суммирования нет)

$$\left.\begin{aligned}&A_{iJ}=A_{Ji}\ ;\ A_i-A_J=-m^2\left(\alpha_i^2(m)a_i^2-\alpha_J^2(m)a_J^2\right)A_{iJ}\\&3A_{ii}\alpha_i^2(m)a_i^2+A_{iJ}\alpha_J^2(m)a_J^2+A_{ik}\alpha_k^2(m)a_k^2=3\frac{A_i}{m^2}\quad(i\neq J\neq k)\\&A_1+A_2+A_3=2\end{aligned}\right\}. \quad (49)$$

С помощью (47) и (49) можно найти и полную гравитационную энергию эллипсоида

$$W=-\pi G\int_0^1 dm^2\rho(m^2)\left[M(m)\frac{d\mathcal{J}(m)}{dm^2}-N_{2;1}(m)\frac{dA_2}{dm^2}+N_{1;3}(m)\frac{dA_3}{dm^2}\right], \quad (50)$$

где

$$\mathcal{J}(m)=m^2\cdot\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^2(m)a_i^2A_i\ . \quad (51)$$

в) <u>Тензор вириала эллипсоида-подсистемы.</u> Тензором вириала $Z_{iJ}(m)$ промежуточного эллипсоида с граничной поверхностью равной плотности $S(m)$ (11) называется величина

$$Z_{iJ}(m)=\int\limits_{V\in S(m)}\rho(\vec{x})\,x_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_J}\,d\vec{x}\ . \quad (52)$$

В случае, когда сила притяжения в точке $\vec{x}$ создается распределением вещества внутри того же объема, на который распространено интегрирование в (52), имеет место следующее равенство (Чандрасекхар [5], стр.27)

$$\int_V \rho(\vec{x}) x_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} d\vec{x} = -\frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{x}) \varphi_{ij}(\vec{x}) d\vec{x} \, . \tag{53}$$

В нашем случае потенциал в точке $\vec{x}$, создается массой всего эллипсоида с границей $S(m=1)$, а интегрирование в (52) распространено на объем промежуточного эллипсоида. Удобно представить полный потенциал φ в (52) суммой

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi^{I}(\vec{x}) + \varphi^{II}(\vec{x}) \, ,$$

где φ^{I} и φ^{II} - вклады соответственно от сплошного эллипсоида с граничной поверхностью $S(m)$ и от эллипсоидальной оболочки, ограниченной поверхностями $S(m)$ и $S(m=1)$. Тогда для первого из двух членов, входящих в $Z_{ij}(m)$, имеем (согласно равенству (53))

$$Z^{I}_{ij}(m) = -\frac{1}{2} \int_{V \in S(m)} \rho(\vec{x}) \varphi^{I}_{ij}(\vec{x}) d\vec{x} \quad .$$

Стоящее справа в этом равенстве выражение есть не что иное, как тензор гравитационной энергии эллипсоида - подсистемы со снятой верхней оболочкой. Сразу получаем

$$Z^{I}_{ij}(m) = W_{ij}(m) \, , \tag{54}$$

где $W_{ij}(m)$ находится по формуле (47), предварительно заменив там верхний предел интегрирования с I на m^2 .

Второй член тензора вириала равен

$$Z^{II}_{iJ}(m)=\int\limits_{V\in S(m)}\rho(\vec{x})x_i\frac{\partial\varphi^{II}}{\partial x_J}d\vec{x}\ , \qquad (55)$$

где в качестве $\varphi^{II}(\vec{x})$ нужно взять потенциал оболочки (23). Запишем $\varphi^{II}(\vec{x})$ с помощью равенств (48) и (51) в виде

$$\varphi^{II}(\vec{x})=\pi G\int\limits_{m^2}^{1}dm^2\rho(m^2)\frac{d}{dm^2}\Big[\mathcal{J}(m)-\sum_{i=1}^{3}A_i x_i^2\Big]. \qquad (56)$$

Дифференцируя потенциал (56) по x_J, получим выражение

$$\frac{\partial\varphi^{II}}{\partial x_J}=-2\pi G x_J\cdot\int\limits_{m^2}^{1}dm^2\rho(m^2)\frac{dA_J}{dm^2}\ , \qquad (57)$$

после подстановки которого в (55) находим

$$Z^{II}_{iJ}(m)=-2\pi G\delta_{iJ}\cdot\mathcal{J}_{ii}(m)\int\limits_{m^2}^{1}dm^2\rho(m^2)\frac{dA_i}{dm^2}\ . \qquad (58)$$

Окончательно, объединяя (54) и (58), находим

$$Z_{iJ}(m)=W_{iJ}(m)-2\pi G\delta_{iJ}\mathcal{J}_{ii}(m)\int\limits_{m^2}^{1}dm^2\rho(m^2)\frac{dA_i}{dm^2}\ . \qquad (59)$$

Из формулы (48) легко видеть, что величины A_{iJ} зависят только от отношений полуосей промежуточного эллипсоида. Удобно ввести эксцентриситеты сечений промежуточных эллипсоидов координатными плоскостями

$$e_{iJ}(m)=\left(1-\left[\frac{\alpha_J(m)a_J}{\alpha_i(m)a_i}\right]^2\right)^{1/2}\quad (i,J=1,2,3\ ;\ i\neq J), \qquad (60)$$

от которых только и зависят A_{iJ}. Тогда

$$\frac{dA_i}{dm^2}=\frac{\partial A_i}{\partial e_{13}}\frac{de_{13}(m)}{dm^2}+\frac{\partial A_i}{\partial e_{23}}\frac{de_{23}(m)}{dm^2}+\frac{\partial A_i}{\partial e_{12}}\frac{de_{12}(m)}{dm^2}\ . \qquad (61)$$

Если слои равной плотности подобны друг другу, то $\frac{de_{iJ}}{dm^2}=0$ и, следовательно, $\frac{dA_i}{dm^2}=0$. Поэтому для подобных слоев член $\mathfrak{Z}^{II}_{iJ}(m)$, данный в (58), также равен нулю. Мы приходим к заключению, что тензор вириала $\mathfrak{Z}_{iJ}(m)$ эллипсоида-подсистемы у конфигурации с подобными слоями в точности равен тензору гравитационной энергии $W_{iJ}(m)$ этой подсистемы без верхней оболочки.

Итак, в двух случаях тензор вириала становится точно равным тензору гравитационной энергии системы: а) когда рассматривается конфигурация в целом; в) когда рассматривается подсистема конфигурации с подобными слоями равной плотности.

Если же слои не подобны, то $\mathfrak{Z}_{iJ}(m)$ состоит из двух членов и дается в (59)[x] . Отметим, что знак компоненты силы притяжения материальной точки оболочкой $\frac{\partial \varphi^{II}}{\partial x_J}$ из (57) и, следовательно, знак $\mathfrak{Z}^{II}_{iJ}$ из (58), зависят от знака $\frac{dA_i}{dm^2}$, т.е. от знака производных $\frac{de_{iJ}(m)}{dm^2}$.

Найденные выше потенциалы и механические характеристики неоднородного эллипсоида обусловлены только распределением вещества внутри конфигурации. При этом не требовалось вводить дополнительного предположения о равновесном состоянии системы.

IУ. Энергия вращения.

Предположим теперь, что система находится в равновесном состоянии. Энергия вращения есть динамическая характеристика конфигурации и для ее нахождения воспользуемся тензорной теоремой вириала.

---

x) Таким образом, нельзя отождествлять тензор вириала подсистемы $\mathfrak{Z}_{iJ}(m)$ с её тензором гравитационной энергии $W_{iJ}(m)$ как делает Бинни в статье [7]. В целом же, эта статья Бинни является интересной.

Допуская, в общем случае, анизотропность давления, эта теорема в инерциальной системе отсчета имеет вид

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 \mathcal{J}_{iJ}}{dt^2} = 2T_{iJ} + W_{iJ} + \Pi\cdot\delta_{iJ} + \tilde{\Pi}_{iJ}\ ,\tag{62}$$

где T_{iJ} есть тензор кинетической энергии упорядоченного движения вещества, а Π составляет 2/3 полной внутренней энергии случайного движения частиц. Анизотропия давления учитывается тензором $\tilde{\Pi}_{iJ}$, след которого равен нулю. Предположим, что меридиональная циркуляция вещества отсутствует, т.е. $T_{33}=0$. Энергия вращения равна

$$T_{rot} = T_{11} + T_{22}\ .\tag{63}$$

Без ограничения общности примем, что в момент $t=0$ полуось a_2 совпадает с осью OX_2 инерциальной системы отсчета.

Имеем тогда [8]

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 \mathcal{J}_{iJ}}{dt^2} = \omega^2 \begin{pmatrix} N_{2;1}(1) & 0 & 0 \\ 0 & -N_{2;1}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где ω – угловая скорость вращения всей фигуры (заметим, что случай $\omega=0$ учитывается). Из (62) и предыдущей формулы следует

$$\left.\begin{aligned} 2T_{11} + W_{11} + \Pi + \tilde{\Pi}_{11} &= \omega^2 N_{2;1} \\ 2T_{22} + W_{22} + \Pi + \tilde{\Pi}_{22} &= -\omega^2 N_{2;1} \\ W_{33} + \Pi + \tilde{\Pi}_{33} &= 0 \end{aligned}\right\}.\tag{64}$$

Из (64) легко получим формулу (полагая $\tilde{\Pi}_{11} = \tilde{\Pi}_{22}$)

$$T_{rot} = (2W_{33} - W_{11} - W_{22})/2 + \frac{3}{2}\tilde{\Pi}_{33}\ ,\tag{65}$$

вид которой не зависит от того, имеет конфигурация только жесткое вращение или только вихревые движения, или то и другое одновременно x).

Согласно (65), сплюснутость слоев равной плотности обусловлена как вращением, так и анизотропией давления. Эта формула применяется в статье [9] для исследования эллиптических галактик.

Считая далее давление изотропным, положим теперь $\tilde{\Pi}_{33}=0$. В этом случае сплюснутость слоев обусловлена только вращением xx). Приведем выражение для энергии вращения к удобной аналитической форме. Подставляя в (65) компоненты W_{ij} из (47), после преобразований с использованием тождеств (48), получим

$$T_{rot} = T_1 - T_2 - T_3 \quad , \tag{66}$$

где

$$T_1 = \frac{\pi G}{2}\int_0^1 dm\,\rho(m) M(m) \frac{d}{dm}\Big[m^2\big(\alpha_1^2(m) a_1^2 A_1 + \alpha_2^2(m) a_2^2 A_2 - 2\alpha_3^2(m) a_3^2 A_3\big)\Big]$$

$$T_2 = \frac{3\pi G}{2}\int_0^1 dm\,\rho(m)\left\{N_{1;3}(m)\frac{d}{dm}\left[\frac{A_1-(1-e_{13}^2)A_3}{e_{13}^2}\right] + N_{2;3}(m)\frac{d}{dm}\left[\frac{A_2-(1-e_{23}^2)A_3}{e_{23}^2}\right]\right\}$$

$$T_3 = \pi G\int_0^1 dm\,\rho(m)\left\{N_{2;1}(m)\frac{dA_1}{dm} + \left(J_{22}(m) + 2J_{33}(m)\right)\frac{dA_3}{dm}\right\} \tag{67}$$

x) Первым, по-видимому, этот важный для исследования динамики Е - галактик момент отметил Бинни [8] (однако не для энергии вращения, а для наблюдаемого отношения средней скорости вращения к средней дисперсии скоростей.

xx) Важно отметить, что строго эллипсоидальные фигуры вращения для неоднородной жидкости невозможны и применение слоисто-неоднородного эллипсоида в качестве динамической модели требует некоторого разъяснения (см.главу У). Автор признателен В.А.Антонову за привлечение внимания к этой проблеме.

При изучении эллипсоидальных фигур со сложной внутренней структурой полезно опираться на хорошо известные у однородных эллипсоидов величины. Так, можно ввести квадрат угловой скорости классического однородного эллипсоида с $\rho = 1$

$$\frac{\Omega_0^2(e)}{\pi G} = 2\left[A_2 - (1 - e_{23}^2)A_3\right], \tag{68}$$

и величины

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2^2(m)a_2^2\,\delta p_{21}(e) &= \pi G\left(\alpha_2^2(m)a_2^2A_2 - \alpha_1^2(m)a_1^2A_1\right)/2 \\ \alpha_1^2(m)a_1^2\,\delta p_{13}(e) &= \pi G\left(\alpha_1^2(m)a_1^2A_1 - \alpha_3^2(m)a_3^2A_3\right)/2 \end{aligned}\right\}, \tag{69}$$

физический смысл которых прост: это нормированные разности гравитационных весов элементарных столбов вещества вдоль осей эллипсоида единичной плотности и полуосями $m\cdot\alpha_i(m)\cdot a_i$.

Пользуясь известными в теории классических фигур равновесия соотношениями, связывающими между собой эксцентриситеты ортогональных сечений эллипсоида, удобно будет записать

$$\left.\begin{aligned} \delta p_{21}(e) &= \frac{1}{4}\,e_{12}^2\,\Omega_0^2(e) \\ \delta p_{13}(e) &= \frac{1}{4}\,\Omega_0^2(e) \end{aligned}\right\}. \tag{70}$$

Не ограничивая общности, положим теперь $\alpha_2(m)a_2 = 1$. Используя введенные обозначения, запишем (57) в конечной форме

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{4}\int_0^1 dm\,\rho(m)M(m)\frac{d}{dm}\left[m^2\Omega_0^2(e)\cdot(2 - e_{12}^2)\right] \\ T_2 &= \frac{3}{4}\int_0^1 dm\,\rho(m)\left\{N_{1;3}(m)\frac{d}{dm}\left(\frac{\Omega_0^2(e)}{e_{13}^2}\right) + N_{2;3}(m)\frac{d}{dm}\left(\frac{\Omega_0^2(e)}{e_{23}^2}\right)\right\} \\ T_3 &= \pi G\int_0^1 dm\,\rho(m)\left\{N_{2;1}(m)\frac{dA_1}{dm} + \left(\mathcal{J}_{22}(m) + 2\mathcal{J}_{33}(m)\right)\frac{dA_3}{dm}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

Из анализа формул (71) следует, что наибольший вклад в величину энергии вращения дает член T_1. Член T_2 очень мал в широком интервале сплюснутостей слоев (на практике всегда $T_2 \simeq 0$), поскольку малы производные типа $\frac{\partial}{\partial e_{13}}\left(\Omega_0^2(e)/e_{13}^2\right)$.

Численные расчеты моделей с широким диапазоном внутренних структур показали, что член T_3 также мал - на один или два порядка меньше члена T_1.

Для конфигураций с подобными слоями $\dfrac{dA_i}{dm}=0$, поэтому в (71) $T_2=T_3=0$. Для таких неоднородных эллипсоидов

$$T_{rot}=T_1=\frac{1}{4}\Omega_0^2(e)(2-e_{12}^2)\int_0^1 dm^2\rho(m)M(m) \tag{72}$$

и (согласно формуле (50))

$$W=-2(2-A_1e_{12}^2-A_3e_{23}^2)\cdot\int_0^1\rho(m)M(m)dm^2, \tag{73}$$

т.е. отношение $t=T_{rot}/|W|$ вообще не зависит от распределения плотности вещества. Этот факт замечателен: отношение энергии вращения к гравитационной энергии у неоднородных эллипсоидальных конфигураций, состоящих из подобных слоев, в точности совпадает с одноименным отношением для классических однородных фигур вращения и является функцией только сплюснутости слоя.

V. Эллипсоид как динамическая модель.

Применение слоисто-неоднородного эллипсоида в качестве динамической модели звездных систем требует разъяснения того, когда можно применять формулу для энергии вращения (66).

Известно, что только однородная жидкая масса может иметь эллипсоидальную фигуру равновесия (и только при жестком вращении). Для неоднородной жидкости строго эллипсоидальные фигуры невозможны (что относится и к слоям равной плотности). Серьезна ли погрешность при исследовании Е-галактик (см. статью [9]) применять модель с эллипсоидальными слоями?

Точными наблюдениями установлено, что в большинстве Е-галактик изофоты являются правильными эллипсами Картер [10], Кинг [11] . Для внутренних, наиболее плотных и поэтому важных в динамике слоев отклонений от эллипсоидальности в пределах точности наблюдений вообще не замечено. Отношение M/L мало изменяется по телу галактик этого типа, поэтому форма слоев равной плотности также есть эллипсоиды. Поэтому Е-галактики являются подходящим объектом моделирования.

Влияние неоднородности массы на степень отклонения формы слоев от эллипсоидальной не столь сильное, как может показаться с первого взгляда. Отклонение от эллипсоидальности мало у слоев даже в модели Роша , у которой вся масса сосредоточена в центре. Правда, в предельной фигуре этой серии (при $\frac{\omega^2}{2\pi G\rho} \simeq 0{,}36$) граничная поверхность линзовидная, но и тогда внутренние слои очень мало отличаются от эллипсоидов вращения. Если концентрация вещества не столь большая, как в описанном случае, то отклонение формы слоев от эллипсоидов должно быть еще меньше. Укажем на исследованные Джинсом [12] вращающиеся политропы, граничная поверхность которых также ищется в форме, мало отклоняющейся от эллипсоидальной.

Исключая некоторые специальные случаи, слои у фазовых динамических моделей также почти эллипсоидальны (см., например, Вилсон [13])

В пользу модели с эллипсоидальными слоями служит тот факт, что она широко применяется при исследовании структуры вращающихся масс. Отметим, например, основательную работу Робертса [6] , где метод эллипсоидальных слоев применен для изучения структуры и динамики вращающихся политроп, а также статью Бинни [7]. Следовательно, как приближенный метод модель слоисто-неоднородного эллипсоида вполне допустима для исследования динамики вращающейся конфигурации. Именно этот вопрос и рассматривается во второй части.

Часть II.

Во второй части исследуются общие свойства влияния внутренней структуры на динамику неоднородных эллипсоидов с изотропным давлением. Для упрощения расчетов мы выбрали два простейших типа эллипсоидов. У первого слои имеют форму сжатого, а у второго - вытянутого сфероидов.

УI. Динамика моделей сжатого и вытянутого сфероидов.

В этой главе мы конкретизируем полученные в первой части формулы на двух частных формах эллипсоидальных фигур.

VI.1 Сжатый сфероид.

В уравнении слоя равной плотности (II) без потери общности полагаем

$$\alpha_1(m)\cdot a_1 = \alpha_2(m) a_2 = 1 \quad , \alpha_3(m) a_3 = \left(1 - e^2(m)\right)^{1/2};$$

тогда полуоси промежуточного сфероида суть:

$$m\,,\, m\,,\, m\left(1 - e^2(m)\right)^{1/2}. \tag{74}$$

Здесь $e(m) = e_{13}(m) = e_{23}(m)$ есть эксцентриситет этого сфероида. Функция $e(m)$ описывает профиль сплюснутости слоев равной плотности в модели.

Масса $M(m)$ и компоненты тензора инерции $\mathcal{J}_{ij}(m)$ промежуточного сфероида равны (из формул (43)) :

$$
\begin{aligned}
M(m) &= \frac{4}{3}\pi \int_0^{m^2} dm^2 \rho(m^2) \frac{d}{dm^2}\left[m^3(1-e^2)^{1/2}\right] \\
\mathcal{J}_{11}(m) &= \frac{4}{15}\pi \int_0^{m^2} dm^2 \rho(m^2) \frac{d}{dm^2}\left[m^5(1-e^2)^{1/2}\right] \\
\mathcal{J}_{33}(m) &= \frac{4}{15}\pi \int_0^{m^2} dm^2 \rho(m^2) \frac{d}{dm^2}\left[m^5(1-e^2)^{3/2}\right] \qquad (75) \\
\mathcal{N}(m) \equiv N_{1;3}(m) &= \frac{4}{15}\pi \int_0^{m^2} dm^2 \rho(m^2) \frac{d}{dm^2}\left[m^5 e^2(1-e^2)^{1/2}\right]
\end{aligned}
$$

Выражения для гравитационной энергии и энергии вращения, согласно формулам (50) и (71), равны

$$
\begin{aligned}
W &= -\pi G \int_0^1 dm^2 \rho(m^2)\left[M(m)\frac{d\mathcal{J}}{dm^2} + \mathcal{N}(m)\frac{dA_3}{de}\frac{de}{dm^2}\right] \\
T_1 &= \frac{1}{2}\int_0^1 dm\, \rho(m) M(m) \frac{d}{dm}\left[m^2 \Omega_0^2(e)\right] \qquad (76) \\
T_2 &= \frac{3}{2}\int_0^1 dm\, \rho(m) \mathcal{N}(m) \frac{d}{de}\left[\frac{\Omega_0^2(e)}{e^2}\right]\frac{de}{dm}
\end{aligned}
$$

$$
T_3 = \pi G \int_0^1 dm\, \rho(m)\left[\mathcal{J}_{11}(m) + 2\mathcal{J}_{33}(m)\right]\frac{dA_3}{de}\frac{de}{dm} \qquad (77)
$$

Коэффициенты A_i суть [5] :

$$
\begin{aligned}
A_1 = A_2 &= \frac{(1-e^2)^{1/2}}{e^3}\arcsin e - \frac{1-e^2}{e^2} \\
A_3 &= \frac{2}{e^2} - 2\frac{(1-e^2)^{1/2}}{e^3}\arcsin e \\
\mathcal{J}(m) &= 2m^2(1-e^2)^{1/2}\frac{\arcsin e}{e} \qquad (78)
\end{aligned}
$$

$\Omega_0^2(e)$ в формулах (77) является известным в теории классических однородных фигур равновесия выражением квадрата угловой скорости сфероидов Маклорена с $\rho = 1$ (см.формулу (68)).

Основной вклад в энергию вращения дает член T_1 , а T_2 мал, т.к. $\frac{d}{de}\left[\Omega_0^2(e)/e^2\right] \simeq 0$ в широком интервале сплюснутостей. Заметим, что $\frac{dA_3}{de}$ и подинтегральное выражение в T_3 имеет тот же знак, что и $\frac{de}{dm}$.

В частном случае подобия слоев $\frac{de}{dm}=0$ и $T_2=T_3=0$. Имеем

$$T_{rot}=\Omega_0^2(e)\int_0^1 m\rho(m)M(m)\,dm .$$

Под интегралом $M \infty (1-e^2)^{1/2}$ (см.формулы (75)), поэтому

$$T_{rot}(e)=const\cdot\Omega_0^2(e)(1-e^2)^{1/2} \tag{79}$$

Анализ (79) показал, что T_{rot} с возрастанием сплюснутости увеличивается, но не при всех e , а только пока $0\leq e\leq 0{,}813$. Если же $e\geq 0{,}813$, то T_{rot} с возрастанием e уже уменьшается. Замечательно, что $\frac{dT_{rot}}{de}=0$ выполняется в той самой точке $e_0 = 0{,}813$ (или $\mathcal{E}_0 = 0{,}417$), которая является точкой бифуркации последовательности сфероидов Маклорена и трехосных эллипсоидов Якоби. Далее мы увидим, что подобное свойство энергии вращения встречается и у моделей с изменяющейся сплюснутостью слоев.

Как отмечалось в первой части, в случае подобных слоев отношение $T_{rot}/|W|$ не зависит от распределения плотности, а у данной модели оно в точности совпадает с одноименным отношением для классического сфероида Маклорена и равно:

$$t(e)=T_{rot}/|W|=\frac{3}{2e^2}\left(1-\frac{e(1-e^2)^{1/2}}{\arcsin e}\right)-1 \,. \tag{80}$$

УI. 2. Вытянутый сфероид.

Эта фигура является простейшим примером эллипсоида, не имеющего симметрии относительно оси вращения. При больших сплюснутостях свойства вытянутого сфероида близки к свойствам более сложных тр сных эллипсоидов.

Полагаем в уравнении (II)

$$\alpha_1(m)a_1 = \alpha_3(m)a_3 = (1 - e^2(m))^{1/2}; \quad \alpha_2(m)\cdot a_2 \equiv 1;$$

тогда полуоси промежуточного сфероида суть

$$m(1 - e^2(m))^{1/2}, \; m, \; m(1 - e^2(m)). \tag{81}$$

Здесь $e(\;) = e_{23}(m)$ есть профиль сплюснутости модели.

Масса и компоненты тензора инерции равны (ср. с формулами (75) для сжатого сфероида)

$$M(m) = \frac{4}{3}\pi \int_0^{m^2} dm^2 \rho(m^2) \frac{d}{dm^2}\left[m^3(1 - e^2)\right]$$

$$J_{11}(m) = \frac{4}{15}\pi \int_0^{m^2} dm^2 \rho(m^2) \frac{d}{dm^2}\left[m^5(1 - e^2)^2\right]$$

$$J_{22}(m) = \frac{4}{15}\pi \int_0^{m^2} dm^2 \rho(m^2) \frac{d}{dm^2}\left[m^5(1 - e^2)\right]$$

$$N(m) = \frac{4}{15}\pi \int_0^{m^2} dm^2 \rho(m^2) \frac{d}{dm^2}\left[m^5 e^2(1 - e^2)\right] \tag{82}$$

Отметим, что $N(m)$ и $J_{ij}(m)$ в модели вытянутого сфероида зависят от структуры слоев сильнее, чем в модели сжатого сфероида.

Гравитационная энергия и энергия вращения даются формулами

$$W = -\pi G \int_0^1 dm^2 \rho(m^2)\left[M(m)\frac{dJ}{dm^2} - N(m)\frac{dA_2}{de}\frac{de}{dm^2}\right]. \tag{83}$$

$$T_1=\frac{1}{4}\int_0^1 dm\,\rho(m)M(m)\frac{d}{dm}\left[m^2\Omega_0^2(e)\right]$$

$$T_2=\frac{3}{4}\int_0^1 dm\,\rho(m)N(m)\frac{d}{de}\left[\frac{\Omega_0^2(e)}{e^2}\right]\frac{de}{dm}$$

$$T_3=-\frac{\pi G}{2}\int_0^1 dm\,\rho(m)\left[\mathcal{J}_{33}(m)+2\mathcal{J}_{22}(m)\right]\frac{dA_2}{de}\frac{de}{dm} \tag{84}$$

Следует отметить, что для данной модели нет аналога среди однородных фигур равновесия, поэтому $\Omega_0^2(e)$ уже нельзя (ср. со сжатым сфероидом) понимать как угловую скорость однородного вытянутого сфероида и формулы (84) следуют из (67), а не из (71).

Коэффициенты потенциала суть [5]

$$A_3=1/e^2-\frac{1-e^2}{2e^3}\ln\frac{1+e}{1-e}$$

$$A_2=\frac{1-e^2}{e^3}\ln\frac{1+e}{1-e}-2\frac{1-e^2}{e^2}$$

$$\mathcal{J}(m)=m^2\frac{1-e^2}{e}\ln\frac{1+e}{1-e} \tag{85}$$

В силу того, что $M(m)$ и $N(m)$ входят в выражения для W, то (см. выше) и гравитационная энергия вытянутого сфероида сильнее, чем у сжатого, зависит от профиля сплюснутости слоев.

Так как $\frac{dA_2}{de}<0$, то подинтегральное выражение в T_3 имеет тот же знак, что и $\frac{de}{dm}$.

В частном случае $\frac{de}{dm}=0$ имеем $T_2=T_3=0$

и

$$t(e)=\frac{A_2-(1-e^2)A_3}{2\frac{1-e^2}{e}\ln\frac{1+e}{1-e}}\,. \tag{86}$$

Можно показать, что с увеличением сплюснутости модели ее энергия вращения возрастает при $0\le\mathcal{E}\le 0{,}26$, но начинает убывать, если $\mathcal{E}>0{,}26$.

VII. Соотношение v_{rot}/b.

Рассмотрим одно из возможных применений параметра $t=T_{rot}/|W|$ к эллиптическим галактикам. У нас есть формулы для вычисления t

по известным из наблюдений данным фотометрии. С другой стороны, также из наблюдений, мы знаем компоненту дисперсии скоростей на луче зрения и максимальное значение скорости вращения галактики v_{rot}. Считая распределение скоростей изотропным и b постоянной по галактике x), оценим энергию хаотического движения звезд равной $\frac{1}{2}Mb^2$ (M - масса всех звезд). Кривые вращения у многих E - галактик почти плоские, поэтому $T_{rot}=\frac{1}{2}M(\gamma v_{rot})^2$ xx).

Фактически, мы имеем дело со средними по галактике значениями b и v_{rot}. Из теоремы вириала $|W|=M(\gamma\cdot v_{rot})^2+Mb^2$ легко находим искомое соотношение

$$\frac{v_{rot}}{b}=\frac{1}{\gamma}\left[t/(0.5-t)\right]^{1/2}. \tag{87}$$

В данной статье отношение v_{rot}/b рассматривается как дополнительная характеристика моделей.

---

x) Согласно наблюдениям (Янг и др. [8] , Шехтер и Ган [7] , дисперсия скоростей в большинстве E-галактик незначительно изменяется от центра к краю.

xx) Здесь $\gamma<1$ вследствии того, что v_{rot} есть max скорости вращения. Среднее значение γ , найденное по нескольким известным из наблюдений кривым вращениям, равно 0,87.

УШ. Численные расчеты.

Структуру слоев равной плотности у обеих моделей зададим следующим профилем сплюснутости

$$\mathcal{E}(m) = \mathcal{E}_s \cdot m^{\beta} . \tag{88}$$

Согласно (88), сплюснутость слоев увеличивается от центра (при $m = 0$ - это сферы) к краю, и достигает максимума на граничной поверхности при $m = 1$. С изменением параметра β меняется и профиль сплюснутости слоев. В частности, при $\beta = 0$ слои становятся подобными друг другу, а с возрастанием β (принималось β = 0, 0,3, 0,6, 0,9, 1,2, 2,0) увеличивается отклонение профиля сплюснутости от линии $\mathcal{E} = const$ и слои при данном $\mathcal{E}_s$ в среднем сильнее сферизуются.

Для изотропных конфигураций с жестким вращением возрастание сплюснутости от внутренних слоев к внешним является единственно возможным, если только плотность в них к центру увеличивается x) .

---

x) Это важное свойство $\mathcal{E}(m)$ следует из уравнения Клеро (см., например, Буллен , [16])

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{d\tau^2} + 6\tau \cdot r^{-1}\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} - 6(1-\tau)\tau^{-2} \cdot \mathcal{E} = 0 ,$$

где $\tau = \rho(\tau)/\bar{\rho}$; $\bar{\rho}$ - средняя плотность вещества внутри сфероида со средним радиусом τ . Кроме того, возрастание сплюснутости слоев можно объяснить и просто из анализа гидростатического равновесия неоднородной конфигурации.

В реальных звездных системах последнее условие выполняется, однако отсутствие жесткого вращения, а также принципиальная возможность существования анизотропии дисперсии скоростей является причиной того, что у них профиль сплюснутости изофот может и не быть монотонной функцией m . Примером таких систем являются E - галактики, профили изофот у которых имеют самый различный характер и едиными законом не описываются (см., например, Кинг [II]).

Мы могли бы исследовать конфигурации, в которых $\frac{d\mathcal{E}(m)}{dm}<0$ (или вообще $\mathcal{E}(m)$ з монотонна), однако это привело бы к значительному увеличению объема статьи. Для выяснения основных свойств моделей достаточно рассмотреть внутреннюю структуру, описываемую профилем (88).

Профиль плотности зададим законом:

$$\rho(m)=\rho_0(1-m)^n, \tag{89}$$

согласно которому на границе модели $\rho=0$.

Формулами (88) и (89) задается внутренняя структура исследуемых моделей. Эти выражения аналитически простые, что позволяет избежать двойного численного интегрирования в расчетах.

Вычисления для сжатого и вытянутого сфероидов проводились по одинаковой схеме. Интегралы, выражающие $M(m)$, компоненты тензора инерции $J_{IJ}(m)$ и $W(m)$ (формулы (76) для сжатого и (82) и для вытянутого сфероидов приводились к квадратурам и подставлялись, например, в подинтегральные выражения для T_1, T_2 и T_3 (формулы (77) и (84). Затем интегралы (77) и (84) находились численно по методу Симпсона. Требуемая точность достигалась подбором шага интегрирования (использовались шаги Δm = 0,02, и 0,01).

При заданном профиле плотности (n менялось от 1 до 8 с шагом 1), для данных $\mathcal{E}_s$ ($\mathcal{E}_s$ изменялось от 0 до 0,7 с шагом 0,1) и β, вычислялись отношения $T_{rot}/|W|$ и v_{rot}/b, полная масса M и W, T_{rot}. Часть полученных результатов приводится на рисунках статьи.

IX. Обсуждение результатов численных расчетов.

На рис. 2 приведены результаты вычислений массы, гравитационной энергии и энергии вращения модели сжатого сфероида.

При $n = 8$ и изменении β от 0 до 1.2, M и $|W|$ увеличиваются примерно в 1,5 и 2 раза, соответственно, а T_{rot} уменьшается в два раза. В то же время, при $n = 3$ зависимость характеристик модели от β менее сильная, чем при $n = 8$: M и $|W|$ увеличиваются только в 1,38 и 1,8 раза, а T_{rot} уменьшается от 1 до 0,8. Тенденция к уменьшению зависимости характеристик от величины β с убыванием n наблюдается и у модели вытянутого сфероида (рис.3). Заключаем: чем быстрее убывает плотность в конфигурации, тем эффективнее влияние структуры слоев равной плотности на механические характеристики модели [x]. С уменьшением n распределение

---

[x] Обращение этой закономерности также не тривиально: различие в законах плотности тем сильнее отражается на динамических свойствах обеих моделей, чем больше величина β. Это хорошо видно, например, на рис.5, где сплошная и пунктирная кривые $T_{rot}/|W|$ при $\beta = 0,3$ различаются не столь сильно, как при $\beta = 0,9$. Отметим, что обсуждаемая тенденция справедлива при $0 \leq \beta \leq 1$.

вещества становится все более однородным, и наконец, при $n=0$ слои вырождаются и влияние их структуры на свойства моделей исчезает.

В шаровых скоплениях и эллиптических галактиках концентрация вещества к центру очень большая [xx] и, следовательно, влияние структуры изофот на их динамику будет эффективным и обязательно должно учитываться в расчетах. Все характеристики галактики - ее массу, момент инерции, гравитационную энергию, а также отношения $T_{rot}/|W|$ и $v_{rot}/\bar{\sigma}$ следует находить с учетом структуры изофот (заметим, что две последние величины зависят также и от анизотропии дисперсии скоростей звезд).

Как показано на рис.3, M и $|W|$ вытянутого сфероида возрастают (при увеличении β от 0 до I,2 и $n = 8$) в 2,2 и 4 раза, что явно больше изменения M и $|W|$ у сжатого сфероида. Это подтверждает теоретический вывод (раздел УI.2) о том, что влияние структуры слоев равной плотности на массу и гравитационную энергию эффективнее в модели вытянутого сфероида, чем в осесимметричной модели.

Выше было установлено, что в моделях с подобными слоями энергия вращения не является монотонной функцией от ε, но что

---

xx) Об этом можно судить уже из того, что подгонка (грубая) распределения плотности в Е- галактиках возможна только при величине n в законе (89) примерно равной 80 ÷ 90 .

$\frac{dT_{rot}}{d\varepsilon} > 0$ при $\varepsilon < \varepsilon_c$ и $\frac{dT_{rot}}{d\varepsilon} < 0$ при $\varepsilon > \varepsilon_c$. Для сжатого сфероида $\varepsilon_c = \varepsilon_o = 0{,}417$, для вытянутого $\varepsilon_c = 0{,}26$ (рис.4). Такое свойство энергии вращения не тривиально и проявляется в любопытном (на первый взгляд - даже странном) характере зависимости T_{rot} от β у вытянутого сфероида на рис.3 - величина T_{rot} при $\beta = 0{,}3$ больше, чем при $\beta = 0$. Интуитивно следовало бы ожидать, что с увеличением β величина T_{rot} всегда будет уменьшаться (так как слои в среднем сферизуются), как например, у сжатого сфероида на рис.2 . Но существование критического сжатия $\varepsilon_c = 0{,}26$ проясняет, что на рис.3 с увеличением β от 0 до 0,3 сжатие слоев в среднем уменьшается и, оставаясь больше критического (т.к. $\varepsilon_s = 0{,}4$), приближается к нему, и вследствие условия $\frac{dT_{rot}}{d\varepsilon} < 0$ увеличивается T_{rot} . На рис.2 среднее сжатие слоев не превышает критического $\varepsilon_c \simeq 0{,}42$, потому с увеличением β величина T_{rot} уменьшается. Ясно, что если бы мы строили график для сжатого сфероида с $\varepsilon_s = 0{,}5 > \varepsilon_c$, картина была бы аналогичной рис.3. Следовательно, ε_c есть функция от профиля сплюснутости слоев. С увеличением β величина ε_c увеличивается, и у обеих моделей при достаточно большом β критическая точка для T_{rot} исчезает (ср. графики $\beta = 0$ и графики $\beta = 0{,}3$ на рис.4).

Важным свойством вытянутых сфероидов является то, что отношения t и v_{rot}/b у них всегда меньше, чем у сжатых сфероидов (разумеется, при одинаковой внутренней структуре). Это хорошо видно из обсуждаемых рисунков 5,6,7,8 и 9 . Из последнего рисунка также видно, что степень различия графиков v_{rot}/b

для обеих моделей уменьшается с увеличением β . Так, при β = 2,0 различие графиков значительно меньше, чем при $\beta=0$. Следовательно, различие величин $T_{rot}/|W|$ (и V_{rot}/b) у сжатого и вытянутого сфероидов с одинаковыми профилем плотности и сплюснутости зависит от структуры слоев равной плотности и становится менее заметным в том случае, когда профиль сплюснутости сильно отличается от $\varepsilon=\varepsilon_s=const$. Это и понятно, т.к. последнее означает бо́льшую сферизацию внутренних слоев и, вместе с этим, уменьшение геометрических различий слоев в обеих моделях.

Из рис.2 и 3 также следует, что с увеличением β уменьшаются важные динамические величины - отношения t и V_{rot}/b. Параметр Пиблса-Острайкера t , характеризующий устойчивость осесимметричной модели к образованию трехосного бара [I7] , зависит от внутренней структуры конфигураций.

Подробнее обсудить зависимость t и V_{rot}/b от внутренней структуры можно на рис.5,6,7,8,9 . При любом ε_s эти отношения с увеличением β уменьшаются, и уменьшение тем заметнее, чем сильнее в моделях концентрация вещества к центру. И только при $\beta=0$ профиль плотности вообще не влияет на значения этих величин (точное совпадение функций $T_{rot}/|W|$ классического однородного сфероида Маклорена и неоднородного сжатого сфероида, слои одинаковой плотности которого подобны друг другу, отмечалось выше).

Сплюснутость E - галактик классифицируется по сплюснутости максимально сжатой изофоты индексами от E0 до E7 . Имея в виду, что сфероиды Маклорена неустойчивы вековым образом при сплюснутостях $\varepsilon > \varepsilon_0 = 0{,}4I7$ (т.е. при $t \geqslant 0{,}I4$), некоторые авторы (см., например Шехтер и Ган [15]) переносят это свойство на эллиптические галактики и полагают, что если индекс галактики больше Е 4, то эта галактика уже не имеет осесимметричной формы относительно оси вращения и форма ее трехосная. Но при этом не учитывается, что динамику Е-галактик характеризует не ее индекс , а профиль сплюснутости изофот в целом. Поэтому, хотя амплитуда профиля и равна у какой-то галактики, скажем, ε_{max} = 0,50, но если средняя сплюснутость изофот мала, то величина t для этой галактики будет все же меньше критического значения 0,14, т.е. критерий устойчивости Пиблса-Острайкера выполняется [x]. Оценку параметра t для каждой галактики нужно проводить с конкретными профилями плотности и сплюснутости изофот, определяемых наблюдениями.

X. Резюме численного анализа.

Рассмотрено влияние внутренней структуры на динамические свойства сжатого и вытянутого сфероида. Все трехосные модели занимают промежуточное место по геометрическим и динамическим свойствам между этими крайними случаями. Кратко основные выводы можно оформулировать следующим образом:

1. Если слои равной плотности в моделях являются подобными друг другу, то отношения энергии вращения к модулю гравитационной энергии $T_{rot}/|W|$ и максимума скорости вращения к дисперсии

---

x) Численные расчеты для Е-галактик, выполненные в [9], это подтверждают.

скоростей v_{rot}/σ вообще не зависят от закона распределения вещества. Энергия вращения не является монотонной функцией от сплюснутости - сжатый сфероид имеет критическую точку $\varepsilon_c = 0{,}417$, в которой $\frac{dT_{rot}}{d\varepsilon} = 0$ (эта точка совпадает с точкой бифуркации последовательности сфероидов Маклорена с эллипсоидами Якоби $\varepsilon_0 = 0{,}412$). Для вытянутых сфероидов $\varepsilon_c = 0{,}26$.

2. Если сплюснутость слоев равной плотности изменяется от внутренних слоев к внешним, то все характеристики модели: масса, гравитационная энергия, энергия вращения, отношения $T_{rot}/|W|$ и v_{rot}/σ зависят от конкретных для данной модели профилей плотности и сплюснутости поверхностей $\rho = const$ x). Иными словами, если профиль сплюснутости слоев отличается от линии $\varepsilon = const$ то характеристики моделей зависят от сжатия как внутренних, так и внешних слоев, т.е. от профиля сплюснутости в целом.

Значение критической точки для энергии вращения существенно зависит от профиля сплюснутости - если средняя сплюснутость слоев превышает $\varepsilon_c = 0{,}417$ для сжатого и $\varepsilon_c = 0{,}26$ для вытянутого, то критическая точка исчезает и T_{rot} монотонно увеличивается с возрастанием ε_s.

Основные свойства влияния профилей плотности и сплюснутости на динамику моделей следующие:

а) характеристики моделей тем сильнее зависят от профиля сплюснутости, чем больше в них концентрация вещества к центру.

---

x) Напомним, что мы изучаем только изотропные модели. В противном случае, t и v_{rot}/σ будет зависеть также от степени анизотропии дисперсии скоростей.

В эллиптических галактиках и шаровых скоплениях концентрация вещества очень высокая, и вследствие этого, влияние профиля сплюснутости на их динамику будет эффективным .

в) Влияние профиля сплюснутости на массу, гравитационную энергию и энергию вращения эффективнее в модели вытянутого сфероида, чем в осесимметричной модели. Напротив, его влияние на $T_{rot}/|W|$ и V_{rot}/b заметнее у сжатого сфероида.

с) При одинаковых профилях плотности и сплюснутости изоповерхностей, величины $T_{rot}/|W|$ и V_{rot}/b у вытянутого сфероида всегда меньше, чем у сжатого. Однако это различие уменьшается с возрастанием концентрации вещества и степени отклонения профиля сплюснутости от линии $\varepsilon = const$. Вопрос об эффективности замены модели сжатого сфероида на модель вытянутого сфероида для конкретной эллиптической галактики должен решаться с учетом ее внутренней структуры. Можно заключить, однако, что для галактик замена одной модели на другую даст меньший эффект (в смысле изменения $T_{rot}/|W|$ и V_{rot}/b), чем при искусственном условии подобия друг другу слоев равной плотности.

3. Учет влияния внутренней структуры на динамику моделей ставит под сомнение старое представление о том, что эллиптические галактики со сжатием, большим критического (ε_c = 0,417) неустойчивы относительно образования крупномасштабного трехосного бара.

XI. Заключение.

Отметим, что выражения для потенциалов (а также и другие характеристики слоисто-неоднородного эллипсоида) могут найти применение не только в астрофизике, но и в геофизике, физике плазмы и других областях.

Автор признателен Г.Н.Дубошину, В.А.Антонову и Л.М.Озерному за ценные и критические замечания по содержанию рукописи.

Литература

1. Муратов Р.З. Потенциалы эллипсоида. М., Атомиздат, 1976
2. Пицетти П. "Основы механической теории фигуры планет". Пер. с итальянского А.А.Михайлова, М., 1933.
3. Чаплыгин С.А. Собрание сочинений, т.I, стр.464, М.,1948
4. Дубошин Г.Н. Теория притяжения. М., Физматгиз, 1961.
5. С.Чандрасекхар, "Эллипсоидальные фигуры равновесия". Пер. под ред. В.Н.Рубановского, "Мир", М., 1973
6. Roberts P.H. Astrophys. J. 138, 809, 1963.
7. Binney J.J. Monthly Not. astron. Soc., 190, 424, 1980.
8. Binney J.J. Monthly Not. Roy astron. soc., 183, 501, 1978.
9. Кондратьев Б.П. Письма в Астрон. ж. 7, № 2, 1981
10. Carter D. Monthly Not. Roy astron. Soc. 182, 797, 1978.
11. King J.R. Astrophys. J. 222, 1, 1978.
12. Jeans J. Astronomy and Cosmology, Cambridge, 1929.
13. Wilson C.P. Astron. J. 80, 175, 1975.
14. P.Young, W.L.W.Sargent, A.Bohsenberg, C.R.Lnyds, F.D.A.Hartwick, Astrophys.J., 222, 450, 1978.
15. P.L.Schechter, J.E.Gunn, Astrophys. J., 229, 472, 1979.
16. Буллен К.Е. "Плотность Земли", Пер. под ред.В.Н.Жаркова "Мир", М., 1978.
17. J.P.Ostriker, P.J.E.Peebles, Astrophys. J., 186, 467, 1973.

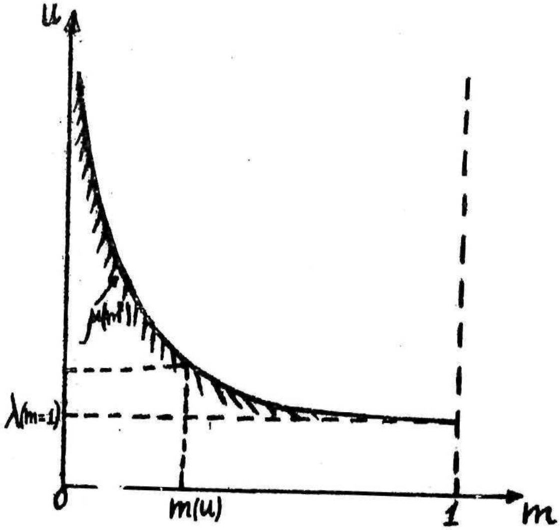

Рис. I. Область интегрирования в двойном интеграле

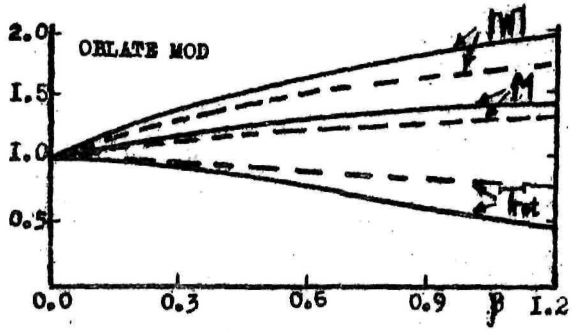

Рис.2. Зависимость $|W|$, массы M и энергии вращения T_{rot} от параметра β , характеризующего профиль сплюснутости слоев равной плотности, у сжатого сфероида с $\mathcal{E}_s = 0,4$. Для сравнения приведены графики с двумя профилями плотности Все величины выражены в относительных единицах.

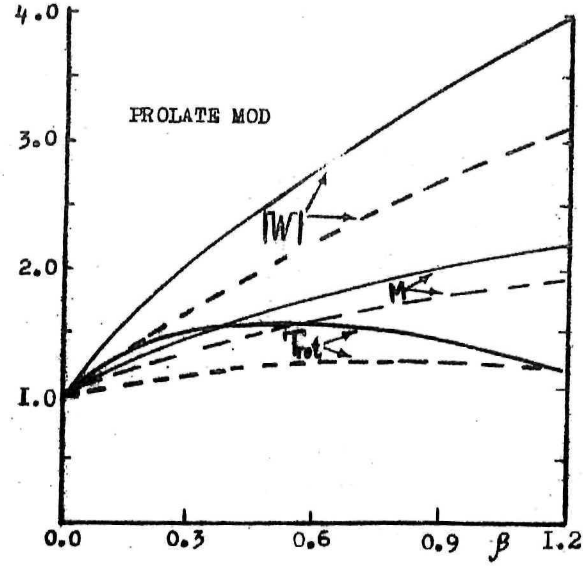

Рис.3. То же, что на рис.2, но для модели вытянутого сфероида.

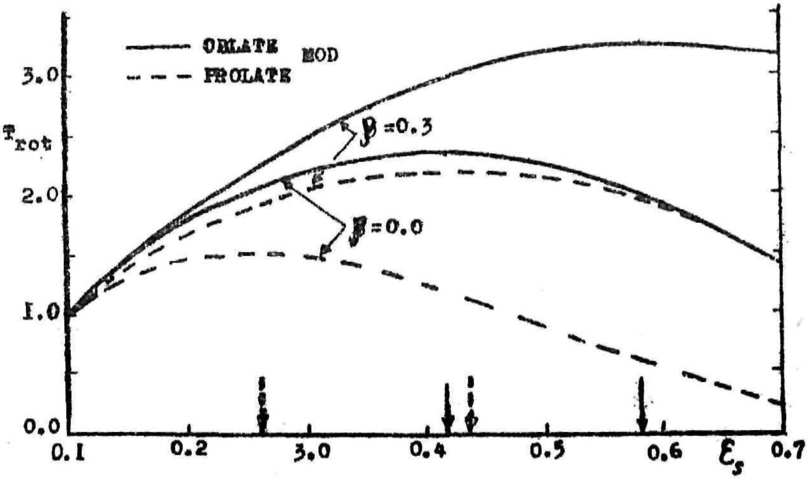

Рис.4. Зависимость T_{rot} от ε_s у сжатого и вытянутого сфероидов. Стрелками отмечены критические точки ε_c.

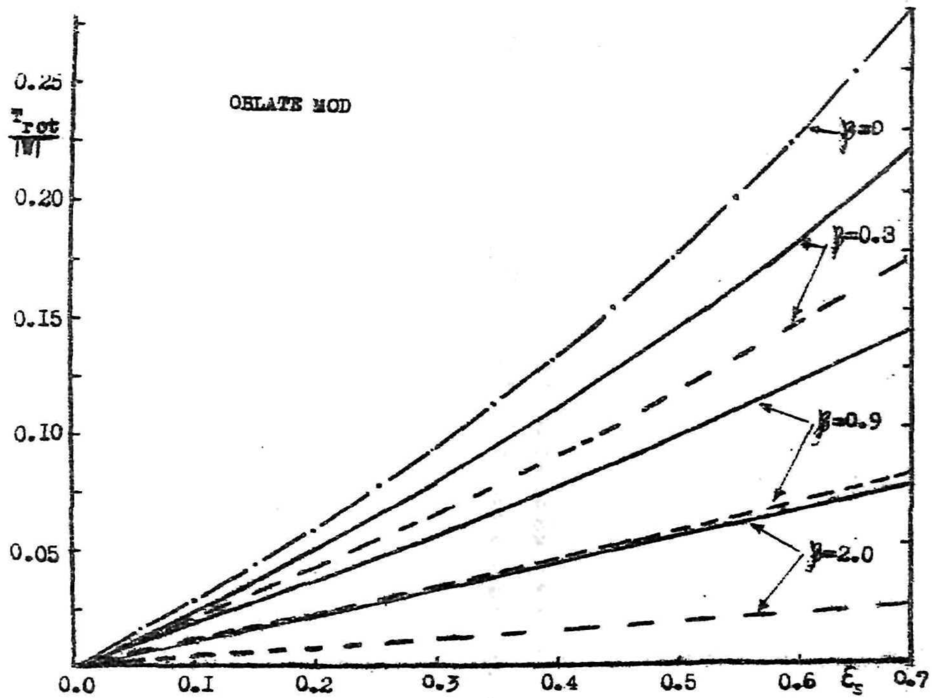

Рис.5. Зависимость $T_{rot}/|W|$ от максимальной сплюснутости сжатого сфероида ε_s. Параметр β характеризует профиль сплюснутости слоев равной плотности. Для сравнения приведены графики при двух профилях плотности $n = 3$ и $n = 8$. График модели с подобными слоями отмечен штрих-пунктиром.

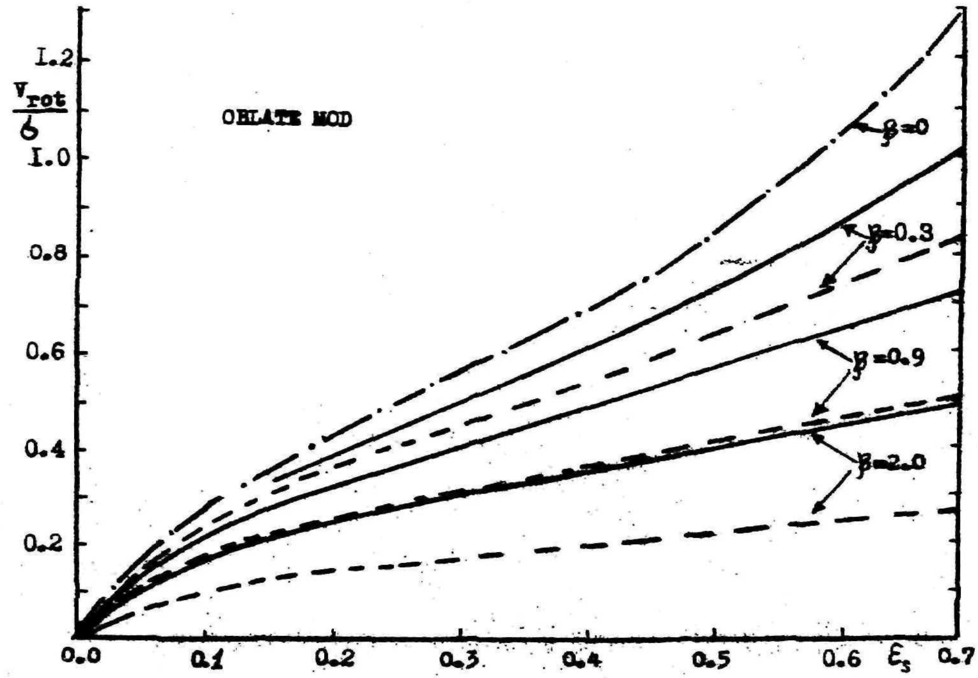

Рис.6. Зависимость v_{rot}/σ от максимальной сплюснутости сжатого сфероида. Смысл параметра β, сплошных и пунктирных линий тот же, что и на рис.5.

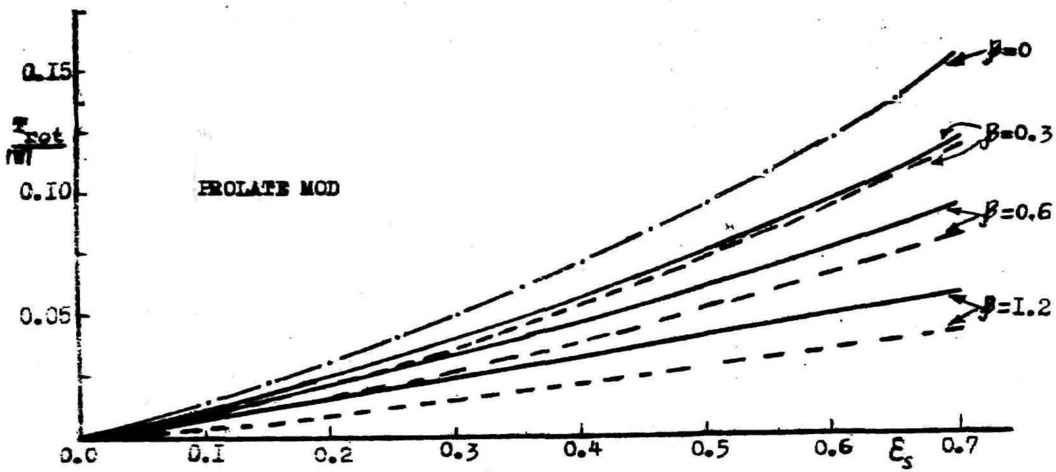

Рис.7. Зависимость $T_{rot}/|W|$ от максимальной сплюснутости вытянутого сфероида. Обозначения те же, что на рис.5.

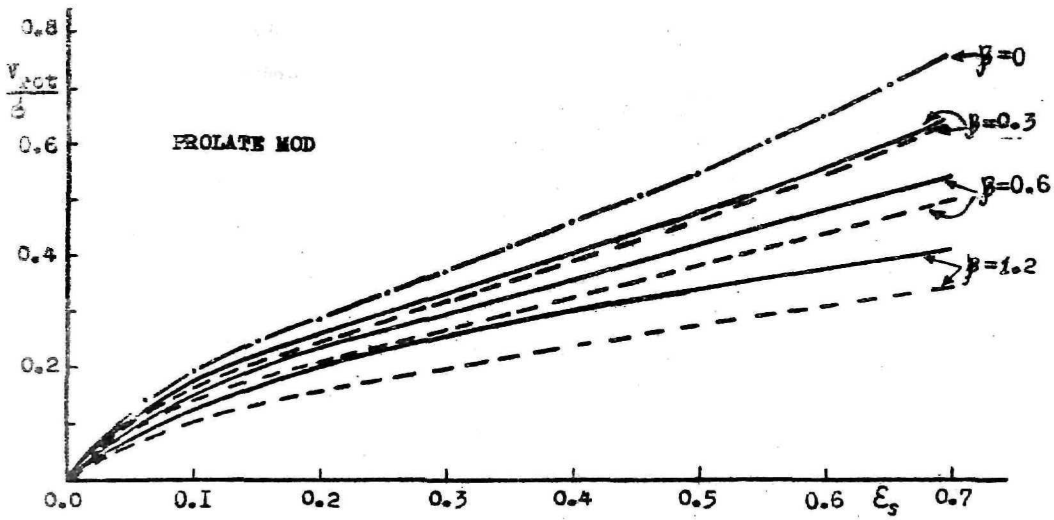

Рис.8. Зависимость V_{rot}/b от максимальной сплюснутости вытянутого сфероида. Обозначения те же, что на рис.5.

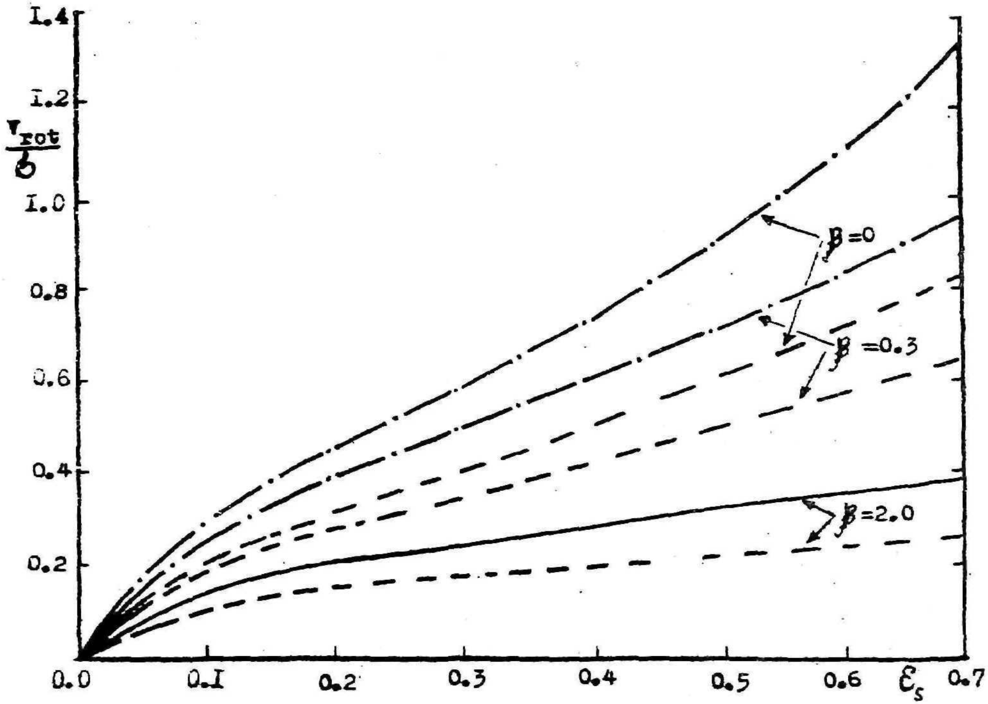

Рис.9. Зависимость v_{rot}/σ от максимальной сплюснутости для сжатого (сплошная) и вытянутого (пунктир) сфероидов. Профиль плотности в обеих моделях $n = 5$.

Т - 07648

Подписано в печать 6 апреля 1981 года

Заказ № 131. Тираж 100 экз. п/л 2,4

Отпечатано в Редакционно-издательском отделе ФИАН СССР

Москва, В-312, Ленинский проспект, 53