В. А. Зайцев, С. Н. Попова, Е. Л. Тонков

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Часть 2

Ижевск
2010

Министерство образования и науки Российской Федерации

ГОУВПО «Удмуртский государственный университет»

В. А. Зайцев, С. Н. Попова, Е. Л. Тонков

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Часть 2

Учебное пособие

Ижевск
«Удмуртский университет»
2010

УДК 517.9
ББК 22.161.6
З 12

Печатается по решению учебно-методического совета УдГУ

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, проф. В. М. Вержбицкий

Зайцев В. А., Попова С. Н., Тонков Е. Л.
З 12 Дифференциальные уравнения: учеб. пособие.
Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет». 2010. Ч. 2. 81 с.

Учебное пособие предназначено студентам второго курса математического факультета, изучающим годовой курс «Дифференциальные уравнения». Теоретическая часть пособия охватывает практически все разделы курса, читаемые в четвертом семестре, содержит множество примеров, практическая часть включает 25 вариантов индивидуальных заданий.

УДК 517.9
ББК 22.161.6

Предисловие

Курс «Дифференциальные уравнения», читаемый в третьем и четвертом семестрах студентам математического факультета, имеет своим предметом обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ). Предлагаемое пособие является продолжением учебного пособия [7] и ориентировано на изучение курса ОДУ в четвертом семестре.

В теоретической части пособия представлены и проиллюстрированы многочисленными примерами практически все разделы курса, изучаемые в этом семестре. Особенностью предлагаемого материала является то, что он освещен в малодоступной литературе. Например, в § 2 приведен метод построения матричной экспоненты, предложенный в журнальной статье [8]. В § 3 представлены методы построения функции Ляпунова из учебного пособия [10].

Практическая часть учебного пособия включает в себя 25 вариантов индивидуальных заданий. Самостоятельное выполнение этих заданий гарантирует обучающимся качественное овладение материалом курса «Дифференциальные уравнения». Для выполнения индивидуальных заданий авторы рекомендуют использовать теоретическую часть пособия, а также литературу, список которой приведен в конце пособия.

§1. Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка. Функция Коши. Функция Грина

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x = f(t), \tag{1}$$

где $f(\cdot)$, $p_i(\cdot)$ — непрерывные скалярные функции, $x \in \mathbb{R}$. Если $f(t) \equiv 0$, то уравнение называется однородным

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x = 0. \tag{2}$$

Пусть заданы начальные условия в точке t_0

$$x(t_0) = \alpha_1, \quad \ldots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = \alpha_n. \tag{3}$$

Если все $\alpha_i = 0$, то начальные условия называются однородными

$$x(t_0) = 0, \quad \ldots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = 0. \tag{4}$$

Задача (2), (4) называется *однородной задачей Коши.* Очевидно, она имеет единственное решение $x(t) \equiv 0$. Задачи (2), (3) и (1), (4) называются *полуоднородными задачами Коши.* Задача (1), (3) называется *неоднородной задачей Коши.* Решением неоднородной задачи Коши (1), (3) является сумма решений соответствующих полуоднородных задач Коши (2), (3) и (1), (4). Решить задачу Коши (1), (4) можно, например, построив *функцию Коши.*

Функцией Коши уравнения (1) называется функция двух переменных $C(t,s)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

а) $C(t,s)$ по переменной t является решением уравнения (2);

б) $C(t,s)\big|_{t=s} = 0,\ \ldots,\ C_t^{(n-2)}(t,s)\big|_{t=s} = 0,\ C_t^{(n-1)}(t,s)\big|_{t=s} = 1.$

Если известна функция Коши $C(t,s)$ уравнения (1), то решение задачи Коши (1), (4) имеет вид $x(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} C(t,s)f(s)\,ds$. Функция Коши $C(t,s)$ уравнения (1) всегда существует. Ее можно найти следующим образом. Пусть $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ — фундаментальная система решений (базис) уравнения (2), т. е. полная совокупность линейно независимых решений уравнения (2). Построим *определитель Вронского* (*вронскиан*) для этой совокупности функций $w(s) = \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \ldots & \varphi_n(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(s) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(s) \end{vmatrix}$.

Тогда функция $C(t,s) \doteq \dfrac{1}{w(s)} \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \ldots & \varphi_n(s) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-2)}(s) & \ldots & \varphi_n^{(n-2)}(s) \\ \varphi_1(t) & \ldots & \varphi_n(t) \end{vmatrix}$ будет функцией Коши уравнения (1). Несложно проверить, что полученная функция удовлетворяет всем требуемым условиям.

В случае когда (1) — это уравнение с постоянными коэффициентами, т.е. $p_i(t) \equiv p_i$, функцию Коши можно найти следующим образом: нужно найти решение $x(t)$ задачи Коши (2) с начальным условием

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \ldots, \quad x^{(n-2)}(0) = 0, \quad x^{(n-1)}(0) = 1.$$

Тогда функция $C(t,s) \doteq x(t-s)$ будет функцией Коши уравнения (1).

Рассмотрим теперь уравнения (1) и (2), и пусть заданы *краевые условия*

$$l_1 x = \alpha_1, \quad \ldots, \quad l_n x = \alpha_n. \tag{5}$$

Здесь для каждого $i = 1, \ldots, n$ l_i — это функционал, который ставит в соответствие функции $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ число, определяемое как некоторая линейная комбинация значений функции $x(t)$ и ее производных до порядка $n-1$ в граничных точках отрезка $[t_0, t_1]$ (под производными на концах отрезка понимаются соответствующие односторонние производные)

$$l_i x \doteq c_{11}^i x(t_0) + c_{12}^i x'(t_0) + \dots + c_{1n}^i x^{(n-1)}(t_0) + \\ + c_{21}^i x(t_1) + c_{22}^i x'(t_1) + \dots + c_{2n}^i x^{(n-1)}(t_1).$$

Если, например, $c_{11}^1 = 1$, $c_{12}^2 = 1$, $\dots$, $c_{1n}^n = 1$, а все остальные $c_{jk}^i = 0$, то краевые условия превращаются в начальные условия в точке t_0.

Если все $\alpha_i = 0$, то краевые условия называются однородными

$$l_1 x = 0, \quad \dots, \quad l_n x = 0. \tag{6}$$

Задача нахождения решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (5) называется *краевой задачей.* Задача Коши является частным случаем краевой задачи. В отличие от задачи Коши краевая задача не обязательно имеет единственное решение: она может и не иметь решений, а может иметь и бесконечно много решений. Например, однородная краевая задача

$$x'' + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0$$

имеет бесконечно много решений $x = c \cdot \sin t$.

Решением неоднородной краевой задачи (1), (5) является сумма решений соответствующих полуоднородных краевых задач (2), (5) и (1), (6). Чтобы найти решение полуоднородной краевой задачи (1), (6), нужно построить *функцию Грина.*

Функцией Грина краевой задачи (1), (6) называется функция двух переменных $G(t,s)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

а) $G(t,s)$ определена при $(t,s) \in [t_0,t_1] \times [t_0,t_1]$;

б) при фиксированном s функция $G(t,s)$, $t \in [t_0,s) \cup (s,t_1]$ является решением уравнения (2);

в) при фиксированном s функция $G(t,s)$ по переменной t удовлетворяет однородным краевым условиям, т.е. $(l_i G)(s) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$;

г) $G(t,s)$, $\dots$, $G_t^{(n-2)}(t,s)$ непрерывны на $[t_0,t_1] \times [t_0,t_1]$;

д) $G_t^{(n-1)}(t,s)$ непрерывна на треугольниках $t_0 < t < s < t_1$, $t_0 < s < t < t_1$, а на диагонали имеет скачок, равный 1, т.е.

$$G_t^{(n-1)}(t,s)\big|_{t=s+0} - G_t^{(n-1)}(t,s)\big|_{t=s-0} = 1.$$

Если известна функция Грина $G(t,s)$ краевой задачи (1), (6), то решение краевой задачи (1), (6) имеет вид

$$x(t) = \int_{t_0}^{t_1} G(t,s) f(s)\, ds. \tag{7}$$

Функция Грина $G(t,s)$ краевой задачи (1), (6) не всегда существует. Пусть $\varphi_1(t)$, ..., $\varphi_n(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ — фундаментальная система решений уравнения (2). Построим матрицу $\Lambda \doteq \{l_i\varphi_k\}_{i,k=1}^n$. Если $\det\Lambda \neq 0$, то функция Грина $G(t,s)$ краевой задачи (1), (6) существует и краевая задача (1), (6) имеет единственное решение, определяемое формулой (7). В противном случае функция Грина $G(t,s)$ краевой задачи (1), (6) не существует и краевая задача (1), (6) либо не имеет решения, либо имеет бесконечно много решений. Условие $\det\Lambda \neq 0$ равносильно тому, что *однородная краевая задача имеет только тривиальное решение.* Все вышесказанное можно сформулировать в виде теоремы.

Т е о р е м а 1. *Функция Грина $G(t,s)$ краевой задачи* (1), (6) *существует тогда и только тогда, когда однородная краевая задача* (2), (6) *имеет только тривиальное решение. В этом случае решение краевой задачи* (1), (6) *существует, единственно и выражается формулой* (7).

Чтобы найти функцию Грина, надо воспользоваться условиями а–д.

Поскольку функция Грина по переменной t является решением однородного уравнения (2), то она при фиксированном s является линейной комбинацией базисных функций. Будем строить $G(t,s)$ отдельно на каждом из треугольников $t_0 \leqslant t \leqslant s \leqslant t_1$, $t_0 \leqslant s < t \leqslant t_1$. Ищем функцию Грина в виде

$$G(t,s) = \begin{cases} c_1(s)\varphi_1(t) + \dots + c_n(s)\varphi_n(t), & t_0 \leqslant t \leqslant s \leqslant t_1, \\ c_{n+1}(s)\varphi_1(t) + \dots + c_{2n}(s)\varphi_n(t), & t_0 \leqslant s < t \leqslant t_1. \end{cases}$$

Здесь $\varphi_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ — известные базисные функции, а $c_i(s)$, где $i = 1, \dots, 2n$, — неизвестные функции, которые находятся следующим образом. Функция $G(t,s)$ удовлетворяет по t краевым условиям. Таким образом, подставляя $G(t,s)$ в краевые условия, мы получим n условий на $c_i(s)$. Далее, найдем производные функции $G(t,s)$ по переменной t до порядка $n-1$. Функция $G(t,s)$ и ее производные до порядка $n-2$ должны быть непрерывны при $t = s$. «Склеивая» эти функции на диагонали $t = s$, получим еще $n-1$ условие на функции $c_i(s)$. Еще одно условие на $c_i(s)$ следует из того, что функция $G_t^{(n-1)}(t,s)$ при $t = s$ имеет скачок, равный 1. Таким образом, мы имеем $2n$ условий на $2n$ функций $c_i(s)$, откуда они однозначно находятся (если $\det\Lambda \neq 0$).

З а д а ч а 1. Построить функцию Грина краевой задачи

$$\ddot{x} + x = f(t), \tag{8}$$

$$x(0) = x(\pi), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(\pi). \tag{9}$$

Р е ш е н и е. В данном случае $n = 2$, $l_1 x = x(0) - x(\pi)$, $l_2 x = \dot{x}(0) - \dot{x}(\pi)$, мы имеем краевую задачу вида (1), (6). Фундаментальная система решений есть $\varphi_1(t) = \sin t$, $\varphi_2(t) = \cos t$. Построим матрицу Λ:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица Λ невырожденная, следовательно, функция Грина существует. Ищем ее в виде

$$G(t,s) = \begin{cases} c_1(s)\sin t + c_2(s)\cos t, & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant \pi, \\ c_3(s)\sin t + c_4(s)\cos t, & 0 \leqslant s < t \leqslant \pi. \end{cases}$$

Тогда производная функции Грина по переменной t имеет вид

$$G'_t(t,s) = \begin{cases} c_1(s)\cos t - c_2(s)\sin t, & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant \pi, \\ c_3(s)\cos t - c_4(s)\sin t, & 0 \leqslant s < t \leqslant \pi. \end{cases}$$

Подставим функцию $G(t,s)$ в первое из краевых условий (9), получим, что

$$c_2(s) = -c_4(s). \tag{10}$$

Подставим функцию $G(t,s)$ во второе из краевых условий (9), получим, что

$$c_1(s) = -c_3(s). \tag{11}$$

Далее, функция $G(t,s)$ непрерывна при $t = s$, то есть $\lim\limits_{t\to s-0} G(t,s) = \lim\limits_{t\to s+0} G(t,s)$, следовательно,

$$c_1(s)\sin s + c_2(s)\cos s = c_3(s)\sin s + c_4(s)\cos s. \tag{12}$$

Функция $G'_t(t,s)$ имеет скачок при $t = s$, равный 1, следовательно,

$$\big(c_3(s)\cos s - c_4(s)\sin s\big) - \big(c_1(s)\cos s - c_2(s)\sin s\big) = 1. \tag{13}$$

Решая систему уравнений (10)–(13), получим, что

$$\begin{gathered} c_1(s) = -\tfrac{1}{2}\cos s, \quad c_2(s) = \tfrac{1}{2}\sin s, \\ c_3(s) = \tfrac{1}{2}\cos s, \quad c_4(s) = -\tfrac{1}{2}\sin s. \end{gathered}$$

Таким образом,

$$G(t,s) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\cos s\sin t + \frac{1}{2}\sin s\cos t, & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant \pi, \\ \frac{1}{2}\cos s\sin t - \frac{1}{2}\sin s\cos t, & 0 \leqslant s < t \leqslant \pi, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(s-t), & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant \pi, \\ \frac{1}{2}\sin(t-s), & 0 \leqslant s < t \leqslant \pi, \end{cases}$$

или $G(t,s) = \dfrac{1}{2}\sin|t-s|$, $t, s \in [0,\pi]$.

§2. Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t). \end{cases} \tag{1}$$

Обозначим через A матрицу коэффициентов системы (1), $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, а через $x(t)$ — неизвестную вектор-функцию: $x(t) = \operatorname{col}\big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big)$. Тогда систему (1) можно записать в матричной форме:

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \tag{2}$$

О п р е д е л е н и е 1. *Фундаментальной системой решений* системы (2) называется набор из n линейно независимых решений $x^{(1)}(t)$, $x^{(2)}(t)$, $\dots$, $x^{(n)}(t)$. *Фундаментальной матрицей* системы (2) называется матричная функция $X : \mathbb{R} \to M_n$, в столбцах которой находятся линейно независимые решения (2).

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $F \in M_n$ — произвольная $n \times n$ матрица. *Экспонентой* матрицы F называется сумма ряда

$$e^F = E + \frac{1}{1!}F + \frac{1}{2!}F^2 + \frac{1}{3!}F^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}F^k, \tag{3}$$

где E — единичная $n \times n$ матрица.

Оказывается, что для всякой $n \times n$ матрицы F ряд (3) сходится, т.е. определена матричная экспонента e^F.

Свойства матричной экспоненты:

1°. Если $FG = GF$, то $e^{F+G} = e^F \cdot e^G = e^G \cdot e^F$.

2°. Если S — невырожденная матрица и $F = SJS^{-1}$, то $e^F = Se^J S^{-1}$.

3°. Матричная экспонента e^{At} является фундаментальной матрицей системы (2).

Эти свойства позволяют достаточно просто находить фундаментальную матрицу и, следовательно, общее решение системы (2). Рассмотрим некоторые способы нахождения матричной экспоненты.

• Приведение матрицы к нормальной жордановой форме

Пусть дана матрица $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ с элементами из поля $\mathbb{C}$. Составим для нее характеристическую матрицу

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим всевозможные миноры матрицы $\lambda E - A$. Каждый минор j-го порядка есть многочлен от λ степени не выше j. Обозначим через $D_j(\lambda)$ наибольший общий делитель всех миноров j-го порядка матрицы $\lambda E - A$ ($j = 1, \dots, n$). В каждом $D_j(\lambda)$ берем старший коэффициент равным единице. Тогда в ряду

$$D_n(\lambda), \quad D_{n-1}(\lambda), \quad \dots, \quad D_1(\lambda), \quad D_0(\lambda) \equiv 1$$

каждый многочлен делится без остатка на последующий. Действительно, если какой-нибудь минор j-го порядка разложить по элементам какой-либо строки, то каждое слагаемое в этом разложении будет делиться на D_{j-1}; следовательно, любой минор j-го порядка, а значит, и D_j, делится на D_{j-1}. Обозначим соответствующие частные через $i_1(\lambda)$, $i_2(\lambda)$, …, $i_n(\lambda)$:

$$i_1(\lambda) = \frac{D_n(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}, \quad i_2(\lambda) = \frac{D_{n-1}(\lambda)}{D_{n-2}(\lambda)}, \quad \dots, \quad i_n(\lambda) = \frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)}. \qquad (4)$$

Многочлены $i_1(\lambda)$, $i_2(\lambda)$, …, $i_n(\lambda)$ называются *инвариантными многочленами матрицы* A. Произведение инвариантных многочленов совпадает с характеристическим многочленом $\chi(\lambda)$ матрицы A. Первый инвариантный многочлен $i_1(\lambda)$ совпадает с *минимальным многочленом* $\psi(\lambda)$ матрицы A. *Минимальный многочлен* — это многочлен (со старшим коэффициентом равным единице) наименьшей степени, аннулирующий матрицу A. В ряду инвариантных многочленов (4) каждый многочлен, начиная со второго, является делителем предыдущего.

Разложим инвариантные многочлены на неприводимые в $\mathbb{C}$ множители:

$$\begin{matrix} i_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{c_1}(\lambda - \lambda_2)^{c_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{c_s}, \\ i_2(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1}(\lambda - \lambda_2)^{d_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{d_s}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ i_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1}(\lambda - \lambda_2)^{l_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{l_s}, \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} c_k \geqslant d_k \geqslant \dots \geqslant l_k \geqslant 0, \\ c_k > 0; \quad k = 1, \dots, s \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Все отличные от единицы степени среди $(\lambda-\lambda_1)^{c_1}, \ldots, (\lambda-\lambda_s)^{l_s}$ в разложении (5) называются *элементарными делителями матрицы* A. Так как произведение всех инвариантных многочленов равно характеристическому многочлену $\chi(\lambda)$, то $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ в (5) — это все различные между собой корни характеристического многочлена $\chi(\lambda)$. Произведение всех элементарных делителей, как и произведение всех инвариантных многочленов, равно характеристическому многочлену $\chi(\lambda)$. Название «инвариантные многочлены» оправдано тем, что две подобные матрицы A и $\widetilde{A}$, $\widetilde{A} = SAS^{-1}$ всегда имеют одни и те же инвариантные многочлены (а значит, одни и те же элементарные делители). Верно и обратное: *если две матрицы имеют одни и те же элементарные делители, то они подобны.*

Если известны инвариантные многочлены матрицы A, то сразу находятся элементарные делители. Наоборот, если известны элементарные делители матрицы A, то инвариантные многочлены однозначно восстанавливаются по формулам (5).

Рассмотрим, к примеру, матрицу A, равную

$$\begin{pmatrix}
a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c
\end{pmatrix}.$$

Ее инвариантные многочлены есть

$$\begin{gathered}
i_1(\lambda) = (\lambda-a)^3(\lambda-b)^2(\lambda-c),\\
i_2(\lambda) = (\lambda-a)^2(\lambda-b)^2,\\
i_3(\lambda) = \cdots = i_n(\lambda) = 1.
\end{gathered}$$

Соответственно, ее элементарные делители есть

$$(\lambda-a)^3, \quad (\lambda-b)^2, \quad (\lambda-c), \quad (\lambda-a)^2, \quad (\lambda-b)^2.$$

Знание инвариантных многочленов (а следовательно, и элементарных делителей) матрицы A позволяет исследовать ее структуру. Следующая теорема дает практический способ нахождения инвариантных многочленов матрицы A.

Т е о р е м а 1. *При помощи элементарных преобразований матрицу* $\lambda E - A$ *можно привести к канонической диагональной матрице*

$$\begin{pmatrix} i_n(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & i_{n-1}(\lambda) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & i_1(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

на диагонали которой стоят инвариантные многочлены матрицы A.

Здесь под *элементарными преобразованиями* над матрицей $\lambda E - A$ понимаются умножение какой-либо строки или какого либо-столбца на число $c \neq 0$; прибавление к какой-либо строке (или к какому-либо столбцу) другой строки (столбца), умноженной на произвольный многочлен $b(\lambda)$; перестановка любых двух строк (столбцов).

Таким образом, приведя матрицу $\lambda E - A$ к виду (6), можно найти инвариантные многочлены и элементарные делители матрицы A.

П р и м е р 1. Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$. Эта матрица уже имеет вид (6). Таким образом, инвариантные многочлены матрицы A есть $i_1(\lambda) = \lambda - 1$, $i_2(\lambda) = \lambda - 1$, элементарные делители также равны $\lambda - 1$, $\lambda - 1$.

Теперь рассмотрим матрицу $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\lambda E - B = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}.$$

Приведем эту матрицу к диагональному виду (6) при помощи элементарных преобразований. Умножим второй столбец на $\lambda - 1$ и прибавим к первому, получим матрицу $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ (\lambda - 1)^2 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$. Теперь умножим первую строку на $\lambda - 1$ и прибавим ко второй, получим матрицу $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ (\lambda - 1)^2 & 0 \end{pmatrix}$. Умножим первую строку на -1 и поменяем местами первый и второй столбец, получим матрицу диагонального вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\lambda - 1)^2 \end{pmatrix}$. Следовательно, инвариантные многочлены матрицы B есть $i_1(\lambda) = (\lambda - 1)^2$, $i_2(\lambda) = 1$, и существует один элементарный делитель, равный $(\lambda - 1)^2$.

Пусть даны инвариантные многочлены $i_1(\lambda)$, $i_2(\lambda)$, ..., $i_n(\lambda)$ и элементарные делители матрицы A

$$(\lambda-\lambda_1)^{n_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{n_2},\ \ldots,\ (\lambda-\lambda_l)^{n_l},\ (n_1+\cdots+n_l=n). \tag{7}$$

Среди чисел λ_1, ..., λ_l могут быть и равные. Каждому элементарному делителю $(\lambda-\lambda_k)^{n_k}$ $(k=1,\ldots,l)$ поставим в соответствие $n_k\times n_k$ матрицу

$$J_k=\begin{pmatrix}\lambda_k & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & \lambda_k & 1 & \ldots & 0 & 0\\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill}\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_k & 1\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_k\end{pmatrix}=\lambda_k E^{(n_k)}+H_k^{(n_k)} \tag{8}$$

Эта матрица имеет только один элементарный делитель $(\lambda-\lambda_k)^{n_k}$. Матрица (8) называется *жордановой клеткой*, соответствующей элементарному делителю $(\lambda-\lambda_k)^{n_k}$. Построим блочно-диагональную матрицу

$$J=\begin{pmatrix}J_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & J_2 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & J_l\end{pmatrix}.$$

Эта матрица имеет своими элементарными делителями степени (7). Поскольку матрицы A и J имеют одни и те же элементарные делители, они подобны между собой, т.е. существует такая невырожденная матрица S, что $A=SJS^{-1}$. Матрица J называется *жордановой нормальной формой* матрицы A. В случае когда все элементарные делители матрицы A имеют первую степень (и только в этом случае), жорданова форма является диагональной матрицей, на ее диагонали стоят собственные значения матрицы A, а в качестве S можно взять матрицу, составленную из собственных векторов матрицы A. Это выполняется, в частности, если все собственные значения матрицы A различны.

Пусть $A=SJS^{-1}$. Тогда, обозначая k-й столбец матрицы S через h_k, мы заменим матричное равенство $AS=SJ$ эквивалентной системой равенств

$$\begin{array}{ll} Ah_1=\lambda_1 h_1, & Ah_{n_1+1}=\lambda_2 h_{n_1+1},\\ Ah_2=\lambda_1 h_2+h_1, & Ah_{n_1+2}=\lambda_2 h_{n_1+2}+h_{n_1+1},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ Ah_{n_1}=\lambda_1 h_{n_1}+h_{n_1-1}, & Ah_{n_1+n_2}=\lambda_2 h_{n_1+n_2}+h_{n_1+n_2-1}, \end{array}\quad \ldots, \tag{9}$$

которую перепишем еще так

$$
\begin{array}{ll}
(A-\lambda_1 E)h_1 = 0, & (A-\lambda_2 E)h_{n_1+1} = 0, \\
(A-\lambda_1 E)h_2 = h_1, & (A-\lambda_2 E)h_{n_1+2} = h_{n_1+1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
(A-\lambda_1 E)h_{n_1} = h_{n_1-1}, & (A-\lambda_2 E)h_{n_1+n_2} = h_{n_1+n_2-1},
\end{array}
\quad \ldots . \tag{10}
$$

Таким образом, все столбцы матрицы S разбиваются на «жордановы цепочки» столбцов $[h_1, h_2, \ldots, h_{n_1}]$, $[h_{n_1+1}, h_{n_1+2}, \ldots, h_{n_1+n_2}]$,... . Каждой жордановой клетке $\big($или, что то же, каждому элементарному делителю (7)$\big)$ соответствует своя жорданова цепочка столбцов. Каждая жорданова цепочка столбцов характеризуется системой уравнений типа (9). Первый вектор-столбец в каждой цепочке является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному значению соответствующего элементарного делителя; остальные векторы-столбцы называются *присоединенными* к этому собственному вектору.

Ниже описывается алгоритм нахождения жордановой формы J и преобразующей матрицы S в разложении $A = SJS^{-1}$. Найдем характеристический многочлен матрицы A и разложим его на множители

$$\chi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\ldots(\lambda-\lambda_q)^{r_q},$$

где λ_1, λ_2, ..., λ_q — попарно различные собственные значения матрицы A и $r_1 + r_2 + \cdots + r_q = n$. Для каждого многочлена $(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$ нужно найти количество и размеры жордановых клеток, отвечающих собственному значению λ_i (сумма размерностей этих клеток равна r_i). Это можно сделать при помощи теоремы 1. Однако существует более простой способ. Известно, что количество $C_p(\lambda_0)$ жордановых клеток порядка p с собственным значением λ_0 в жордановой форме матрицы A определяется формулой

$$C_p(\lambda_0) = \operatorname{rank}(A-\lambda_0 E)^{p-1} - 2\operatorname{rank}(A-\lambda_0 E)^{p} + \operatorname{rank}(A-\lambda_0 E)^{p+1}.$$

По этой формуле находим все жордановы клетки и элементарные делители матрицы A, а следовательно, и жорданову форму J.

Нахождение преобразующей матрицы S сводится к поиску жордановых цепочек, которые в совокупности давали бы n линейно независимых столбцов.

Покажем, как построить преобразующую матрицу S в том случае, когда матрица A имеет попарно взаимно простые элементарные делители

$$(\lambda-\lambda_1)^{n_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{n_2},\ \ldots,\ (\lambda-\lambda_l)^{n_l}\ (\lambda_i \neq \lambda_j \ \text{ при } i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, l).$$

В этом случае минимальный многочлен $\psi(\lambda)$ совпадает с характеристическим $\chi(\lambda)$. Строим жорданову цепочку отдельно для каждого элементарного делителя, причем строим ее, начиная с последнего столбца. Рассмотрим, к примеру, элементарный делитель $(\lambda-\lambda_1)^{n_1}$ Из формул (10) следует, что $h_1 \in \mathrm{Ker}\,(A-\lambda_1 E)$, $h_2 \in \mathrm{Ker}\,(A-\lambda_1 E)^2$,..., $h_{n_1} \in \mathrm{Ker}\,(A-\lambda_1 E)^{n_1}$. Выберем в качестве вектора-столбца h_{n_1} произвольный ненулевой вектор такой, что $h_{n_1} \in \mathrm{Ker}\,(A-\lambda_1 E)^{n_1}$, но $h_{n_1} \notin \mathrm{Ker}\,(A-\lambda_1 E)^{n_1-1}$, т.е. $(A-\lambda_1 E)^{n_1} h_{n_1} = 0$, но $(A-\lambda_1 E)^{n_1-1} h_{n_1} \neq 0$. Такой вектор всегда существует. Поднимаясь «снизу вверх» в формуле (10), последовательно вычисляем векторы h_{n_1-1}, h_{n_1-2}, ..., h_1. Эти векторы обязательно будут линейно независимы, и они образуют жорданову цепочку, соответствующую элементарному делителю $(\lambda-\lambda_1)^{n_1}$. Проводя аналогичную операцию для всех элементарных делителей $(\lambda-\lambda_j)^{n_j}$, найдем таким образом все жордановы цепочки. Векторы-столбцы в различных жордановых цепочках будут линейно независимы.

П р и м е р 2. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\psi(\lambda) = \chi(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1$. Элементарные делители есть $(\lambda-1)^2$, $(\lambda+1)^2$. Построим жорданову цепочку, отвечающую элементарному делителю $(\lambda-1)^2$. Здесь $\lambda_0 = 1$. Построим матрицы

$$A-\lambda_0 E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \qquad (A-\lambda_0 E)^2 = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 8 & -8 \\ 0 & -4 & 0 & 8 \\ -4 & 4 & 8 & -8 \\ 0 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Размерность ядра оператора $(A-\lambda_0 E)^2$ равна 2. В $\mathrm{Ker}\,(A-\lambda_0 E)^2$ лежат векторы $\mathrm{col}(2,0,1,0)$, $\mathrm{col}(0,2,0,1)$. Но второй из этих векторов также лежит и в $\mathrm{Ker}\,(A-\lambda_0 E)$, поэтому он не подходит, а первый не лежит в $\mathrm{Ker}\,(A-\lambda_0 E)$, поэтому он подходит в качестве «последнего» вектора жордановой цепочки. Полагаем $h_2 = \mathrm{col}(2,0,1,0)$. Далее, вычисляем $h_1 = (A-\lambda_0 E)h_2$. Получаем, что $h_1 = \mathrm{col}(0,2,0,1)$. Таким образом, элементарному делителю $(\lambda-1)^2$ соответствует жорданова цепочка h_1, h_2. Теперь построим жорданову цепочку, отвечающую элементарному делителю

$(\lambda+1)^2$. Здесь $\lambda_0 = -1$. Построим матрицы

$$A - \lambda_0 E = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad (A - \lambda_0 E)^2 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -8 & 0 \\ 8 & 8 & -8 & -8 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \\ 4 & 4 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Размерность ядра оператора $(A - \lambda_0 E)^2$ также равна 2. В $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda_0 E)^2$ лежат векторы $\mathrm{col}(1,0,1,0)$, $\mathrm{col}(0,1,0,1)$. Но первый из этих векторов лежит в $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda_0 E)$, а второй не лежит в $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda_0 E)$, поэтому второй подходит в качестве «последнего» вектора жордановой цепочки. Полагаем $h_4 = \mathrm{col}(0,1,0,1)$. Далее, вычисляем $h_3 = (A - \lambda_0 E)h_4$. Получаем, что $h_3 = \mathrm{col}(1,0,1,0)$. Таким образом, элементарному делителю $(\lambda+1)^2$ соответствует жорданова цепочка h_3, h_4. Построим матрицу $S = [h_1, h_2, h_3, h_4]$. Тогда

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Можно проверить, что

$$AS = S \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Переходя к общему случаю, будем искать жордановы цепочки векторов, отвечающие характеристическому числу λ_0, которому соответствуют p элементарных делителей $(\lambda-\lambda_0)^m$, q элементарных делителей $(\lambda-\lambda_0)^{m-1}$, r элементарных делителей $(\lambda-\lambda_0)^{m-2}$ и т.д. Схема поиска жордановых цепочек та же самая: находим последний вектор-столбец в цепочке и потом поднимаемся «снизу вверх».

Итак, пусть дан набор элементарных делителей

$$\underbrace{(\lambda-\lambda_0)^m, \ldots, (\lambda-\lambda_0)^m}_{p}, \underbrace{(\lambda-\lambda_0)^{m-1}, \ldots, (\lambda-\lambda_0)^{m-1}}_{q}, \ldots .$$

Построим матрицу $(A-\lambda_0 E)^m$. Рассмотрим пространство $\mathrm{Ker}\ (A-\lambda_0 E)^m \ominus \mathrm{Ker}\ (A-\lambda_0 E)^{m-1}$. Оно имеет размерность p. Выберем базис в этом пространстве, т. е. произвольные p линейно независимых векторов. Обозначим эти векторы через $h^1_m, \ldots, h^p_m$. Эти векторы будут «последними» векторами жордановых цепочек высотой m, соответствующих первой группе элементарных делителей $\underbrace{(\lambda-\lambda_0)^m, \ldots, (\lambda-\lambda_0)^m}_{p}$. Поднимемся «снизу вверх» в формуле (10) на одну ступень и вычислим векторы

$$h^1_{m-1} = (A-\lambda_0 E)h^1_m, \quad \ldots, \quad h^p_{m-1} = (A-\lambda_0 E)h^p_m.$$

Эти векторы линейно независимы и принадлежат пространству $\mathrm{Ker}\,(A-\lambda_0 E)^{m-1} \ominus \mathrm{Ker}\,(A-\lambda_0 E)^{m-2}$. Обозначим через $L_1 = \langle h^1_{m-1}, \ldots, h^p_{m-1}\rangle$ их линейную оболочку.

На следующем шаге рассмотрим пространство $\mathrm{Ker}\,(A-\lambda_0 E)^{m-1} \ominus \mathrm{Ker}\,(A-\lambda_0 E)^{m-2}$. Оно имеет размерность $p+q$. Выберем q векторов, которые линейно независимы между собой, линейно независимы с векторами из L_1 и лежат в $\mathrm{Ker}\,(A-\lambda_0 E)^{m-1}$, но не лежат в $\mathrm{Ker}\,(A-\lambda_0 E)^{m-2}$, т. е. выберем базис в пространстве $\mathrm{Ker}\,(A-\lambda_0 E)^{m-1} \ominus \mathrm{Ker}\,(A-\lambda_0 E)^{m-2} \ominus L_1$. Это пространство имеет размерность q, поэтому такие векторы существуют. Обозначим эти векторы через $h^{p+1}_{m-1}, \ldots, h^{p+q}_{m-1}$. Эти векторы будут «последними» векторами жордановых цепочек высотой $m-1$, соответствующих второй группе элементарных делителей $\underbrace{(\lambda-\lambda_0)^{m-1}, \ldots, (\lambda-\lambda_0)^{m-1}}_{q}$.

Поднимемся «снизу вверх» в формуле (10) на одну ступень и вычислим векторы

$$\begin{aligned} h^1_{m-2} &= (A-\lambda_0 E)h^1_{m-1}, \quad \ldots, \quad h^p_{m-2} = (A-\lambda_0 E)h^p_{m-1}, \\ h^{p+1}_{m-2} &= (A-\lambda_0 E)h^{p+1}_{m-1}, \quad \ldots, \quad h^{p+q}_{m-2} = (A-\lambda_0 E)h^{p+q}_{m-1}. \end{aligned}$$

Эти векторы будут линейно независимы и будут принадлежать пространству $\mathrm{Ker}\,(A-\lambda_0 E)^{m-2} \ominus \mathrm{Ker}\,(A-\lambda_0 E)^{m-3}$. Обозначим через L_2 их линейную оболочку. После этого шага мы уже нашли для первых p цепочек высотой m, соответствующих первой группе элементарных делителей, по три последних вектора в каждой цепочке, а для следующих q цепочек высотой $m-1$, соответствующих второй группе элементарных делителей, по два последних вектора в каждой цепочке.

На следующем шаге выберем базис, состоящий из r векторов, в пространстве $\mathrm{Ker}\,(A-\lambda_0 E)^{m-2} \ominus \mathrm{Ker}\,(A-\lambda_0 E)^{m-3} \ominus L_2$. Эти векторы будут «последними» векторами жордановых цепочек высотой $m-2$, соответствующих следующей группе из r элементарных делителей $(\lambda-\lambda_0)^{m-2}$. Снова поднимаемся «снизу вверх» по формуле (10) на одну ступень. И так далее. В конце концов мы найдем таким образом жордановы цепочки для всех элементарных делителей, отвечающих собственному значению λ_0.

П р и м е р 3. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -5 & 4 \\ 8 & -4 & 3 & -4 \\ 15 & -10 & 11 & -11 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\chi(\lambda) = (\lambda+1)^4$, $\psi(\lambda) = (\lambda+1)^3$, элементарные делители есть $(\lambda+1)^3$, $\lambda+1$. Жорданова форма матрицы A равна

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Строим жорданову цепочку h_1, h_2, h_3 для элементарного делителя $(\lambda-\lambda_0)^3$ и h_4 для $(\lambda-\lambda_0)$, здесь $\lambda_0 = -1$. Имеем

$$A-\lambda_0 E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -5 & 4 \\ 8 & -4 & 4 & -4 \\ 15 & -10 & 11 & -10 \end{pmatrix}, \ (A-\lambda_0 E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$(A-\lambda_0 E)^3 = 0$. В качестве h_3 можно взять любой вектор, не лежащий в $\mathrm{Ker}\,(A-\lambda_0 E)^2$, например $h_3 = \mathrm{col}(1,0,0,0)$. Далее, вычисляем $h_2 = (A-\lambda_0 E)h_3$. Получаем, что $h_2 = \mathrm{col}(2,-3,8,15)$. Далее, вычисляем $h_1 = (A-\lambda_0 E)h_2$. Получаем, что $h_1 = \mathrm{col}(0,2,0,-2)$. Теперь выбираем вектор $h_4 \in \mathrm{Ker}\,(A-\lambda_0 E)$ линейно независимый с h_1. Берем, например, $h_4 = \mathrm{col}(1,7,5,0)$. Составляем матрицу $S = [h_1, h_2, h_3, h_4]$. Тогда

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 7 \\ 0 & 8 & 0 & 5 \\ -2 & 15 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно проверить, что $AS = SJ$.

Пусть известна жорданова форма J матрицы A и преобразующая матрица S, т.е. имеет место представление $A = SJS^{-1}$. Тогда $e^{At} = Se^{Jt}S^{-1}$. Далее, поскольку J имеет блочный вид, то

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{J_l t} \end{pmatrix}.$$

Найдем экспоненту жордановой клетки. Поскольку $J_k = \lambda_k E + H_k$ и матрицы $\lambda_k E$ и H_k коммутируют, то $e^{J_k t} = e^{(\lambda_k E + H_k)t} = e^{\lambda_k E_k t} \cdot e^{H_k t} = e^{\lambda_k t} \cdot e^{H_k t}$. У матрицы H_k наддиагональ состоит из единиц, а все остальные элементы равны нулю. Матрица H_k является нильпотентной, ее n_k-я степень и все остальные степени, большие n_k, равны нулевой матрице. Применим формулу (3), получим, что

$$e^{H_k t} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{t}{1!} & \dots & \dfrac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dfrac{t}{1!} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$e^{J_k t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_k t} & \dfrac{t}{1!}e^{\lambda_k t} & \dots & \dfrac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!}e^{\lambda_k t} \\ 0 & e^{\lambda_k t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dfrac{t}{1!}e^{\lambda_k t} \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_k t} \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Матрица e^{Jt} состоит из блоков вида (11). Теперь, чтобы найти матрицу e^{At}, надо умножить матрицу e^{Jt} слева на S, а затем справа на S^{-1}.

На самом деле, чтобы найти *какую-нибудь* фундаментальную матрицу (не обязательно e^{At}), нет необходимости дополнительно вычислять матрицу S^{-1}. Известно, что если $\Phi(t)$ — это фундаментальная матрица системы (2), то для любой невырожденной постоянной матрицы C матрица $\Psi(t) = \Phi(t)C$ также является фундаментальной матрицей системы (2). Поскольку e^{At} является фундаментальной матрицей системы (2), то $e^{At}S = Se^{Jt}$ также является фундаментальной матрицей системы (2). Матрица Se^{Jt} имеет следующий вид: ее первые n_1 столбцов есть

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t) &= e^{\lambda_1 t} h_1, \\ x^{(2)}(t) &= e^{\lambda_1 t}\left(\frac{t}{1!}h_1 + h_2\right), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x^{(n_1)}(t) &= e^{\lambda_1 t}\left(\frac{t^{n_1-1}}{(n_1-1)!}h_1 + \frac{t^{n_1-2}}{(n_1-2)!}h_2 + \dots + \frac{t}{1!}h_{n_1-1} + h_{n_1}\right); \end{aligned}$$

вторые n_2 столбцов есть

$$x^{(n_1+1)}(t) = e^{\lambda_2 t} h_{n_1+1},$$
$$x^{(n_1+2)}(t) = e^{\lambda_2 t}\left(\frac{t}{1!} h_{n_1+1} + h_{n_1+2}\right),$$
$$x^{(n_1+3)}(t) = e^{\lambda_2 t}\left(\frac{t^2}{2!} h_{n_1+1} + \frac{t}{1!} h_{n_1+2} + h_{n_1+3}\right),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$x^{(n_1+n_2)}(t) = e^{\lambda_2 t}\left(\frac{t^{n_2-1}}{(n_2-1)!} h_{n_1+1} + \dots + \frac{t}{1!} h_{n_1+n_2-1} + h_{n_1+n_2}\right)$$

и так далее. Здесь $[h_1, h_2, \dots, h_{n_1}]$ — это жорданова цепочка, отвечающая первому элементарному делителю $(\lambda - \lambda_1)^{n_1}$, $[h_{n_1+1}, h_{n_1+2}, \dots, h_{n_1+n_2}]$ — это жорданова цепочка, отвечающая второму элементарному делителю $(\lambda - \lambda_2)^{n_2}$ и т.д. Матрица, составленная из векторов $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(n_1)}$, $x^{(n_1+1)}$, ..., $x^{(n_1+n_2)}$, ... будет фундаментальной матрицей системы (2).

З а м е ч а н и е. Может оказаться, что матрица A вещественная, а матрицы S, J, S^{-1} в разложении $A = SJS^{-1}$ комплексные. В этом случае коэффициенты характеристического многочлена матрицы A вещественные; он имеет комплексные сопряженные корни, и жордановы цепочки, отвечающие сопряженным собственным значениям, состоят из сопряженных векторов-столбцов. Матрица e^{Jt} будет, вообще говоря, комплексной, тем не менее матрица $Se^{Jt}S^{-1}$ будет вещественной. Поэтому для вещественной матрицы A матричная экспонента e^{At} всегда вещественная.

Если брать в качестве фундаментальной матрицы системы (2) матрицу $\Phi(t) = Se^{Jt}$, то эта матрица будет, вообще говоря, комплексной. Однако для любого комплексного столбца $x^{(j_1)}(t) = p(t) + iq(t)$ в матрице $\Phi(t)$ найдется сопряженный столбец $x^{(j_2)}(t) = p(t) - iq(t)$. Поэтому заменив в матрице $\Phi(t)$ каждую такую пару $x^{(j_1)}(t), x^{(j_2)}(t)$ на пару $p(t), q(t)$, мы преобразуем матрицу $\Phi(t)$ к вещественному виду.

- **Применение рекуррентной формулы**

Пусть
$$p(\lambda) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + b_0$$
характеристический многочлен матрицы A, т. е. $p(\lambda) = \det(\lambda E - A)$. В силу теоремы Гамильтона–Кэли характеристический многочлен является анну-

лирующим для матрицы A, т. е.

$$p(A) = A^n + b_{n-1}A^{n-1} + \cdots + b_0 A^0 = 0.$$

Поэтому любая степень A^s, $s \geqslant n$ матрицы A является линейной комбинацией матриц A^i, $i = 0, \ldots, n-1$. В силу формулы (3)

$$\exp(At) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k. \tag{12}$$

Подставим матрицы A^s, $s \geqslant n$ в формулу (12), получим, что

$$\exp(At) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k, \tag{13}$$

где функции $\alpha_k(t)$, $k = 0, \ldots, n-1$ являются суммами соответствующих сходящихся степенных рядов.

Оказывается, что функции $\alpha_k(t)$, $k = 0, \ldots, n-2$ в формуле (13) могут быть найдены из следующих рекуррентных соотношений:

$$\alpha_k(t) = b_{k+1}\alpha_{n-1}(t) + \alpha'_{k+1}(t), \quad k = 0, \ldots, n-2, \tag{14}$$

а функция $\alpha_{n-1}(t)$ является решением задачи Коши

$$\begin{gathered} \alpha_{n-1}^{(n)}(t) + b_{n-1}\alpha_{n-1}^{(n-1)}(t) + \cdots + b_1\alpha'_{n-1}(t) + b_0\alpha_{n-1}(t) = 0, \\ \alpha_{n-1}(0) = 0,\ \alpha'_{n-1}(0) = 0,\ \ldots,\ \alpha_{n-1}^{(n-2)}(0) = 0,\ \alpha_{n-1}^{(n-1)}(0) = 1. \end{gathered} \tag{15}$$

Итак, для нахождения матричной экспоненты $\exp(At)$ нужно:

1) найти характеристический многочлен матрицы A;

2) решить задачу Коши (15) и найти таким образом $\alpha_{n-1}(t)$;

3) при помощи соотношений (14) найти последовательно функции $\alpha_{n-2}(t)$, $\alpha_{n-3}(t)$, $\ldots$, $\alpha_0(t)$;

4) вычислив последовательно степени матрицы A^s, $s = 1, \ldots, n-1$, записать по формуле (13) матричную экспоненту.

П р и м е р 4. Найдем общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 2x - y - 2z, \\ \dot{z} = -x + y + 2z. \end{cases} \tag{16}$$

Обозначим через A матрицу системы (16):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем характеристический многочлен матрицы A :

$$p(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & 1 \\ -2 & \lambda + 1 & 2 \\ 1 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} =$$
$$= \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1,$$

следовательно, $b_0 = -1,\ b_1 = 3,\ b_2 = -3.$

Функция $\alpha_2(t)$ — это решение задачи Коши

$$\alpha_2''' - 3\alpha_2'' + 3\alpha_2' - \alpha_2 = 0, \tag{17}$$
$$\alpha_2(0) = 0,\ \alpha_2'(0) = 0,\ \alpha_2''(0) = 1. \tag{18}$$

Поскольку характеристическим многочленом однородного уравнения (17) является многочлен $p(\lambda)$, имеющий корень $\lambda = 1$ кратности 3, то общее решение (17) — это функция $\alpha_2(t) = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2)e^t$, а из начальных условий (18) следует, что

$$\alpha_2(t) = \frac{t^2}{2} e^t.$$

Найдем теперь функции $\alpha_1(t)$ и $\alpha_0(t)$:

$$\alpha_1(t) = b_2\alpha_2(t) + \alpha_2'(t) = (t - t^2)e^t,$$
$$\alpha_0(t) = b_1\alpha_2(t) + \alpha_1'(t) = (1 - t + t^2/2)e^t.$$

Далее вычислим A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

и подставим все найденные величины в (13):

$$\exp(At) = \alpha_0(t)E + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2 =$$
$$= \begin{pmatrix} (1+t)e^t & -te^t & -te^t \\ 2te^t & (1-2t)e^t & -2te^t \\ -te^t & te^t & (1+t)e^t \end{pmatrix}.$$

Так как столбцы этой матрицы — линейно независимые решения системы (16), то ее общее решение записывается в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= \big((C_1 - C_2 - C_3)t + C_1\big)e^t, \\ y(t) &= \big((2C_1 - 2C_2 - 2C_3)t + C_2\big)e^t, \\ z(t) &= \big((-C_1 + C_2 + C_3)t + C_3\big)e^t. \end{aligned}$$

- **Частный случай, когда все собственные значения матрицы A совпадают**

Пусть все собственные значения матрицы A совпадают:

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = q.$$

В этом случае существует простая формула для вычисления экспоненты матрицы A. Она имеет следующий вид:

$$e^{At} = \left(E + \frac{(A-qE)t}{1!} + \frac{(A-qE)^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{(A-qE)^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^{qt} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(A-qE)^k t^k}{k!} e^{qt}. \tag{19}$$

Докажем эту формулу. Обозначим правую часть формулы (19) через $G(t)$

$$G(t) = \left(E + \frac{(A-qE)t}{1!} + \frac{(A-qE)^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{(A-qE)^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^{qt}.$$

Найдем производную матрицы $G(t)$:

$$\dot G(t) = \left((A-qE) + \frac{(A-qE)^2t}{1!} + \cdots + \frac{(A-qE)^{n-1}t^{n-2}}{(n-2)!}\right)e^{qt} +$$

$$+\left(qE + \frac{q(A-qE)t}{1!} + \frac{q(A-qE)^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{q(A-qE)^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^{qt} =$$

$$= \left(A + \frac{A(A-qE)t}{1!} + \cdots + \frac{A(A-qE)^{n-2}t^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{q(A-qE)^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^{qt}.$$

Теперь вычислим $AG(t)$:

$$AG(t) = \left(A + \frac{A(A-qE)t}{1!} + \frac{A(A-qE)^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{A(A-qE)^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^{qt}.$$

Таким образом,

$$AG(t) - \dot{G}(t) = \left(\frac{(A - qE)(A - qE)^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!} \right) e^{qt} = \left(\frac{(A - qE)^n t^{n-1}}{(n-1)!} \right) e^{qt}.$$

Но многочлен $(\lambda - q)^n$ является характеристическим многочленом матрицы A, а следовательно, аннулирующим для матрицы A, т.е. $(A - qE)^n = 0$. Поэтому $\dot{G}(t) = AG(t)$. Заметим также, что $G(0) = E$. Следовательно, матрица $G(t)$ является фундаментальной матрицей системы (2), и при $t = 0$ она равна единичной матрице. Отсюда в силу теоремы единственности вытекает, что $G(t)$ совпадает с e^{At}.

Таким образом, чтобы найти экспоненту матрицы A, в случае когда все собственные значения матрицы A совпадают и равны q, нужно вычислить последовательно степени матрицы $(A - qI)^s$, $s = 1, \ldots, n-1$ и записать по формуле (19) матричную экспоненту.

П р и м е р 5. Найдем экспоненту матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен матрицы A имеет корень $q = 1$ кратности 3, т.е. все собственные значения матрицы A совпадают. Найдем степени матрицы $A - E$:

$$A - E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(A - E)^2 = 0.$$

Подставляя найденные значения в формулу (19), получаем

$$\exp(At) = (E + (A - E)t)e^t =$$

$$= \begin{pmatrix} (1+t)e^t & -te^t & -te^t \\ 2te^t & (1-2t)e^t & -2te^t \\ -te^t & te^t & (1+t)e^t \end{pmatrix}.$$

§3. Функции Ляпунова и теоремы об устойчивости

Пусть x_0 — положение равновесия (особая точка) системы

$$\dot{x} = f(x), \qquad x \in G \subset \mathbb{R}^n\,, \tag{1}$$

где G — область в $\mathbb{R}^n$, содержащая x_0. Здесь $x = \operatorname{col}(x_1, \ldots, x_n)$, $f(x) = \operatorname{col}\bigl(f_1(x), \ldots, f_n(x)\bigr)$. Функция $V : G_0 \to \mathbb{R}^1$ $(x_0 \in G_0 \subset G)$ называется *определенно положительной* (в области G_0), если $V(x_0) = 0$ и $V(x) > 0$ при $x \in G_0$, $x \neq x_0$; *определенно отрицательной*, если $-V(x)$ определенно положительна; *бесконечно большой* (в неограниченной области G), если для любого $N > 0$ найдется $r > 0$ такое, что $V(x) \geqslant N$ при всех $x \in G \setminus O_r(x_0)$, где $O_r(x_0)$ — r-окрестность точки x_0. Если в области G_0 всюду имеет место неравенство $V(x) \geqslant 0$ или неравенство $V(x) \leqslant 0$, то функция $V(x)$ называется *знакопостоянной*, причем в первом случае функция $V(x)$ называется *знакоположительной*, а во втором — *знакоотрицательной*.

Далее, множество $Q \subset G$ называется *инвариантным*, если всякое решение системы (1), начинающееся в Q, остается в Q при всех $t \in [0, \infty)$. Пусть $\varphi(t, x)$ — решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$. Функция $\dot{V}(x) \doteq \left.\dfrac{dV\bigl(\varphi(t,x)\bigr)}{dt}\right|_{t=0}$ называется *производной функции $V(x)$ в силу системы* (1). Непосредственно проверяется, что

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} f_1(x) + \cdots + \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} f_n(x)\,.$$

Будем говорить, что *множество $M \subset G$ $(x_0 \in M)$ не содержит целых траекторий, кроме положения равновесия* x_0, если для любого $x \in M$ найдется момент времени $t_x \in (0, \infty)$ такой, что $\varphi(t_x, x) \notin M$.

Исследование устойчивости положения равновесия системы (1) опирается на следующие утверждения.

Т е о р е м а (Ляпунова об устойчивости). *Пусть в некоторой окрестности точки x_0 существует определенно положительная функция $V(x)$ такая, что $\dot{V}(x) \leqslant 0$ в этой окрестности. Тогда положение равновесия x_0 устойчиво по Ляпунову.*

Т е о р е м а (Ляпунова об асимптотической устойчивости). *Пусть в некоторой окрестности точки x_0 существует определенно положительная функция $V(x)$ такая, что $\dot{V}(x)$ определенно отрицательна в этой окрестности. Тогда положение равновесия x_0 асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Т е о р е м а (Барбашина и Красовского об асимптотической устойчивости). *Пусть в некоторой окрестности $O(x_0)$ точки x_0 существует определенно положительная функция $V(x)$ такая, что $\dot V(x) \leqslant 0$ и для всех $x \in M \doteq \{x \in O(x_0) \setminus \{x_0\} : \dot V(x) = 0\}$ выполнено $f(x) \notin M$. Тогда положение равновесия x_0 асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

З а м е ч а н и е. Если функция $\dot V(x)$ определенно отрицательна в рассматриваемой окрестности, то множество M пусто. В этом случае теорема Барбашина и Красовского об асимптотической устойчивости переходит в классическую теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Т е о р е м а (Барбашина и Красовского об устойчивости в целом). *Пусть область G инвариантна и в G существует бесконечно большая (если G — неограниченна), определенно положительная функция $V(x)$ такая, что $\dot V(x) \leqslant 0$. Пусть, далее, множество $M \doteq \{x \in G : \dot V(x) = 0\}$ не содержит целых траекторий, кроме x_0. Тогда положение равновесия x_0 устойчиво в целом (т. е. устойчиво по Ляпунову и для любого $x \in G$ решение $\varphi(t, x)$ системы (1) стремится к x_0 при $t \to \infty$).*

Т е о р е м а (Ляпунова о неустойчивости). *Пусть существует функция $V(x)$, не являющаяся знакоотрицательной в произвольной окрестности $O(x_0)$ точки x_0, такая, что $\dot V(x) > 0$ в этой окрестности. Тогда положение равновесия x_0 неустойчиво.*

Т е о р е м а (Барбашина и Красовского о неустойчивости). *Пусть существует функция $V(x)$, не являющаяся знакоотрицательной в произвольной окрестности $O(x_0)$ точки x_0. Если $\dot V(x) \geqslant 0$ и для всех $x \in M \doteq \{x \in O(x_0) \setminus \{x_0\} : \dot V(x) = 0\}$ выполнено $f(x) \notin M$, то положение равновесия x_0 неустойчиво.*

З а м е ч а н и е. Если функция $\dot V(x)$ определенно положительна в рассматриваемой области, то M пусто. В этом случае теорема Барбашина и Красовского о неустойчивости переходит в теорему Ляпунова.

- **Простейшие приемы построения функций Ляпунова**

А. Разделение переменных. Пусть точка $(0, 0)$ является положением равновесия системы

$$\dot x = P_1(x) + P_2(y), \quad \dot y = -Q_1(x) + Q_2(y), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2 .$$

Попытаемся построить функцию Ляпунова в виде $V(x, y) = g(x) + h(y)$. Тогда

$$\dot V(x, y) = P_1(x)\frac{dg(x)}{dx} + Q_2(y)\frac{dh(y)}{dy} + P_2(y)\frac{dg(x)}{dx} - Q_1(x)\frac{dh(y)}{dy} . \qquad (2)$$

Приравнивая к нулю «смешанную» часть $P_2(y)\dfrac{dg}{dx} - Q_1(x)\dfrac{dh}{dy}$ функции (2) и разделяя переменные, получим уравнение

$$\frac{P_2(y)}{dh(y)/dy} = \frac{Q_1(x)}{dg(x)/dx}\,,$$

левая часть которого зависит только от y, а правая — только от x. Следовательно, для всех (x, y) из окрестности нуля имеют место равенства

$$\frac{P_2(y)}{dh(y)/dy} = \text{const} = \frac{Q_1(x)}{dg(x)/dx}\,. \tag{3}$$

Из (3) находим $g(x)$, $h(y)$ и производную $\dot{V}(x, y)$, которая, как и $V(x, y)$, запишется в виде суммы двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной.

П р и м е р. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = ax^3 + by, \quad \dot{y} = -cx + dy^3, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{4}$$

Будем искать функцию Ляпунова в виде $V(x, y) = g(x) + h(y)$. Тогда

$$\dot{V}(x, y) = \frac{dg}{dx}(ax^3 + by) - \frac{dh}{dy}(cx - dy^3) = a\frac{dg}{dx}x^3 + d\frac{dh}{dy}y^3 + b\frac{dg}{dx}y - c\frac{dh}{dy}x\,.$$

Потребуем, чтобы $\dot{V}(x, y)$ имела ту же структуру, что и $V(x, y)$, т. е. потребуем, чтобы $\dot{V}(x, y)$ состояла из двух слагаемых, каждое из которых содержало бы только одну переменную x или y. Следовательно, должно быть выполнено тождество $\dfrac{dg}{dx}by = \dfrac{dh}{dy}cx$. Разделяя переменные, получим

$$\frac{by}{dh(y)/dy} = \frac{cx}{dg(x)/dx}\,.$$

Это равенство выполнено, например, для функций $g(x) = cx^2$, $h(y) = by^2$.

Пусть $c > 0,\ b > 0,\ a < 0,\ d < 0$, тогда построенная функция Ляпунова $V(x, y) = cx^2 + by^2$ определенно положительна, бесконечно большая в $\mathbb{R}^2$ и ее производная $\dot{V}(x, y) = 2(acx^4 + bdy^4)$ определенно отрицательна. Поэтому положение равновесия $(0, 0)$ системы (4) устойчиво в целом. Далее, если $a \leqslant 0,\ d \leqslant 0$, то $\dot{V}(x, y) \leqslant 0$, и в силу теоремы Ляпунова положение равновесия $(0, 0)$ системы (4) устойчиво по Ляпунову. В действительности может оказаться, что оно по-прежнему устойчиво в целом. Например, если $a = 0,\ d < 0$, то множество $M = \{(x, y) :\ \dot{V}(x, y) = 0\}$ состоит из точек $(x, 0)$, где x любое. Покажем, что M не содержит целых траекторий системы (4), кроме точки $(0,0)$. Если $\big(x(t), 0\big)$ — решение системы (4), находящееся в M, то $\dot{x}(t) = by(t) \equiv 0$, поэтому $x(t) \equiv x(0)$ и из второго уравнения системы (4) получаем равенство $-cx(0) = 0$. Следовательно, $x(t) \equiv 0$ и в силу теоремы Барбашина и Красовского (об устойчивости в целом) положение равновесия системы (4) устойчиво в целом.

Пусть $c \leqslant 0,\ b > 0$, тогда $V(x, y)$ не является определенно положительной, но $V(x, y)$ не является и знакоотрицательной (поскольку $V(0, y) > 0$ при $y \neq 0$). Поэтому, если дополнительно выполнены неравенства $a \leqslant 0,\ d > 0$, то $\dot{V}(x, y) \geqslant 0$ и (как легко проверить) множество M не содержит целых траекторий системы (4), кроме точки $(0,0)$. В силу теоремы Барбашина и Красовского (о неустойчивости) положение равновесия системы (4) неустойчиво.

Б. Применение полного интеграла. Пусть $V(x, y)$ — полный интеграл системы

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \qquad (x, y) \in G \subset \mathbb{R}^2\,, \tag{5}$$

с инвариантной областью G. Это означает, что для любого решения $\big(x(t), y(t)\big)$ системы (5) с начальными условиями $\big(x(0), y(0)\big) \in G$ имеет место равенство $V\big(x(t), y(t)\big) = \mathrm{const}$. Следовательно, производная функции $V(x, y)$ в силу системы (5) тождественно равна нулю и поэтому производная $V(x, y)$ в силу возмущенной системы

$$\dot{x} = P(x, y) + P_1(x, y), \qquad \dot{y} = Q(x, y) + Q_1(x, y)\,, \tag{6}$$

имеет вид $\dot{V}(x, y) = P_1 \dfrac{\partial V}{\partial x} + Q_1 \dfrac{\partial V}{\partial y}$. Если при этом область G остается инвариантной для системы (6) и в G имеется единственное положение равновесия системы (6), совпадающее с положением равновесия системы (5), то по виду $V(x, y)$ и $\dot{V}(x, y)$ часто удается судить об устойчивости положения равновесия системы (6).

Пример. Колебания материальной точки единичной массы в окрестности положения равновесия (без учета трения) описываются уравнением $\ddot{x} + f(x) = 0$, где $x = x(t)$ — отклонение точки в момент времени t от положения равновесия $x = 0$, $f(x)$ — упругая (восстанавливающая) сила, удовлетворяющая условиям $f(0) = 0,\ xf(x) > 0$ при $x \neq 0$. Перейдем от уравнения к системе

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -f(x), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{7}$$

Система (7) имеет первый интеграл (интеграл энергии). Действительно, интегрируя уравнение $f(x)dx + ydy = 0$, решениями которого являются траектории системы (7), получим

$$V(x,y) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x f(s)\,ds, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \tag{8}$$

(сумма кинетической и потенциальной энергий). Так как функция (8) определенно положительна и $\dot V(x,y) = 0$, то положение равновесия $(0,0)$ системы (7) устойчиво по Ляпунову.

Рассмотрим теперь уравнение $\ddot x + \varphi(\dot x) + f(x) = 0$ колебаний материальной точки в среде с сопротивлением (зависящим от скорости $\dot x$) и систему

$$\dot x = y, \quad \dot y = -f(x) - \varphi(y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,, \tag{9}$$

эквивалентную этому уравнению. Здесь функция $\varphi(y)$ удовлетворяет условиям $\varphi(0) = 0$, $y\varphi(y) > 0$ при $y \neq 0$. Поэтому производная $\dot V(x,y) = -y\varphi(y)$ функции (8) в силу системы (9) неположительна и множество $M = \{(x,y):\ \dot V(x,y) = 0\}$ состоит из точек вида $(x,0)$. Несложно убедиться, что M не содержит целых траекторий, кроме положения равновесия (0,0). Следовательно, положение равновесия системы (9) асимптотически устойчиво. Если дополнительно $\lim\limits_{|x|\to\infty} \int\limits_0^x f(s)\,ds = \infty$, то функция (8) бесконечно большая и поэтому положение равновесия устойчиво в целом.

B. Псевдолинеаризация. Наряду с системой

$$\dot x = f(x) + \beta y, \quad \dot y = \gamma x + \delta y, \qquad f(0) = 0\,, \tag{10}$$

рассмотрим линейную систему

$$\dot x = \alpha x + \beta y, \qquad \dot y = \gamma x + \delta y\,. \tag{11}$$

Если $\alpha + \delta < 0$, $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$ (в этом случае, в силу критерия Рауза и Гурвица, все решения системы (11) экспоненциально стремятся к нулю), то функция

$$V(x,y) = (\delta x - \beta y)^2 + (\alpha\delta - \beta\gamma)x^2 \tag{12}$$

определенно положительна, а производная

$$\dot V(x,y) = -2(\alpha + \delta)(\beta\gamma - \alpha\delta)x^2$$

функции V в силу системы (11) определенно отрицательна. Функция (12) содержит выражение αx^2, которое можно записать как интеграл $2\int\limits_0^x \alpha s\,ds$.

Поэтому естественно строить функцию Ляпунова для системы (10) в виде

$$V(x,y) = (\delta x - \beta y)^2 + 2\delta \int_0^x f(s)\, ds - \beta\gamma x^2\,. \tag{13}$$

Производная функции (13) в силу системы (10) имеет вид

$$\dot V(x,y) = -2\Big(\frac{f(x)}{x} + \delta\Big)\Big(\beta\gamma - \delta\frac{f(x)}{x}\Big)x^2\,. \tag{14}$$

Так как

$$V(x,y) = (\delta x - \beta y)^2 + 2\int_0^x (\delta f(s) - \beta\gamma s)\, ds\,,$$

то условие $\delta\dfrac{f(x)}{x} > \beta\gamma$ при $x \neq 0$ обеспечивает определенную положительность функции (13), и если дополнительно выполнено неравенство $\dfrac{f(x)}{x} + \delta < 0$ при $x \neq 0$, то производная (14) знакоотрицательна. Очевидно также, что множество M, где $\dot V = 0$, не содержит целых траекторий.

Изложенная идея построения функции Ляпунова для системы (10) может быть распространена на системы, содержащие в правых частях нелинейные слагаемые, зависящие только от x или y. Например, для системы

$$\dot x = f_1(x) + \beta y, \quad \dot y = f_2(x) + \delta y\,, \quad f_1(0) = 0, \quad f_2(0) = 0 \tag{15}$$

функцию Ляпунова можно искать в виде

$$V(x,y) = (\delta x - \beta y)^2 + 2\int_0^x \big(\delta f_1(s) - \beta f_2(s)\big)\, ds\,. \tag{16}$$

Тогда производная функции (16) в силу системы (15) имеет вид

$$\dot V(x,y) = -2\Big(f_1(x) + \delta x\Big)\Big(\beta f_2(x) - \delta f_1(x)\Big)\,. \tag{17}$$

Условие $x\big(\delta f_1(x) - \beta f_2(x)\big) > 0$ при $x \neq 0$, обеспечивает определенную положительность функции (16), и если дополнительно выполнено неравенство $\dfrac{f(x)}{x} + \delta < 0$ при $x \neq 0$, то производная (17) определенно отрицательна. Следовательно, положение равновесия системы (15) асимптотически устойчиво по теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Индивидуальные задания

Вариант 1

1. Найти периодическое решение уравнения $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = \sin\omega t$ и нарисовать график зависимости его амплитуды от величины ω.

2. Выписать линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными вещественными коэффициентами возможно меньшего порядка, имеющее среди решений функции $x_1(t) = 3^t\cos 4t$ и $x_2(t) = \sin 4t\cos 4t$.

3. Доказать, что если функции $\varphi_1, \varphi_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таковы, что $\varphi_2(t) \neq 0$ при всех $t \in (a, b)$ и $\dfrac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)} \not\equiv \mathrm{const}$ на (a, b), то функции φ_1 и φ_2 линейно независимы на (a, b).

4. Найти общее решение уравнения $(2t+1)\ddot{x} + (4t-2)\dot{x} - 8x = 0$, если одно его частное решение имеет вид $x_1(t) = e^{mt}$.

5. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$(2t+1)\ddot{x} + (4t-2)\dot{x} - 8x = f(t).$$

6. Решить задачу Коши
$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = -2x - 5y, & y(0) = 1. \end{cases}$$

Найти общее решение систем дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} \dot{x} = y + z, \\ \dot{y} = z + x, \\ \dot{z} = x + y. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} \dot{x} = -y + z, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -x + z. \end{cases}$ 9. $\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$

10. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 16te^t, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$ 11. $\begin{cases} \dot{x} = -y + \sin t, \\ \dot{y} = x + \cos t. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \dfrac{1}{\cos t}. \end{cases}$

13. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$\ddot{x} + x = f(t).$$

14. Построить функцию Грина краевой задачи
$$\ddot{x} + x = f(t), \quad x(0) = x(\pi), \quad \dot{x}(\pi) = 0.$$

15. Решить краевую задачу
$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = \alpha.$$

16. Построить функцию Грина краевой задачи

$$x^2y'' + 2xy' - 2y = f(x), \quad y(0) \text{ ограничено}, \quad y(1) = 0.$$

17. Исследовать на устойчивость по первому приближению положение равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{5}{2}xe^x - 3y + \sin x^3, \\ \dot{y} = 2x + y - y^2 \cos x. \end{cases}$$

18. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения

$$y''' + 2y'' + 2y' + 3y = 0.$$

19. Исследовать особые точки уравнения и дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y)

$$y' = \frac{y - 2x}{2y - 3x}.$$

20. Найти и исследовать особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{(x-y)^2 + 3} - 2, \\ \dot{y} = e^{y^2 - x} - e. \end{cases}$$

21. Начертить на фазовой плоскости траектории и исследовать особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - 4x^2, \\ \dot{y} = 4y - 8. \end{cases}$$

22. Найти производную по параметру от решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, & x(0) = 1 + \mu, \\ \dot{y} = 2x + \mu y^2, & y(0) = -2; \end{cases} \qquad \text{найти} \quad \left. \frac{\partial y}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}.$$

23. Найти решение задачи Коши в виде степенного ряда, вычислить несколько первых коэффициентов ряда (до коэффициента при x^4 включительно): $\quad y' = y + xe^y, \quad y(0) = 0.$

24. Решить систему $\quad \dfrac{dx}{x(z-y)} = \dfrac{dy}{y(y-x)} = \dfrac{dz}{y^2 - xz}.$

25. Найти положения равновесия системы и исследовать устойчивость одного из них, построив функцию Ляпунова

$$\dot{x} = -2x + 3y, \quad \dot{y} = -\operatorname{arctg} x, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Вариант 2

1. При каких k и ω уравнение $\ddot{x} + k^2 x = \sin \omega t$ имеет хотя бы одно периодическое решение?

2. Выписать линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными вещественными коэффициентами возможно меньшего порядка, имеющее среди решений функции $x_1(t) = t\cos 4t$ и $x_2(t) = \sin 4t \cos 4t$.

3. Функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ являются линейно независимыми на всей числовой прямой. Обязательно ли будут линейно независимы сужения этих функций на отрезок $[-1, 1]$?

4. Найти общее решение уравнения $(t^2 - t)\ddot{x} - 2\dot{x} - 2x = 0$, если одно его частное решение — рациональная дробь, в знаменателе которой находятся линейные множители — делители коэффициента при $\ddot{x}$.

5. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$(t^2 - t)\ddot{x} - 2\dot{x} - 2x = f(t).$$

6. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, & x(0) = 1, \\ \dot{y} = 4x + 7y, & y(0) = 0. \end{cases}$$

Найти общее решение систем дифференциальных уравнений:

$$7. \begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z, \\ \dot{y} = -x + y + z, \\ \dot{z} = x - z. \end{cases} \qquad 8. \begin{cases} \dot{x} = 21x - 8y - 19z, \\ \dot{y} = 18x - 7y - 15z, \\ \dot{z} = 16x - 6y - 15z. \end{cases}$$

$$9.\, \dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}. \qquad 10. \begin{cases} \dot{x} = 4x - 5y + 4t - 1, \\ \dot{y} = x - 2y + t. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y + \cos t, \\ \dot{y} = -x - 2y + \sin t. \end{cases} \quad 12. \begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = 4y - 3x + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t} + 1}. \end{cases}$$

13. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$\ddot{x} + \dot{x} = f(t).$$

14. Построить функцию Грина краевой задачи
$$\ddot{x} + \dot{x} = f(t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(1).$$

15. Решить краевую задачу
$$y'' - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 1.$$

16. Построить функцию Грина краевой задачи
$$x^2 y'' - 2y = f(x), \quad y(x) \text{ ограничено при } x \to 0 \text{ и при } x \to +\infty.$$

17. Исследовать на устойчивость по первому приближению положение равновесия системы
$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1}{4}(e^x - 1) - 9y + 5x^3, \\ \dot{y} = \dfrac{1}{5}x - \sin y + y^5. \end{cases}$$

18. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения
$$y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0.$$

19. Исследовать особые точки уравнения и дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y)
$$y' = \frac{4y - 2x}{y + x}.$$

20. Найти и исследовать особые точки системы
$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(1 - y + y^2), \\ \dot{y} = 3 - \sqrt{x^2 + 8y}. \end{cases}$$

21. Начертить на фазовой плоскости траектории и исследовать особые точки системы
$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 - y^2, \\ \dot{y} = 2x. \end{cases}$$

22. Найти производную по параметру от решения уравнения
$$\dot{x} = x^2 + \mu t x^3, \quad x(0) = 1 + \mu; \qquad \text{найти} \quad \left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}.$$

23. Найти решение задачи Коши в виде степенного ряда, вычислить несколько первых коэффициентов ряда (до коэффициента при x^4 включительно): $y' = 2x + \cos y, \quad y(0) = 0.$

24. Решить систему $\dfrac{dx}{x + y^2 + z^2} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}.$

25. Найти положения равновесия системы и исследовать устойчивость одного из них, построив функцию Ляпунова
$$\dot{x} = -\sin x + 2y, \quad \dot{y} = -3x - 2y^5, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Вариант 3

1. Подобрать α, при котором решение уравнения $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + x = 0$ с начальным условием $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ возможно быстрее стремится к нулю при $t \to +\infty$.

2. Выписать линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными вещественными коэффициентами возможно меньшего порядка, имеющее среди решений функции $x_1(t) = t^2 \cos 4t$ и $x_2(t) = \sin 4t \cos 4t$.

3. Доказать, что если $\varphi_1, \varphi_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — таковы, что $\varphi_2(t) \neq 0$ при всех $t \in (a, b)$ и $\dfrac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)} \equiv \mathrm{const}$ на (a, b), то функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ линейно зависимы на (a, b).

4. Найти общее решение уравнения $(3t + 2t^2)\ddot{x} - 6(1 + t)\dot{x} + 6x = 0$, если известно, что оно имеет два линейно независимых решения в виде многочленов.

5. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$(3t + 2t^2)\ddot{x} - 6(1 + t)\dot{x} + 6x = f(t).$$

6. Решить задачу Коши
$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, & x(0) = 3, \\ \dot{y} = -x + 5y, & y(0) = 1. \end{cases}$$

Найти общее решение систем дифференциальных уравнений:

$$7. \begin{cases} \dot{x} = 5x + 2y - 3z, \\ \dot{y} = 4x + 5y - 4z, \\ \dot{z} = 6x + 4y - 4z. \end{cases} \qquad 8. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = -x + 2y + 3z. \end{cases}$$

$$9. \, \dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \qquad 10. \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x + e^t + e^{-t}. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = x - 5\sin t. \end{cases} \qquad 12. \begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1}, \\ \dot{y} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$$

13. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = f(t).$$

14. Построить функцию Грина краевой задачи
$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = f(t), \quad x(0) = ex(1), \quad \dot{x}(0) = e\dot{x}(1).$$

15. Решить краевую задачу
$$y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = e^{\pi}.$$

16. Построить функцию Грина краевой задачи
$$x^2y'' + 2xy' = f(x), \quad y(1) = 0, \quad y'(3) = 0.$$

17. Исследовать на устойчивость по первому приближению положение равновесия системы
$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + y\cos y - \dfrac{x^3}{3}, \\ \dot{y} = 3x + 2y + \dfrac{x^4}{5}. \end{cases}$$

18. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения
$$y^{IV} + 8y''' + 14y'' + 36y' + 45y = 0.$$

19. Исследовать особые точки уравнения и дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y)
$$y' = \frac{4x - y}{3x - 2y}.$$

20. Найти и исследовать особые точки системы
$$\begin{cases} \dot{x} = (2x - y)(x - 2), \\ \dot{y} = xy - 2. \end{cases}$$

21. Начертить на фазовой плоскости траектории и исследовать особые точки системы
$$\begin{cases} \dot{x} = 2 + y - x^2, \\ \dot{y} = 2x(x - y). \end{cases}$$

22. Найти производную по параметру от решения уравнения
$$y' = \mu x + \tfrac{1}{2y}, \quad y(1) = 1 - 2\mu; \qquad \text{найти} \quad \left.\tfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}.$$

23. Найти решение задачи Коши в виде степенного ряда, вычислить несколько первых коэффициентов ряда (до коэффициента при x^4 включительно): $\quad y' = x^2 + y^3, \qquad y(1) = 1.$

24. Решить систему $\qquad -\dfrac{dx}{x^2} = \dfrac{dy}{xy - 2z^2} = \dfrac{dz}{xz}.$

25. Найти положения равновесия системы и исследовать устойчивость одного из них, построив функцию Ляпунова
$$\dot{x} = -x - \sin y, \quad \dot{y} = x^3 - y^3, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Вариант 4

1. При каких β все решения уравнения $\ddot{x} + 4\dot{x} + \beta x = 0$ удовлетворяют соотношению $x(t) = o(e^{-t})$ при $t \to +\infty$?

2. Выписать линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными вещественными коэффициентами возможно меньшего порядка, имеющее среди решений функции $x_1(t) = 2^t \cos 4t$ и $x_2(t) = \sin 4t \cos 4t$.

3. Доказать, что если какая–либо подсистема системы функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ линейно зависима на (a, b), то и сама система является линейно зависимой на (a, b).

4. Найти общее решение уравнения $t^2(\ln t - 1)\ddot{x} - t\dot{x} + x = 0$, если одно его частное решение — многочлен.

5. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$t^2(\ln t - 1)\ddot{x} - t\dot{x} + x = f(t).$$

6. Решить задачу Коши
$$\begin{cases} \dot{x} = x + 6y, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = -2x + 9y, & y(0) = 2. \end{cases}$$

Найти общее решение систем дифференциальных уравнений:

$$7. \begin{cases} \dot{x} = 5x - 6y + z, \\ \dot{y} = x - z, \\ \dot{z} = -6z. \end{cases} \qquad 8. \begin{cases} \dot{x} = 8y, \\ \dot{y} = -2z, \\ \dot{z} = 2x + 8y - 2z. \end{cases}$$

$$9. \quad \dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -12 & 5 & 12 \\ 10 & -3 & -9 \end{pmatrix}. \qquad 10. \begin{cases} \dot{x} = 2y - 5x + e^t, \\ \dot{y} = x - 6y + e^{-2t}. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \dot{x} = x - y + 2\sin t, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases} \qquad 12. \begin{cases} \dot{x} = x - y + \dfrac{1}{\cos t}, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$$

13. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$\ddot{x} - x = f(t).$$

14. Построить функцию Грина краевой задачи
$$\ddot{x} - x = f(t), \quad x(0) = x(1), \quad \dot{x}(0) = 0.$$

15. Решить краевую задачу
$$y'' + \alpha y' = 0, \quad y(0) = e^{\alpha}, \quad y'(1) = 0.$$

16. Построить функцию Грина краевой задачи
$$x^2 y'' - 2y = f(x), \quad y(1) = 0, \quad y(2) + 2y'(2) = 0.$$

17. Исследовать на устойчивость по первому приближению положение равновесия системы
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8\sin y, \\ \dot{y} = 2 - e^x - 3y - \cos y. \end{cases}$$

18. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения
$$y^{IV} + 13y''' + 16y'' + 55y' + 76y = 0.$$

19. Исследовать особые точки системы и дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y)
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

20. Найти и исследовать особые точки системы
$$\begin{cases} \dot{x} = \ln \dfrac{y^2 - y + 1}{3}, \\ \dot{y} = x^2 - y^2. \end{cases}$$

21. Начертить на фазовой плоскости траектории и исследовать особые точки системы
$$\begin{cases} \dot{x} = xy - 4, \\ \dot{y} = (x - 4)(y - x). \end{cases}$$

22. Найти производную по параметру от решения уравнения
$$\ddot{x} - \dot{x} = (x + 1)^2 - \mu x^2, \quad x(0) = 1/2, \quad \dot{x}(0) = -1; \quad \text{найти } \left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=1}.$$

23. Найти решение задачи Коши в виде степенного ряда, вычислить несколько первых коэффициентов ряда (до коэффициента при x^4 включительно): $\quad y'' = xy' - y^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

24. Решить систему $\qquad \dfrac{dx}{x(y+z)} = \dfrac{dy}{z(z-y)} = \dfrac{dz}{y(y-z)}.$

25. Найти положения равновесия системы и исследовать устойчивость одного из них, построив функцию Ляпунова
$$\dot{x} = y - x, \quad \dot{y} = -\sin \pi x - y^3, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Вариант 5

1. При каких α и β каждое решение уравнения $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = 0$ обращается в нуль на бесконечном множестве точек t?

2. Выписать линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными вещественными коэффициентами возможно меньшего порядка, имеющее среди решений функции $x_1(t) = e^t \cos 4t$ и $x_2(t) = e^{4t} \cos 4t$.

3. Сужения функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ на отрезок $[-1, 1]$ являются линейно независимыми. Обязательно ли будут линейно независимы эти функции на всей числовой прямой?

4. Найти общее решение уравнения $(1+t^2)\ddot{x}+t\dot{x}-x+1 = 0$, если известно, что оно имеет два линейно независимых решения в виде многочленов.

5. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$(1 + t^2)\ddot{x} + t\dot{x} - x = f(t).$$

6. Решить задачу Коши
$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, & x(0) = 1, \\ \dot{y} = 3x + 6y, & y(0) = 1. \end{cases}$$

Найти общее решение систем дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 12y - 4z, \\ \dot{y} = -x - 3y + z, \\ \dot{z} = -x - 12y + 6z. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 2z, \\ \dot{y} = -x, \\ \dot{z} = x + y - z. \end{cases}$

9. $\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 10 & -3 & -9 \\ -18 & 7 & 18 \\ 18 & -6 & -17 \end{pmatrix}.$ 10. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - 5t + 1, \\ \dot{y} = x + 2y + t - 1. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 4\cos 2t, \\ \dot{y} = 3x - 2y + 8\cos 2t + 5\sin 2t. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - y + 15e^t\sqrt{t}. \end{cases}$

13. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = f(t).$$

14. Построить функцию Грина краевой задачи
$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(1).$$

15. Решить краевую задачу
$$y'' + \alpha^2 y = 1, \quad y'(0) = \alpha, \quad y'(\pi) = 0, \quad (0 < \alpha < 1).$$

16. Построить функцию Грина краевой задачи
$x^2y'' - 2y = f(x), \quad y(x)$ ограничено при $x \to 0$ и при $x \to +\infty$.

17. Исследовать на устойчивость по первому приближению положение равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 7x + 2\sin y, \\ \dot{y} = e^x - 3y - 1. \end{cases}$$

18. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения

$$y^{IV} + 3y''' + 26y'' + 74y' + 85y = 0.$$

19. Исследовать особые точки системы и дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y)

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = -6x - 5y. \end{cases}$$

20. Найти и исследовать особые точки уравнения

$$y' = \frac{2y}{x^2 - y^2 - 1}.$$

21. Начертить на фазовой плоскости траектории и исследовать особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 - y^2, \\ \dot{y} = 2xy. \end{cases}$$

22. Найти производную по параметру от решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 4ty^2, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = 1 + 5\mu x, & y(0) = 0; \end{cases} \qquad \text{найти} \quad \left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}.$$

23. Найти решение задачи Коши в виде степенного ряда, вычислить несколько первых коэффициентов ряда (до коэффициента при x^4 включительно): $\quad y'' = {y'}^2 + xy, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -2.$

24. Решить систему $\quad \dfrac{dx}{x + y^2 + z^2} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}.$

25. Найти положения равновесия системы и исследовать устойчивость одного из них, построив функцию Ляпунова

$$\dot{x} = -5x - 27y^5, \quad \dot{y} = \sin x - \sin y, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Вариант 6

1. При каких α и β каждое решение уравнения $\ddot{x}+2\alpha\dot{x}+\beta x=0$, кроме решения $x(t)\equiv 0$, монотонно возрастает по абсолютной величине, начиная с некоторого t?

2. Выписать линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными вещественными коэффициентами возможно меньшего порядка, имеющее среди решений функции $x_1(t)=\cos 4t$ и $x_2(t)=e^{4t}\cos 4t$.

3. Функции $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_n(t)\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ являются линейно зависимыми на всей числовой прямой. Обязательно ли будут линейно зависимы сужения этих функций на отрезок $[-1,1]$?

4. Найти общее решение уравнения $\ddot{x}+(\operatorname{tg} t-2\operatorname{ctg} t)\dot{x}+2\operatorname{ctg}^2 t\cdot x=0$, если одно из его решений — функция $x(t)=\sin t$.

5. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$\ddot{x}+(\operatorname{tg} t-2\operatorname{ctg} t)\dot{x}+2\operatorname{ctg}^2 t\cdot x=f(t).$$

6. Решить задачу Коши
$$\begin{cases}\dot{x}=2x+4y, & x(0)=0,\\ \dot{y}=-2x-4y, & y(0)=1.\end{cases}$$

Найти общее решение систем дифференциальных уравнений:

$$7.\ \begin{cases}\dot{x}=2x-y-z,\\ \dot{y}=12x-4y-12z,\\ \dot{z}=-4x+y+5z.\end{cases}\qquad 8.\ \begin{cases}\dot{x}=-x+z,\\ \dot{y}=-2y-z,\\ \dot{z}=y-z.\end{cases}$$

$$9.\quad \dot{x}=Ax,\quad A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-6&2&6\\4&-1&-4\end{pmatrix}.\qquad 10.\ \begin{cases}\dot{x}=5x+4y+e^t,\\ \dot{y}=4x+5y+1.\end{cases}$$

$$11.\ \begin{cases}\dot{x}=x+y-\cos t,\\ \dot{y}=-2x-y+\sin t+\cos t.\end{cases}\qquad 12.\ \begin{cases}\dot{x}=y-x+\dfrac{1}{e^{2t}+1},\\ \dot{y}=x-y+\dfrac{1}{e^{2t}-1}.\end{cases}$$

13. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$\ddot{x}-3\dot{x}+2x=f(t).$$

14. Построить функцию Грина краевой задачи
$$\ddot{x}-3\dot{x}+2x=f(t),\quad ex(0)=x(1),\quad e^2\dot{x}(0)=\dot{x}(1).$$

15. Решить краевую задачу

$$y'' + \lambda^2 y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0.$$

16. Построить функцию Грина краевой задачи

$$x^2 y'' + 2xy' - 2y = f(x), \quad y(0) \text{ ограничено}, \quad y(1) = 0.$$

17. Исследовать на устойчивость по первому приближению положение равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + y\cos y - \dfrac{x^3}{3}, \\ \dot{y} = 3x + 2y + \dfrac{x^4}{12} - y^3 e^y. \end{cases}$$

18. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения

$$y^{IV} + 3,1y''' + 5,2y'' + 9,8y' + 5,8y = 0.$$

19. Исследовать особые точки системы и дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y)

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 2x, \\ \dot{y} = 2y - 4x. \end{cases}$$

20. Найти и исследовать особые точки уравнения

$$y' = \frac{x^2 + y^2 - 2}{x - y}.$$

21. Начертить на фазовой плоскости траектории и исследовать особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2(x-1)(y-2), \\ \dot{y} = y^2 - x^2. \end{cases}$$

22. Найти производную по параметру от решения уравнения

$$y' = \tfrac{y}{x} + \mu x e^{-y}, \quad y(1) = 1 + 2\mu; \qquad \text{найти} \quad \left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}.$$

23. Найти линейно независимые решения уравнения в виде степенных рядов: $\quad y'' - x^2 y = 0.$

24. Решить систему $\quad \dfrac{dx}{xz} = \dfrac{dy}{yz} = \dfrac{dz}{xy\sqrt{z^2+1}}.$

25. Найти положения равновесия системы и исследовать устойчивость одного из них, построив функцию Ляпунова

$$\dot{x} = 3(y-1), \quad \dot{y} = -x - 7(y-1)^7, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Вариант 7

1. При каких α и β уравнение $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = 0$ имеет хотя бы одно решение $x(t) \not\equiv 0$, стремящееся к нулю при $t \to +\infty$?

2. Выписать линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными вещественными коэффициентами возможно меньшего порядка, имеющее среди решений функции $x_1(t) = \sin 2t \cos 4t$ и $x_2(t) = \sin t \cos 3t$.

3. Привести пример двух функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, линейно независимых на всей числовой прямой, определитель Вронского которых тождественно равен нулю на $\mathbb{R}$.

4. Найти общее решение уравнения $\ddot{x} + \operatorname{tg} t \cdot \dot{x} + \cos^2 t \cdot x = 0$, если одно из его решений — функция $x(t) = \cos(\sin t)$.

5. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$\ddot{x} + \operatorname{tg} t \cdot \dot{x} + \cos^2 t \cdot x = f(t).$$

6. Решить задачу Коши
$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, & x(0) = 2, \\ \dot{y} = 4x - y, & y(0) = 0. \end{cases}$$

Найти общее решение систем дифференциальных уравнений:

$$7. \begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z, \\ \dot{y} = x + y + z, \\ \dot{z} = 4x - y + 4z. \end{cases} \qquad 8. \begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 2x + y, \\ \dot{z} = 3x + y + z. \end{cases}$$

$$9. \quad \dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -12 & 5 & 12 \\ 10 & -3 & -9 \end{pmatrix}. \qquad 10. \begin{cases} \dot{x} = 2y - 5x + 40e^t, \\ \dot{y} = x - 6y + 9e^{-t}. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2\sin t. \end{cases} \qquad 12. \begin{cases} \dot{x} = -3x + y, \\ \dot{y} = -6x + 2y + \dfrac{1}{e^t + 5}. \end{cases}$$

13. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$\ddot{x} + \dot{x} - 2x = f(t).$$

14. Построить функцию Грина краевой задачи
$$\ddot{x} + \dot{x} - 2x = f(t), \quad ex(0) = x(1), \quad \dot{x}(0) = e^2\dot{x}(1).$$

15. Решить краевую задачу

$$y''' + y'' - y' - y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2, \quad y(1) = 0.$$

16. Построить функцию Грина краевой задачи

$$xy'' + y' = f(x), \quad y(1) = 0, \quad y(x) \text{ ограничено при } x \to +\infty.$$

17. Исследовать на устойчивость по первому приближению положение равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{3}{4}\sin x - 7y(1-y)^{1/3} + x^3, \\ \dot{y} = \dfrac{2}{3}x - 3y\cos y - 11y^5. \end{cases}$$

18. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения

$$y^V + 2y^{IV} + 5y''' + 6y'' + 5y' + 2y = 0.$$

19. Исследовать особые точки системы и дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y)

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = y - x. \end{cases}$$

20. Найти и исследовать особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(2 - y^2), \\ \dot{y} = e^x - e^y. \end{cases}$$

21. Начертить на фазовой плоскости траектории и исследовать особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = (2x - y)^2 - 9, \\ \dot{y} = 9 - (x - 2y)^2. \end{cases}$$

22. Найти производную по параметру от решения уравнения

$$y' = 2x + \mu y^2, \quad y(0) = \mu - 1; \quad \text{найти} \quad \left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}.$$

23. Найти линейно независимые решения уравнения в виде степенных рядов: $(1 - x^2)y'' - 4xy' - 2y = 0.$

24. Решить систему $\dfrac{dx}{z^2 - y^2} = \dfrac{dy}{z} = -\dfrac{dz}{y}.$

25. Найти положения равновесия системы и исследовать устойчивость одного из них, построив функцию Ляпунова

$$\dot{x} = -\sin x^3 - 7y, \quad \dot{y} = 2x - \sin^5 y, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Вариант 8

1. При каких α и β все решения уравнения $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = 0$ стремятся к нулю при $t \to +\infty$?

2. Выписать линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными вещественными коэффициентами возможно меньшего порядка, имеющее среди решений функцию $x(t) = t^3 3^t \sin t$.

3. Являются ли функции $\sin t$, $\sin(t+1)$, $\sin(t+2)$ линейно независимыми на $\mathbb{R}$?

4. Найти общее решение уравнения $(t-1)\ddot{x} - t\dot{x} + x = 0$, если одно из его решений — функция $x(t) = e^t$.

5. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$(t-1)\ddot{x} - t\dot{x} + x = f(t).$$

6. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = x + 3y, & y(0) = 1. \end{cases}$$

Найти общее решение систем дифференциальных уравнений:

$$7.\ \begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z, \\ \dot{y} = -x + y + z, \\ \dot{z} = x - z. \end{cases} \qquad 8.\ \begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = y - 4x, \\ \dot{z} = 2y - z. \end{cases}$$

$$9.\quad \dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad 10.\ \begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + te^{2t}, \\ \dot{y} = 3x - y + e^{3t}. \end{cases}$$

$$11.\ \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y + t, \\ \dot{y} = 3x - 4y. \end{cases} \qquad 12.\ \begin{cases} \dot{x} = y - 2x, \\ \dot{y} = 2y - 5x + \dfrac{3}{\cos t}. \end{cases}$$

13. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$\ddot{x} = f(t).$$

14. Построить функцию Грина краевой задачи
$$\ddot{x} = f(t), \quad x(1) = 0, \quad \dot{x}(0) + 2\dot{x}(1) = 0.$$

15. Решить краевую задачу
$$y^{IV} - \lambda^4 y = 0, \quad y(0) = y''(0) = y(\pi) = y''(\pi) = 0.$$

16. Построить функцию Грина краевой задачи

$$x^2y'' - 2y = f(x), \quad y(1) = 0, \quad y(2) + 2y'(2) = 0.$$

17. Исследовать на устойчивость по первому приближению положение равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{5}{2}xe^x - 3y + \sin x^2, \\ \dot{y} = 2x + ye^{-y/2} - y^4 \cos x. \end{cases}$$

18. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения

$$y^V + 3y^{IV} + 6y''' + 7y'' + 4y' + 4y = 0.$$

19. Исследовать особые точки системы и дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y)

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y, \\ \dot{y} = 2x + 2y. \end{cases}$$

20. Найти и исследовать особые точки уравнения

$$y' = \frac{4y^2 - x^2}{2xy - 4y - 8}.$$

21. Начертить на фазовой плоскости траектории и исследовать особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = (2x - y)^2 - 9, \\ \dot{y} = (x - 2y)^2 - 9. \end{cases}$$

22. Найти производную по параметру от решения уравнения

$$y' = y - x + \mu x e^{2y}, \quad y(1) = 2 - \mu; \qquad \text{найти} \quad \left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}.$$

23. Найти линейно независимые решения уравнения в виде степенных рядов: $\qquad (1 - x)y'' - 2y' + y = 0.$

24. Решить систему $\qquad \dfrac{dx}{z} = \dfrac{dy}{xz} = \dfrac{dz}{y}.$

25. Найти положения равновесия системы и исследовать устойчивость одного из них, построив функцию Ляпунова

$$\dot{x} = y(1 + y), \quad \dot{y} = -\sin x - y, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Вариант 9

1. При каких α и β все решения уравнения $\ddot{x}+\alpha\dot{x}+\beta x=0$ ограничены при всех $t\in\mathbb{R}$?

2. Выписать линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными вещественными коэффициентами возможно меньшего порядка, имеющее среди решений функцию $x(t)=t^3\sin t$.

3. Сужения функций $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_n(t)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ на отрезок $[-1,1]$ являются линейно зависимыми. Обязательно ли будут линейно зависимы эти функции на всей числовой прямой?

4. Найти общее решение уравнения $\ddot{x}+\dot{x}+e^{-2t}x=0$, если одно из его решений — функция $x(t)=\cos e^{-t}$.

5. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$\ddot{x}+\dot{x}+e^{-2t}x=f(t).$$

6. Решить задачу Коши
$$\begin{cases}\dot{x}=-3x+2y, & x(0)=0,\\ \dot{y}=-2x+y, & y(0)=1.\end{cases}$$

Найти общее решение систем дифференциальных уравнений:

$$7.\ \begin{cases}\dot{x}=z+y-x,\\ \dot{y}=z+x-y,\\ \dot{z}=x+y+z.\end{cases}\qquad 8.\ \begin{cases}\dot{x}=z-x,\\ \dot{y}=z,\\ \dot{z}=z-x.\end{cases}$$

$$9.\quad \dot{x}=Ax,\quad A=\begin{pmatrix}-1&1&-2\\4&1&0\\2&1&-1\end{pmatrix}.\qquad 10.\ \begin{cases}\dot{x}=4x-5y+4t-1,\\ \dot{y}=x-2y+t.\end{cases}$$

$$11.\ \begin{cases}\dot{x}=2x+4y+\cos t,\\ \dot{y}=-x-2y+\sin t.\end{cases}\qquad 12.\ \begin{cases}\dot{x}=x-y+\dfrac{1}{\cos t},\\ \dot{y}=2x-y.\end{cases}$$

13. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$\ddot{x}+2\dot{x}+x=f(t).$$

14. Построить функцию Грина краевой задачи
$$\ddot{x}+2\dot{x}+x=f(t),\quad x(0)=ex(1),\quad \dot{x}(0)=0.$$

15. Решить краевую задачу

$$x^2 y^{IV} + 4xy''' + 2y'' = 0,$$
$$y(1) = y'(1) = 0, \quad y(x) \text{ ограничено при } x \to 0$$

16. Построить функцию Грина краевой задачи

$$y'' + y = f(x), \quad y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

17. Исследовать на устойчивость по первому приближению положение равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 7x + 2\sin y - y^4, \\ \dot{y} = e^x - 3y - 1 + \dfrac{5}{2}x^2. \end{cases}$$

18. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения

$$y^V + 4y^{IV} + 16y''' + 25y'' + 13y' + 9y = 0.$$

19. Исследовать особые точки системы и дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y)

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = -6x - 5y. \end{cases}$$

20. Найти и исследовать особые точки уравнения

$$y' = \frac{x^2 + y^2 - 2}{x - y}.$$

21. Начертить на фазовой плоскости траектории и исследовать особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = (x - y)(x - y + 2). \end{cases}$$

22. Найти производную по параметру от решения уравнения

$$y' = \mu x + \sin y, \quad y(0) = 2\mu; \qquad \text{найти} \quad \left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}.$$

23. Найти линейно независимые решения уравнения в виде степенных рядов: $\qquad y'' - xy' + xy = 0.$

24. Решить систему $\qquad \dfrac{dx}{z} = \dfrac{dy}{u} = \dfrac{dz}{x} = \dfrac{du}{y}.$

25. Найти положения равновесия системы и исследовать устойчивость одного из них, построив функцию Ляпунова

$$\dot{x} = -\sin x^5 - 3y^7, \quad \dot{y} = 5x - \sin y^3, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Вариант 10

1. При каких α уравнение $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + x = \sin t$ имеет единственное 2π-периодическое решение, а все остальные решения стремятся к нему при $t \to +\infty$?

2. Выписать линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными вещественными коэффициентами возможно меньшего порядка, имеющее среди решений функцию $x(t) = t^3 3^t \sin 2t$.

3. Функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ являются линейно независимыми на (a, b). Доказать, что любая подсистема этой системы функций также является линейно независимой на (a, b).

4. Найти общее решение уравнения $(t^4 - t^3)\ddot{x} + (2t^3 - 2t^2 - t)\dot{x} - x = 0$, если одно из его решений — функция $x(t) = 1/t$.

5. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$(t^4 - t^3)\ddot{x} + (2t^3 - 2t^2 - t)\dot{x} - x = f(t).$$

6. Решить задачу Коши
$$\begin{cases} \dot{x} = x + 4y, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = x + y, & y(0) = -1. \end{cases}$$

Найти общее решение систем дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2x - y. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + z, \\ \dot{y} = y - z, \\ \dot{z} = y + z. \end{cases}$

9. $\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$ 10. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x + y + e^t. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 2y - x - 5e^t \sin t. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \dot{x} = 8y - 4x + \dfrac{3}{e^{2t} + 1}, \\ \dot{y} = 2y - x. \end{cases}$

13. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$\ddot{x} + 4x = f(t).$$

14. Построить функцию Грина краевой задачи
$$\ddot{x} + 4x = f(t), \quad x(\pi/2) = 0, \quad 2\dot{x}(0) + \dot{x}(\pi/2) = 0.$$

15. Решить краевую задачу

$$xy'' + y' = 0, \quad y(1) = \alpha y'(1), \quad y(x) \text{ ограничено при } x \to 0.$$

16. Построить функцию Грина краевой задачи

$$xy'' - y' = f(x), \quad y'(1) = 0, \quad y(2) = 0.$$

17. Исследовать на устойчивость по первому приближению положение равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}\sin 2y - x^3 y, \\ \dot{y} = -y - 2x + x^4 - y^7. \end{cases}$$

18. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения

$$y^V + 4y^{IV} + 9y''' + 16y'' + 19y' + 13y = 0.$$

19. Исследовать особые точки системы и дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y)

$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$$

20. Найти и исследовать особые точки уравнения

$$y' = \frac{2y}{x^2 - y^2 - 1}.$$

21. Начертить на фазовой плоскости траектории и исследовать особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 6x - 8y, \\ \dot{y} = x(2y - x + 5). \end{cases}$$

22. Найти производную по параметру от решения уравнения

$$\ddot{x} = x\sin\dot{x} + \sin(x^2), \quad x(0) = \mu, \quad \dot{x}(0) = \mu; \qquad \text{найти} \quad \left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}.$$

23. Найти линейно независимые решения уравнения в виде степенных рядов: $\quad (x^2 - x + 1)y'' + (4x - 2)y' + 2y = 0.$

24. Решить систему $\quad \dfrac{dx}{y-u} = \dfrac{dy}{z-x} = \dfrac{dz}{u-y} = \dfrac{du}{x-z}.$

25. Найти положения равновесия системы и исследовать устойчивость одного из них, построив функцию Ляпунова

$$\dot{x} = -2x - 5\sin y, \quad \dot{y} = \sin x - 7y^5, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Вариант 11

1. При каких β уравнение $\ddot{x} + \beta x = \cos t$ не имеет ни одного периодического решения?

2. Выписать линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными вещественными коэффициентами возможно меньшего порядка, имеющее среди решений функции $x_1(t) = 3^t \sin 2t$ и $x_2(t) = e^{3t} \sin 2t$.

3. Доказать, что два решения уравнения $\ddot{x}+p(t)\dot{x}+q(t)x = 0$ с непрерывными коэффициентами, имеющие максимум при одном и том же значении t, линейно зависимы.

4. Найти общее решение уравнения $\ddot{x} + \dfrac{2}{t}\dot{x} + x = 0$, если одно из его решений — функция $x(t) = \sin t/t$.

5. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$\ddot{x} + \frac{2}{t}\dot{x} + x = f(t).$$

6. Решить задачу Коши
$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + 4y, & x(0) = -1, \\ \dot{y} = -2x + 11y, & y(0) = 0. \end{cases}$$

Найти общее решение систем дифференциальных уравнений:

$$7.\ \begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z, \\ \dot{y} = 5y - x - z, \\ \dot{z} = x - y + 3z. \end{cases} \qquad 8.\ \begin{cases} \dot{x} = 21x - 8y - 19z, \\ \dot{y} = 18x - 7y - 15z, \\ \dot{z} = 16x - 6y - 15z. \end{cases}$$

$$9.\quad \dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \qquad 10.\ \begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 16te^t, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$$

$$11.\ \begin{cases} \dot{x} = -y + \sin t, \\ \dot{y} = x + \cos t. \end{cases} \qquad 12.\ \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - y + 15e^t\sqrt{t}. \end{cases}$$

13. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = f(t).$$

14. Построить функцию Грина краевой задачи
$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = f(t), \quad x(\pi/2) = 0, \quad e^{\pi/2}\dot{x}(0) - \dot{x}(\pi/2) = 0.$$

15. Решить краевую задачу
$$x^3y^{IV}+6x^2y'''+6xy''=0,$$
$$y(1)=y'(1)=0, \quad y(x) \text{ ограничено при } x\to 0.$$

16. Построить функцию Грина краевой задачи
$$y''+y=f(x), \quad y'(0)=0, \quad y(\pi)=0.$$

17. Исследовать на устойчивость по первому приближению положение равновесия системы
$$\begin{cases} \dot{x}=3x-22\sin y+x^2-y^3, \\ \dot{y}=\sin x-5y+e^x-1. \end{cases}$$

18. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения
$$y^V+3y^{IV}+10y'''+22y''+23y'+12y=0.$$

19. Исследовать особые точки системы и дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x,y)
$$\begin{cases} \dot{x}=2x-y, \\ \dot{y}=x. \end{cases}$$

20. Найти и исследовать особые точки уравнения
$$y'=\frac{y+\sqrt{1+2x^2}}{x+y+1}.$$

21. Начертить на фазовой плоскости траектории и исследовать особые точки системы
$$\begin{cases} \dot{x}=x^2+y^2-5, \\ \dot{y}=(x-1)(x+3y-5). \end{cases}$$

22. Найти производную по параметру от решения уравнения
$$\ddot{x}=x+\sin(\dot{x}^2), \quad x(0)=\mu, \quad \dot{x}(0)=\mu^2; \qquad \text{найти} \quad \left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}.$$

23. Найти линейно независимые решения уравнения в виде степенных рядов: $\quad y''+y\sin x=0.$

24. Решить систему $\quad \dfrac{dx}{y-x}=\dfrac{dy}{x+y+z}=\dfrac{dz}{x-y}.$

25. Найти положения равновесия системы и исследовать устойчивость одного из них, построив функцию Ляпунова
$$\dot{x}=-x^3-y^{21}, \quad \dot{y}=\sin x-\sin^3 y, \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Вариант 12

1. При каких α и β все решения уравнения $\ddot{x}+\alpha\dot{x}+\beta x=0$ ограничены при $t \geqslant 0$?

2. Выписать линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными вещественными коэффициентами возможно меньшего порядка, имеющее среди решений функции $x_1(t)=t^3\sin 2t$ и $x_2(t)=e^{3t}\sin 2t$.

3. Могут ли линейно независимые решения уравнения
$$\ddot{x}+p(t)\dot{x}+q(t)x=0$$
с непрерывными коэффициентами обращаться в 0 при одном и том же значении t?

4. Найти общее решение уравнения
$$(\sin t-\cos t)\ddot{x}-2\sin t\cdot\dot{x}+(\cos t+\sin t)x=0,$$
если одно из его решений — функция $x(t)=e^t$.

5. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$(\sin t-\cos t)\ddot{x}-2\sin t\cdot\dot{x}+(\cos t+\sin t)x=f(t).$$

6. Решить задачу Коши
$$\begin{cases}\dot{x}=x+4y, & x(0)=1,\\ \dot{y}=2x+3y, & y(0)=0.\end{cases}$$

Найти общее решение систем дифференциальных уравнений:

$$7.\ \begin{cases}\dot{x}=-x+y+z,\\ \dot{y}=x-y+z,\\ \dot{z}=x+y-z.\end{cases}\qquad 8.\ \begin{cases}\dot{x}=2x+y,\\ \dot{y}=x+3y-z,\\ \dot{z}=-x+2y+3z.\end{cases}$$

$$9.\quad \dot{x}=Ax,\quad A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -2\\ 1 & -2 & -2\\ 3 & -3 & 5\end{pmatrix}.\qquad 10.\ \begin{cases}\dot{x}=2y-5x+e^t,\\ \dot{y}=x-6y+e^{-2t}.\end{cases}$$

$$11.\ \begin{cases}\dot{x}=x-y+2\sin t,\\ \dot{y}=2x-y.\end{cases}\qquad 12.\ \begin{cases}\dot{x}=y-x+\dfrac{1}{e^{2t}+1},\\ \dot{y}=x-y+\dfrac{1}{e^{2t}-1}.\end{cases}$$

13. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$\ddot{x}-9x=f(t).$$

14. Построить функцию Грина краевой задачи

$$\ddot{x} - 9x = f(t), \quad e^3 x(0) = x(1), \quad \dot{x}(0) = 0.$$

15. Решить краевую задачу

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2, \quad y(0) + 2y'(0) = 1, \quad y(1) - y'(1) = 0.$$

16. Построить функцию Грина краевой задачи

$$y'' = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(x) \text{ ограничено при } x \to +\infty.$$

17. Исследовать на устойчивость по первому приближению положение равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + x^2 \sin y, \\ \dot{y} = -x - 4y + 1 - \cos y^2. \end{cases}$$

18. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения

$$y^V + 5y^{IV} + 15y''' + 48y'' + 44y' + 74y = 0.$$

19. Исследовать особые точки уравнения и дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y)

$$y' = \frac{4x - y}{3x - 2y}.$$

20. Найти и исследовать особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{x^2 - y + 2} - 2, \\ \dot{y} = \operatorname{arctg}(x^2 + xy). \end{cases}$$

21. Начертить на фазовой плоскости траектории и исследовать особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - 4x^2, \\ \dot{y} = 4y - 8. \end{cases}$$

22. Найти производную по параметру от решения уравнения

$$\ddot{x} + x = 2\mu \sin t + \mu x^2, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0; \qquad \text{найти} \quad \left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}.$$

23. Найти линейно независимые решения уравнения в виде степенных рядов: $\quad y'' + y \sin x = 0.$

24. Решить систему $\qquad \dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{x} = \dfrac{dz}{z}.$

25. Найти положения равновесия системы и исследовать устойчивость одного из них, построив функцию Ляпунова

$$\dot{x} = -10 \sin^3 x + 7y, \quad \dot{y} = -2x, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Вариант 13

1. При каких α и β все решения уравнения $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = 0$ являются периодическими функциями?

2. Выписать линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными вещественными коэффициентами возможно меньшего порядка, имеющее среди решений функции $x_1(t) = t\sin 2t$ и $x_2(t) = e^{3t}\sin 2t$.

3. Функции $x_1(t) = t$, $\quad x_2(t) = t^5$, $\quad x_3(t) = |t^5|$ удовлетворяют уравнению $t^2\ddot{x} - 5t\dot{x} + 5x = 0$. Являются ли они линейно зависимыми на интервале $(-1, 1)$? Объяснить ответ.

4. Найти общее решение уравнения
$$(\sin t + \cos t)\ddot{x} - 2\cos t \cdot \dot{x} + (\cos t - \sin t)x = 0,$$
если одно из его решений — функция $x(t) = \cos t$.

5. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$(\sin t + \cos t)\ddot{x} - 2\cos t \cdot \dot{x} + (\cos t - \sin t)x = f(t).$$

6. Решить задачу Коши
$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = x + 2y, & y(0) = 1. \end{cases}$$

Найти общее решение систем дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z, \\ \dot{y} = x + y + z, \\ \dot{z} = 4x - y + 4z. \end{cases}$ $\qquad$ 8. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 2x + y, \\ \dot{z} = 3x + y + z. \end{cases}$

9. $\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$ $\qquad$ 10. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 5y + 4t - 1, \\ \dot{y} = x - 2y + t. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = y + \sin t, \\ \dot{y} = x + \cos t. \end{cases}$ $\qquad$ 12. $\begin{cases} \dot{x} = 8y - 4x + \dfrac{3}{e^{2t} + 1}, \\ \dot{y} = 2y - x. \end{cases}$

13. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = f(t).$$

14. Построить функцию Грина краевой задачи
$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = f(t), \quad x(0) = ex(1), \quad \dot{x}(1) = 0.$$

15. Решить краевую задачу

$$y''' + y'' - y' - y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2, \quad y(1) = 0.$$

16. Построить функцию Грина краевой задачи

$$x^2y'' + 2xy' - 2y = f(x), \quad y(0) \text{ ограничено}, \quad y(1) = 0.$$

17. Исследовать на устойчивость по первому приближению положение равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 7x + 2\sin y + 7x^3 \cos y^2, \\ \dot{y} = e^x - y - 1. \end{cases}$$

18. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения

$$y^V + 3y^{IV} + 10y''' + 22y'' + 23y' + 12y = 0.$$

19. Исследовать особые точки системы и дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y)

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$$

20. Найти и исследовать особые точки уравнения

$$y' = \frac{y + \sqrt{1 + 2x^2}}{x + y + 1}.$$

21. Начертить на фазовой плоскости траектории и исследовать особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 - y^2, \\ \dot{y} = 2x. \end{cases}$$

22. Найти производную по параметру от решения уравнения

$$\ddot{x} - 2\dot{x} = \mu t x, \quad x(0) = 4, \quad \dot{x}(0) = \mu^2 + 3\mu; \qquad \text{найти} \quad \left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}.$$

23. Найти решение задачи Коши в виде степенного ряда, вычислить несколько первых коэффициентов ряда (до коэффициента при x^4 включительно): $\quad y'' = {y'}^2 + xy, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -2.$

24. Решить систему $\quad \dfrac{dx}{x(z-y)} = \dfrac{dy}{y(y-x)} = \dfrac{dz}{y^2 - xz}.$

25. Найти положения равновесия системы и исследовать устойчивость одного из них, построив функцию Ляпунова

$$\dot{x} = \sin \pi y, \quad \dot{y} = -x - y, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Вариант 14

1. При каких значениях β уравнение $\ddot{x} + \beta x = 0$ имеет ненулевые решения, удовлетворяющие краевым условиям $x(0) = 0,\ x(\pi) = 0$?

2. Выписать линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными вещественными коэффициентами возможно меньшего порядка, имеющее среди решений функцию $x(t) = t\,2^t \sin 2t$.

3. Доказать, что отношение любых двух линейно независимых решений уравнения $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$ с непрерывными коэффициентами не может иметь точек локального максимума.

4. Найти общее решение уравнения $(1 - t^2)\ddot{x} - t\dot{x} + x/4 = 0$, если одно из его решений — функция $x(t) = \sqrt{1+t}$.

5. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$(1 - t^2)\ddot{x} - t\dot{x} + x/4 = f(t).$$

6. Решить задачу Коши
$$\begin{cases} \dot{x} = x - y, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = x + 3y, & y(0) = 1. \end{cases}$$

Найти общее решение систем дифференциальных уравнений:

$$7.\ \begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = x - z, \\ \dot{z} = 3x - y - 2z. \end{cases} \qquad 8.\ \begin{cases} \dot{x} = -2x - y, \\ \dot{y} = x - 2y, \\ \dot{z} = x + 3y - z. \end{cases}$$

$$9.\quad \dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}. \qquad 10.\ \begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t}. \end{cases}$$

$$11.\ \begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 4, \\ \dot{y} = x + 2y + 3t - 6. \end{cases} \qquad 12.\ \begin{cases} \dot{x} = 8y - 4x + \dfrac{3}{e^{2t}+1}, \\ \dot{y} = 2y - x. \end{cases}$$

13. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$\ddot{x} - 9x = f(t).$$

14. Построить функцию Грина краевой задачи
$$\ddot{x} - 9x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad e^3\dot{x}(0) = \dot{x}(1).$$

15. Решить краевую задачу

$$x^3y^{IV} + 6x^2y''' + 6xy'' = 0,$$
$$y(1) = y'(1) = 0, \quad y(x) \text{ ограничено при } x \to 0.$$

16. Построить функцию Грина краевой задачи

$$y'' - y = f(x), \quad y'(0) = 0, \quad y'(2) + y(2) = 0.$$

17. Исследовать на устойчивость по первому приближению положение равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(z - y) - 2x, \\ \dot{y} = \sqrt{9 + 12x} - 3e^y, \\ \dot{z} = -3y. \end{cases}$$

18. Исследовать, при каких значениях параметров a и b нулевое решение асимптотически устойчиво

$$ay^{IV} + y''' + y'' + y' + by = 0.$$

19. Исследовать особые точки уравнения и дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y)

$$y' = \frac{2x - y}{x - y}.$$

20. Найти и исследовать особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = x^2 - (y - 2)^2. \end{cases}$$

21. Начертить на фазовой плоскости траектории и исследовать особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 - y^2, \\ \dot{y} = 2xy. \end{cases}$$

22. Найти производную по параметру от решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, & x(0) = 2 - 4\mu, \\ \dot{y} = x + 3\mu y^2, & y(0) = 0; \end{cases} \qquad \text{найти} \quad \left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}, \quad \left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}.$$

23. Найти линейно независимые решения уравнения в виде степенных рядов: $\quad (1 - x)y'' - 2y' + y = 0.$

24. Решить систему $\quad y' = y^2 z, \quad z' = \dfrac{z}{x} - yz^2.$

25. Найти положения равновесия системы и исследовать устойчивость одного из них, построив функцию Ляпунова

$$\dot{x} = 2x^3 + 3y, \quad \dot{y} = -x + y\cos y, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Вариант 15

1. При каких α и β каждое решение уравнения $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = e^{-t}$ удовлетворяет соотношению $x(t) = O(e^{-t})$ при $t \to +\infty$?

2. Выписать линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными вещественными коэффициентами возможно меньшего порядка, имеющее среди решений функцию $x(t) = t^2 e^{2t} \sin 3t$.

3. Исследовать на линейную зависимость систему функций $x_1(t) = t$, $x_2(t) = |t|$, $x_3(t) = 2t + \sqrt{4t^2}$ на $\mathbb{R}$.

4. Найти общее решение уравнения $(t-1)\ddot{x} - (t+1)\dot{x} + 2x = 0$, если одно из его решений — полином.

5. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$(t-1)\ddot{x} - (t+1)\dot{x} + 2x = f(t).$$

6. Решить задачу Коши
$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = x + 2y, & y(0) = 1. \end{cases}$$

Найти общее решение систем дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + 2z, \\ \dot{y} = x + 4y - 2z, \\ \dot{z} = x + 5y - 3z. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 2x + y, \\ \dot{z} = 3x + y + z. \end{cases}$

9. $\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$ 10. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + te^{2t}, \\ \dot{y} = 3x - y + e^{3t}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y + t, \\ \dot{y} = 3x - 4y. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \dfrac{1}{\cos t}. \end{cases}$

13. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = f(t).$$

14. Построить функцию Грина краевой задачи
$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(\pi/2).$$

15. Решить краевую задачу
$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2, \quad y(0) + 2y'(0) = 1, \quad y(1) - y'(1) = 0.$$

16. Построить функцию Грина краевой задачи

$$y'' + y' = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

17. Исследовать на устойчивость по первому приближению положение равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(y - x), \\ \dot{y} = 2^y - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right). \end{cases}$$

18. Исследовать, при каких значениях параметров a и b нулевое решение асимптотически устойчиво

$$y^{IV} + y''' + ay'' + y' + by = 0.$$

19. Исследовать особые точки уравнения и дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y)

$$y' = \frac{x - 2y}{3x - 4y}.$$

20. Найти и исследовать особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln \dfrac{y^2 - y + 1}{3}, \\ \dot{y} = x^2 - y^2. \end{cases}$$

21. Начертить на фазовой плоскости траектории и исследовать особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2(x - 1)(y - 2), \\ \dot{y} = y^2 - x^2. \end{cases}$$

22. Найти производную по параметру от решения уравнения

$$y' = \mu x + \tfrac{1}{2y}, \quad y(1) = 1 - 2\mu; \qquad \text{найти} \quad \left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}.$$

23. Найти линейно независимые решения уравнения в виде степенных рядов: $\qquad (x^2 + 1)y'' + 5xy' + 3y = 0.$

24. Решить систему $\qquad y' = \dfrac{z}{x}, \quad z' = \dfrac{z(y + 2z - 1)}{x(y - 1)}.$

25. Найти положения равновесия системы и исследовать устойчивость одного из них, построив функцию Ляпунова

$$\dot{x} = -x + y, \quad \dot{y} = -\sin x - \sin y, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Вариант 16

1. При каких α и β хотя бы одно решение уравнения $\ddot{x}+2\alpha\dot{x}+\beta x = e^{-t}$ удовлетворяет соотношению $x(t) = O(e^{-t})$ при $t \to +\infty$?

2. Выписать линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными вещественными коэффициентами возможно меньшего порядка, имеющее среди решений функцию $x(t) = t^3 \sin 3t$.

3. Даны четыре решения уравнения $\dddot{x} + tx = 0$, графики которых касаются друг друга в одной точке. Сколько линейно независимых решений может быть среди них?

4. Найти общее решение уравнения $(t^2-3t)\ddot{x}+(6-t^2)\dot{x}+(3t-6)x = 0$, если одно из его решений — полином.

5. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения

$$(t^2-3t)\ddot{x}+(6-t^2)\dot{x}+(3t-6)x = f(t).$$

6. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 5y, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = -x - 3y, & y(0) = 1. \end{cases}$$

Найти общее решение систем дифференциальных уравнений:

$$7. \begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z, \\ \dot{y} = x + y + z, \\ \dot{z} = 4x - y + 4z. \end{cases} \qquad 8. \begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = y - 4x, \\ \dot{z} = 2y - z. \end{cases}$$

$$9. \quad \dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}. \qquad 10. \begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x + y + e^t. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 2y - x - 5e^t \sin t. \end{cases} \qquad 12. \begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = 4y - 3x + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t}+1}. \end{cases}$$

13. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения

$$\ddot{x} + 4x = f(t).$$

14. Построить функцию Грина краевой задачи

$$\ddot{x} + 4x = f(t), \quad x(0) = x(\pi/2), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(\pi/2).$$

15. Решить краевую задачу

$$x^2y^{IV} + 4xy''' + 2y'' = 0,$$
$$y(1) = y'(1) = 0, \quad y(x) \text{ ограничено при } x \to 0.$$

16. Построить функцию Грина краевой задачи

$$y'' + y = f(x), \quad y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

17. Исследовать на устойчивость по первому приближению положение равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(4y + e^{-3x}), \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x}. \end{cases}$$

18. Исследовать, при каких значениях параметров a и b нулевое решение асимптотически устойчиво

$$y^{IV} + ay''' + 4y'' + 2y' + by = 0.$$

19. Исследовать особые точки уравнения и дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y)

$$y' = \frac{x + 4y}{2x + 3y}.$$

20. Найти и исследовать особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(1 - y + y^2), \\ \dot{y} = 3 - \sqrt{x^2 + 8y}. \end{cases}$$

21. Начертить на фазовой плоскости траектории и исследовать особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = (x + y)^2 - 1, \\ \dot{y} = -y^2 - x + 1. \end{cases}$$

22. Найти производную по параметру от решения уравнения

$$\dot{x} = \tfrac{x}{t} + \mu t e^{-x}, \quad x(1) = 1; \qquad \text{найти} \quad \left.\tfrac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}.$$

23. Найти линейно независимые решения уравнения в виде степенных рядов: $\qquad (1 - x^2)y'' - 4xy' - 2y = 0.$

24. Решить систему $\qquad y' = \dfrac{y^2}{z - x}, \quad z' = y + 1.$

25. Найти положения равновесия системы и исследовать устойчивость одного из них, построив функцию Ляпунова

$$\dot{x} = x^2 \operatorname{arctg} x + y, \quad \dot{y} = -x + y, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Вариант 17

1. При каких α и β все решения уравнения $\ddot{x}+2\alpha\dot{x}+\beta x=\cos t$ являются периодическими функциями?

2. Выписать линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными вещественными коэффициентами возможно меньшего порядка, имеющее среди решений функцию $x(t)=t^3\sin 5t$.

3. Исследовать на линейную зависимость систему функций $x_1(t)=t^2$, $x_2(t)=t|t|$ на отрезке $[-1,1]$.

4. Найти общее решение уравнения $(t^2-1)\ddot{x}-6x=0$, если одно из его решений — полином.

5. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения

$$(t^2-1)\ddot{x}-6x=f(t).$$

6. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x}=2x+y, & x(0)=1,\\ \dot{y}=x+2y, & y(0)=3. \end{cases}$$

Найти общее решение систем дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} \dot{x}=x-2y-z,\\ \dot{y}=-x+y+z,\\ \dot{z}=x-z. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} \dot{x}=x-2y+z,\\ \dot{y}=y-z,\\ \dot{z}=y+z. \end{cases}$

9. $\dot{x}=Ax,\quad A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$ 10. $\begin{cases} \dot{x}=-4x-2y+\dfrac{2}{e^t-1},\\ \dot{y}=6x+3y-\dfrac{3}{e^t-1}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x}=2x-3y,\\ \dot{y}=x-2y+2\sin t. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \dot{x}=2y-5x+40e^t,\\ \dot{y}=x-6y+9e^{-t}. \end{cases}$

13. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения

$$\ddot{x}+2\dot{x}+x=f(t).$$

14. Построить функцию Грина краевой задачи

$$\ddot{x}+2\dot{x}+x=f(t),\quad x(1)=0,\quad \dot{x}(0)=e\dot{x}(1).$$

15. Решить краевую задачу

$$y^{IV}-\lambda^4 y=0,\quad y(0)=y''(0)=y(\pi)=y''(\pi)=0.$$

16. Построить функцию Грина краевой задачи
$$y'' = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

17. Исследовать на устойчивость по первому приближению положение равновесия системы
$$\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x + x^5, \\ \dot{y} = \sqrt{4+8x} - 2e^y - 7y^{21}. \end{cases}$$

18. Исследовать, при каких значениях параметров a и b нулевое решение асимптотически устойчиво
$$y^{IV} + 2y''' + ay'' + by' + y = 0.$$

19. Исследовать особые точки уравнения и дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y)
$$y' = \frac{x-4y}{2y-3x}.$$

20. Найти и исследовать особые точки системы
$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{(x-y)^2+3} - 2, \\ \dot{y} = e^{y^2-x} - e. \end{cases}$$

21. Начертить на фазовой плоскости траектории и исследовать особые точки системы
$$\begin{cases} \dot{x} = (2x-y)^2 - 9, \\ \dot{y} = 9 - (x-2y)^2. \end{cases}$$

22. Найти производную по параметру от решения уравнения
$$y' = \tfrac{y}{x} + \mu x e^{-y}, \quad y(1) = 1 + 2\mu; \qquad \text{найти} \quad \left.\tfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}.$$

23. Найти линейно независимые решения уравнения в виде степенных рядов: $\quad y'' - xy' - 2y = 0.$

24. Решить систему $\qquad y' = \dfrac{x}{z}, \quad z' = -\dfrac{x}{y}.$

25. Найти положения равновесия системы и исследовать устойчивость одного из них, построив функцию Ляпунова
$$\dot{x} = -3x - \sin^3 y, \quad \dot{y} = x - 2y, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Вариант 18

1. При каких α и β все решения уравнения $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = \cos t$ ограничены на всей числовой прямой?

2. Выписать линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными вещественными коэффициентами возможно меньшего порядка, имеющее среди решений функцию $x(t) = t\,2^t \sin 2t$.

3. Исследовать на линейную зависимость систему функций $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = a^t$, $x_3(t) = a^{2t}$ на $\mathbb{R}$.

4. Найти общее решение уравнения $t^2(2\ln t - 1)\ddot{x} - t(2\ln t + 1)\dot{x} + 4x = 0$, если одно из его решений — полином.

5. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$t^2(2\ln t - 1)\ddot{x} - t(2\ln t + 1)\dot{x} + 4x = f(t).$$

6. Решить задачу Коши
$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + y, & x(0) = 1, \\ \dot{y} = -3x + 9y, & y(0) = 0. \end{cases}$$

Найти общее решение систем дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 12y - 4z, \\ \dot{y} = -x - 3y + z, \\ \dot{z} = -x - 12y + 6z. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 2x + y, \\ \dot{z} = 3x + y + z. \end{cases}$

9. $\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -6 & 2 & 6 \\ 6 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$ 10. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + te^{2t}, \\ \dot{y} = 3x - y + e^{3t}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 2y - x - 5e^t \sin t. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + \dfrac{1}{\cos t}, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

13. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$\ddot{x} = f(t).$$

14. Построить функцию Грина краевой задачи
$$\ddot{x} = f(t), \quad x(0) + 2x(1) = 0, \quad \dot{x}(0) + \dot{x}(1) = 0.$$

15. Решить краевую задачу
$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2, \quad y(0) + 2y'(0) = 1, \quad y(1) - y'(1) = 0.$$

16. Построить функцию Грина краевой задачи

$$y'' - y = f(x), \quad y'(0) = 0, \quad y'(2) + y(2) = 0.$$

17. Исследовать на устойчивость по первому приближению положение равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2e^{-x} - \sqrt{4 + ay}, \\ \dot{y} = \ln(1 + 9x + ay). \end{cases}$$

18. Исследовать, при каких значениях параметра a нулевое решение асимптотически устойчиво

$$y^{IV} + ay''' + y'' + 2y' + y = 0.$$

19. Исследовать особые точки уравнения и дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y)

$$y' = \frac{2x - y}{x - y}.$$

20. Найти и исследовать особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln \dfrac{y^2 - y + 1}{3}, \\ \dot{y} = x^2 - y^2. \end{cases}$$

21. Начертить на фазовой плоскости траектории и исследовать особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = (x + y)^2 - 1, \\ \dot{y} = -y^2 - x + 1. \end{cases}$$

22. Найти производную по параметру от решения уравнения

$$y' = y - x + \mu x e^{2y}, \quad y(1) = 2 - \mu; \qquad \text{найти} \quad \left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}.$$

23. Найти решение задачи Коши в виде степенного ряда, вычислить несколько первых коэффициентов ряда (до коэффициента при x^4 включительно): $\quad y' = y + xe^y, \qquad y(0) = 0.$

24. Решить систему $\qquad \dfrac{dx}{x + y^2 + z^2} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}.$

25. Найти положения равновесия системы и исследовать устойчивость одного из них, построив функцию Ляпунова

$$\dot{x} = 2(y - 2), \quad \dot{y} = -\sin \pi x - (y - 2)^5, \qquad (x, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty).$$

Вариант 19

1. При каких α и β все решения уравнения $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = \cos t$ ограничены на $[0, +\infty)$?

2. Выписать линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными вещественными коэффициентами возможно меньшего порядка, имеющее среди решений функцию $x(t) = t\,e^t \sin t$.

3. Исследовать на линейную зависимость систему функций $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t, \ldots, x_n(t) = t^n$ на $\mathbb{R}$.

4. Найти общее решение уравнения $(1 + t^2)\ddot{x} + 2t\dot{x} = 6t^2 + 2$.

5. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$(1 + t^2)\ddot{x} + 2t\dot{x} = f(t).$$

6. Решить задачу Коши
$$\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, & x(0) = -1, \\ \dot{y} = 3x + y, & y(0) = 1. \end{cases}$$

Найти общее решение систем дифференциальных уравнений:

$$7. \begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z, \\ \dot{y} = x + y + z, \\ \dot{z} = 4x - y + 4z. \end{cases} \qquad 8. \begin{cases} \dot{x} = x - 2y + z, \\ \dot{y} = y - z, \\ \dot{z} = y + z. \end{cases}$$

$$9. \quad \dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad 10. \begin{cases} \dot{x} = 4x - 5y + 4t - 1, \\ \dot{y} = x - 2y + t. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \dot{x} = -y + \sin t, \\ \dot{y} = x + \cos t. \end{cases} \qquad 12. \begin{cases} \dot{x} = y - x + \dfrac{1}{e^{2t} + 1}, \\ \dot{y} = x - y + \dfrac{1}{e^{2t} - 1}. \end{cases}$$

13. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$\ddot{x} + \dot{x} - 2x = f(t).$$

14. Построить функцию Грина краевой задачи
$$\ddot{x} + \dot{x} - 2x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad e\dot{x}(0) = \dot{x}(1).$$

15. Решить краевую задачу
$$y'' - 4y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(x) \text{ ограничено при } x \to +\infty.$$

16. Построить функцию Грина краевой задачи

$$y'' - y = f(x), \quad y'(0) = 0, \quad y'(2) + y(2) = 0.$$

17. Исследовать на устойчивость по первому приближению положение равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(y - x) + 5x^3 e^y, \\ \dot{y} = y + 1 - 2\cos\Big(\dfrac{\pi}{3} - x\Big). \end{cases}$$

18. Исследовать, при каких значениях параметров a и b нулевое решение асимптотически устойчиво

$$y^{IV} + ay''' + 4y'' + 2y' + by = 0.$$

19. Исследовать особые точки уравнения и дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y)

$$y' = \frac{x - 4y}{2y - 3x}.$$

20. Найти и исследовать особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{(x - y)^2 + 3} - 2, \\ \dot{y} = e^{y^2 - x} - e. \end{cases}$$

21. Начертить на фазовой плоскости траектории и исследовать особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 - y^2, \\ \dot{y} = 2x. \end{cases}$$

22. Найти производную по параметру от решения уравнения

$$y' = \mu x + \sin y, \quad y(0) = 2\mu; \qquad \text{найти} \quad \left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}.$$

23. Найти решение задачи Коши в виде степенного ряда, вычислить несколько первых коэффициентов ряда (до коэффициента при x^4 включительно): $\quad y'' = xy' - y^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

24. Решить систему $\qquad \dfrac{dx}{x + y^2 + z^2} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}.$

25. Найти положения равновесия системы и исследовать устойчивость одного из них, построив функцию Ляпунова

$$\dot{x} = -2x(x^2 + 1) + y, \quad \dot{y} = -x\sin^2 \pi x, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Вариант 20

1. При каких α и β уравнение $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = \cos t$ имеет хотя бы одно периодическое решение?

2. Выписать линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными вещественными коэффициентами возможно меньшего порядка, имеющее среди решений функцию $x(t) = t^3 e^t$.

3. Доказать, что функции $t^{k_1}, t^{k_2}, \ldots, t^{k_n}$, где $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ — попарно различные числа, линейно независимы на любом интервале $J \subset \mathbb{R}$.

4. Найти общее решение уравнения $(1-t)^2\ddot{x} + (1-t)\dot{x} + x = 1$, если известны два его частных решения — $x_1(t) = 1$ и $x_2(t) = t$.

5. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$(1-t)^2\ddot{x} + (1-t)\dot{x} + x = f(t).$$

6. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, & x(0) = 2, \\ \dot{y} = 4x - y, & y(0) = 0. \end{cases}$$

Найти общее решение систем дифференциальных уравнений:

$$7. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 12x - 4y - 12z, \\ \dot{z} = -4x + y + 5z. \end{cases} \qquad 8. \begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -4x + y, \\ \dot{z} = 2y - z. \end{cases}$$

$$9. \quad \dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \qquad 10. \begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x + y + e^t. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \dot{x} = x - y + 2\sin t, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases} \qquad 12. \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - y + 15e^t\sqrt{t}. \end{cases}$$

13. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = f(t).$$

14. Построить функцию Грина краевой задачи
$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad e\dot{x}(0) = \dot{x}(1).$$

15. Решить краевую задачу
$$y'' - 4y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(x) \text{ ограничено при } x \to +\infty.$$

16. Построить функцию Грина краевой задачи
$$x^2y'' + 2xy' = f(x), \quad y(1) = 0, \quad y'(3) = 0.$$

17. Исследовать на устойчивость по первому приближению положение равновесия системы
$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(z - y) - 2x, \\ \dot{y} = \sqrt{9 + 12x} - 3e^y, \\ \dot{z} = -3y. \end{cases}$$

18. Исследовать, при каких значениях параметров a и b нулевое решение асимптотически устойчиво
$$y^{IV} + y''' + ay'' + y' + by = 0.$$

19. Исследовать особые точки уравнения и дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y)
$$y' = \frac{x + 4y}{2x + 3y}.$$

20. Найти и исследовать особые точки системы
$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(1 - y + y^2), \\ \dot{y} = 3 - \sqrt{x^2 + 8y}. \end{cases}$$

21. Начертить на фазовой плоскости траектории и исследовать особые точки системы
$$\begin{cases} \dot{x} = (2x - y)^2 - 9, \\ \dot{y} = 9 - (x - 2y)^2. \end{cases}$$

22. Найти производную по параметру от решения уравнения
$$\ddot{x} = x \sin \dot{x} + \sin(x^2), \quad x(0) = \mu, \quad \dot{x}(0) = \mu; \qquad \text{найти} \quad \left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}.$$

23. Найти решение задачи Коши в виде степенного ряда, вычислить несколько первых коэффициентов ряда (до коэффициента при x^4 включительно): $\quad y' = x^2 + y^3, \qquad y(1) = 1.$

24. Решить систему $\qquad \dfrac{dx}{x(z+y)} = \dfrac{dy}{z(z-y)} = \dfrac{dz}{y(y-z)}.$

25. Найти положения равновесия системы и исследовать устойчивость одного из них, построив функцию Ляпунова
$$\dot{x} = -x - \sin y, \quad \dot{y} = \sin^3 x - \sin^5 y, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Вариант 21

1. При каких α и β хотя бы одно нетривиальное решение уравнения $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta x = 0$ обращается в нуль на бесконечном множестве точек t?

2. Выписать линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными вещественными коэффициентами возможно меньшего порядка, имеющее среди решений функции $x_1(t) = e^t \sin t$ и $x_2(t) = e^t$.

3. Пусть $I \doteq (\alpha, \beta)$, $J \doteq (a, b)$ и $x\colon\ I \to J$ — биективное отображение. Доказать, что система функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\colon\ J \to \mathbb{R}$ линейно независима на J в том и только том случае, когда система функций $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\colon\ I \to \mathbb{R}$, где $\psi_i(t) \doteq \varphi_i\big(x(t)\big) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$, линейно независима на I.

4. Найти общее решение уравнения $t\ddot{x} + 2\dot{x} - tx = 0$, если одно из его решений — функция $x(t) = e^t/t$.

5. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$t\ddot{x} + 2\dot{x} - tx = f(t).$$

6. Решить задачу Коши
$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, & x(0) = 1, \\ \dot{y} = 3x + 6y, & y(0) = -1. \end{cases}$$

Найти общее решение систем дифференциальных уравнений:

$$7. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = 2y - 2z - 2x. \end{cases} \qquad 8. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = -x + 2y + 3z. \end{cases}$$

$$9. \quad \dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}. \qquad 10. \begin{cases} \dot{x} = x - 2y + 16te^t, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y + \cos t, \\ \dot{y} = -x - 2y + \sin t. \end{cases} \qquad 12. \begin{cases} \dot{x} = 8y - 4x + \dfrac{3}{e^{2t} + 1}, \\ \dot{y} = 2y - x. \end{cases}$$

13. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = f(t).$$

14. Построить функцию Грина краевой задачи
$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = f(t), \quad x(0) = e^3 x(1), \quad \dot{x}(0) = e\dot{x}(1).$$

15. Решить краевую задачу

$$y'' + \lambda^2 y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0.$$

16. Построить функцию Грина краевой задачи

$$x^2 y'' - 2y = f(x), \quad y(x) \text{ ограничено при } x \to 0 \text{ и при } x \to +\infty.$$

17. Исследовать на устойчивость по первому приближению положение равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 7x + 2\sin y + x^3 \operatorname{tg} y, \\ \dot{y} = e^x - 3y - 1. \end{cases}$$

18. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения

$$y^{IV} + 13y''' + 16y'' + 55y' + 76y = 0.$$

19. Исследовать особые точки уравнения и дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y)

$$y' = \frac{4x - y}{3x - 2y}.$$

20. Найти и исследовать особые точки уравнения

$$y' = \frac{2y}{x^2 - y^2 - 1}.$$

21. Начертить на фазовой плоскости траектории и исследовать особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - 4x^2, \\ \dot{y} = 4y - 8. \end{cases}$$

22. Найти производную по параметру от решения уравнения

$$\ddot{x} = x + \sin(\dot{x}^2), \quad x(0) = \mu, \quad \dot{x}(0) = \mu^2; \qquad \text{найти} \quad \left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}.$$

23. Найти линейно независимые решения уравнения в виде степенных рядов: $\qquad y'' - x^2 y = 0.$

24. Решить систему $\qquad \dfrac{dx}{x(z-y)} = \dfrac{dy}{y(y-x)} = \dfrac{dz}{y^2 - xz}.$

25. Найти положения равновесия системы и исследовать устойчивость одного из них, построив функцию Ляпунова

$$\dot{x} = -3x^3 - 5y^5, \quad \dot{y} = x^5 - \sin^3 y, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Вариант 22

1. При каких β и γ все решения уравнения $\ddot{x} + \beta x = e^{\gamma t}$ стремятся к нулю при $t \to +\infty$?

2. Выписать линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными вещественными коэффициентами возможно меньшего порядка, имеющее среди решений функцию $x(t) = 3^t \sin t$.

3. Исследовать на отрезке $[-\pi, \pi]$ на линейную зависимость совокупность функций

$$\varphi_0(t) \equiv 1, \quad \varphi_1^{(1)}(t) = \sin t, \quad \varphi_2^{(1)}(t) = \sin 2t, \quad \ldots, \quad \varphi_m^{(1)}(t) = \sin mt,$$
$$\varphi_1^{(2)}(t) = \cos t, \quad \varphi_2^{(2)}(t) = \cos 2t, \quad \ldots, \quad \varphi_m^{(2)}(t) = \cos mt.$$

4. Найти общее решение уравнения $(e^t + 1)\ddot{x} - 2\dot{x} - e^t x = 0$, если одно из его решений — функция $x(t) = e^t - 1$.

5. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения

$$(e^t + 1)\ddot{x} - 2\dot{x} - e^t x = f(t).$$

6. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 4y, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = x + y, & y(0) = -1. \end{cases}$$

Найти общее решение систем дифференциальных уравнений:

7. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z, \\ \dot{y} = 5y - x - z, \\ \dot{z} = -y + 3z + x. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} \dot{x} = 8y, \\ \dot{y} = -2z, \\ \dot{z} = 2x + 8y - 2z. \end{cases}$

9. $\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$ 10. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 4y + e^t, \\ \dot{y} = 4x + 5y + 1. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 4\cos 2t, \\ \dot{y} = 3x - 2y + 8\cos 2t + 5\sin t. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \dot{x} = -x + \dfrac{1}{\cos t}, \\ \dot{y} = y. \end{cases}$

13. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения

$$\ddot{x} + \dot{x} = f(t).$$

14. Построить функцию Грина краевой задачи

$$\ddot{x} + \dot{x} = f(t), \quad x(0) = ex(1), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(1).$$

15. Решить краевую задачу

$$y'' + \alpha y' = 0, \quad y(0) = e^{\alpha}, \quad y'(1) = 0.$$

16. Построить функцию Грина краевой задачи

$$x^2 y'' - 2y = f(x), \quad y(1) = 0, \quad y(2) + 2y'(2) = 0.$$

17. Исследовать на устойчивость по первому приближению положение равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + y\cos y - \dfrac{x^3}{3}, \\ \dot{y} = 3x + 2y + \dfrac{x^4}{5}. \end{cases}$$

18. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения

$$y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0.$$

19. Исследовать особые точки уравнения и дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y)

$$y' = \frac{y - 2x}{2y - 3x}.$$

20. Найти и исследовать особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = (2x - y)(x - 2), \\ \dot{y} = xy - 2. \end{cases}$$

21. Начертить на фазовой плоскости траектории и исследовать особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = xy - 4, \\ \dot{y} = (x - 4)(y - x). \end{cases}$$

22. Найти производную по параметру от решения уравнения

$$\dot{x} = \tfrac{x}{t} + \mu t e^{-x}, \quad x(1) = 1; \qquad \text{найти} \quad \left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}.$$

23. Найти линейно независимые решения уравнения в виде степенных рядов: $\quad (x^2 + 1)y'' + 5xy' + 3y = 0.$

24. Решить систему $\qquad y' = \dfrac{z}{x}, \qquad z' = \dfrac{z}{x} - yz^2.$

25. Найти положения равновесия системы и исследовать устойчивость одного из них, построив функцию Ляпунова

$$\dot{x} = -\sin x^3 - 5y^9, \quad \dot{y} = 7x - 23y^3, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Вариант 23

1. При каких β и γ все решения уравнения $\ddot{x} + \beta x = e^{\gamma t}$ стремятся к нулю при $t \to -\infty$?

2. Выписать линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными вещественными коэффициентами возможно меньшего порядка, имеющее среди решений функции $x_1(t) = e^t \sin t$ и $x_2(t) = t \sin t$.

3. Доказать, что система функций $e^{\alpha_1 t}$, $e^{\alpha_2 t}$, $e^{\alpha_3 t}$, где α_1, α_2, α_3 — попарно различны, линейно независима на $\mathbb{R}$.

4. Найти общее решение уравнения $(t^2 - 2t + 2)\dddot{x} - t^2\ddot{x} + 2t\dot{x} - 2x = 0$, если известно, что оно имеет два линейно независимых решения в виде полиномов.

5. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения

$$(t^2 - 2t + 2)\dddot{x} - t^2\ddot{x} + 2t\dot{x} - 2x = f(t).$$

6. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + 3y, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = -3x - y, & y(0) = 1. \end{cases}$$

Найти общее решение систем дифференциальных уравнений:

$$7. \begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z, \\ \dot{y} = -x + 5y - z, \\ \dot{z} = x - y + 3z. \end{cases} \qquad 8. \begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = y - 4x, \\ \dot{z} = 2y - z. \end{cases}$$

$$9. \quad \dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \qquad 10. \begin{cases} \dot{x} = 2y - 5x + 40e^t, \\ \dot{y} = x - 6y + 9e^{-t}. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \dot{x} = x + y - \cos t, \\ \dot{y} = -2x - y + \sin t + \cos t. \end{cases} \qquad 12. \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - y + 15e^t\sqrt{t}. \end{cases}$$

13. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения

$$\ddot{x} - x = f(t).$$

14. Построить функцию Грина краевой задачи

$$\ddot{x} - x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(1).$$

15. Решить краевую задачу

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = \alpha.$$

16. Построить функцию Грина краевой задачи

$$xy'' - y' = f(x), \quad y'(1) = 0, \quad y(2) = 0.$$

17. Исследовать на устойчивость по первому приближению положение равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{3}{2}\sin x + e^y - \cos y^5, \\ \dot{y} = -y - 2x + x^3\cos^5 y. \end{cases}$$

18. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения

$$y^V + 3y^{IV} + 10y''' + 22y'' + 23y' + 12y = 0.$$

19. Исследовать особые точки системы и дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y)

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = -6x - 5y. \end{cases}$$

20. Найти и исследовать особые точки уравнения

$$y' = \frac{4y^2 - x^2}{2xy - 4y - 8}.$$

21. Начертить на фазовой плоскости траектории и исследовать особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = (2x - y)^2 - 9, \\ \dot{y} = 9 - (x - 2y)^2. \end{cases}$$

22. Найти производную по параметру от решения уравнения

$$\ddot{x} + x = 2\mu\sin t + \mu x^2, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0; \qquad \text{найти} \quad \left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}.$$

23. Найти решение задачи Коши в виде степенного ряда, вычислить несколько первых коэффициентов ряда (до коэффициента при x^4 включительно): $\quad y'' = {y'}^2 + xy, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -2.$

24. Решить систему $\quad \dfrac{dx}{x(z+y)} = \dfrac{dy}{z(z-y)} = \dfrac{dz}{y(y-z)}.$

25. Найти положения равновесия системы и исследовать устойчивость одного из них, построив функцию Ляпунова

$$\dot{x} = \sin x + 3y, \quad \dot{y} = -x + 2y, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Вариант 24

1. При каких α и β все решения уравнения $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = 0$ стремятся к нулю при $t \to -\infty$?

2. Выписать линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными вещественными коэффициентами возможно меньшего порядка, имеющее среди решений функции $x_1(t) = e^t \sin t$ и $x_2(t) = \sin t$.

3. Доказать, что система функций $e^{\alpha t} \sin \beta t$, $e^{\alpha t} \cos \beta t$, где $\beta \neq 0$, линейно независима на $\mathbb{R}$.

4. Найти общее решение уравнения $(t^2 - 1)\ddot{x} + 4t\dot{x} + 2x = 6t$, если известны два его частных решения: $x_1(t) = t$, $x_2(t) = \dfrac{t^2 + t + 1}{t + 1}$.

5. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$(t^2 - 1)\ddot{x} + 4t\dot{x} + 2x = f(t).$$

6. Решить задачу Коши
$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, & x(0) = -1, \\ \dot{y} = 4x - y, & y(0) = 0. \end{cases}$$

Найти общее решение систем дифференциальных уравнений:

$$7. \begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2x - y. \end{cases} \qquad 8. \begin{cases} \dot{x} = z - y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = z - x. \end{cases}$$

$$9. \quad \dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \qquad 10. \begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + te^{2t}, \\ \dot{y} = 3x - y + e^{3t}. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2\sin t. \end{cases} \qquad 12. \begin{cases} \dot{x} = y - x + \dfrac{1}{e^{2t} + 1}, \\ \dot{y} = x - y + \dfrac{1}{e^{2t} - 1}. \end{cases}$$

13. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = f(t).$$

14. Построить функцию Грина краевой задачи
$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(1).$$

15. Решить краевую задачу

$$y'' + \alpha y' = 0, \quad y(0) = e^{\alpha}, \quad y'(1) = 0.$$

16. Построить функцию Грина краевой задачи

$$x^2 y'' + 2xy' = f(x), \quad y(1) = 0, \quad y'(3) = 0.$$

17. Исследовать на устойчивость по первому приближению положение равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{5x} - \cos 2y + x^5 \sin y^7, \\ \dot{y} = x - 2y + 3\sin x^3. \end{cases}$$

18. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения

$$y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0.$$

19. Исследовать особые точки системы и дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y)

$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$$

20. Найти и исследовать особые точки уравнения

$$y' = \frac{y + \sqrt{1 + 2x^2}}{x + y + 1}.$$

21. Начертить на фазовой плоскости траектории и исследовать особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = (x - y)(x - y + 2). \end{cases}$$

22. Найти производную по параметру от решения уравнения

$$\ddot{x} - 2\dot{x} = \mu t x, \quad x(0) = 4, \quad \dot{x}(0) = \mu^2 + 3\mu; \qquad \text{найти} \quad \left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}.$$

23. Найти линейно независимые решения уравнения в виде степенных рядов: $\quad (1 - x^2)y'' - 4xy' - 2y = 0.$

24. Решить систему $\quad \dfrac{dx}{xz} = \dfrac{dy}{yz} = \dfrac{dz}{xy\sqrt{z^2 + 1}}.$

25. Найти положения равновесия системы и исследовать устойчивость одного из них, построив функцию Ляпунова

$$\dot{x} = \operatorname{arctg} x + 2y, \quad \dot{y} = -x + 3y, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Вариант 25

1. При каких α и β все решения уравнения $\ddot{x}+2\alpha\dot{x}+\beta x = e^{-t}$ стремятся к нулю при $t \to +\infty$?

2. Выписать линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными вещественными коэффициентами возможно меньшего порядка, имеющее среди решений функцию $x(t) = e^{2t}\sin t\cos 2t$.

3. Доказать, что функции $\sin t$, $\sin(t+\pi/8)$, $\sin(t-\pi/8)$ линейно зависимы на $\mathbb{R}$.

4. Найти общее решение уравнения $(3t^3+t)\ddot{x}+2\dot{x}-6tx = 4-12t^2$, если известны два его частных решения $x_1(t) = 2t$, $x_2(t) = (t+1)^2$.

5. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$(3t^3+t)\ddot{x}+2\dot{x}-6tx = f(t).$$

6. Решить задачу Коши
$$\begin{cases} \dot{x} = 2y-3x, & x(0) = 1, \\ \dot{y} = y-2x, & y(0) = 0. \end{cases}$$

Найти общее решение систем дифференциальных уравнений:

$$7. \begin{cases} \dot{x} = z-x+y, \\ \dot{y} = z-y+x, \\ \dot{z} = x+y+z. \end{cases} \qquad 8. \begin{cases} \dot{x} = x-2y, \\ \dot{y} = 2x+y, \\ \dot{z} = 3x+y+z. \end{cases}$$

$$9. \quad \dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad 10. \begin{cases} \dot{x} = 5x+4y+e^t, \\ \dot{y} = 4x+5y+4. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \dot{x} = x-y+4\cos 2t, \\ \dot{y} = 3x-2y+8\cos 2t+5\sin 2t. \end{cases} \qquad 12. \begin{cases} \dot{x} = x-y+\dfrac{1}{\cos t}, \\ \dot{y} = 2x-y. \end{cases}$$

13. Построить функцию Коши и найти общее решение уравнения
$$\ddot{x}+x = f(t).$$

14. Построить функцию Грина краевой задачи
$$\ddot{x}+x = f(t), \quad x(0) = x(\pi), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(\pi).$$

15. Решить краевую задачу
$$xy''+y' = 0, \quad y(1) = \alpha y'(1), \quad y(x) \text{ ограничено при } x \to 0.$$

16. Построить функцию Грина краевой задачи

$$y'' + y = f(x), \quad y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

17. Исследовать на устойчивость по первому приближению положение равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 3e^x - 22y + 3(x^5 - 1), \\ \dot{y} = 7\sin x - 5y + y^3 - 5e^x + 5. \end{cases}$$

18. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения

$$y^V + 4y^{IV} + 16y''' + 25y'' + 13y' + 9y = 0.$$

19. Исследовать особые точки системы и дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y)

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y, \\ \dot{y} = 2x + 2y. \end{cases}$$

20. Найти и исследовать особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(2 - y^2), \\ \dot{y} = e^x - e^y. \end{cases}$$

21. Начертить на фазовой плоскости траектории и исследовать особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2(x-1)(y-2), \\ \dot{y} = y^2 - x^2. \end{cases}$$

22. Найти производную по параметру от решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, & x(0) = 2 - 4\mu, \\ \dot{y} = x + 3\mu y^2, & y(0) = 0; \end{cases} \qquad \text{найти} \quad \left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}, \quad \left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}.$$

23. Найти решение задачи Коши в виде степенного ряда, вычислить несколько первых коэффициентов ряда (до коэффициента при x^4 включительно): $y'' = xy' - y^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

24. Решить систему $\quad -\dfrac{dx}{x^2} = \dfrac{dy}{xy - 2z^2} = \dfrac{dz}{xz}.$

25. Найти положения равновесия системы и исследовать устойчивость одного из них, построив функцию Ляпунова

$$\dot{x} = x^3 + 5y, \quad \dot{y} = -3x + y^3 e^y, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Список рекомендуемой литературы

1. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971.

2. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.

3. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.

4. Боровских А. В., Перов А. И. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва, Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2004.

5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.

6. Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск: Наука и техника, 1970.

7. Зайцев В. А., Попова С. Н., Тонков Е. Л. Дифференциальные уравнения. Часть 1. Ижевск.: Изд-во «Удмуртский университет», 2010.

8. Мазаник С. А., Сыроид И. Ю. Об экспонентном представлении решений систем стационарных линейных дифференциальных уравнений // Вестн. Бел. ун-та. Сер. 1. Физика. Математика. Механика. 1992, № 1. С. 41–44.

9. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. М.: Высш. шк., 1989.

10. Тонков Е. Л. Устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МИХМ, 1972.

11. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982.

12. Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004.

13. Филиппов А. Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениями. М.: Наука, 1985.

Оглавление

Василий Александрович Зайцев, Светлана Николаевна Попова, Евгений Леонидович Тонков

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
Часть 2

Учебное пособие

Подписано в печать 03.11.10. Формат 60 × 84 1/16.
Печать офсетная. Усл.печ.л. 4,65. Уч.-изд.л. 4,76.
Заказ № . Тираж 75 экз.

Издательство «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4.