В. А. Зайцев, С. Н. Попова, Е. Л. Тонков

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Часть 1

Ижевск
2010

Министерство образования и науки Российской Федерации

ГОУВПО «Удмуртский государственный университет»

В. А. Зайцев, С. Н. Попова, Е. Л. Тонков

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Часть 1

Учебное пособие

Ижевск
«Удмуртский университет»
2010

УДК 517.9
ББК 22.161.6
З 12

Печатается по решению учебно-методического совета УдГУ

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, проф. В. М. Вержбицкий

Зайцев В. А., Попова С. Н., Тонков Е. Л.
З 12 Дифференциальные уравнения: учеб. пособие.
Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет». 2010. Ч. 1. 70 с.

Учебное пособие предназначено студентам второго курса математического факультета, изучающим годовой курс «Дифференциальные уравнения». Теоретическая часть пособия охватывает практически все разделы курса, читаемые в третьем семестре, содержит множество примеров, практическая часть включает 25 вариантов индивидуальных заданий.

УДК 517.9
ББК 22.161.6

Предисловие

Курс «Дифференциальные уравнения», читаемый в третьем и четвертом семестрах студентам математического факультета, имеет своим предметом обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ).

ОДУ имеют большое прикладное значение, являясь мощным орудием исследования многих задач естествознания и техники: они широко используются в механике, астрономии, физике, во многих задачах химии и биологии. Это объясняется тем, что весьма часто объективные законы, которым подчиняются те или иные явления (процессы), записываются в форме ОДУ, а сами эти уравнения, таким образом, являются средством для количественного выражения этих законов. Например, законы механики Ньютона позволяют механическую задачу описания движения системы материальных точек или твердого тела свести к математической задаче нахождения решений ОДУ. Расчет радиотехнических схем и вычисление траекторий спутников, исследование устойчивости самолета в полете и выяснение течения химических реакций — все это производится путем изучения и решения ОДУ. С другой стороны, теория ОДУ является основой таких фундаментальных математических дисциплин, как теория дифференциальных уравнений в частных производных, математическая теория оптимального управления, теория колебаний, теория автоматического управления. Без овладения основами теории ОДУ невозможно изучение астрономии, теоретической механики, методов математического моделирования, концепций современного естествознания и других важнейших дисциплин математического и естественнонаучного цикла.

Предлагаемое учебное пособие ориентировано на изучение курса ОДУ в третьем семестре. В теоретической части пособия представлены и проиллюстрированы многочисленными примерами некоторые из разделов курса, которые недостаточно освещены в учебной литературе и очень часто вызывают затруднения у студентов. Практическая часть учебного пособия включает в себя 25 вариантов индивидуальных заданий. Самостоятельное выполнение этих заданий гарантирует обучающимся качественное овладение материалом курса «Дифференциальные уравнения». Для выполнения индивидуальных заданий авторы рекомендуют использовать теоретическую часть пособия, а также литературу, список которой приведен в конце пособия.

§1. Определение решения обыкновенного дифференциального уравнения. Уравнение с разделяющимися переменными

Обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка называется соотношение вида

$$F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

где $F\colon\ G \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, заданная на области (т. е. открытом связном множестве) пространства $\mathbb{R}^{2+n}$, в котором изменяются t — независимая переменная, x — функция переменного t, подлежащая определению, и $x', x'', \ldots, x^{(n)}$ — производные функции $x(t)$ порядка до n включительно, причем $x^{(n)}$ обязательно входит в уравнение ($t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}$ могут в него и не входить).

Пусть $\langle a, b\rangle$ — некоторое связное множество числовой прямой (любые две точки этого множества можно соединить отрезком, целиком содержащимся в $\langle a, b\rangle$, т. е. $\langle a, b\rangle$ — либо интервал (a, b), либо отрезок $[a, b]$, либо один из полуинтервалов $(a, b]$ или $[a, b)$. Здесь a и b — числа или символы $\pm\infty$).

Всякая функция $t \to \varphi(t)$, непрерывная на $\langle a, b\rangle$ вместе с производными порядка до n включительно, называется *решением* уравнения (1) на $\langle a, b\rangle$, если

$$F\big(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n)}(t)\big) = 0 \text{ при всех } t \in \langle a, b\rangle, \tag{2}$$

при этом точка $\big(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n)}(t)\big)$ не покидает области G.

Рассмотрим, в частности, *уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной*

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{3}$$

где $\dot{x} \doteq dx/dt\,;\ f\,:\ G \to \mathbb{R}$ — функция, непрерывная на области $G \subset \mathbb{R}^2$. Непрерывно дифференцируемая на $\langle a, b\rangle$ функция $\varphi(t)$ называется *решением* уравнения (3) на $\langle a, b\rangle$, если:

а) при всех $t \in \langle a, b\rangle\ :\ \big(t, \varphi(t)\big) \in G$;

б) $\dot{\varphi}(t) \equiv f\big(t, \varphi(t)\big)$ на $\langle a, b\rangle$.

П р и м е р 1. Рассмотрим уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной

$$\dot{x} = x^2 + 1. \tag{4}$$

В данном случае функция $f(t, x) = x^2 + 1$ непрерывна для всех $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ (она не зависит от t). Заметим, что для любой постоянной $c \in \mathbb{R}$ функция

$\varphi(t;c) \doteq \operatorname{tg}(t+c)$ удовлетворяет на интервалах $(n\pi+\pi/2-c, (n+1)\pi+\pi/2-c)$, $n \in \mathbb{Z}$, равенству $d\varphi(t;c)/dt = \varphi^2(t;c)+1$, но эту функцию нельзя назвать решением уравнения (4) на множестве $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}(n\pi+\pi/2-c, (n+1)\pi+\pi/2-c)$, поскольку это множество несвязно. В то же время функция $\varphi_n(t;c) \doteq \operatorname{tg}(t+$ $+c)$, определенная на интервале $(n\pi+\pi/2-c, (n+1)\pi+\pi/2-c)$, есть решение уравнения (4) при каждом $n \in \mathbb{Z}$.

Уравнение
$$dx/dt = f(t)h(x) \tag{5}$$
называется *уравнением с разделяющимися переменными.* Предположим, что при $t \in (a,b)$, $x \in (c,d)$ функции $f(t)$ и $h(x)$ непрерывны, причем $h(x) \neq 0$.

Пусть $H(x)$ — некоторая первообразная функции $1/h(x)$ на (c,d), а $F(t)$ — некоторая первообразная $f(t)$ на (a,b). Так как функция $h(x)$ непрерывна и не обращается в 0 на (c,d), то она сохраняет знак, поэтому и $H'(x) = 1/h(x)$ сохраняет знак. Это означает, что $H(x)$ строго монотонна на (c,d) и имеет на этом интервале непрерывную обратную функцию H^{-1}.

Пусть $(t_0, x_0) \in (a,b)\times(c,d)$ — произвольная точка. Докажем, что функция $t \mapsto x(t)$ является решением уравнения (5) с начальным условием
$$x(t_0) = x_0 \tag{6}$$
в том и только том случае, когда
$$x(t) = H^{-1}\big(H(x_0) + F(t) - F(t_0)\big). \tag{7}$$

Действительно, пусть $x(t)$ — решение задачи (5), (6). Тогда справедливо тождество $\dot{x} = f(t)h\big(x(t)\big)$. Разделим его на $h\big(x(t)\big)$, получим
$$\dot{x}(t)/h\big(x(t)\big) = f(t). \tag{8}$$
Проинтегрируем это равенство в пределах от t_0 до t, где $t \in (a,b)$ — переменная величина, и сделаем в интеграле, находящемся слева, замену $x = x(t)$: $\displaystyle\int_{x_0}^{x(t)} dx/h(x) = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau$. Тогда
$$H\big(x(t)\big) - H(x_0) = F(t) - F(t_0), \tag{9}$$
и (7) выполнено.

Обратно, если $x(t)$ удовлетворяет соотношению (7), то, очевидно, $x(t_0) = x_0$, и имеет место (9). Продифференцируем (9) по t, получим (8). Следовательно, $x(t)$ — решение (5).

Таким образом, задача (5), (6) имеет решение (7). Заметим, что оно единственно.

Пусть теперь x_0 таково, что $h(x_0) = 0$. Рассмотрим функцию $x(t) \equiv \equiv x_0$. Очевидно, что при всех $t \in (a, b)$ эта функция удовлетворяет уравнению (5), т. е. $x(t)$ — решение (5) на (a, b).

Итак, при решении уравнения с разделяющимися переменными следует найти интервалы, в которых функция $h(x)$ непрерывна и сохраняет знак, тогда решение (5) с начальным условием (6), где x_0 принадлежит одному из таких интервалов, задается равенством (7). Затем нужно найти все значения x_0, при которых $h(x_0) = 0$. Всякая функция вида $x(t) \equiv x_0$ также является решением (5) с начальным условием (6). Аргументы t и t_0 и в том, и в другом случае берутся из одного из интервалов (a, b), в которых функция $f(t)$ непрерывна. Решение (7) при этом определено на некотором интервале J, содержащем точку t_0 и содержащемся в (a, b).

П р и м е р 2. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = x/t. \tag{10}$$

В данном случае $h(x) = x$, $f(t) = 1/t$. Зададим произвольные $t_0 \neq 0$ и $x_0 \neq 0$. Будем считать для определенности, что $t_0 > 0$ и $x_0 > 0$. Пусть $t > 0$, $x > 0$. Разделим (10) на x и проинтегрируем в пределах от t_0 до t, считая x функцией переменного t. В результате получим соотношение $\ln x(t) - \ln x_0 = \ln t - \ln t_0$, после потенцирования которого найдем решение уравнения (10):

$$x(t) = \frac{x_0}{t_0} t. \tag{11}$$

Заметим, что если взять, например, t_0 и t положительными, а x_0 и x отрицательными, то получим равенство $\ln |x(t)| - \ln |x_0| = \ln t - \ln t_0$, которое после потенцирования дает в точности соотношение (11). Нетрудно убедиться в том, что при любом сочетании знаков t_0 и x_0 получаем (11). Возьмем, наконец, $x_0 = 0$ (это единственное значение, при котором функция $h(x)$ обращается в 0). Функция $x(t) \equiv 0$ — решение (10). Это решение получается из (11) при $x_0 = 0$. В зависимости от того, положительное или отрицательное t_0 было взято, интервалом существования решения (11) при любом $x_0 \in \mathbb{R}$ является либо $(-\infty, 0)$, либо $(0, +\infty)$.

Функция $\varphi(t; C)$ называется *общим решением* уравнения (3) в области G, если для всякого решения $x = x(t)$ уравнения (3), определенного на некотором интервале J, такого, что график $\{(t, x(t)) : t \in J\}$ целиком содержится в G, найдется такое значение произвольной постоянной C, что $x(t) \equiv \varphi(t; C)$ на J.

Для отыскания общего решения уравнения с разделяющимися переменными (5) применяется следующий (не вполне строгий) прием. Формально перепишем уравнение (5) в виде

$$\frac{dx}{h(x)} = f(t)\,dt. \tag{12}$$

Этот шаг называют *разделением переменных* (правая часть уравнения (12) зависит только от t, а левая — только от x. Возможность перехода от (5) к (12) объясняет смысл названия «уравнение с разделяющимися переменными»). Найдем неопределенные интегралы левой и правой части (12), рассматривая в качестве области G открытый прямоугольник $(a, b)\times(c, d)$. Так как $H(x)$ и $F(t)$ — первообразные функций $1/h(x)$ и $f(t)$ в G соответственно, то получим равенство

$$H(x) + C_1 = F(t) + C_2, \tag{13}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Обозначим $C = C_2 - C_1$ и, учитывая строгую монотонность функции $H(x)$ в G, из (13) найдем общее решение (5) в области $G : x = x(t; C) = H^{-1}\big(F(t) + C\big)$. В некоторых случаях удается объединить общие решения уравнения (5), выписанные для различных областей, в одно общее решение.

П р и м е р 3. Найдем общее решение уравнения

$$\dot{x} = -\frac{2tx}{t^2 - 1}. \tag{14}$$

Отметим, что вся (t, x)-плоскость разбивается на 3 области: $D_1 \doteq \{(t, x) : t < -1\}$, $D_2 \doteq \{(t, x) : t \in (-1, 1)\}$, $D_3 \doteq \{(t, x) : t > 1\}$, в каждой из которых функции $h(x) = x$ и $f(t) = -2t/(t^2 - 1)$ непрерывны. В области D_1 можно выделить две области $G_1 \doteq \{(t, x) : t < -1, x < 0\}$ и $G_2 \doteq \{(t, x) : t < -1, x > 0\}$, в которых $h(x)$ сохраняет знак. Найдем общее решение уравнения (14) в области G_1. После разделения переменных из (14) получим уравнение $\dfrac{dx}{x} = -\dfrac{2t\,dt}{t^2 - 1}$. Проинтегрируем это равенство с учетом того, что в области G_1 x отрицательно, а $t^2 - 1$ положительно: $\ln(-x) = -\ln(t^2 - 1) + C, \quad C \in \mathbb{R}$. После потенцирования имеем равенство $-x = e^C \cdot e^{-\ln(t^2-1)}$, откуда

$$x = \frac{C_1}{t^2 - 1}. \tag{15}$$

Заметим, что в (15) $C_1 = -e^C$. Поскольку C пробегает все значения из $\mathbb{R}$, то C_1 может принимать любые отрицательные значения. Итак, общее решение уравнения (14) в области G_1 задается равенством (15), где $t < -1$, $C_1 < 0$ — произвольно. Аналогичными рассуждениями можно проверить, что общее решение (14) в области G_2 имеет тот же вид (15), но только $C_1 > 0$. Наконец, решением (14) является также и функция $x(t) \equiv 0,\ t < -1$. Заметим, что она получается из (15) при $C_1 = 0$. Следовательно, общее решение (14) на области D_1 — функция

$$x(t; C) = C/(t^2 - 1), \quad C \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

где $t < -1$. Точно так же проверяется, что общее решение уравнения (14) на D_2 дается соотношением (16) при $t \in (-1, 1)$, а на D_3 — (16) при $t > 1$.

Обсудим теперь геометрическую интерпретацию уравнения (3). Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — область (t, x)-плоскости, в которой функция $f(t, x)$ непрерывна. Уравнение (3) задает в каждой точке $(t, x) \in G$ значение углового коэффициента касательной к проходящей через эту точку *интегральной кривой* (интегральная кривая — это график решения). Если к каждой точке $(t, x) \in G$ приложить вектор $\tau(t, x)$, длина которого совпадает с $|f(t, x)|$, а тангенс угла между осью Ot и этим вектором равен $f(t, x)$, то в области G получим векторное поле, называемое *полем направлений.* Тогда задача нахождения решения уравнения (3) в области G может быть переформулирована так: требуется найти кривую $x = \varphi(t)$, график которой при всех t, принадлежащих некоторому связному множеству $\langle a, b\rangle$, не покидает области G и касается в каждой точке вектора $\tau\big(t, \varphi(t)\big)$, причем $|\varphi'(t)| = \|\tau\big(t, \varphi(t)\big)\|$.

§2. Теорема существования и единственности. Особые решения уравнений, разрешенных относительно производной

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2' = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{1}$$

или, в векторной записи,

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{2}$$

где $t \in \mathbb{R},\ x \doteq \mathrm{col}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ f \doteq \mathrm{col}(f_1, f_2, \ldots, f_n)\colon\ \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^n$.

Т е о р е м а (существования и единственности). *Пусть в области G пространства $\mathbb{R}^{1+n}$ функция f непрерывна вместе с матрицей Якоби $f'_x \doteq \{\partial f_i/\partial x_j\}_{i,j=1}^n$. Тогда для любой точки $(t_0, x^0) \in G$ найдется интервал J числовой прямой, такой что $t_0 \in J$, и на J система* (1) *имеет единственное решение $x = x(t)$, удовлетворяющее начальному условию*

$$x(t_0) = x^0. \tag{3}$$

Задача отыскания решения системы (1) с начальным условием (3) называется *задачей Коши.* Область G, для каждой точки (t_0, x^0) которой задача Коши (1), (3) имеет единственное решение, называется *областью единственности* системы (1). Будем говорить, что G — *максимальная* область единственности, если G — область единственности, и никакая область $G_1 \supset G$, $G_1 \neq G$, не является областью единственности.

Если $n = 1$, то система (1) превращается в скалярное уравнение вида (2), где $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, а теорема существования и единственности формулируется так:

Пусть G — область в $\mathbb{R}^2$, функции $f(t, x)$ и $f'_x(t, x)$ непрерывны в G. Тогда для каждой точки $(t_0, x^0) \in G$ задача Коши (2), (3) *имеет единственное решение.*

Отметим, что в действительности условие непрерывности частной производной $f'_x(t, x)$ может быть заменено на *локальное условие Липшица функции f в области G по переменной x*: для всякого компактного множества $K \subset G$ существует константа $L = L(K) > 0$ такая, что для любых двух точек (t, x^1), $(t, x^2) \in K$ выполнено неравенство $|f(t, x^1) - f(t, x^2)| \leqslant \leqslant L|x^1 - x^2|$.

Пусть G — область единственности уравнения (2). Тогда любые две интегральные кривые уравнения, лежащие в G, либо не пересекаются ни в одной точке области G, либо тождественно совпадают.

Выясним теперь, как выглядит теорема существования и единственности для уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной

$$x^{(n)} = \varphi(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}). \tag{4}$$

Это уравнение можно привести к эквивалентной системе вида (1) заменой $x_1 = x,\ x_2 = x',\ x_3 = x'', \ldots,\ x_n = x^{(n-1)}$. Тогда

$$\begin{cases} x'_1 = x_2, \\ x'_2 = x_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_n = \varphi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Это — частный случай системы (1), для которого нетрудно переформулировать теорему существования и единственности. Если в этой формулировке перейти к терминам уравнения (4), то получим следующую теорему:

Т е о р е м а. *Пусть G — область в $\mathbb{R}^{n+1}$, функция φ и ее частные производные по переменным $x, x', \ldots, x^{(n-1)}$ непрерывны в G. Тогда для каждой точки $(t_0, x_0, x'_0, \ldots, x_0^{(n-1)}) \in G$ задача Коши для уравнения* (4) *с начальными условиями*

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x'_0, \quad \ldots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$$

имеет единственное решение.

З а д а ч а 1. Могут ли графики двух решений данного уравнения на (t, x)-плоскости касаться друг друга в некоторой точке (t_0, x_0):

а) для уравнения

$$x' = t + x^2; \tag{5}$$

б) для уравнения

$$x'' = t + x^2; \tag{6}$$

в) для уравнения

$$x''' = t + x^2? \tag{7}$$

Р е ш е н и е: а) выясним, какова область единственности уравнения (5). Здесь $f(t, x) = t + x^2$, $f'_x(t, x) = 2x$. Эти функции непрерывны всюду на (t, x)-плоскости, следовательно, область единственности уравнения — вся плоскость $\mathbb{R}^2$. Из теоремы существования и единственности вытекает, что задача Коши для уравнения (5) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ имеет единственное решение для всякой точки $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$. Это означает, что графики решений (т. е. интегральные кривые) не могут пересекаться (или касаться) в (t, x)-плоскости;

б) поскольку $f(t, x, x') = t + x^2$, $f'_x(t, x, x') = 2x$, $f'_{x'}(t, x, x') = 0$ — функции, непрерывные всюду в $\mathbb{R}^3$, то для всякой точки $(t_0, x_0, x'_0) \in \mathbb{R}^3$ уравнение (6) имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x'_0$. Это означает, что через каждую точку (t_0, x_0) (t, x)-плоскости проходит ровно одна интегральная кривая уравнения (6) с угловым коэффициентом, равным в этой точке x'_0. Если бы интегральные кривые касались друг друга в точке (t_0, x_0), то их угловые коэффициенты совпадали бы, а этого быть не может. Итак, через каждую точку (t_0, x_0) (t, x)-плоскости проходит бесконечно много интегральных кривых уравнения (6), но они не касаются друг друга (их угловые коэффициенты различны);

в) здесь $f(t, x, x', x'') = t + x^2$, $f'_x(t, x, x', x'') = 2x$, $f'_{x'}(t, x, x', x'') = 0$, $f'_{x''}(t, x, x', x'') = 0$ — функции, непрерывные всюду в $\mathbb{R}^4$. Следовательно, для всякой точки $(t_0, x_0, x'_0, x''_0) \in \mathbb{R}^4$ задача Коши для уравнения (7) с начальными условиями $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x'_0$, $x''(t_0) = x''_0$ имеет единственное решение. То, что две интегральные кривые касаются друг друга в некоторой точке (t_0, x_0), означает, что два решения уравнения (7) удовлетворяют первым двум из этих трех условий. Поскольку никаких ограничений в выборе третьего начального условия нет, то через всякую точку (t_0, x_0) с произвольно заданным угловым коэффициентом x'_0 проходит бесконечно много интегральных кривых уравнения (7) (они касаются друг друга в точке (t_0, x_0), отличаясь лишь значением второй производной $x''(t_0)$).

О п р е д е л е н и е. *Особым решением* скалярного уравнения (2) называется решение $\varphi(t)$ этого уравнения, которое во всех своих точках не удовлетворяет свойству единственности, т. е. в любой окрестности каждой точки $\big(t_0, \varphi(t_0)\big)$ графика этого решения существует по меньшей мере еще одна интегральная кривая (не совпадающая с графиком решения $\varphi(t)$), проходящая через ту же точку $\big(t_0, \varphi(t_0)\big)$.

Отметим, что теорема существования и единственности дает достаточное условие существования и единственности решения задачи Коши. Чтобы существовало особое решение, необходимо, чтобы не выполнялись условия теоремы существования и единственности.

З а д а ч а 2. Найти максимальные области единственности уравнения

$$x' = \sqrt{x - t} + 1. \tag{8}$$

Выяснить вопрос о существовании особых решений.

Р е ш е н и е. Правая часть уравнения (8) $f(t, x) = \sqrt{x - t} + 1$ определена во множестве $D \doteq \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant t\}$. Рассмотрим область $G \doteq \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : x > t\}$. Так как в этой области функции $f(t, x)$ и $f'_x(t, x)$ непрерывны, то G — область единственности (8). Выясним, нарушается ли единственность в точках прямой $x = t$. Очевидно, что функция $\varphi(t) = t$ — решение уравнения (8). Найдем общее решение (8). Сделаем в нем замену $z = x - t$, получим уравнение с разделяющимися переменными $z' = \sqrt{z}$, общее решение которого $z(t; C) = \dfrac{1}{4}(t - C)^2$. Следовательно, общее решение (8) задается соотношением $x(t; C) = t + \dfrac{1}{4}(t - C)^2$. Возьмем произвольное $t_0 \in \mathbb{R}$ и в общем решении положим $C = t_0$. Тогда $x(t_0; t_0) = t_0$; $\varphi(t_0) = t_0$, и функции $x(t; t_0)$ и $\varphi(t)$ не являются тождественно равными ни в какой окрестности точки (t_0, t_0). Итак, в каждой точке решения $\varphi(t)$ нарушается единственность решения задачи Коши, т.е. $\varphi(t)$ — особое решение, а G — максимальная область единственности уравнения (8).

Рассмотрим теперь уравнение

$$x' = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

правая часть которого — непрерывная функция, не зависящая от t. Это уравнение называется *автономным.* Пусть функция $\varphi(t)$ — решение уравнения (9). Для произвольного $t_1 \in \mathbb{R}$ рассмотрим функцию $\psi(t) \doteq \varphi(t+t_1)$. Так как $\psi'(t) = \dfrac{d\varphi(t+t_1)}{d(t+t_1)} \cdot \dfrac{d(t+t_1)}{dt} = f\big(\varphi(t+t_1)\big) = f\big(\psi(t)\big)$, то $\psi(t)$ — решение (9). Таким образом, сдвиг всякой интегральной кривой уравнения (9) вдоль оси Ot на произвольную величину t_1 дает интегральную кривую (9).

Пусть $\alpha < x < \beta$ — интервал, внутри которого $f(x) \neq 0$. Зададим начальное условие

$$x(t_0) = x_0, \tag{10}$$

где $x_0 \in (\alpha, \beta)$, а $t_0 \in \mathbb{R}$ — произвольно. Очевидно, что решение задачи Коши (9), (10) записывается в виде

$$t = t_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{f(s)}. \tag{11}$$

Так как при $x \in (\alpha, \beta)$ функция $f(x)$ не обращается в 0 и непрерывна, то $f(x)$ сохраняет знак, и из (11) вытекает, что функция $x \mapsto t(x)$ строго монотонна и непрерывна, поэтому $t(x)$ имеет однозначную непрерывную строго монотонную обратную функцию. Эта обратная функция $x = \varphi(t, t_0)$ является единственным решением задачи (9), (10). Следовательно, множество $G \doteq \big\{(t,x)\colon\ t \in \mathbb{R},\ x \in (\alpha,\beta)\big\}$ — область единственности уравнения (9).

Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет решение $x = C$. Очевидно, что функция $x(t) \equiv C$ является решением уравнения (9). Выясним, при каких условиях это решение обладает свойством единственности. Пусть (t_0, x_0) — такая начальная точка, что $x_0 < C$ и $f(x) > 0$ при всех $x \in [x_0, C)$. Решение задачи (9), (10) с вновь выбранной точкой (t_0, x_0) записывается в том же виде (11). В (11) устремим x к C. Так как $f(C) = 0$, то интеграл

$$\int_{x_0}^{C} \frac{ds}{f(s)} \tag{12}$$

— несобственный. Возможны два случая:

а) интеграл (12) — расходится; б) интеграл (12) — сходится.

Рассмотрим подробно эти случаи:

а) при стремлении x к C величина t стремится к $+\infty$, следовательно, интегральная кривая, соответствующая решению задачи (9), (10), асимптотически приближается к прямой $x = C$ и не имеет с ней общих точек ни при каких t. Так как все интегральные кривые уравнения (9), лежащие в полосе $x \in [x_0, C)$, получаются из (11) параллельным переносом вдоль оси Ot, то ни одна интегральная кривая не пересекает прямую $x = C$, поэтому ни в одной точке этой прямой единственность не нарушается;

б) пусть интеграл (12) сходится к величине l. При $t_1 \doteq t_0 + l$ интегральная кривая решения (11) пересекает прямую $x = C$, поэтому в точке (t_1, C) нарушается единственность. Сдвигами вдоль оси Ot можно совместить точку (t_1, C) с любой точкой прямой $x = C$, следовательно, функция $x(t) \equiv C$ является особым решением уравнения (9).

Заметим, что в случае а) необходимо также исследовать, не нарушается ли единственность, если начальная точка (t_0, x_0) взята так, что $x_0 > C$.

З а д а ч а 3. Найти максимальные области единственности и особые решения уравнения

$$x' = x\sqrt[3]{x+1}. \tag{13}$$

Р е ш е н и е. Функция $f(x) \doteq x\sqrt[3]{x+1}$ определена и непрерывна при всех $x \in \mathbb{R}$, обращается в 0 при $x = -1$ и $x = 0$, а на интервалах $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ и $(0, +\infty)$ сохраняет знак. Следовательно, области $G_1 \doteq \{(t, x)|\ t \in \mathbb{R},\ x \in (-\infty, -1)\}$, $G_2 \doteq \{(t, x)|\ t \in \mathbb{R},\ x \in (-1, 0)\}$, $G_3 \doteq \{(t, x)|\ t \in \mathbb{R},\ x \in (0, +\infty)\}$ являются областями единственности уравнения (13). Выясним, нарушается ли единственность при $x = -1$ и $x = 0$ (тем самым мы определим, максимальны ли найденные нами области единственности).

Пусть сначала (t_0, x_0) — такая начальная точка, что $x_0 < -1$. Несобственный интеграл $\int\limits_{x_0}^{-1} \dfrac{ds}{s\sqrt[3]{s+1}}$ сходится, так как подынтегральная функция есть $O^*\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{s+1}}\right)$ при $s \to -1-0$. (Напомним, что запись $f(x) = O^*\big(g(x)\big)$ при $x \to a$ означает, что существует конечный $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} \neq 0$.) Таким образом, функция $x(t) \equiv -1$ — особое решение уравнения (13).

Пусть теперь (t_0, x_0) такова, что $x_0 \in (-1, 0)$. Очевидно, что несобственный интеграл $\int\limits_{x_0}^{0} \dfrac{ds}{s\sqrt[3]{s+1}}$ расходится, поэтому единственность решения $x(t) \equiv 0$ со стороны $x < 0$ не нарушается. Аналогично проверяется, что если $x_0 \in (0, +\infty)$, то интеграл $\int\limits_0^{x_0} \frac{ds}{s\sqrt[3]{s+1}}$ расходится, откуда следует, что и со стороны $x > 0$ единственность решения $x(t) \equiv 0$ не нарушается. Следовательно, области G_2 и G_3 — не максимальные области единственности; в действительности областью единственности является множество $G_4 \doteq \{(t,x)|\ t \in \mathbb{R},\ x > -1\}$.

Итак, уравнение (13) имеет одно особое решение $x(t) \equiv -1$, а максимальными областями единственности этого уравнения являются множества G_1 и G_4.

§3. Уравнение в симметричной форме. Уравнение в полных дифференциалах. Поиск интегрирующего множителя

Пусть D — область в $\mathbb{R}^2$, функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в D. Уравнение вида

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \tag{1}$$

называется *уравнением в симметричной форме.*

О п р е д е л е н и е 1. *Решением* уравнения (1) называется функция $y = \varphi(x)$ (либо функция $x = \psi(y)$), определенная на промежутке $x \in (a,b)$ (на промежутке $y \in (c,d)$), если она удовлетворяет условиям:

1) $\varphi(x)$ — дифференцируема на (a,b) ($\psi(y)$ — дифференцируема на (c,d));

2) при всех $x \in (a,b)$: $\big(x, \varphi(x)\big) \in D$ (при всех $y \in (c,d)$: $\big(\psi(y), y\big) \in D$);

3) при всех $x \in (a,b)$:

$$P\big(x,\varphi(x)\big) + Q\big(x,\varphi(x)\big)\varphi'(x) = 0 \tag{2}$$

(или при всех $y \in (c,d)$:

$$P\big(\psi(y),y\big)\psi'(y) + Q\big(\psi(y),y\big) = 0). \tag{3}$$

Точка $(x_0,y_0) \in D$ называется *особой точкой* уравнения (1), если выполнены равенства $P(x_0,y_0) = Q(x_0,y_0) = 0$. Совокупность $E \subset D$ особых точек уравнения (1) будем называть *особым множеством* этого уравнения.

Заметим, что из непрерывности функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, определяющих уравнения (1)–(3), следует, что множество E замкнуто, поэтому

$G_1 \doteq D \setminus E$ открыто. Пусть $G \subset G_1$ — какая-либо открытая компонента связности множества G_1 и $(x_0, y_0) \in G$. Тогда найдется такая окрестность $U(x_0, y_0)$, целиком лежащая в G, что либо $P(x, y) \neq 0$ при всех $(x, y) \in U(x_0, y_0)$, либо $Q(x, y) \neq 0$ при всех $(x, y) \in U(x_0, y_0)$. Предположим для определенности, что в $U(x_0, y_0)$ функция $Q(x, y)$ не обращается в 0. Тогда в этой окрестности уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \tag{4}$$

Поскольку функция $f(x, y) \doteq -\dfrac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ непрерывна вместе со своими частными производными в $U(x_0, y_0)$, то эта окрестность точки (x_0, y_0) является областью единственности уравнения (4).

Заставляя пробегать точку (x_0, y_0) все множество G, аналогичными рассуждениями получим, что G — область единственности уравнения (1) (если в окрестности $U(x_0, y_0)$ не обращается в нуль функция $P(x, y)$, то в этой окрестности (1) эквивалентно уравнению $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{Q(x, y)}{P(x, y)}$, для которого $U(x_0, y_0)$ — область единственности).

Заметим, что уравнение (1) задает на множестве $D \setminus E$ поле направлений, поскольку во всякой точке $(x_0, y_0) \in D \setminus E$ конечна хотя бы одна из двух производных: $\dfrac{dy}{dx}(x_0, y_0)$ или $\dfrac{dx}{dy}(x_0, y_0)$. Будем называть *интегральной кривой* уравнения (1) всякую гладкую кривую, касательные к которой совпадают в каждой неособой точке с направлением поля в этой точке.

Пусть G — область единственности уравнения (1), функция $F(x, y)$ непрерывна в G и обладает тем свойством, что для всякой точки (x_0, y_0) из множества G уравнение

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) \tag{5}$$

определяет единственную неявную функцию, то есть существует окрестность $U(x_0, y_0)$, в которой уравнение (5) имеет единственное непрерывное решение $y = \varphi(x)$ (или $x = \psi(y)$) такое, что $y_0 = \varphi(x_0)$ (или $x_0 = \psi(y_0)$).

О п р е д е л е н и е 2. Функция $F(x, y)$ называется *интегралом* уравнения (1), если она обладает описанным выше свойством, причем неявная функция, определяемая уравнением (5), является решением задачи Коши для (1) с начальным условием $y(x_0) = y_0$ (либо $x(y_0) = x_0$). *Общим интегралом* уравнения (1) называется соотношение $F(x, y) = C$, где $C \in \mathbb{R}$ — произвольная постоянная, а $F(x, y)$ — интеграл (1).

Таким образом, общий интеграл уравнения — это общее решение, записанное в неявном виде.

О п р е д е л е н и е 3. Уравнение (1) называется *уравнением в полных дифференциалах* (в области $G \subset \mathbb{R}^2$), если существует такая дифференцируемая функция $F\colon\ G \to \mathbb{R}$, что

$$dF(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \tag{6}$$

при всех $(x,y) \in G$.

Заметим, что если (1) в некоторой области G является уравнением в полных дифференциалах, то соотношение $F(x,y) = C$ задает общий интеграл этого уравнения в G (здесь $F(x,y)$ — из (6)).

Справедлива следующая

Т е о р е м а. *Пусть частные производные $P'_y(x,y)$ и $Q'_x(x,y)$ существуют и непрерывны в области G. Уравнение (1) является уравнением в полных дифференциалах в области G в том и только том случае, когда при всех $(x,y) \in G$*

$$P'_y(x,y) = Q'_x(x,y). \tag{7}$$

З а д а ч а 1. Найти области, в которых уравнение

$$\left(1 + \frac{y}{x^2+y^2}\right) dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = 0 \tag{8}$$

является уравнением в полных дифференциалах и выписать общий интеграл этого уравнения.

Р е ш е н и е. В данном случае

$$P(x,y) = \left(1 + \frac{y}{x^2+y^2}\right), \quad Q(x,y) = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

— функции, непрерывные в области $G \doteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, (x,y) \neq (0,0)\}$. В этой области существуют непрерывные частные производные $P'_y(x,y) =$ $= Q'_x(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. Следовательно, G — область, в которой уравнение (8) является уравнением в полных дифференциалах. Пусть $F(x,y)$ — такая функция, что ее полный дифференциал совпадает с левой частью уравнения (8). Но $dF(x,y) = F'_x(x,y)\,dx + F'_y(x,y)\,dy$, поэтому $P(x,y) =$ $= F'_x(x,y)$, $Q(x,y) = F'_y(x,y)$. Итак, $F'_x(x,y) = 1 + \dfrac{y}{x^2+y^2}$. Проинтегрируем это соотношение по x, считая y постоянной величиной:

$$F(x,y) = \int \left(1 + \frac{y}{x^2+y^2}\right) dx = x + \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + C(y), \tag{9}$$

здесь постоянная интегрирования может зависеть от y. Продифференцируем (9) по y, получим: $F'_y(x,y) = -\dfrac{x}{x^2+y^2} + C'(y) = Q(x,y) = -\dfrac{x}{x^2+y^2}$. Отсюда вытекает, что $C'(y) = 0$, т.е. $C(y) \equiv C_1$. Из (9) получаем, что $F(x,y) = x + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} + C_1$, и общий интеграл (8) задается соотношением $x + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} = C$.

О п р е д е л е н и е 4. Пусть G — область единственности уравнения (1). *Интегрирующим множителем* уравнения (1) в области G называется функция $\mu\colon G \to \mathbb{R}$, после умножения на которую (1) становится уравнением в полных дифференциалах, т. е. существует такая функция $F\colon G \to \mathbb{R}$, что $dF(x,y) = \mu(x,y)P(x,y)\,dx + \mu(x,y)Q(x,y)\,dy$, при этом соотношение $F(x,y) = C$ есть общий интеграл (1) в G.

Из (7) следует, что уравнение

$$\mu(x,y)P(x,y)\,dx + \mu(x,y)Q(x,y)\,dy = 0$$

в области G является уравнением в полных дифференциалах в том и только том случае, когда в G выполняется тождество

$$\mu'_y(x,y)P(x,y) + \mu(x,y)P'_y(x,y) \equiv \mu'_x(x,y)Q(x,y) + \mu(x,y)Q'_x(x,y). \qquad (10)$$

Интегрирующий множитель уравнения (1) в области единственности обязательно существует, но нет общего метода для его отыскания.

Рассмотрим некоторые способы построения интегрирующего множителя для уравнения (1).

1. Выделение полного дифференциала.

Некоторые из уравнений вида (1) удается легко решить с помощью использования формул типа $d(x+y) = dx + dy$, $d(xy) = x\,dy + y\,dx$, $d\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$, $d(\ln x) = \dfrac{dx}{x}$, $d(e^x) = e^x\,dx$ и т. д.

З а д а ч а 2. Найти общий интеграл уравнения

$$y\,dy = (x\,dy + y\,dx)\sqrt{1+y^2}. \qquad (11)$$

Р е ш е н и е. Разделим все уравнение на $\sqrt{1+y^2}$ (поскольку эта функция не обращается в 0, никаких решений мы не теряем):

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{1+y^2}} = x\,dy + y\,dx.$$

Очевидно, что в левой части уравнения находится полный дифференциал функции $\sqrt{1+y^2}$, а в правой — функции xy. Итак, имеем равенство $d\bigl(\sqrt{1+y^2}\bigr) = d(xy)$, из которого следует, что $\sqrt{1+y^2} = xy + C$ — общий интеграл уравнения (11) (заметим, что одним из интегрирующих множителей для (11) является функция $\mu(y) = 1/\sqrt{1+y^2}$).

З а д а ч а 3. Найти общий интеграл уравнения

$$\left(y - \frac{1}{x}\right) dx + \frac{dy}{y} = 0. \tag{12}$$

Р е ш е н и е. Умножим уравнение на $\dfrac{x}{y}$, получим:

$$x\,dx + \frac{x\,dy - y\,dx}{y^2} = 0,$$

никаких решений мы при этом не теряем, так как при $y = 0$ исходное уравнение не определено. Заметим, что $x\,dx = d\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)$, $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{y^2} = d\left(-\dfrac{x}{y}\right)$, поэтому имеем равенство $d\left(\dfrac{1}{2}x^2\right) + d\left(-\dfrac{x}{y}\right) = 0$, и $\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{x}{y} = C$ — общий интеграл уравнения (12); один из интегрирующих множителей (12) — функция $\mu(x,y) = \dfrac{x}{y}$.

2. Переход к новым переменным.

Иногда уравнение (1) упрощается, если в нем можно выделить полный дифференциал некоторой функции $\varphi(x,y)$, а затем от переменных x, y перейти к новым переменным x, z (или y, z), где $z = \varphi(x,y)$. В некоторых случаях вводятся две новые переменные.

З а д а ч а 4. Найти общий интеграл уравнения

$$(2x^2y^3 - 1)y\,dx + (4x^2y^3 - 1)x\,dy = 0. \tag{13}$$

Р е ш е н и е. Раскроем в уравнении скобки и перегруппируем слагаемые:

$$2x^2y^4\,dx + 4x^3y^3\,dy = y\,dx + x\,dy. \tag{14}$$

В правой части этого уравнения находится полный дифференциал функции xy. Сделаем замену $z = xy$ и перейдем в (14) к переменным y, z. Для этого заметим, что $x = \dfrac{z}{y}$, поэтому $dx = \dfrac{y\,dz - z\,dy}{y^2}$, и (14) переписывается в виде

$$2z^2y^2 \cdot \frac{y\,dz - z\,dy}{y^2} + 4z^3\,dy = dz,$$
$$2yz^2\,dz - 2z^3\,dy + 4z^3\,dy = dz,$$
$$(2yz^2 - 1)\,dz + 2z^3\,dy = 0.$$

Это уравнение разделим на z^2:

$$2y\,dz - \frac{dz}{z^2} + 2z\,dy = 0 \iff 2\,d(yz) + d\left(\frac{1}{z}\right) = 0 \iff$$

$$\iff d\left(2yz + \frac{1}{z}\right) = 0 \iff 2yz + \frac{1}{z} = C.$$

Таким образом, общим интегралом уравнения (13) является соотношение $2xy^2 + \dfrac{1}{xy} = C$. Кроме того, по ходу решения мы делили уравнение на $z = xy$; нетрудно проверить, что функции $x \equiv 0$ и $y \equiv 0$ также являются решениями (13).

З а д а ч а 5. Найти общий интеграл уравнения

$$(2x^3y^2 - y)\,dx + (2x^2y^3 - x)\,dy = 0. \tag{15}$$

Р е ш е н и е. Очевидными преобразованиями приходим к уравнению

$$x^2y^2(2x\,dx + 2y\,dy) = d(xy). \tag{16}$$

Заметим, что в левой части в скобках находится полный дифференциал функции $x^2 + y^2$. В уравнении (16) перейдем к новым переменным $u = xy$ и $v = x^2 + y^2$, получим уравнение $u^2\,dv = du$, следовательно, $dv = \dfrac{du}{u^2}$, и $v = -\dfrac{1}{u} + C$. Итак, соотношение $x^2 + y^2 = -\dfrac{1}{xy} + C$ задает общий интеграл уравнения (15), кроме того, при делении на u^2 были потеряны решения $x \equiv 0$ и $y \equiv 0$.

3. Построение интегрирующего множителя в виде $\mu = \nu\big(\omega(x, y)\big)$.

Предположим, что интегрирующий множитель $\mu(x, y)$ уравнения (1) в действительности зависит не просто от пары переменных (x, y), а от некоторой непрерывно дифференцируемой функции $\omega(x, y)$, т. е. представляет собой суперпозицию функций: $\mu(x,y) = \nu\big(\omega(x,y)\big)$. Тогда (10) можно переписать в виде

$$\begin{gathered}\nu\big(\omega(x,y)\big)\big(P'_y(x,y) - Q'_x(x,y)\big) = \\ = \frac{\partial\nu\big(\omega(x,y)\big)}{\partial x}Q(x,y) - \frac{\partial\nu\big(\omega(x,y)\big)}{\partial y}P(x,y).\end{gathered} \tag{17}$$

Сделаем здесь замену $z = \omega(x,y)$ и, учитывая соотношения

$$\frac{\partial\nu\big(\omega(x,y)\big)}{\partial x} = \frac{d\nu(z)}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial\nu\big(\omega(x,y)\big)}{\partial y} = \frac{d\nu(z)}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial y},$$

из (17) получим:

$$\nu(z)\big(P'_y(x,y) - Q'_x(x,y)\big) = \frac{d\nu(z)}{dz}\cdot\left(Q(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} - P(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\nu(z)}\cdot\frac{d\nu(z)}{dz} = \frac{P'_y(x,y) - Q'_x(x,y)}{Q(x,y)z'_x(x,y) - P(x,y)z'_y(x,y)}. \tag{18}$$

Заметим, что левая часть этого равенства зависит только от z, поэтому и правая часть должна зависеть лишь от z, т.е. от функции $\omega(x,y)$. Итак, *интегрирующий множитель уравнения* (1) *представим в виде* $\mu(x,y) = \nu\big(\omega(x,y)\big)$ *в том и только том случае, когда в области* G *правая часть равенства* (18) *представляет собой функцию, зависящую только от переменной* $z = \omega(x,y)$:

$$\frac{P'_y(x,y) - Q'_x(x,y)}{Q(x,y)z'_x(x,y) - P(x,y)z'_y(x,y)} = \chi(z). \tag{19}$$

Из (18) также вытекает, что $\dfrac{1}{\nu(z)}\cdot\dfrac{d\nu(z)}{dz} = \chi(z)$, поэтому имеет место равенство $\nu(z) = e^{\int\chi(z)\,dz}$ (здесь под неопределенным интегралом понимается произвольная первообразная функции $\chi(z)$; очевидно, что при выборе иной первообразной мы также получим интегрирующий множитель (1), но нам достаточно найти хотя бы один интегрирующий множитель).

Рассмотрим некоторые частные случаи:

а) выясним, при каком условии интегрирующий множитель зависит только от x, т. е. $\omega(x,y) = x$. Соотношение (19) в этом случае принимает вид

$$\frac{P'_y(x,y) - Q'_x(x,y)}{Q(x,y)} = \varphi(x),$$

это и есть критерий того, что интегрирующий множитель зависит от x, при этом $\mu(x) = \exp\bigl(\int \varphi(x)\,dx\bigr)$;

б) равенство

$$\frac{Q'_x(x,y) - P'_y(x,y)}{P(x,y)} = \psi(y)$$

обеспечивает то, что интегрирующий множитель зависит только от y, и $\mu(y) = \exp\bigl(\int \psi(y)\,dy\bigr)$.

Аналогично можно получить условия, при которых интегрирующий множитель зависит только от xy, $x^2 + y^2$ и т. п.

З а д а ч а 6. Найти общий интеграл уравнения

$$y(x+y)\,dx + (xy+1)\,dy = 0. \tag{20}$$

Р е ш е н и е. Здесь $P'_y = x + 2y$, $Q'_x = y$, $\dfrac{Q'_x - P'_y}{P} = -\dfrac{1}{y}$, интегрирующий множитель $\mu(x,y) = \exp\bigl(-\int \dfrac{dy}{y}\bigr) = \dfrac{1}{y}$. После умножения (20) на эту функцию получаем уравнение

$$(x+y)\,dx + \left(x + \frac{1}{y}\right)dy = 0 \iff x\,dx + \frac{dy}{y} + y\,dx + x\,dy = 0 \iff$$

$$\iff d\left(\frac{1}{2}x^2\right) + d\bigl(\ln|y|\bigr) + d(xy) = 0,$$

поэтому общий интеграл уравнения (20): $\dfrac{x^2}{2} + \ln|y| + xy = C$. Кроме того, в результате деления (20) на y было потеряно решение $y \equiv 0$.

4. Построение интегрирующих множителей отдельно для различных слагаемых.

Можно проверить, что если $\mu_0(x,y)$ — некоторый интегрирующий множитель уравнения (1) в области G, причем общий интеграл (1) имеет вид $F_0(x,y) = C$, то общее выражение для интегрирующего множителя (1): $\mu(x,y) = \mu_0(x,y)\varphi\bigl(F_0(x,y)\bigr)$, где $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Поэтому, если удается привести уравнение (1) к виду

$$\bigl(P_1(x,y)\,dx + Q_1(x,y)\,dy\bigr) + \bigl(P_2(x,y)\,dx + Q_2(x,y)\,dy\bigr) = 0 \tag{21}$$

и известны интегрирующие множители $\mu_1(x,y)$ и $\mu_2(x,y)$ и общие интегралы $F_1(x,y) = C$ и $F_2(x,y) = C$ для первой и второй скобки соответственно, то общее выражение для интегрирующего множителя первого слагаемого $\nu_1(x,y) = \mu_1(x,y)\varphi_1\bigl(F_1(x,y)\bigr)$, а для второго $\nu_2(x,y) = \mu_2(x,y)\varphi_2\bigl(F_2(x,y)\bigr)$. Следовательно, для поиска интегрирующего множителя всего уравнения (21) нужно так подобрать функции φ_1 и φ_2, чтобы в области G выполнялось тождество

$$\mu_1(x,y)\varphi_1\bigl(F_1(x,y)\bigr) \equiv \mu_2(x,y)\varphi_2\bigl(F_2(x,y)\bigr),$$

при этом $\mu(x,y) \doteq \mu_1(x,y)\varphi_1\bigl(F_1(x,y)\bigr)$ — интегрирующий множитель (21).

З а д а ч а 7. Найти общий интеграл уравнения

$$y^2(y\,dx - 2x\,dy) = x^3(x\,dy - 2y\,dx). \tag{22}$$

Р е ш е н и е. Перегруппируем слагаемые:

$$y^2(x\,dy - y\,dx) + xy^2\,dy = x^2(2xy\,dx - x^2\,dy)$$

и разделим получившееся уравнение на x^2y^2:

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} + \frac{dy}{x} = \frac{2xy\,dx - x^2\,dy}{y^2} \iff d\Bigl(\frac{y}{x}\Bigr) + \frac{dy}{x} = d\Bigl(\frac{x^2}{y}\Bigr).$$

В этом уравнении сделаем замену $z = \dfrac{y}{x}$ и перейдем к переменным y, z. Для этого заметим, что $x = \dfrac{y}{z}$, поэтому $\dfrac{x^2}{y} = \dfrac{y}{z^2}$:

$$\Bigl(dz + \frac{z}{y}\,dy\Bigr) + \Bigl(d\Bigl(-\frac{y}{z^2}\Bigr)\Bigr) = 0. \tag{23}$$

У первой скобки интегрирующий множитель $\mu_1(x,y) = y$, а общий интеграл $F_1(x,y) \doteq yz = C_1$; у второй скобки интегрирующий множитель $\mu_2(x,y) \equiv 1$, общий интеграл $F_2(x,y) \doteq \dfrac{y}{z^2} = C_2$. Общее выражение для интегрирующего множителя первой скобки $\nu_1(x,y) = y\cdot\varphi_1(yz)$, а для второй $\nu_2(x,y) = \varphi_2\Bigl(\dfrac{y}{z^2}\Bigr)$. Попытаемся подобрать такие функции φ_1 и φ_2, чтобы выполнялось равенство $y\cdot\varphi_1(yz) = \varphi_2\Bigl(\dfrac{y}{z^2}\Bigr)$. Нетрудно проверить, что функции $\varphi_1(t) \doteq t^{-2/3}$ и $\varphi_2(t) \doteq t^{1/3}$ удовлетворяют этому требованию. Итак, $\mu(y,z) \doteq \dfrac{y^{1/3}}{z^{2/3}}$ — интегрирующий множитель уравнения (23). После умножения (23) на эту функцию получаем уравнение в полных дифференциалах

$$\left(\frac{z^{1/3}}{y^{2/3}}-\frac{y^{1/3}}{z^{8/3}}\right)dy+\left(\frac{y^{1/3}}{z^{2/3}}+2\frac{y^{4/3}}{z^{11/3}}\right)dz=0.$$

Решая это уравнение, получим общий интеграл $4z^3y^{1/3}-y^{4/3}=Cz^{8/3}$. Перейдем здесь к переменным x,y, получим общий интеграл уравнения (22): $4y^2-x^3=Cy\sqrt[3]{xy}$. Кроме того, в процессе решения мы делили на x и y; непосредственной проверкой убеждаемся, что функции $x\equiv 0$ и $y\equiv 0$ также являются решениями уравнения (22).

Пусть дано уравнение (1) и известно, что функция $\mu=\mu(x,y)$ является его интегрирующим множителем на некотором множестве $G\subset\mathbb{R}^2$, то есть существует такая функция $F\colon\ G\to\mathbb{R}$, что

$$dF(x,y)=\mu(x,y)P(x,y)\,dx+\mu(x,y)Q(x,y)\,dy. \tag{24}$$

Тогда из (1) и (24) получаем:

$$\frac{1}{\mu(x,y)}\cdot dF(x,y)=0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$dF(x,y)=0,\qquad \frac{1}{\mu(x,y)}=0.$$

Первое уравнение приводит к общему интегралу, а второе, вообще говоря, может привести к особому решению (т.е. решению, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши). Следовательно, интегральные кривые особых решений уравнения (1) содержатся во множестве $\bigl\{(x,y)\colon\ \dfrac{1}{\mu(x,y)}=0\bigr\}$, и особым решением может быть только такое решение, вдоль которого интегрирующий множитель обращается в бесконечность.

З а д а ч а 8. Проинтегрировать уравнение

$$y(y^2+1)\,dx+x(y^2-x+1)\,dy=0, \tag{25}$$

найти особые решения.

Р е ш е н и е. Раскроем скобки и перегруппируем слагаемые:

$$y^3\,dx+(xy^2-x^2)\,dy+(y\,dx+x\,dy)=0,$$
$$y^3\,dx+(xy^2-x^2)\,dy+d(xy)=0.$$

В этом уравнении сделаем замену $z = xy$, тогда $x = \dfrac{z}{y}$, и $dx = \dfrac{y\,dz - z\,dy}{y^2}$. Получаем:

$$y^3 \cdot \frac{y\,dz - z\,dy}{y^2} + \left(zy - \frac{z^2}{y^2}\right) dy + dz = 0,$$

$$(y^2+1)\,dz = \frac{z^2}{y^2}\,dy,$$

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{dy}{y^2 \cdot (y^2+1)}.$$

Поскольку $\dfrac{1}{y^2 \cdot (y^2+1)} = \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{y^2+1}$, то последнее уравнение эквивалентно уравнению в полных дифференциалах

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{dy}{y^2} - \frac{dy}{y^2+1}, \tag{26}$$

поэтому $d\left(-\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{y} + \operatorname{arctg} y\right) = 0$, и общий интеграл уравнения (25):

$$-\frac{1}{xy} + \frac{1}{y} + \operatorname{arctg} y = C. \tag{27}$$

Кроме того, по ходу решения происходило деление на x и y, поэтому проверяем, являются ли функции $x(y) = 0$ и $y(x) = 0$ решениями исходного уравнения. Очевидно, что это решения.

Найдем теперь особые решения уравнения. Для этого выясним, какой интегрирующий множитель приводит уравнение (25) к уравнению (26). Заметим, что уравнение (26) в переменных x и y выглядит так:

$$\frac{x\,dy + y\,dx}{x^2y^2} = \frac{dy}{y^2} - \frac{dy}{y^2+1},$$

то есть

$$\frac{y}{x^2y^2}\,dx + \left(\frac{x}{x^2y^2} - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^2+1}\right) dy = 0. \tag{28}$$

Поскольку уравнение (28) получается из уравнения (25) делением на величину $x^2y^2(y^2+1)$, то интегрирующим множителем является функция $\mu(x,y) = \dfrac{1}{x^2y^2(y^2+1)}$. Она обращается в бесконечность вдоль решений $x = 0,\ y = 0$ уравнения (25). Проверим, являются ли эти решения особыми. Заметим, что ни при каких $C \in \mathbb{R}$ кривые, определяемые соотношениями (27), не могут пересекать осей координат, т. е. прямых $x = 0,\ y = 0$. Это означает, что уравнение (25) не имеет особых решений.

З а д а ч а 9. Проинтегрировать уравнение

$$\sqrt{y}\,dx - dy = 0, \tag{29}$$

найти особые решения.

Р е ш е н и е. Поскольку функции $P(x,y) = \sqrt{y}$, $Q(x,y) = -1$, $P'_x(x,y) = Q'_x(x,y) = Q'_y(x,y) = 0$, $P'_y(x,y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ непрерывны в области $G \doteq \{(x,y)|\, x \in \mathbb{R},\, y > 0\}$, то эта область является областью единственности уравнения (29).

Заметим, что интегрирующим множителем уравнения (29) является функция $\mu(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$. После умножения (29) на эту функцию получаем уравнение $dx - \dfrac{dy}{\sqrt{y}} = 0$, т. е. $d\bigl(x - 2\sqrt{y}\bigr) = 0$. Отсюда получаем общий интеграл уравнения (29) в области G: $x - 2\sqrt{y} = C$, $C \in \mathbb{R}$. Выражая из этого равенства y, получим общее решение уравнения (29) в области G:

$$y = \frac{1}{4}(x + C)^2, \quad C \in \mathbb{R},\ x > -C. \tag{30}$$

Найдем особые решения уравнения. Внутри области единственности G, т. е. при $y > 0$, уравнение не может иметь интегральных кривых особых решений. При $y < 0$ уравнение не определено, поэтому там также нет графиков особых решений. Заметим, что интегрирующий множитель уравнения (29) обращается в бесконечность при $y = 0$. Следовательно, если уравнение имеет особое решение, то его график обязательно лежит на прямой $y = 0$. Рассмотрим функцию $y = \widehat{y}(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Эта функция обращает уравнение (29) в тождество, и поэтому является решением уравнения. Проверим, является ли это решение особым. Возьмем произвольное x_0 из области определения функции $\widehat{y}(x)$, т. е. $x_0 \in \mathbb{R}$. Обозначим $y_0 = \widehat{y}(x_0) = 0$. В общем решении, заданном равенством (30), устремим x к x_0, y к y_0. Если при каждом x_0 мы можем найти значение C, при котором полученное равенство выполняется, то решение $\widehat{y}(x)$ является особым. В нашем случае получаем

$$\lim_{y \to y_0} y = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{4}(x + C)^2 \iff 0 = \frac{1}{4}(x_0 + C)^2 \iff C = -x_0.$$

Итак, требуемое значение $C \in \mathbb{R}$ существует при каждом x_0, следовательно, $\widehat{y}(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ — особое решение уравнения (29).

§4. Уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной

Дифференциальное уравнение, не разрешенное относительно производной, имеет вид

$$F(t, x, x') = 0, \tag{1}$$

где $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$ — функция, непрерывная в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. *Решением* уравнения (1) называется непрерывно дифференцируемая на интервале (a, b) функция $x(t)$ такая, что при всех $t \in (a, b)$: $\bigl(t, x(t), x'(t)\bigr) \in \Omega$ и $F\bigl(t, x(t), x'(t)\bigr) \equiv 0$ на (a, b).

Предположим, что уравнение (1) допускает параметрическое представление

$$t = \varphi(u, v), \quad x = \psi(u, v), \quad x' = \chi(u, v), \tag{2}$$

т. е. для всех значений параметров u и v

$$F\bigl(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)\bigr) = 0,$$

причем функции φ и ψ дифференцируемы по u и v. Из (2) следует, что

$$dt = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\, du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\, dv, \quad dx = \frac{\partial\psi}{\partial u}\, du + \frac{\partial\psi}{\partial v}\, dv, \quad x' = \chi(u, v).$$

Используя соотношение $dx = x' dt$, получаем

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}\, du + \frac{\partial\psi}{\partial v}\, dv = \chi(u, v)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\, du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\, dv\right).$$

В этом равенстве примем u за независимую переменную, тогда получим уравнение, разрешенное относительно производной:

$$\frac{dv}{du} = f(u, v).$$

Если $v = \omega(u, C)$ — его общее решение, то из (2)

$$t = \varphi\bigl(u, \omega(u, C)\bigr), \quad x = \psi\bigl(u, \omega(u, C)\bigr) \; -$$

общее решение (1) в параметрической форме.

Трудности, связанные с получением параметрического представления (2), могут быть легко преодолены, если уравнение (1) разрешимо относительно t или относительно x.

1. Пусть (1) разрешимо относительно искомой функции x, т. е. может быть представлено в виде

$$x = g(t, x'). \tag{3}$$

Тогда за параметры u и v можно принять t и x', и (2) принимает вид

$$t = t, \quad x = g(t, x'), \quad x' = x'.$$

Первое из этих равенств отбросим, а x', играющее здесь роль параметра, обозначим через p. Таким образом, имеем параметрическое представление уравнения (3):

$$x = g(t, p), \quad x' = p.$$

Из первого уравнения дифференцированием получаем $dx = g'_t\,dt + g'_p\,dp$, а второе уравнение, учитывая соотношение $dx = x'dt$, переписываем в виде $dx = p\,dt$. Следовательно,

$$p\,dt = g'_t\,dt + g'_p\,dp,$$

или, если принять t за независимую переменную,

$$g'_t + g'_p \cdot \frac{dp}{dt} = p.$$

Если $p = \omega(t; C)$ — общее решение этого уравнения, то общее решение (3): $x = g\bigl(t, \omega(t; C)\bigr)$.

2. Если уравнение (1) разрешимо относительно независимой переменной t, т. е. может быть представлено в виде

$$t = h(x, x'), \tag{4}$$

то, полагая $x' = p$, получим параметрическое представление (4)

$$t = h(x, p), \quad x' = p.$$

Дифференцируя первое из этих равенств и учитывая, что $p\,dt = dx$, получим $dx = p(h'_x\,dx + h'_p\,dp)$. Принимая x за независимую переменную, приходим к уравнению

$$h'_p \cdot \frac{dp}{dx} + h'_x = \frac{1}{p}.$$

Если $p = \omega(x, C)$ — общее решение этого уравнения, то общий интеграл (4) имеет вид $t = h\bigl(x, \omega(x, C)\bigr)$.

В случае 2 могут быть потеряны решения вида $x = a$, где a — постоянная величина. Для нахождения таких решений полагаем в (1) $x = a$; если при некотором $a \in \mathbb{R}$ соотношение $F(t, a, 0) = 0$ выполнено тождественно для всех t, то $x(t) \equiv a$ — решение (1).

З а д а ч а 1. Решить уравнение

$$x = tx' - t^2 x'^3. \tag{5}$$

Р е ш е н и е. Поскольку уравнение разрешено относительно x, введем параметр $p = x'$:

$$x = tp - t^2 p^3. \tag{6}$$

Продифференцируем это равенство, получим:

$$\begin{gathered} p\,dt = t\,dp + p\,dt - 3t^2p^2\,dp - 2tp^3\,dt, \\ (t - 3t^2p^2)\,dp = 2tp^3\,dt, \\ (1 - 3tp^2)\,dp = 2p^3\,dt. \end{gathered}$$

При $p \neq 0$ разделим это соотношение на $2p^3$, получим линейное относительно функции $t = t(p)$ уравнение

$$\frac{dt}{dp} = -\frac{3}{2p}t + \frac{1}{2p^3}.$$

Решая это уравнение обычными методами, найдем его общий интеграл $tp^2 = C\sqrt{|p|} - 1$. Таким образом, имеем параметрическое представление решения (5): $tp^2 = C\sqrt{|p|} - 1,\ x = tp - t^2p^3$. Пусть теперь $p = 0$. Из (6) получаем еще одно решение уравнения (5): $x = 0$.

З а д а ч а 2. Решить уравнение

$$x^{2/3} + x'^{2/3} = 1. \tag{7}$$

Р е ш е н и е. Это уравнение неудобно разрешать ни относительно x, ни относительно x'. Поэтому положим $x = \cos^3\varphi$, $x' = p = \sin^3\varphi$. Так как $dx = x'\,dt = p\,dt$, то

$$dt = \frac{dx}{p} = \frac{-3\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi}{\sin^3\varphi} = -3\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}d\varphi,$$

отсюда $t = 3\varphi + 3\operatorname{ctg}\varphi + C$. Итак, общее решение уравнения (7) имеет вид $t = 3\varphi + 3\operatorname{ctg}\varphi + C,\ x = \cos^3\varphi$.

Задачей Коши для уравнения (1) называется задача нахождения решения (1), удовлетворяющего начальному условию

$$x(t_0) = x_0. \tag{8}$$

Предположим, что уравнение (1) определяет в каждой точке (t, x) некоторой области $G \subset \mathbb{R}^2$ одно или несколько значений x', то есть на G определено поле направлений. Задача интегрирования уравнения (1) состоит в нахождении всех гладких кривых, содержащихся в G, в каждой точке которых направление касательной совпадает с одним из направлений поля в этой точке.

Заметим, что понятие единственности решения задачи Коши, которое было введено для уравнений, разрешенных относительно производной, не может быть автоматически перенесено на случай уравнения (1).

Действительно, рассмотрим задачу Коши

$$x'^2 = 1, \quad x(0) = 1. \tag{9}$$

Очевидно, что $x' = \pm 1$, поэтому $x(t) = \pm t + C$. Мы видим, что задаче (9) удовлетворяют две функции: $x_1(t) = -t + 1$ и $x_2(t) = t + 1$. Проблема здесь заключается в том, что поле направлений в области $G \doteq \mathbb{R}^2$, которое определяется уравнением (9), задает в каждой точке (t, x) два направления, одно из которых соответствует значению $x' = -1$, а второе $x' = 1$. Кажется достаточно очевидным, что для уравнений вида (1) неединственность направлений, определяемых уравнением, случается скорее как правило, нежели как исключение. Поэтому будем говорить, что *решение задачи Коши* (1), (8) *единственно,* если через точку (t_0, x_0) плоскости $\mathbb{R}^2$ в достаточно малой ее окрестности проходит столько интегральных кривых, сколько направлений поля определяет уравнение (1) в этой точке, причем для каждого направления существует ровно одна интегральная кривая, касающаяся этого направления. Это просто означает, что интегральные кривые не должны касаться друг друга в точке (t_0, x_0).

Справедлива следующая

Т е о р е м а. *Если функция $F(t, x, x')$ удовлетворяет условиям:*

а) $F(t, x, x')$ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки (t_0, x_0, x_0') вместе со своими частными производными;

б) $F(t_0, x_0, x_0') = 0$;

в) $F'_{x'}(t_0, x_0, x_0') \neq 0$,

то задача Коши (1), (8) *имеет единственное решение $x(t)$, такое, что $x'(t_0) = x_0'$.*

Особым решением уравнения (1) называется решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши.

Если функции $F(t,x,x')$, $\dfrac{\partial}{\partial t}F(t,x,x')$, $\dfrac{\partial}{\partial x}F(t,x,x')$, $\dfrac{\partial}{\partial x'}F(t,x,x')$ непрерывны в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, то точки, через которые могут пройти графики особых решений, удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} F(t,x,x') = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial x'}F(t,x,x') = 0. \end{cases}$$

Исключая из этой системы x', получим соотношение $\varphi(t,x) = 0$, которое задает на плоскости некоторое геометрическое место точек, называемое *дискриминантной кривой* уравнения (1). Заметим, что дискриминантные кривые совсем не обязательно задают графики особых решений уравнения (1). Чтобы проверить, является ли полученная дискриминантная кривая особой интегральной кривой уравнения (1), нужно:
1) проверить, является ли дискриминантная кривая интегральной кривой уравнения;
2) проверить, нарушается ли в каждой точке этой интегральной кривой свойство единственности.

З а д а ч а 3. Найти особые решения уравнения

$$x - tx' + e^{x'} = 0. \tag{10}$$

Р е ш е н и е. Общее решение данного уравнения имеет вид

$$x(t;C) = Ct - e^C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Составим систему уравнений для нахождения дискриминантной кривой:

$$\begin{cases} x - tx' + e^{x'} = 0, \\ -t + e^{x'} = 0. \end{cases}$$

Исключаем из этой системы x': из второго уравнения имеем $t = e^{x'}$, подставляем это значение в первое уравнение, получаем

$$\widehat{x}(t) = t\ln t - t.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что эта функция является при $t > 0$ решением уравнения (10). Проверим, является ли это решение особым. Возьмем произвольное $t_0 > 0$. Выясним, существует ли такое значение

$C \in \mathbb{R}$, что
$$\begin{cases} x(t_0; C) = \widehat{x}(t_0), \\ x'(t_0; C) = \widehat{x}'(t_0). \end{cases}$$
Очевидно, что в данном случае эта система принимает вид
$$\begin{cases} t_0 \ln t_0 - t_0 = Ct_0 - e^C, \\ \ln t_0 = C. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем, что $C = \ln t_0$, при подстановке этого значения в первое уравнение получаем тождество
$$t_0 \ln t_0 - t_0 = t_0 \ln t_0 - t_0.$$

Итак, функция $\widehat{x}(t) = t \ln t - t$ является особым решением уравнения (10).

З а д а ч а 4. Найти общее и особые решения уравнения
$$x = x'^2 + 2x'^3. \tag{11}$$

Р е ш е н и е. 1. Уравнение разрешено относительно неизвестной функции x, поэтому его общее решение проще всего искать методом введения параметра. Полагаем $p = x' = \dfrac{dx}{dt}$, тогда $dx = p\,dt$. Из (11) получаем
$$x = p^2 + 2p^3. \tag{12}$$
Находим полные дифференциалы левой и правой частей этого равенства:
$$dx = d(p^2 + 3p^3) = 2p\,dp + 6p^2\,dp.$$
Подставляя сюда $dx = p\,dt$, получим уравнение с разделяющимися переменными
$$p\,dt = p(2 + 6p)\,dp.$$
Делим уравнение на $p \neq 0$, получим $dt = (2+6p)\,dp$. После интегрирования имеем
$$t = 2p + 3p^2 + C, \quad C \in \mathbb{R},\ p \neq 0. \tag{13}$$
Пара равенств (13), (12) задает общее решение уравнения (11) в параметрическом виде:
$$\begin{cases} t = 2p + 3p^2 + C, \\ x = p^2 + 2p^3, \end{cases} \qquad C \in \mathbb{R},\ p \neq 0. \tag{14}$$

Рассмотрим отброшенное значение $p = 0$. Подставляя его в (12), получим $x = 0$. Таким образом, уравнение (11) имеет еще одно решение $x = x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$.

2. Теперь будем искать особые решения:

а) запишем систему для нахождения дискриминантной кривой:

$$\begin{cases} x = x'^2 + 2x'^3, \\ 0 = 2x' + 6x'^2. \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем $x' = 0$ или $x' = -1/3$. Подставляем эти значения в первое уравнение системы, в итоге имеем $x = 0$ или $x = 1/27$. Итак, дискриминантная кривая уравнения (11) состоит из двух прямых $x = 0$, $x = 1/27$;

б) выясним, содержит ли дискриминантная кривая интегральные кривые уравнения (11).

Рассмотрим $x = 0$, т. е. возьмем функцию $x = x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Как мы выяснили выше, эта функция является решением уравнения (11). Следовательно, это решение, подозрительное на особое.

Теперь рассмотрим $x = 1/27$, т. е. возьмем функцию $x = x(t) = 1/27$, $t \in \mathbb{R}$. Подставляя ее в уравнение (11), получаем ложное равенство $1/27 = 0$. Таким образом, функция $x = x(t) = 1/27$, $t \in \mathbb{R}$, не является решением уравнения (11);

в) выясним, является ли решение $\widehat{x}(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, особым решением уравнения (11). Зафиксируем произвольное t_0 из области определения решения $\widehat{x}(t)$, т. е. $t_0 \in \mathbb{R}$. Положим $x_0 = \widehat{x}(t_0) = 0$ и $p_0 = \widehat{x}'(t_0) = 0$. В общее решение (14) подставим $t = t_0$, $x = x_0$, а параметр p устремим к p_0. Если полученная система при каждом t_0 совместна, т. е. существует $C \in \mathbb{R}$ такое, что справедливы оба уравнения системы, то решение $\widehat{x}(t)$ является особым. Имеем:

$$\begin{cases} t_0 = \lim\limits_{p \to p_0} (2p + 3p^2) + C, \\ x_0 = \lim\limits_{p \to p_0} (p^2 + 2p^3), \end{cases} \iff \begin{cases} t_0 = \lim\limits_{p \to 0} (2p + 3p^2) + C, \\ 0 = \lim\limits_{p \to 0} (p^2 + 2p^3), \end{cases} \iff C = t_0.$$

Итак, при каждом $t_0 \in \mathbb{R}$ нашлось значение C, при котором полученная система совместна, следовательно, решение $\widehat{x}(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, является особым решением уравнения (11).

Индивидуальные задания

Вариант 1

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = \frac{t+2x}{t}.$$

2. Найти такую кривую, проходящую через точку $(0,-2)$, чтобы угловой коэффициент касательной в любой ее точке равнялся ординате этой точки, увеличенной в три раза.

3. Найти области единственности и общие решения уравнений:

а) $x' = \sin(t-x)$; б) $tx'\cos\frac{x}{t} = x\cos\frac{x}{t} - t$; в) $(2x-y+1)\,dx + (2y-x-1)\,dy = 0$;

г) $(t^2x^2-1)x' + 2tx^3 = 0$; д) $x' + 2tx = 2tx^2$.

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x' + x\cos t = \sin t\cos t$, $x(0) = 1$.

5. Доказать, что линейное уравнение $x' = kx + f(t)$, где k — постоянная, отличная от 0, а $f(t)$ — ω-периодическая функция, имеет ровно одно ω-периодическое решение, и найти это решение.

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} - 1\right)dx - \frac{y\,dy}{\sqrt{x^2-y^2}} = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения:

$$(1-x^2y)\,dx + x^2(y-x)\,dy = 0.$$

8. Уравнение $x''' = 0$ имеет своими решениями две функции: $x_1(t) = 0$ и $x_2(t) = t$. Как согласуется с теоремой существования и единственности тот факт, что обе эти кривые проходят через точку $(0,0)$ плоскости Otx?

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x' = \sqrt[3]{x^2}$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

10. Проинтегрировать уравнение $x = (x'-1)e^{x'}$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

а) $x' = \dfrac{x^2-t}{2x(t+1)}$; б) $(t+x)^2x' = 1$; в) $x^2(x-tx') = t^3x'$;

г) $t(x'^2 + e^{2x}) = -2x'$; д) $x = (tx'+2x)^2$.

12. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $\quad x'^3 = (x+1)^2 x'', \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 1.$

13. Решить уравнения:

а) $y^{\mathrm{v}} + y^{\mathrm{iv}} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0$; б) $y'' + 2y' - 3y = -4e^t + 3t + 2$;

в) $y''' + 9y' = 2\sin 3t + e^{3t}$; г) $t^2 y'' + ty' + y = 2\sin(\ln t)$.

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' - 3y' = \dfrac{9e^{-3t}}{3+e^{-3t}}, \quad y(0) = 4\ln 4, \quad y'(0) = 3(3\ln 4 - 1).$

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot x = 2x - y, \\ \dot y = 4x + 4y. \end{cases}$

Вариант 2

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения
$$x' = \frac{x-t}{t+x}.$$

2. Найти кривую $y = y(x)$, для которой площадь $S(t)$, ограниченная кривой, осью абсцисс и прямыми $x = 0$, $x = t$, удовлетворяет равенству $S(t) = a^2 \ln\bigl(y(t)/a\bigr)$.

3. Найти области единственности и общие решения уравнений:

а) $x' = t + x - 1$; б) $(tx' - x)\operatorname{arctg}\dfrac{x}{t} = t$; в) $(x + y - 2)\,dx + (1 - x)\,dy = 0$;

г) $\left(1 + \sqrt{\dfrac{x^2}{t} - 1}\right) dt - 2x\,dx = 0$; д) $3tx^2x' - 2x^3 = t^3$.

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $\quad dt = \bigl(\exp(-x^2/2) - tx\bigr)\,dx, \quad x(1) = 0.$

5. Найти общее решение уравнения $x' + p(t)x = 0$, где $p(t)$ непрерывна на (a, b), если известно ненулевое частное решение $x_1(t)$ этого уравнения.

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл:
$$\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\,dx + \frac{e^y}{1+x^2}\,dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения:
$$(x^2 + y)\,dx - x\,dy = 0.$$

8. Сформулировать теорему существования и единственности для системы уравнений $\begin{cases} \ddot{x} - 3\dot{y} = f(x, y), \\ \dddot{y} + 5\dot{x} = g(x, y). \end{cases}$

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x' = (x-1)\sqrt{x^3}$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

10. Проинтегрировать уравнение $(x')^2 t = e^{1/x'}$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

$$\text{а) } (t\cos x + \sin 2x)x' = 1; \quad \text{б) } t(t-1)x' + x^3 = tx;$$
$$\text{в) } tx'(\ln x - \ln t) = x; \quad \text{г) } {x'}^3 + (3t-6)x' = 3x;$$
$$\text{д) } (tx' - x)^2 = {x'}^2 - \frac{2xx'}{t} + 1.$$

12. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x'' - e^x x' = 0, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 1.$

13. Решить уравнения:

$$\text{а) } y^{\text{iv}} + 8y'' + 16y = 0; \quad \text{б) } y'' - 3y' + 2y = 3e^{2t} + 2t^2;$$
$$\text{в) } y'' + 4y = 8\cos 2t + 2e^{2t}; \quad \text{г) } t^2y'' - ty' = -t + 3/t.$$

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{1 + e^{-2t}}, \quad y(0) = 1 + 2\ln 2,\ y'(0) = 6\ln 2.$

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$

Вариант 3

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = \frac{x^2 - 2tx}{t^2}.$$

2. Доказать, что единственная кривая, обладающая тем свойством, что все ее нормали проходят через одну точку, есть окружность.

3. Найти области единственности и общие решения уравнений:

а) $\sec^2 x\ \mathrm{tg}\, y\, dx + \sec^2 y\ \mathrm{tg}\, x\, dy = 0$; б) $tx' - x + \sqrt{t^2 + x^2} = 0$;
в) $(x + y - 2)\, dx + (y - x + 4)\, dy = 0$; г) $2tx'(t - x^2) + x^3 = 0$;
д) $(t^3 + e^x)x' = 3t^2$.

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $(t - 2tx - x^2)x' + x^2 = 0, \quad x(0) = 1$.

5. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения первого порядка, если известны два частных решения этого уравнения: $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл:

$$\frac{2x}{y^3}\, dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}\, dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения:

$$(x + y^2)\, dx - 2xy\, dy = 0.$$

8. Для уравнения $x''' = 2t - \sqrt{1 - t^2 - (x')^2}$ поставить начальные условия так, чтобы они выделяли единственное действительное решение.

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x' = \arccos x$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

10. Проинтегрировать уравнение $t\big(1 + (x')^2\big)^{3/2} = a$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

а) $tx' + 1 = e^{t-x}$; б) $x' = (4t + x - 3)^2$; в) $xx' = 4t + 3x - 2$;
г) $(tx' - x)^2 = t^2x^2 - t^4$; д) $2x'^3 - 3x'^2 + t = x$.

12. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $(1 + xx')x'' = (1 + x'^2)x', \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 1$.

13. Решить уравнения:

а) $y^{\mathrm{iv}} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$; б) $y'' - 3y' = e^{3t} - 18t + 5$;
в) $y''' + y' = 5\sin t + 3e^t$; г) $t^2y'' - ty' + y = 6t\ln t$.

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\sin \pi t}, \quad y(1/2) = 1,\ y'(1/2) = \dfrac{\pi^2}{2}.$

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$

Вариант 4

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения
$$x' = 3t^2 + x^2.$$

2. Найти кривые $x = x(t)$, у которых отрезок, отсекаемый нормалью на оси Ot, равен x^2/t.

3. Найти области единственности и общие решения уравнений:
$$\text{а) } x' = (t - x)^2 + 1; \quad \text{б) } y\,dx + \big(2\sqrt{xy} - x\big)\,dy = 0;$$
$$\text{в) } (6x + y - 1)\,dx + (4x + y - 2)\,dy = 0; \quad \text{г) } tx' = t\sqrt{x - t^2} + 2x;$$
$$\text{д) } x' + \frac{x}{t+1} + x^2 = 0.$$

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $\quad t^2 + tx' = x, \quad x(1) = 0.$

5. Выписать линейное однородное уравнение первого порядка, если известно одно ненулевое частное решение $x_1(t)$ этого уравнения.

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл:
$$\big(1 + e^{x/y}\big)\,dx + e^{x/y}\Big(1 - \frac{x}{y}\Big)\,dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения:
$$(2x^2 y + 2y + 5)\,dx + (2x^3 + 2x)\,dy = 0.$$

8. Верно ли, что всякая скалярная функция двух переменных $f(t, x)$, имеющая ограниченную частную производную по x, удовлетворяет условию Липшица по x?

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.
$$x' = f(x), \text{ где } f(x) = \begin{cases} x \ln x, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

10. Проинтегрировать уравнение $x^{2/5}+(x')^{2/5}=a^{2/5}$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

$$\text{а) } x^2=(txx'+1)\ln t; \quad \text{б) } (2t^2x-3x^2)x'=6t^2-2tx^2+1;$$
$$\text{в) } xx'+tx=t^3; \;\; \text{г) } (x-2tx')^2=4xx'^3; \;\; \text{д) } 3x'^3-tx'+1=0.$$

12. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $\quad (x+1)^2x''=(x')^3, \quad x(0)=0,\ x'(0)=1.$

13. Решить уравнения:

$$\text{а) } y^{\text{v}}+8y'''+16y'=0; \quad \text{б) } y''+4y'+4y=3e^{-2t}+5t^2-8;$$
$$\text{в) } y'''+5y'=-3\sin\sqrt{5}t+4e^{\sqrt{5}t};$$
$$\text{г) } (2t+1)^2y''-4(2t+1)y'+8y=-8t-4.$$

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y''+3y'+2y=\dfrac{e^{-t}}{2+e^t}, \quad y(0)=0,\ y'(0)=0.$

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases}\dot{x}=x+y,\\ \dot{y}=-2x+4y.\end{cases}$

Вариант 5

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения
$$x'=3t^2-x^2.$$

2. Доказать, что кривая, угловой коэффициент касательной которой в любой точке пропорционален абсциссе точки касания, есть парабола.

3. Найти области единственности и общие решения уравнений:

$$\text{а) } 2x\sqrt{1-y^2}\,dx+y\,dy=0; \quad \text{б) } tx'=x+\sqrt{t^2-x^2};$$
$$\text{в) } (x-2y+5)\,dx+(2x-y+4)\,dy=0;$$
$$\text{г) } (2x+3y-1)\,dx+(4x+6y-5)\,dy=0;$$
$$\text{д) } 2x'\sin t+x\cos t=x^3\sin^2 t.$$

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $\quad x'-2tx=2t\exp(t^2), \quad x(0)=1.$

5. Показать, что одним из решений уравнения

$$x' + kx = kq(t), \quad t \in [0, +\infty),$$

где k — постоянное число, является функция $x = k \int\limits_0^{+\infty} q(t-s)e^{-ks}\, ds$.

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл:

$$\big(\sin(xy) + xy\cos(xy)\big)\, dx + x^2\cos(xy)\, dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения:

$$(x^4 \ln x - 2xy^3)\, dx + 3x^2y^2\, dy = 0.$$

8. Верно ли, что всякая скалярная функция двух переменных $f(t, x)$, удовлетворяющая условию Липшица по переменной x, имеет частную производную по x?

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

$$x' = f(x), \text{ где } f(x) = \begin{cases} x\ln^2 x, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

10. Проинтегрировать уравнение $t = x' + \sin x'$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

а) $(x' - t\sqrt{x})(t^2 - 1) = tx$; б) $(t^2x^2 + 1)x + (tx - 1)^2tx' = 0$;
в) $(2t + x + 5)x' = 3t + 6$; г) $t^2(x - tx') = xx'^2$; д) $tx' + x = \ln x'$.

12. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x'' - 12x^2 = 0, \quad x(0) = 1/2,\ x'(0) = 1.$

13. Решить уравнения:

а) $y^{\text{iv}} - 4y''' + 8y'' - 16y' + 16y = 0$; б) $y''' - y' = e^t \sin t + 2t^2$;
в) $y'' + 16y = 2\cos 4t + 5e^{4t}$; г) $(t + 1)^2y'' - 2(t + 1)y' + 2y = 6t + 6$.

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' + 4y = 8\operatorname{ctg} 2t, \quad y(\pi/4) = 5,\ y'(\pi/4) = 4.$

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = 6x - y, \\ \dot{y} = 3x + 2y. \end{cases}$

Вариант 6

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения
$$x' = (2x-5)(t+1).$$

2. Найти кривую, для которой угловой коэффициент касательной в каждой точке в n раз больше углового коэффициента прямой, соединяющей ту же точку с началом координат.

3. Найти области единственности и общие решения уравнений:
$$\text{а) } x' = (t+x)^2; \quad \text{б) } x' = \frac{x}{t} - \operatorname{tg}\frac{x}{t};$$
$$\text{в) } (2x+y-1)\,dx - (4x+2y+5)\,dy = 0;$$
$$\text{г) } 2\bigl(x^2y + \sqrt{1+x^4y^2}\bigr)\,dx + x^3\,dy = 0;$$
$$\text{д) } x' - 9tx = (t^5+t^2)x^{2/3}.$$

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $\quad x' + 2tx = \exp(-t^2), \quad x(1) = 0.$

5. Найти общее решение линейного однородного уравнения
$$x' + p(t)x = 0,$$
приведя его к уравнению с постоянным коэффициентом при x при помощи замены независимой переменной $t = \psi(\tau)$.

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл:
$$x(2x^2+y^2)\,dx + y(x^2+2y^2)\,dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения:
$$(x + \sin x + \sin y)\,dx + \cos y\,dy = 0.$$

8. Привести пример уравнения $x' = f(t,x)$ с непрерывной правой частью, у которой в точке $(0,0)$ нарушалась бы единственность решения.

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x' = 3\sqrt[3]{(t+x)^2} - 1$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

10. Проинтегрировать уравнение $x = x'(1 + x'\cos x')$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:
$$\text{а) } x^2x' + t^2\sin^3 t = x^3\operatorname{ctg} t; \quad \text{б) } x' = \sqrt[3]{2t-x} + 2.$$
$$\text{в) } x' = 3t + \sqrt{x-t^2}; \;\; \text{г) } x'^4 = 4x(tx'-2x)^2; \;\; \text{д) } 3x'^4 = x' + x.$$

12. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $2xx'' = 3 + (x')^2$, $x(1) = 1$, $x'(1) = 1$.

13. Решить уравнения:

а) $y^{\text{iv}} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$; б) $y'' - 2y' + 2y = e^t t \sin t$;

в) $y''' + 49y' = 5\sin 7t + 6e^{7t}$; г) $t^3y''' - 3t^2y'' + 6ty' - 6y = -2t$.

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\cos \pi t}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = -x + 8y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

Вариант 7

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = t^2 - x^2 + x.$$

2. Найти кривую, обладающую тем свойством, что отрезок касательной к кривой, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.

3. Найти области единственности и общие решения уравнений:

$$\text{а) } x' = \sqrt{2t + 4x - 1}; \quad \text{б) } x' = e^{x/t} + \frac{x}{t};$$

$$\text{в) } (2x + 3y - 5)\,dx + (3x + 2y - 5)\,dy = 0; \quad \text{г) } \left(\frac{2}{t^2} - x^2\right) dt + dx = 0;$$

$$\text{д) } x' + x = t\sqrt{x}.$$

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x' \cos t - x \sin t = 2t$, $x(0) = 0$.

5. В линейном однородном дифференциальном уравнении

$$x^2y'' + xy' + y = 0$$

произвести замену переменной $x = e^t$ и найти общее решение.

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл:

$$(3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2y + 4y^3)\,dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения:

$$(2xy - y^3)\,dx + (2x^2 \ln x + 3xy^2)\,dy = 0.$$

8. Какие из следующих функций: t^2+x^2, $|t-x|$, $\sqrt{t^2+x^2}$ удовлетворяют глобальному условию Липшица по переменной x в области

$$G = \{(t,x)|\ 0 < t < 1,\ 0 < x < 1\}\,?$$

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x' = 1 + \dfrac{3}{2}(x-t)^{3/2}$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

10. Проинтегрировать уравнение $x = \arcsin x' + \ln\bigl(1 + (x')^2\bigr)$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

$$\text{а) } (2te^x + x^4)x' = xe^x;\ \ \text{б) } x' = \operatorname{tg}(x-2t);\ \ \text{в) } 2tx' + 1 = x + \frac{t^2}{x-1};$$
$$\text{г) } t^2x'^2 - 2(tx-2)x' + x^2 = 0;\quad \text{д) } 2x' = t + \ln x'.$$

12. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $\quad t^3x'' = 4\ln t, \quad x(1) = 4,\ x'(1) = 0.$

13. Решить уравнения:

$$\text{а) } y^{\text{iv}} + 2y'' - 8y' + 5y = 0;\quad \text{б) } y^{\text{iv}} - y = -8e^{-t} + t;$$
$$\text{в) } y'' + 49y = 25\cos 7t + 7e^{7t};\quad \text{г) } t^2y'' + ty' + y = t(6 - \ln t).$$

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' + 4y = 4\operatorname{ctg} 2t, \quad y(\pi/4) = 3,\ y'(\pi/4) = 2.$

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases}$

Вариант 8

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = t^2 + 2t + x^2.$$

2. Найти кривую, обладающую тем свойством, что величина перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную, равна абсциссе точки касания.

3. Найти области единственности и общие решения уравнений:

$$\text{а) } x' + \sin\frac{t+x}{2} = \sin\frac{t-x}{2}; \quad \text{б) } (x^2+xy+y^2)\,dx = x^2\,dy;$$

$$\text{в) } (x+y-2)\,dx + (x-y)\,dy = 0; \quad \text{г) } (x + x\sqrt{t^2x^4-1})\,dt + 2t\,dx = 0;$$

$$\text{д) } x' = \frac{2t}{t^2\cos x + \sin 2x}.$$

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $\quad tx' - 2x = t^3\cos t, \quad x(\pi) = 0.$

5. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения

$$x' + p(t)x = q(t),$$

приведя его к уравнению, не содержащему члена с искомой функцией при помощи введения новой искомой функции z по формуле $x = \alpha(t)z$, где $\alpha(t)$ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция.

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}\right)dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения:

$$(3y^2 - x)\,dx + (2y^3 - 6xy)\,dy = 0.$$

8. Какие из следующих функций: $tx^3 + t^2$, $\sin(t-x)$, $\sqrt{x+2t}$ удовлетворяют глобальному условию Липшица по переменной x в области $G = \{(t,x)|\ 0 < t < 1,\ 0 < x < 1\}$?

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x' = |x|$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

10. Проинтегрировать уравнение $t = (x')^2 - 2x' + 2$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

$$\text{а) } t^2(dx - dt) = (t+x)x\,dt; \ \text{б) } tx' = t\sqrt{x-t^2} + 2x; \ \text{в) } x' + \operatorname{tg} x = t\sec x.$$

$$\text{г) } x^2 + t^2{x'}^5 = tx({x'}^2 + {x'}^3); \quad \text{д) } 2tx' - x = \sin x'.$$

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $\quad x'x^2 + xx'' - (x')^2 = 0, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 2.$

13. Решить уравнения:

$$\text{а) } y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0; \quad \text{б) } y'' - 3y' + 2y = t(\cos t + 1);$$
$$\text{в) } y''' + 8y' = \sin\sqrt{2}t\,\cos\sqrt{2}t; \quad \text{г) } t^2y'' - 2y = \sin(\ln t).$$

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' + 9y = \dfrac{9}{\sin 3t}, \quad y(\pi/6) = 4,\ y'(\pi/6) = \dfrac{3\pi}{2}$.

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -2x + 4y. \end{cases}$

Вариант 9

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = x^2 + x + 1.$$

2. Определить кривую, у которой отношение отрезка, отсекаемого касательной на оси ординат, к длине радиуса-вектора точки касания равно постоянной величине.

3. Найти области единственности и общие решения уравнений:

$$\text{а) } e^t \sin^3 x + x'\big(1 + e^{2t}\big)\cos x = 0; \quad \text{б) } x' = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4t^2}}{t};$$
$$\text{в) } (x + y)\,dx + (x + y - 1)\,dy = 0; \quad \text{г) } (x^4 - 3t^2)\,dx + tx\,dt = 0;$$
$$\text{д) } x' - 2tx = 3t^3x^2.$$

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $\quad x' - x\operatorname{tg} t = \dfrac{1}{\cos^3 t}, \quad x(0) = 0.$

5. Найти частные производные от решения задачи Коши

$$x' + p(t)x = 0,\ x(t_0) = x_0$$

по t_0 и x_0 в точке (t_0, x_0).

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл:

$$\Big(3x^2\operatorname{tg} y - \frac{2y^3}{x^3}\Big)\,dx + \Big(x^3\sec^2 y + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2}\Big)\,dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения:

$$(x^2 + y^2 + 1)\,dx - 2xy\,dy = 0.$$

8. Какие из следующих функций: $\dfrac{1}{t+x}$, $|t-x|$, $tx^2\ln x$ удовлетворяют глобальному условию Липшица по переменной x в области

$$G = \{(t,x) |\ 0 < t < 1,\ 0 < x < 1\}\,?$$

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x' = \sqrt{|x|}$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

10. Проинтегрировать уравнение $x = \ln x' + \sin x'$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

$$\text{а) } t\,dx - x\,dt = t\sqrt{t^2+x^2}\,dt; \quad \text{б) } (t+2x^3)x' = x;$$
$$\text{в) } x' = \frac{1}{2}\sqrt{t} + \sqrt[3]{x}; \ \text{ г) } x'^2 t = e^{1/x'}; \ \text{ д) } (xx')^3 = 27t(x^2-2t^2).$$

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $\quad 2xx'' + x^2 - (x')^2 = 0, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 1.$

13. Решить уравнения:

$$\text{а) } y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0; \quad \text{б) } y'' + 3y' - 4y = te^{-t} + 3;$$
$$\text{в) } y''' - 7y' = 5\sin\sqrt{7}t + 9e^{\sqrt{7}t}; \quad \text{г) } t^2y'' - ty' - 3y = -\frac{16\ln t}{t}.$$

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{2+e^{-2t}}, \quad y(0) = 1 + 3\ln 3,\ y'(0) = 10\ln 3.$

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 5y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$

Вариант 10

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = t + x - x^2.$$

2. Найти кривую, для которой длина отрезка, отсекаемого на оси ординат нормалью, проведенной в произвольной точке кривой, равна расстоянию от этой точки до начала координат.

3. Найти области единственности и общие решения уравнений:

$$\text{а) } x'\sqrt{1+t+x} = t+x-1; \quad \text{б) } x\bigl(\ln x - \ln y\bigr)\,dy - y\,dx = 0;$$

$$\text{в) } x' = 2\left(\frac{x+2}{t+x-1}\right)^2; \quad \text{г) } x^3\,dt + 2(t^2 - tx^2)\,dx = 0;$$

$$\text{д) } x' - x\cos t = x^2\cos t.$$

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x't\ln t - x = 3t^3\ln^2 t, \quad x(e) = e^3.$

5. Найти частные производные от решения задачи Коши

$$x' + p(t)x = q(t),\ x(t_0) = x_0$$

по t_0 и x_0 в точке (t_0, x_0).

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл:

$$\bigl(2x + \frac{x^2+y^2}{x^2y}\bigr)\,dx = \frac{x^2+y^2}{xy^2}\,dy.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения:

$$(x - xy)\,dx + (x^2 + y)\,dy = 0.$$

8. Удовлетворяет ли функция $f(t,x) = \sqrt{t^2+x^2}$ условию Липшица:
а) по переменной x;
б) по паре переменных (t,x)?

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x' = \sqrt{x-t}$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

10. Проинтегрировать уравнение $x' = e^{x'/x}$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

$$\text{а) } t^2x^2x' = 2tx' - x; \quad \text{б) } \bigl(t - x\cos\frac{x}{t}\bigr)\,dt + t\cos\frac{x}{t}\,dx = 0;$$

$$\text{в) } x + x'\ln^2 x = (t + 2\ln x)x'; \quad \text{г) } t^2x'^2 - 2txx' = t^2 + 3x^2;$$

$$\text{д) } (tx' - x)^3 = x'^3 - 1.$$

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x''x^3 = 3, \quad x(1) = 1,\ x'(1) = 1.$

13. Решить уравнения:

$$\text{а) } y^{\text{vi}} - y = 0; \quad \text{б) } y'' - 5y' + 6y = t^2 e^{2t} - 3;$$
$$\text{в) } y''' + 7y' = 5\sin\sqrt{7}t + 10e^{\sqrt{7}t}; \quad \text{г) } t^2 y'' - 2ty' + 2y = t^2 - 2t + 2.$$

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' + 3y' = \dfrac{9e^{3t}}{1+e^{3t}}, \quad y(0) = \ln 4,\ y'(0) = 3(1 - \ln 2).$

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = -4x + y. \end{cases}$

Вариант 11

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = \frac{x}{t^2 + 2}.$$

2. Найти кривую, для которой произведение абсциссы произвольной точки кривой на величину отрезка, отсекаемого нормалью на оси ординат, равно удвоенному квадрату расстояния от этой точки до начала координат.

3. Найти области единственности и общие решения уравнений:

$$\text{а) } 3e^x \operatorname{tg} y\, dx + (1 - e^x)\cos^{-2} y\, dy = 0; \quad \text{б) } tx' = 3x - 2t - 2\sqrt{tx - t^2};$$
$$\text{в) } (8x + 4y + 1)\, dx + (4x + 2y + 1)\, dy = 0;$$
$$\text{г) } 2x\, dy + y\, dx + xy^2\big(x\, dy + y\, dx\big) = 0;$$
$$\text{д) } x\, dx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3\right) dy.$$

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $\quad (2t - x^2)x' = 2x, \quad x(-8) = 8.$

5. Общее решение линейного уравнения имеет вид $x = A(t)C + B(t)$. Доказать обратное: дифференциальное уравнение всякого семейства кривых этого вида есть линейное уравнение первого порядка.

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл:

$$\left(x + \frac{\sin 2x}{y}\right) dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right) dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения:

$$(x^2 + y)\, dx - x\, dy = 0.$$

8. При каких n уравнение $x^{(n)} = f(t,x)$, где f и f'_x непрерывны, может иметь среди своих решений две функции: $x_1(t) = t$ и $x_2(t) = t^2 - t + 1$?

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x' = \dfrac{1}{2}\sqrt{2x - t} + 1$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

10. Проинтегрировать уравнение $x = (x')^2 e^{x'}$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

$$\text{а) } (2t + 3x - 1)\,dt + (4t + 6x - 5)\,dx = 0; \quad \text{б) } x' = \frac{1}{t - x^2};$$

$$\text{в) } xx' + t = \frac{1}{2}\left(\frac{t^2 + x^2}{t}\right)^2;$$

$$\text{г) } {x'}^2 - xx' + e^t = 0; \quad \text{д) } t = \ln x' + \sin x'.$$

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $\quad (t+1)x'' + t(x')^2 = x', \quad x(1) = -2,\ x'(1) = 4.$

13. Решить уравнения:

$$\text{а) } y^{\mathrm{vi}} + y = 0; \quad \text{б) } y'' - 2y' + y = t(6e^t - 2);$$

$$\text{в) } y'' + 81y = 8\cos 9t - 11e^{9t}; \quad \text{г) } t^2 y'' + ty' - y = t^m,\ |m| \neq 1.$$

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{2 + e^{-t}}, \quad y(0) = 1 + 3\ln 3,\ y'(0) = 5\ln 3.$

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = -x + 8y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

Вариант 12

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = t^2 - 4x^2.$$

2. Найти кривую, у которой отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, равен полусумме координат точки касания.

3. Найти области единственности и общие решения уравнений:

$$\text{а) } (1+y^2)\,dx - \big(2y+\sqrt{1+y^2}\big)(1+x)^{3/2}\,dy = 0;$$

$$\text{б) } \big(1+e^{x/y}\big)\,dx + e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy = 0; \quad \text{в) } (x-y)\,dx + (2y-x+1)\,dy = 0;$$

$$\text{г) } x' = 3t + \sqrt{x-t^2}; \quad \text{д) } x' + \frac{2x}{t} = \frac{2\sqrt{x}}{\cos^2 t}.$$

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $\quad x' + x\cos t = \cos t, \quad x(0) = 1.$

5. Доказать, что если $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ — однородное уравнение, а выражение $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ — полный дифференциал некоторой функции, то общий интеграл данного дифференциального уравнения имеет вид $xP(x,y) + yQ(x,y) = C$.

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл:

$$(3x^2-2x-y)\,dx + (2y-x+3y^2)\,dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения:

$$\left(\sqrt{x^2-y}+2x\right)\,dx - dy = 0.$$

8. Сколько интегральных кривых уравнения $x'' = f(t,x,x')$, где функции f, f'_x, $f'_{x'}$ — непрерывны, проходят через точку $(0,1)$ плоскости Otx, касаясь прямой $x = 2t+1$?

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

$$x' = f(x), \text{ где } f(x) = \begin{cases} x\ln x, & \text{если } x > 0, \\ x^2 + x, & \text{если } x \leqslant 0. \end{cases}$$

10. Проинтегрировать уравнение $x = \dfrac{tx'}{2} + \dfrac{(x')^2}{t^2}$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

$$\text{а) } 2tx'(t-x^2) + x^3 = 0; \quad \text{б) } t - \frac{x}{x'} = \frac{2}{x};$$

$$\text{в) } x' = \left(\frac{3t+x^3-1}{x}\right)^2.$$

$$\text{г) } tx(tx'-x)^2 + 2x' = 0; \quad \text{д) } x = x'\sqrt{1+x'^2}.$$

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $(x-2)x'' = 2(x')^2, \quad x(0) = 3,\ x'(0) = 1.$

13. Решить уравнения:

$$\text{а) } y^{\text{iv}} + y = 0; \quad \text{б) } y'' + 4y' + 4y = te^{2t} - 2t^2;$$
$$\text{в) } y'' + 12y = 12\sin\sqrt{3}t\,\cos\sqrt{3}t; \quad \text{г) } t^2y'' + 4ty' + 2y = 2\ln^2 t + 12t.$$

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' + 4y = \dfrac{4}{\sin 2t}, \quad y(\pi/4) = 2,\ y'(\pi/4) = \pi.$

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$

Вариант 13

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = t^2 - 4t - x^2.$$

2. Найти кривые, обладающие тем свойством, что отрезок, который касательная в произвольной точке кривой отсекает на оси ординат, равен квадрату абсциссы точки касания.

3. Найти области единственности и общие решения уравнений:

$$\text{а) } e^y\big(1 + x^2\big)\,dy - 2x\big(1 + e^y\big)\,dx = 0;$$
$$\text{б) } (t^2 + tx)x' = t\sqrt{t^2 - x^2} + tx + x^2;$$
$$\text{в) } (x - 2y - 1)\,dx + (3x - 6y + 2)\,dy = 0;$$
$$\text{г) } x\,dy - 2y\,dx + xy^2\big(2x\,dy + y\,dx\big) = 0; \quad \text{д) } x' + \frac{2x}{t} = \frac{2\sqrt{x}}{\cos^2 t}.$$

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x' = \dfrac{x}{2x\ln x + x - t}, \quad x(e) = e.$

5. Пусть $y_1(t), y_2(t)$ — два различных решения линейного неоднородного уравнения $y' + p(t)y = q(t)$. При каких α и β линейная комбинация $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ есть решение этого уравнения?

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл:

$$\left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + 2xy - \frac{y}{x}\right)dx + \left(\sqrt{1+x^2} + x^2 - \ln x\right)dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения:
$$\left(\frac{x}{y}+1\right)\,dx+\left(\frac{x}{y}-1\right)\,dy=0.$$

8. Сколько интегральных кривых уравнения $x'''=f(t,x)$, где f и f'_x — непрерывны, проходят через точку $(0,0)$ плоскости Otx, касаясь графика функции $x=\sin t$?

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.
$$x'=f(x),\text{ где } f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & \text{если } x>0,\\ x^3+x^2, & \text{если } x\leqslant 0.\end{cases}$$

10. Проинтегрировать уравнение $t=\dfrac{x}{x'}+\dfrac{1}{(x')^2}$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:
$$\text{а) } x'=\frac{2tx^3}{1-t^2x^2};\quad \text{б) } 2t^3xx'+3t^2x^2+7=0;$$
$$\text{в) } (t^2+x^2+1)xx'+(t^2+x^2-1)t=0;$$
$$\text{г) } t^2{x'}^2+x^2=2t(2-xx');\quad \text{д) } t={x'}^2-2x'+2.$$

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $\quad tx''-2x'=2t^4,\quad x(1)=1/5,\ x'(1)=4.$

13. Решить уравнения:
$$\text{а) } x^{\mathrm{iv}}-x=0;\quad \text{б) } y'''-4y''+4y'=t^2+te^{2t};$$
$$\text{в) } y''-12y=13\sin\sqrt{3}t\,\cos\sqrt{3}t+e^{\sqrt{3}t};$$
$$\text{г) } (t+1)^3y''+3(t+1)^2y'+(t+1)y=6\ln(t+1).$$

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y''+4y=\dfrac{4}{\cos 2t},\quad y(0)=2,\ y'(0)=0.$

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases}\dot{x}=x-3y,\\ \dot{y}=3x+y.\end{cases}$

Вариант 14

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения
$$x' = t^2 + 5t + x^2 - 3x.$$

2. Показать, что кривая, симметричная относительно начала координат к интегральной кривой уравнения $4t^2{x'}^2 - x^2 = tx^3$, также является интегральной кривой этого уравнения.

3. Найти области единственности и общие решения уравнений:
$$\text{а) } (1+y^2)\big(e^{2x}\,dx - e^y\,dy\big) - (1+y)\,dy = 0;$$
$$\text{б) } tx' = t\sin\frac{x}{t} + x; \quad \text{в) } (2x+8)\,dx + (3y-5x-11)\,dy = 0;$$
$$\text{г) } x' = \frac{1}{2}\sqrt{t} + \sqrt[3]{x}; \quad \text{д) } 2x'\ln t + \frac{x}{t} = x^{-1}\cos t.$$

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $\quad x' - xe^t = 2te^{e^t}, \quad x(0) = e.$

5. Доказать, что любое решение уравнения $\dot{x} = g(x)$ монотонно.

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл:
$$\left(\frac{1}{x} + \sin y + y\sin x\right)dx + \left(\frac{1}{y} + x\cos y - \cos x\right)dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения:
$$(2xy^2 - y)\,dx + (y^2 + x + y)\,dy = 0.$$

8. Удовлетворяет ли глобальному условию Липшица по переменной x в области $\{(t,x)\,|\,t\in\mathbb{R},\ x>t\}$ функция $f(t,x) = \sqrt{x-t}\,$?

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.
$$x' = f(x), \text{ где } f(x) = \begin{cases} x\ln^2 x, & \text{если } x > 0,\\ x^2 + x, & \text{если } x \leqslant 0.\end{cases}$$

10. Проинтегрировать уравнение $x = tx' + a\sqrt{1+(x')^2}$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:
$$\text{а) } 2(t^2 - tx^2)x' + x^3 = 0; \quad \text{б) } xx' + x^2\operatorname{ctg} t = \cos t;$$
$$\text{в) } (t^2-1)x' + x^2 - 2tx + 1 = 0;$$
$$\text{г) } (tx'+x)^2 = t^2x'; \quad \text{д) } x = x'\ln x'.$$

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $1 + xx'' + (x')^2 = 0, \quad x(1) = 1,\ x'(1) = 1.$

13. Решить уравнения:

$$\text{а) } y^{\text{iv}} + 10y'' + 9y = 0; \quad \text{б) } y'' - 8y' + 20y = te^{4t} \sin 2t - 5;$$
$$\text{в) } y'' - 49y = 3\cos 7t - 14e^{7t}; \quad \text{г) } (t-2)^2 y'' - 3(t-2)y' + 4y = t.$$

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{1+e^{-t}}, \quad y(0) = 1 + 2\ln 2,\ y'(0) = 3\ln 2.$

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = -x - 5y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

Вариант 15

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения
$$x' = t^2 + x^2 + 2t.$$

2. Найти интегральные кривые дифференциального уравнения
$$x' + t{x'}^2 - x = 0,$$
являющиеся прямыми.

3. Найти области единственности и общие решения уравнений:

$$\text{а) } x' = (t + 2x + 3)^2; \quad \text{б) } x - tx' = t + xx';$$
$$\text{в) } (3y - 7x + 7)\,dx - (3x - 7y - 3)\,dy = 0;$$
$$\text{г) } xy\,dy = \left(y^2 - \sqrt{x^4 + y^4}\right)dx; \quad \text{д) } x' = t^3x^3 - tx.$$

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x' + te^t x = e^{(1-t)e^t}, \quad x(1) = 1.$

5. Доказать, что функция $x = \cos t$ $(t \in \mathbb{R})$ не может быть решением уравнения $\dot{x} = t^2 g(x)$.

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл:
$$\frac{y + \sin x \cos^2 xy}{\cos^2 xy}\,dx + \frac{x + \sin y \cos^2 xy}{\cos^2 xy}\,dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения:
$$(xy^2 + y)\,dx - x\,dy = 0.$$

8. При каких n уравнение $x^{(n)} = f(t, x)$, где f и f'_x непрерывны, может иметь среди своих решений функции $x_1(t) = 1 + t^2/2$ и $x_2(t) = \cos t$?

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x' = (x+1)^2\sqrt{|x-1|}$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

10. Проинтегрировать уравнение $x = -t + (x')^2 + (x')^3$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

$$\text{а) } (x^4 - 3t^2)x' + tx = 0; \quad \text{б) } x' = \frac{t}{x}e^{2t} + x;$$
$$\text{в) } txx' - t^2\sqrt{x^2+1} = (t+1)(x^2+1);$$
$$\text{г) } {x'}^2 + 2(t-1)x' - 2x = 0; \quad \text{д) } x = (x'-1)e^{x'}.$$

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $\quad 2x'' = e^{4x}, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 1/2.$

13. Решить уравнения:

$$\text{а) } y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0; \quad \text{б) } y'' - 2y' + y = 2te^t + e^t \sin 2t;$$
$$\text{в) } y'' + 49y = 3\cos 7t - 15e^{7t}; \quad \text{г) } y'' - \frac{2y}{t^2} = 3\ln(-t).$$

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' + y = \dfrac{1}{\sin t}, \quad y(\pi/2) = 1,\ y'(\pi/2) = \pi/2.$

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = -x + 4y. \end{cases}$

Вариант 16

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = \frac{t-3}{x+1}.$$

2. Найти кривую, зная, что площадь, заключенная между осью ординат, этой кривой и ординатой любой точки на ней, равна кубу этой ординаты.

3. Найти области единственности и общие решения уравнений:

$$\text{а) } 2t\sqrt{1-x^2} = x'\big(1+t^2\big); \quad \text{б) } x' = \frac{1-3t-3x}{1-t-x};$$
$$\text{в) } \big(4x^2+3xy+y^2\big)\,dx + \big(4y^2+3xy+x^2\big)\,dy = 0;$$
$$\text{г) } (t+x-2)x' = 1-2t-2x; \quad \text{д) } tx' + x = x^2 \ln t.$$

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x' - x\sin t = \sin t \cos t, \quad x(0) = 1.$

5. Доказать, что задача $\dot{x} = |1-x^2|,\ x(0) = 0$ имеет определенное на всей оси решение, которое единственно на любом промежутке, содержащем нуль.

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл:

$$\frac{2x}{y^3}\,dx + \frac{y^2-3x^2}{y^4}\,dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения:

$$(x\cos y - y\sin y)\,dy + (x\sin y + y\cos y)\,dx = 0.$$

8. Удовлетворяет ли глобальному условию Липшица по переменной x в области $\{(t,x)\,|\,t\in\mathbb{R}, x>t\}$ функция $f(t,x) = \dfrac{1}{|t-x|}$?

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

$$x' = f(x), \text{ где } f(x) = \begin{cases} x\ln x, & \text{если } x>0,\\ 0, & \text{если } x=0,\\ x\ln^2(-x), & \text{если } x<0. \end{cases}$$

10. Проинтегрировать уравнение $x = x' + \sin x' + \cos x'$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

$$\text{а) } 2t^2x' = x^2(2tx'-x);$$
$$\text{б) } (4tx-3)x' + x^2 = 1; \quad \text{в) } x'\operatorname{tg} x + 4t^3\cos x = 2t.$$
$$\text{г) } t + xx' = x^2(1+{x'}^2); \quad \text{д) } t = x' + \sin x'.$$

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x'' - x'\operatorname{ctg} t = \sin t, \quad x(\pi/2) = 1,\ x'(\pi/2) = \pi/2.$

13. Решить уравнения:

$$\text{а) } y''' - 2y'' - y' + 2y = 0; \quad \text{б) } y'' - 2y' + 2y = e^t \sin t + 3t;$$
$$\text{в) } y''' - 81y' = 7\cos 9t - 16e^{9t}; \quad \text{г) } t^2y'' - ty' + y = \frac{\ln t}{t} + \frac{t}{\ln t}.$$

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' + 6y' + 8y = \dfrac{4e^{-2t}}{2 + e^{2t}}, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 0.$

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$

Вариант 17

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения
$$x' = \frac{t^2 + x^2}{t}.$$

2. Найти такую кривую, чтобы отрезок ее касательной между координатными осями имел постоянную длину a.

3. Найти области единственности и общие решения уравнений:
$$\text{а) } x\sqrt{1 - y^2}\, dx + y\sqrt{1 - x^2}\, dy = 0;$$
$$\text{б) } 2t^2x' + t^2 + x^2 = 0; \quad \text{в) } x' = \frac{2x - t - 4}{2t - x + 5};$$
$$\text{г) } tx' = 3x - 2t - 2\sqrt{tx - t^2}; \quad \text{д) } (x^2 + y^2 + 1)\, dy = xy\, dx.$$

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $\quad (1 + t^2)x' - 2tx = (1 + t^2)^2, \quad x(1) = 5.$

5. Могут ли функции $x_1(t) = \sin t, \; x_2(t) \equiv 1$ быть решениями одного и того же уравнения $x'' + a_1x' + a_2x = 0$ с постоянными коэффициентами?

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл:
$$y(x^2 + y^2 + a^2)\, dy + x(x^2 + y^2 - a^2)\, dx = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения:
$$(x^2y^3 + y)\, dx + (x^3y^2 - x)\, dy = 0.$$

8. Удовлетворяет ли глобальному условию Липшица по переменной x в области $\{(t, x) \mid t \in \mathbb{R}, x > t\}$ функция $f(t, x) = \sqrt[3]{|t - x|}$?

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x' = (2-x)\sqrt{1-x}$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

10. Проинтегрировать уравнение $x = tx' + 4(x')^2$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

$$\text{а) } xx' + tx = t^3;\ \text{ б) } tx' = 2\sqrt{x}\cos t - 2x;\ \text{ в) } \frac{dt}{t} = \left(\frac{1}{x} - 2t\right)dx;$$
$$\text{г) } tx'^2 = x - x';\quad \text{д) } x = x'(1 + x'\cos x').$$

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $\quad tx'' = \ln t + 1, \quad x(1) = 0,\ x'(1) = 0.$

13. Решить уравнения:

$$\text{а) } y^{\text{iv}} - 5y'' + 4y = 0;\quad \text{б) } y'' - y = 4\operatorname{sh} t + 5t - 3;$$
$$\text{в) } y''' + 81y' = 6\sin 9t - 17e^{9t};\quad \text{г) } t^2y'' - 2y = \frac{3t^2}{t+1}.$$

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^t}{1+e^{-t}}, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y, \\ \dot{y} = -2x + y. \end{cases}$

Вариант 18

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = \frac{t^2 - x^2}{t}.$$

2. Найти кривые, обладающие тем свойством, что отрезок, который касательная в любой точке кривой отсекает на оси ординат, равен квадрату абсциссы точки касания.

3. Найти области единственности и общие решения уравнений:

$$\text{а) } e^{-x}(1-x)\,dx + e^y \sin y\,dy = \operatorname{tg} y\,dy;$$
$$\text{б) } \left(y^4 - 2x^3y\right)dx + \left(x^4 - 2xy^3\right)dy = 0;\ \text{ в) } x' = \frac{t+x-3}{1-t+x};$$
$$\text{г) } tx' = t\sqrt{x-t^2} + 2x;\quad \text{д) } x' + 2tx = x^2e^{t^2}.$$

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $\quad x' - \dfrac{2}{t}x = t^3, \quad x(1) = 1.$

5. Найти общее решение линейного однородного уравнения
$$x' + p(t)x = 0,$$
приведя его к уравнению с постоянным коэффициентом при x при помощи замены независимой переменной $t = \psi(\tau)$.

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл:
$$\left(3x^2y + y^3\right) dx + \left(x^3 + 3xy^2\right) dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения:
$$x\left(4 + \frac{1}{x^2 - y^2}\right) dx - y\left(4 - \frac{1}{x^2 - y^2}\right) dy = 0.$$

8. Удовлетворяет ли глобальному условию Липшица по переменной x в области $\{(t,x) \,|\, t \in \mathbb{R}, x > t\}$ функция $f(t,x) = |t - x|$?

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x' = \sqrt{1 - x^2}$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

10. Проинтегрировать уравнение $x = 2tx' + (x')^2$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:
$$\text{а) } t^2(dx - dt) = (t + x)x\,dt;$$
$$\text{б) } (1 - t^2)x' - 2tx^2 = tx; \quad \text{в) } 2(t - x^2)\,dx = x\,dt;$$
$$\text{г) } {x'}^3 + ({x'}^2 - 2x')t = 3x' - x; \quad \text{д) } x = \arcsin x' + \ln(1 + {x'}^2).$$

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $\quad tx'' - x' = t^2 \cos t, \quad x(\pi/2) = 1,\ x'(\pi/2) = \pi/2.$

13. Решить уравнения:
$$\text{а) } y^{\text{v}} - 10y''' + 9y' = 0; \quad \text{б) } y'' - 4y' + 5y = e^{2t}\cos t + 2;$$
$$\text{в) } y''' - 64y' = 7\sin 4t \cos 4t - 18e^{8t};$$
$$\text{г) } (3t + 7)^3 y''' + 9(3t + 7)y' - 27y = 0.$$

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' + \dfrac{y}{4} = \dfrac{1}{4}\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}, \quad y(\pi) = 2,\ y'(\pi) = 1/2.$

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 3y, \\ \dot{y} = -3x - y. \end{cases}$

Вариант 19

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения
$$x' = \frac{t^2 - x}{t}.$$

2. Найти кривую, у которой треугольник, образованный осью Ox, касательной и радиусом-вектором точки касания, равнобедренный.

3. Найти области единственности и общие решения уравнений:
$$\text{а) } \left(\sqrt{xy} - \sqrt{x}\right) dy + y\,dx = 0;$$
$$\text{б) } \left(y^2 - 3x^2\right) dy + 2xy\,dx = 0; \quad \text{в) } x' = \frac{x - 7t - 8}{t + x};$$
$$\text{г) } 2x\,dy + y\,dx + xy^2\left(x\,dy + y\,dx\right) = 0; \ \text{ д) } x' - 2xe^t = 2\sqrt{x}e^t.$$

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x' + 2tx = 2te^{-t^2}, \quad x(0) = 1.$

5. В линейном однородном дифференциальном уравнении
$$(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$$
произвести замену переменной $x = \cos t$ и найти общее решение.

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл:
$$yx^{y-1}\,dx + x^y \ln x\,dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения:
$$(x^2 + y)\,dy + (x - xy)\,dx = 0.$$

8. При каких n уравнение $x^{(n)} = f(t, x)$ с непрерывными на плоскости Otx функциями f и f'_x может иметь решения $x_1(t) = t^3 - t$ и $x_2(t) = -t$?

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x' = 1 + x^3$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

10. Проинтегрировать уравнение $t = e^{x'} - 2x'$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

$$\text{а) } \left(t - x\cos\frac{x}{t}\right)dt + t\cos\frac{x}{t}\,dx = 0; \quad \text{б) } x' + x = tx^3;$$
$$\text{в) } dx + (tx - tx^3)\,dt = 0;$$
$$\text{г) } 4x = t^2 + {x'}^2; \quad \text{д) } x = 2tx' + \ln x'.$$

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $\quad x'' + x'\operatorname{tg} t = \cos t, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 0.$

13. Решить уравнения:

$$\text{а) } y''' - 13y' - 12y = 0; \quad \text{б) } y'' - 8y' + 17y = t(e^{4t}\sin t + 5);$$
$$\text{в) } y''' - 7y' = 7\cos\sqrt{7}t - 19e^{\sqrt{7}t}; \quad \text{г) } (3t-2)^2y'' - 3(3t-2)y' + 9y = t.$$

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{e^{-t}}{2+e^t}, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 2x. \end{cases}$

Вариант 20

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = \frac{t^2 - x^2}{x}.$$

2. Найти кривую, у которой отношение отрезка, отсекаемого касательной на оси Ox, к отрезку, отсекаемому нормалью на оси Ot, есть величина постоянная, равная k.

3. Найти области единственности и общие решения уравнений:

$$\text{а) } \left(y^2 + xy^2\right)dx + \left(x^2 - yx^2\right)dy = 0;$$
$$\text{б) } tx' - x = \sqrt{t^2 + x^2}; \quad \text{в) } (x + 2y + 1)\,dx + (3 - 2x)\,dy = 0;$$
$$\text{г) } 2\left(x^2y + \sqrt{1 + x^4y^2}\right)dx + x^3\,dy = 0; \quad \text{д) } \left(1 + t^2\right)x' = tx + t^2x^2.$$

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $\quad x' + \dfrac{3}{t}x = \dfrac{2}{t^3}, \quad x(1) = 1.$

5. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения

$$x' + p(t)x = q(t),$$

приведя его к уравнению, не содержащему члена с искомой функцией, при помощи введения новой искомой функции z по формуле $x = \alpha(t)z$, где $\alpha(t)$ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция.

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл:

$$\left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right) dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right) dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения:

$$\left(2y + \frac{1}{(x+y)^2}\right) dx + \left(3y + x + \frac{1}{(x+y)^2}\right) dy = 0.$$

8. Сформулировать теорему существования и единственности для системы уравнений $\begin{cases} \ddot{x} + \ddot{y} = f(x,y), \\ \dddot{x} - \dot{y} = g(x,y). \end{cases}$

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x' = x^2 + x - 2$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

10. Проинтегрировать уравнение $x = \dfrac{3}{2}tx' + e^{x'}$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

$$\text{а) } x'\sqrt{t} = \sqrt{x-t} + \sqrt{t}; \quad \text{б) } x' + t\sqrt[3]{x} = 3x;$$
$$\text{в) } t\,dt + (t^2 \operatorname{ctg} x - 3\cos x)\,dx = 0; \quad \text{г) } tx' = 2x + \sqrt{1 + x'^2};$$
$$\text{д) } x = t(1 + x') + x'^2.$$

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x'' = 3\sqrt{x+1}, \quad x(2) = 0,\ x'(2) = 2.$

13. Решить уравнения:

$$\text{а) } y'' - y' + y = 0; \quad \text{б) } y'' + 4y' + 3y = \operatorname{ch} t + 3;$$
$$\text{в) } y''' + 7y' = 7\cos\sqrt{7}t - 20e^{\sqrt{7}t}; \quad \text{г) } t^2 y'' - 6y = 5t^3 + 8t^2.$$

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' + y = 2\operatorname{ctg} t, \quad y(\pi/2) = 1,\ y'(\pi/2) = 2.$

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - 3y. \end{cases}$

Вариант 21

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = \frac{t^2 - x^2}{t^2}.$$

2. Найти такую кривую $x = x(t)$, чтобы треугольник, образованный нормалью и осями координат, был равновелик треугольнику, образуемому осью Ot, касательной и нормалью.

3. Найти области единственности и общие решения уравнений:

$$\text{а) } \frac{\operatorname{tg} y}{\cos^2 x}\,dx + \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 y}\,dy = 0;$$

$$\text{б) } x' = \frac{x}{t - 2\sqrt{tx}}; \quad \text{в) } (x - 2y + 5)\,dx + (2x - y + 4)\,dy = 0;$$

$$\text{г) } (t^2 + 2tx - x^2)\,dt + (x^2 + 2tx - t^2)\,dx = 0; \quad \text{д) } x' + x = t\sqrt{x}.$$

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $\quad (1 + x^2)\,dt = (\operatorname{arctg} x - t)\,dx, \quad x(0) = 0.$

5. Найти частные производные от решения задачи Коши

$$x' + p(t)x = 0,\ x(t_0) = x_0$$

по t_0 и x_0 в точке (t_0, x_0).

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл:

$$(3x^2 e^{2y} - y \sin x)\,dx + (2x^3 e^{2y} + \cos x)\,dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения:

$$x\left(4 + \frac{1}{x^2 - y^2}\right)\,dx - y\left(4 - \frac{1}{x^2 - y^2}\right)\,dy = 0.$$

8. Сколько интегральных кривых уравнения $x'' = f(t, x)$ с непрерывными f и f'_x проходит через точку $(\pi/2, 1)$, касаясь графика функции $x = \sin t$?

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x' = x\sqrt{1 - x^4}$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

10. Проинтегрировать уравнение $x = tx' + \dfrac{a}{(x')^2}$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

$$\text{а) } x(x - tx') = \sqrt{t^4 + x^4}; \quad \text{б) } \frac{tx'}{x} + 2tx\ln t + 1 = 0;$$
$$\text{в) } \big(t\sqrt{x^2+1} + 1\big)(x^2+1)\,dt = tx\,dx;$$
$$\text{г) } xx'^2 - 2tx' + x = 0; \quad \text{д) } x = 2tx' + \sin x'.$$

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $(t+1)x'' + t(x')^2 = x', \quad x(1) = -2, \ x'(1) = 4.$

13. Решить уравнения:

$$\text{а) } y^{\text{v}} + 8y''' + 16y' = 0; \quad \text{б) } y'' + 2y' + 2y = \operatorname{ch} t \cdot \sin t - 3;$$
$$\text{в) } y''' + y' = 3\cos t + 21e^t; \quad \text{г) } t^2y'' - ty' + y = 8t^3.$$

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' + y = \dfrac{1}{\sin t}, \quad y(\pi/2) = 1, \ y'(\pi/2) = \pi/2.$

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$

Вариант 22

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения
$$x' = t^2 - 2x + 3.$$

2. Найти кривую, у которой в каждой точке длина отрезка касательной между точкой касания и осью абсцисс равна длине отрезка, отсекаемого касательной на оси абсцисс.

3. Найти области единственности и общие решения уравнений:

$$\text{а) } x'\big(1+t^2\big) = 2t\sqrt{1-x^2};$$
$$\text{б) } 2t^2x' + t^2 + x^2 = 0; \quad \text{в) } (x+y-3)\,dx - (1-x+y)\,dy = 0;$$
$$\text{г) } tx' = 3x - 2t - 2\sqrt{tx - t^2}; \quad \text{д) } (1+t^2)x' = tx + t^2x^2.$$

4. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $t^2x'\cos\dfrac{1}{t} - x\sin\dfrac{1}{t} = -1, \quad \lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 1.$

5. Найти частные производные от решения задачи Коши
$$x' + p(t)x = q(t), \ x(t_0) = x_0$$
по t_0 и x_0 в точке (t_0, x_0).

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл:

$$(3x\sin y + 1)\,dx + \left(\frac{3}{2}x^2\cos y + 3\right)dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения:

$$xy\,dx = (y^3 + x^2y + x^2)\,dy.$$

8. Сколько существует решений уравнения $x^{(n)} = \sin(tx)$, удовлетворяющих условиям $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 1$?

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x' = |x|^{\alpha}$, где $\alpha > 0$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

10. Проинтегрировать уравнение $x = 2tx' + \ln x'$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

а) $x - tx' = 2(t + xx')$; б) $tx' = t^2e^{-x} + 2$; в) $x' = \sqrt[3]{2t - x} + 2$;
г) $(3t+1){x'}^2 - 3(x+2)x' + 9 = 0$; д) $x = tx' + \dfrac{a}{{x'}^2}$.

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $(x+1)^2x'' = (x')^3$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

13. Решить уравнения:

а) $y^{\mathrm{v}} - 6y^{\mathrm{iv}} + 9y''' = 0$; б) $y'' + 2y' + 5y = \operatorname{sh} t \cdot \sin 2t$;
в) $y'' + 16y = 16\cos 4t + 22e^t$; г) $t^2y'' + ty' + 4y = 10t$.

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' + 9y = \dfrac{9}{\sin 3x}$, $y(\pi/6) = 4$, $y'(\pi/6) = \dfrac{3\pi}{2}$.

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = -x + 2y. \end{cases}$

Вариант 23

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = t^2 - 2x^2 + 3.$$

2. Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного осью Ot, касательной и радиусом-вектором точки касания, постоянна и равна a^2.

3. Найти области единственности и общие решения уравнений:

$$\text{а) } x'\sqrt{1+x+t} = x+t-1;\ \text{ б) } \left(1+e^{x/y}\right)dx + e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy = 0;$$
$$\text{в) } (x-2y-1)\,dx + (3x-6y+2)\,dy = 0;$$
$$\text{г) } (\sqrt{t^2+x^2}+t)\,dx - x\,dt = 0;\quad \text{д) } x' = t^3x^3 - tx.$$

4. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $\quad x'\sin t + x\cos t = 1, \quad x(t)$ ограничено при $t \to +0$.

5. Общее решение линейного уравнения имеет вид $x = A(t)C + B(t)$. Доказать обратное: дифференциальное уравнение всякого семейства кривых этого вида есть линейное уравнение первого порядка.

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл:
$$\left(3x^2 - \frac{y\cos x}{\sin^2 x}\right)dx + \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{y}\right)dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения:
$$(x^2 - \sin^2 y)\,dx + x\sin 2y\,dy = 0.$$

8. При каких t_0 и x_0 имеет место единственность решения задачи Коши $x' = 1 + \sqrt[4]{x-t^2}, \quad x(t_0) = x_0$?

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x' = ax^2 + bx + c$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

10. Проинтегрировать уравнение $x = tx' + \dfrac{a}{2x'}$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

$$\text{а) } 2t^2x' = x^2(2tx' - x);\ \text{ б) } x' - 8t\sqrt{x} = \frac{4tx}{t^2-1};\quad \text{в) } x' + \operatorname{tg} x = t\sec x;$$
$$\text{г) } tx'^2 + tx' - x = 0;\quad \text{д) } x = tx' + x'^2.$$

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $\quad tx'' = \ln t + 1, \quad x(1) = 0,\ x'(1) = 0.$

13. Решить уравнения:

$$\text{а) } y^{\mathrm{vi}} + 64y = 0;\quad \text{б) } y^{\mathrm{iv}} + 5y'' + 4y = \sin t \cdot \cos 2t;$$
$$\text{в) } y''' - y'' = 3\cos t + 23e^t;\quad \text{г) } t^3y'' - 2ty = 6\ln t.$$

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' - 3y' = \dfrac{9e^{-3t}}{3+e^{-3t}}, \quad y(0) = 4\ln 4,\ y'(0) = 3(3\ln 4 - 1).$

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 2x. \end{cases}$

Вариант 24

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = x - 3t + 6.$$

2. Найти кривую, у которой средняя ордината на отрезке $[0, t]$, то есть величина $\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t x\,ds$, пропорциональна ординате $x(t)$ точки кривой, лежащей в правом конце t отрезка $[0, t]$.

3. Найти области единственности и общие решения уравнений:

$$\text{а) } x' = \cos(t-x); \quad \text{б) } (tx' - x)\operatorname{arctg}\frac{x}{t} = t;$$

$$\text{в) } (x+y-2)\,dx + (y-x+4)\,dy = 0;$$

$$\text{г) } xy\,dy = \left(y^2 - \sqrt{x^4+y^4}\right)dx; \quad \text{д) } x' + \frac{x}{t+1} + x^2 = 0.$$

4. Решить задачу Коши, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $\quad e^{t^2}x' + 2txe^{t^2} = t\sin t, \quad x(0) = 1.$

5. Доказать, что линейное уравнение первого порядка остается линейным при любой замене независимой переменной $t = \varphi(\tau)$.

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл:

$$\left(3e^{3x}\operatorname{tg} y - \frac{1}{x^4}\right)dx + \left(e^{3x}\sec^2 y - 3y^2\right)dy = 0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения:

$$y^2\,dx + (e^x - y)\,dy = 0.$$

8. Для уравнения $x' = \sqrt[3]{x-1}$ выделить области, в которых через каждую точку проходит единственная интегральная кривая уравнения.

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

$$x' = \begin{cases} x^2 - x, & \text{если } x > 0, \\ |x|^{2/3}, & \text{если } x \leqslant 0. \end{cases}$$

10. Проинтегрировать уравнение $x = -tx' + (x')^{5/2}$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:

$$\text{а) } t^2x' = x(t+x);\ \text{ б) } tx' = (t^2 + \operatorname{tg} x)\cos^2 x;\ \text{ в) } x' = \frac{1}{2}\sqrt{t} + \sqrt[3]{x};$$
$$\text{г) } t^4x'^2 - tx' - x = 0;\quad \text{д) } x = \frac{3}{2}tx' + e^{x'}.$$

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $(x')^2 - 2xx'' - x^2 = 0, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 1.$

13. Решить уравнения:

$$\text{а) } y^{\text{iv}} - 5y'' + 4y = 0;\quad \text{б) } y'' + 4y = \cos t \cdot \cos 3t - 4;$$
$$\text{в) } y''' + 100y' = 4\sin 10t + 24e^{10t};\quad \text{г) } t^2y'' - 3ty' + 5y = 3t^2.$$

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y'' + 4y = \dfrac{4}{\cos 2t}, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$

Вариант 25

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$x' = x^2 + 2x - 3t.$$

2. Найти такую кривую $y = y(x)$, чтобы абсцисса центра тяжести криволинейной трапеции, заключенной между осью Ox, кривой и прямыми $x = 0,\ x = t$, была равна $3t/4$.

3. Найти области единственности и общие решения уравнений:

$$\text{а) } x' = (t + 2x + 3)^2;\quad \text{б) } (2y - x - 4)\,dx - (2x - y + 5)\,dy = 0;$$
$$\text{в) } \big(4x^2 + 3xy + y^2\big)\,dx + \big(4y^2 + 3xy + x^2\big)\,dy = 0;$$
$$\text{г) } x\,dy - 2y\,dx + xy^2\big(2x\,dy + y\,dx\big) = 0;\quad \text{д) } x' + 2tx = x^2e^{t^2}.$$

4. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x'\cos t - x\sin t = -\sin 2t, \qquad \lim\limits_{t\to\pi/2+0} x(t) = 0.$

5. Доказать, что линейное уравнение первого порядка остается линейным при любом линейном преобразовании искомой функции

$$x = \alpha(t)z + \beta(t).$$

6. Определить области, в которых уравнение является уравнением в полных дифференциалах, найти его общий интеграл:
$$\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\,dx+\frac{e^y}{1+x^2}\,dy=0.$$

7. Проинтегрировать уравнение, найти особые решения:
$$y\,dx-x\,dy=2x^3\operatorname{tg}\frac{y}{x}\,dx.$$

8. На плоскости переменных (t,x) выделить области, в которых уравнение $x'=\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{t^2-x}$ удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности с условием Липшица.

9. Найти все особые решения и максимальные области единственности уравнения $x'=|2x-3t|$. На чертеже приблизительно изобразить графики решений.

10. Проинтегрировать уравнение $t^2(1-x')=(x')^3$. Выяснить вопрос о существовании особых решений.

11. Применяя различные методы, найти общие и особые решения уравнений первого порядка:
$$\text{а) } tx'+t^2+tx-x=0;\quad \text{б) } x'=\frac{3t^2}{t^3+x+1};$$
$$\text{в) } x'=\left(\frac{3t+x^3-1}{x}\right)^2;$$
$$\text{г) } x'^2-xx'+e^t=0;\quad \text{д) } x=tx'^2-\frac{1}{x'}.$$

12. Решить задачу, выяснить вопрос о единственности решения, найти максимальный интервал существования этого решения и построить график: $x''-12x^2=0,\quad x(0)=1/2,\ x'(0)=1.$

13. Решить уравнения:
$$\text{а) } y^{\text{iv}}+4y''+3y=0;\quad \text{б) } y''-4y'+8y=e^{2t}\sin^2 t;$$
$$\text{в) } y'''-100y'=3\cos 10t+25e^{10t};\quad \text{г) } (5t+1)^2y''-3(5t+1)y'+4y=t.$$

14. Решить задачу Коши и построить соответствующую интегральную кривую: $y''-6y'+8y=\dfrac{4}{2+e^{-2t}},\quad y(0)=1+3\ln 3,\ y'(0)=10\ln 3.$

15. Найти общее решение линейной системы $\begin{cases}\dot x=4x+y,\\ \dot y=-2x+y.\end{cases}$

Список рекомендуемой литературы

1. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1975.

2. Боровских А. В., Перов А. И. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2004.

3. Бибиков Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высш. шк., 1991.

4. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Высш. шк., 1978.

5. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высш. шк., 1967.

6. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Минск: Вышэйш. шк., 1967.

7. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.

8. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982.

9. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. М.: Высш. шк., 1989.

10. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959.

11. Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004.

12. Филиппов А. Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениями. М.: Наука, 1985.

Оглавление

Василий Александрович Зайцев, Светлана Николаевна Попова, Евгений Леонидович Тонков

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
Часть 1

Учебное пособие

Подписано в печать 03.11.10. Формат $60 \times 84\,1/16$.
Печать офсетная. Усл.печ.л. 4,41. Уч.-изд.л. 4,06.
Заказ № . Тираж 75 экз.

Издательство «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4.