

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Удмуртский государственный университет

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОШИБОК

Краткие рекомендации по организации, проведению физического эксперимента,
обработке и представлению его результатов

Составитель И.В.Милютин

Ижевск

2010

УДК 53.088

ББК В3В6

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом УдГУ

Элементы теории ошибок. Краткие рекомендации по организации, проведению физического эксперимента, обработке и представлению его результатов:

учеб. - методич. пособие для студ. спец. «Физика» и «Физика конденсированного состояния вещества»/составитель И.В.Милютин; УдГУ, Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2010. 35 с.

УДК 53.088

ББК В3В6

© И.В.Милютин, 2010

© Удмуртский госуниверситет, 2010

Введение

Задача данного пособия – организация аудиторной и самостоятельной работы студентов физико-энергетического факультета в рамках изучения курса «Введение в теорию ошибок». Отдельные части материала пособия могут использовать студенты других факультетов, выполняющие лабораторные работы в лабораториях кафедры общей физики.

Материал приводится в предположении, что студентам известны основы теории вероятностей в объеме, излагаемом в рамках курса «Молекулярная физика и термодинамика», читаемого студентам специальностей «физика» и «физика конденсированного состояния вещества» во втором семестре. В этом же предположении ниже использован без пояснений традиционный ряд обозначений из теории вероятностей. В том случае, если с элементами теории ошибок предполагается знакомить студентов раньше, следует в первую очередь дать им представление о вероятности случайного события, функции плотности вероятности, вычислении средних значений дискретной и непрерывной случайной величины, дисперсии.

Изложение, как правило, не сопровождается выводами основных формул, т.е. ведется в основном на уровне рецептов с тем, чтобы ознакомившись с содержанием пособия, студент сразу мог приступить к обработке предлагаемых ему в курсе общей физики лабораторных заданий. При этом предполагается, что студент, накопив необходимый математический аппарат, при необходимости вернется к последовательному рассмотрению интересующих вопросов, используя классическую литературу по предмету. Подробный перечень использованной и рекомендуемой литературы приведен в конце пособия.

В каждом практическом задании нумерация формул ведется с нуля, т.е. независимо от остального текста.

Для проверки усвоения материала и формирования и закрепления необходимых практических навыков студенту предлагается выполнить ряд практических заданий и решить несколько задач. Эти задания и задачи располагаются в тексте по мере изложения связанного с ними теоретического материала. Предполагается, что читая методическое пособие и дойдя до соответствующего практического задания или задачи, студент располагает необходимыми теоретическими знаниями для реализации задания или решения задачи, прежде чем двигаться по тексту дальше, это задание (задачу) выполнит и отчитается в выполнении перед преподавателем.

1. Измерения, их роль. Прямые и косвенные измерения. Погрешности измерений

«Если вы можете измерять и выражать в числах то, о чем говорите, то об этом предмете вы кое-что знаете; если же вы не можете сделать этого, то ваши познания скудны и неудовлетворительны. Быть может они и представляют первый шаг исследования, но едва ли позволительно думать, что ваша мысль продвинулась до степени настоящего знания.»

Лорд Кельвин.

Измерить физическую величину – это значит сравнить эту величину с однотипной величиной, принятой за единицу этой величины (эталон). Например, измеряя длину столешницы L , мы фактически определяем отношение

$L = \text{Длина тела} / \text{Длина эталона},$

при этом результат измерения - это отвлеченное число, показывающее, сколько раз единица измерения содержится в измеряемой величине. Поскольку все измерения сопровождаются определенными погрешностями, задача измерений не только получить результат, но и указать границы его возможных значений и вероятность попадания результата в эти границы.

Все **измерения** делят на два типа - **прямые и косвенные**. При прямых измерениях интересующая нас величина измеряется непосредственно путем сравнения ее с мерой (эталоном). Измеряя интервалы времени секундомером, температуру тела термометром, диаметр круга линейкой, мы проводим прямые измерения. При косвенных измерениях мы находим интересующее нас значение физической величины на основании известной зависимости между ней, и величинами, полученными путем прямых измерений. Если измерив диаметр круга линейкой, мы вычислим по полученному результату радиус и площадь круга, то мы проведем косвенные измерения.

Все измерения объединены тем, что они всегда проводятся с некоторой погрешностью (ошибкой). В данном случае слово «ошибка» не следует воспринимать в бытовом смысле, как нечто неправильное или обязательно связанное с небрежностью экспериментатора. Погрешности – неотъемлемая часть любого измерения. На точность измерений могут влиять внешние условия (слишком сильная и слишком маленькая освещенность; смена температуры влияет на линейные размеры тел), точность измерительного инструмента (измеряя один и тот же отрезок можно использовать рулетки с миллиметровыми делениями и сантиметровыми) – в любом случае не получить результат более точный чем это позволяет минимальная цена деления.

Задавшись целью абсолютно точно определить, например, температуру, мы придем к пониманию того, что это сделать невозможно, так как увеличивая точность измерительных приборов, дойдем до уровня точности, по порядку величины близкому к уровню флуктуаций в системе.

Итак, погрешности всегда присутствуют в измеренной величине, это ни плохо, ни хорошо, так устроен мир, необходимо принять это и учитывать в научной и практической деятельности. Другими словами – нужно уметь оценивать погрешности, а участвуя в изнуряющей борьбе за точность измерений, нужно

непрерывно знать, какая точность достаточна для решения поставленной вами конкретной задачи.

2. Абсолютная и относительная погрешности. Классификация погрешностей: систематические и случайные погрешности, промахи

Пусть в результате измерения некоторой физической величины мы получили численный результат X . При этом истинное значение этой величины (на практике оно никогда не известно), выраженное в тех же единицах, равно $X_{\text{ист}}$.

Разность

$$\Delta X = X_{\text{ист}} - X \quad (2.1)$$

называется абсолютной погрешностью измерения величины X . Очевидно, что абсолютная погрешность измеряется в тех же единицах, что и сама величина. Абсолютная погрешность - характеристика точности данного метода измерений, но она плохо характеризует точность, с которой производят конкретное измерение.

Пусть цена деления напольных весов 500 г. Такая точность вполне приемлема при измерении массы человека, но измерять на таких весах массу даже очень крупного яблока бессмысленно.

Характеристикой точности конкретного измерения служит относительная погрешность ε - отношение абсолютной погрешности к результату измерения. Поскольку относительная погрешность величина безразмерная, ее можно выражать как в долях измеренной величины, так и в процентах:

$$\varepsilon = \Delta X / X \quad \text{или} \quad \varepsilon = \Delta X / X \cdot 100\% \quad (2.2)$$

Если при измерении массы человека на весах с ценой деления 500 г. та оказалась равной 70 кг., то относительная погрешность составила примерно 0,7%. Данное измерение проведено с хорошей точностью. В учебной лаборатории, если не даются специальные указания, можно считать, что измерение проведено с приемлемой точностью, если относительная погрешность оказалась меньше 20%.

Погрешности, по причине их возникновения, **делят на систематические, случайные и грубые (промахи).**

Систематической погрешностью измерений называют погрешность, которая остается постоянной (например, неправильно установлено начало отчета или неточно проведена градуировка шкалы прибора; метод измерений не учитывает всех значащих факторов – например, при взвешивании не учитывается выталкивающая сила со стороны воздуха), или закономерно изменяется (например, в связи с тепловым расширением шкалы прибора) при повторных измерениях одной и той же физической величины. Иногда систематическую погрешность можно учесть, проводя прибором измерения в реперных точках, и сравнивая его показания с теми значениями, которые он должен показывать по определению.

Случайной погрешностью измерений называют погрешность, которая изменяется случайно при повторных измерениях одной и той же величины. Случайные погрешности вызываются совокупностью различных причин, действие которых неодинаково при каждом измерении. Такими причинами являются температура, атмосферное давление, влажность воздуха, вибрации, флуктуации напряжения питания, нестабильность элементов схем приборов, несовершенство наших органов чувств и т.д. Появление случайных погрешностей носит вероятностный характер, и для уменьшения их влияния измерения повторяют несколько раз.

Грубой погрешностью измерения или промахом называют погрешность, резко выделяющуюся связанной с ней результат измерений из ряда других однотипных измерений, проведенных в одинаковых условиях. Грубые погрешности возникают в случае, когда на результат измерения сильно повлиял какой-нибудь случайный фактор. Например, резкий скачок напряжения питания, неправильные действия при работе с прибором, неправильная запись результата измерений.

Из сказанного следует, что однократное измерение не имеет самостоятельного смысла, и для проведения учета случайных погрешностей и исключения промахов необходимо проводить серии измерений.

3. Промахи и систематические погрешности.

Пути их устранения или учета

Промах. Результат измерения, содержащий промах, следует исключить. Чтобы избежать промахов или выявить их следует:

- а) тщательно, с максимальной внимательностью проводить измерения;
- б) проводить измерения многократно;
- в) изменять некоторые, легко учитываемые условия измерения (например, можно измерить длину один раз микрометром, а другой раз штангенциркулем, или к началу измеряемого отрезка приложить не 0 линейки, а отметку в средней части шкалы и т.д.);
- г) проводить независимые измерения несколькими наблюдателями, исключив обмен информацией между ними до и во время эксперимента.

Промах часто можно исключить, используя статистические методы (см. Параграф 6).

Систематические погрешности. Методы исключения этих погрешностей различны, поскольку они могут иметь различную природу. Рассмотрим основные типы этих погрешностей.

1. *Систематические погрешности, природа которых известна и величина может быть достаточно точно определена* – это так называемые поправки. Примеры: неравноплечность рычажных весов, выталкивающая сила, действующая на тело и гири, смещение нуля штангенциркуля или секундомера и т.д. Путь устранения – ввести поправку. Однако следует учитывать целесообразность введения поправки.

Пусть, например, допустимая погрешность измерений равна $\pm 0,5\%$. Это значит, что абсолютная погрешность при взвешивании тела массой 200 г не должна превышать ± 1 г. Отношение веса воздуха в объеме тела к весу тела равно отношению их плотностей. Так как плотности твердых тел в 10^3 – 10^4 раз больше плотности воздуха при нормальных условиях, то это отношение составит 10^{-3} – 10^{-4} . Отношение веса воздуха в объеме тела к весу тела – это добавка к относительной погрешности, связанная с тем, что выталкивающая сила не будет учтена, в рассматриваемом случае она составляет 0,1–0,01%. При заданной допустимой погрешности измерений этой поправкой можно пренебречь.

2. *Систематические погрешности известного происхождения, но неизвестной величины.* Известны только максимально возможные значения погрешности. Например, погрешность, определяемая классом точности прибора.

Класс точности измерительного прибора K определяется как выраженное в процентах отношение систематической погрешности прибора Δ к максимальному значению величины на его шкале $X_{\text{макс}}$

$$K = \Delta / X_{\text{макс}} \cdot 100\% \quad . \quad (3.1)$$

Зная класс точности, абсолютную погрешность находят по формуле

$$\Delta = K X_{\text{макс}} / 100. \quad (3.2)$$

Если найденная по этой формуле погрешность меньше половины цены наименьшего деления шкалы прибора, а также в тех случаях, когда класс точности прибора неизвестен, значение абсолютной погрешности однократного измерения равно половине цены наименьшего деления его шкалы.

Класс точности указывается на шкале прибора и лежит в интервале от 0,05 до 4, что соответствует систематической погрешности от 0,05 до 4% максимального показания прибора соответственно. Более грубые приборы не имеют класса точности.

Если, например, при измерении силы тока амперметром класса точности 1,0 при шкале на 10 А зафиксирована сила тока в 5,5 А, то $I = (5,5 \pm 0,1) \text{ А}$.

Учет такого рода погрешностей сводится к их включению в записываемый результат измерений.

3. *Систематические погрешности, связанные со свойствами измеряемого объекта.* Например, погрешности гири, овальное сечение объекта вместо круглого (мы же при определении площади сечения принимаем его за круг). Такого рода погрешности можно устранить, попытавшись свести их к случайной погрешности.

Например, при взвешивании тела массой около 100 г можно использовать различные наборы гирь:

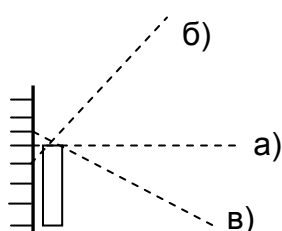
$$100 \text{ г} = 10 \text{ г} + 90 \text{ г} = 30 \text{ г} + 50 \text{ г} + 20 \text{ г} = \dots$$

При измерении диаметра, проделать это несколько раз по разным направлениям.

Однако такое сведение систематической погрешности к случайной не всегда возможно.

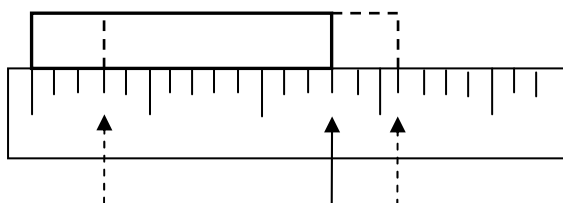
К систематическим погрешностям относится ошибка параллакса, которая может возникнуть при считывании показаний со шкал измерительных приборов. Параллакс - изменение видимого положения объекта относительно удалённого фона в зависимости от положения наблюдателя. Ошибки параллакса несложно избежать. Для этого следует проводить считывание показаний, располагая глаз наблюдателя на перпендикуляре к шкале, проходящем через конец стрелки прибора или через край измеряемого предмета. При невыполнении этого условия, при измерении будут получены либо завышенные, либо заниженные значения (рис.1). Чтобы исключить ошибку параллакса, шкалы некоторых приборов делают зеркальными, нанося деления шкалы на верхнюю поверхность защищающего отражающий слой стекла. Если при снятии показания мы не видим отражения в зеркале интересующего нас деления шкалы – параллакс исключен. Зеркальной шкалой обладает, например, настенный жидкостный манометр в лаборатории молекулярной физики, обратите на это внимание.

Рис. 1. Влияние параллакса на точность измерений. Штриховой линией отмечена линия зрения. В случае а) ошибка параллакса отсутствует, в случае б) результат измерения будет занижен, в случае в) завышен.



Работая с линейкой, следует избегать ошибки отсчета нуля. Дело в том, что край линейки часто оказывается испорченным, или нулевая отметка проставлена неверно. Поэтому, измеряя длину предмета, не следует располагать линейку так, чтобы ее край совпадал с одним концом предмета (рис. 2, предмет указан сплошной линией), и отсчитывать показания у другого конца. Для более точного измерения предмет следует располагать таким образом, чтобы можно было снимать показания у обоих концов (рис. 2, предмет указан штриховой линией).

Рис. 2. Два способа измерения длины. Лучше располагать предмет так, чтобы можно было снимать показания у обоих концов.



Понятно, что в этом случае погрешность не может быть меньше минимальной цены деления, т.к. с погрешностью в половину минимальной цены деления связан отсчет у одного конца тела, и с такой же погрешностью связан отсчет у другого конца.

Помните так же, что следует избегать измерений длины, в которых длина измеряемого отрезка больше длины линейки. В этом случае приходится прикладывать линейку несколько раз, и во столько же раз увеличивается абсолютная погрешность.

Наконец, шкала на линейку может быть нанесена неточно, часто так и бывает с дешевыми пластмассовыми и деревянными линейками. Поэтому, по возможности, такую линейку следует поверить, или откалибровать. Сделать это можно просто совмещая ее с более точной эталонной линейкой и сличая их показания.

4. Случайные погрешности прямых измерений

4.1 Нормальное распределение (распределение Гаусса). Дисперсия

Большинство физических величин нельзя измерить в ходе прямых измерений. Для определения площади прямоугольника сначала нужно измерить его длину и ширину, для определения плотности тела, необходимо измерить массу тела и его объем и т.д. То есть, большинство измерений являются косвенными и их реализация включает два этапа – сначала непосредственно (в ходе прямых измерений) определяется одна или несколько величин, значения которых затем используются при вычислении интересующей нас величины.

Расчет погрешности косвенных измерений так же включает два этапа – сначала оценивают погрешности прямых измерений, затем определяют, как эти погрешности «распространяются» при расчетах и оценивают погрешность конечного результата. В данном параграфе рассматривается, как учитываются случайные погрешности прямых измерений.

Случайные погрешности можно учесть статистическими (вероятностными) методами, для этого нужно проводить несколько измерений одной и той же величины.

Часто, но не всегда, случайные погрешности обладают следующими особенностями:

- при повторных измерениях одной и той же физической величины случайные погрешности представляют собой последовательность случайных чисел обоих знаков;
- случайные погрешности одинаковой величины, но разного знака встречаются одинаково часто;
- чем больше погрешность, тем реже она появляется.

Эти особенности приводят к тому, что случайные погрешности подчиняются нормальному закону распределения (распределению Гаусса).

Функция плотности вероятности при нормальном (Гауссовом) распределении случайной величины X имеет вид

$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (4.1)$$

где μ - истинное значение величины X , σ^2 – дисперсия. Корень квадратный из дисперсии называют стандартным (среднеквадратичным) отклонением величины от ее среднего значения. Из названия следует, что дисперсия характеризует разброс полученных в ходе проведения серии измерений значений относительно истинного значения. По определению, дисперсия - это средний квадрат отклонения величины от ее среднего значения:

$$\sigma^2 = \overline{(X - \mu)^2}. \quad (4.2)$$

При вычислении дисперсии усредняются квадраты отклонений от среднего (истинного) значения, т.е. величины существенно положительные, именно поэтому дисперсия характеризует разброс. Среднее отклонение от среднего значения $\overline{(X - \mu)}$ не характеризует разброс, т.к. при измерениях встречаются величины большие и меньшие среднего значения, отдельные отклонения от среднего значения будут иметь разные знаки и при суммировании частично или полностью скомпенсируются. Сказанное иллюстрирует рис. 3. В серии измерений б) разброс около среднего значения заметно больше, а среднее отклонение от среднего значения в обоих случаях равно нулю. Дисперсия же в серии б) значительно больше дисперсии в серии измерений а).

Рис. 3. Две серии однотипных измерений с разным разбросом, но одинаковым средним отклонением от среднего.



Средний модуль отклонения величины от среднего значения $\overline{|(X - \mu)|}$ так же характеризует разброс измеренных значений, но в теории ошибок показывается, что в случае нормального распределения именно дисперсия – лучшая характеристика величины разброса.

4.2 Вычисление случайной погрешности прямых измерений

Предположим, что при измерениях возникают только случайные погрешности, а систематические погрешности настолько малы, что ими можно пренебречь. Пусть, измеряя N раз величину X , мы получаем серию значений $X_1, X_2, \dots, X_N$. Эту серию в теории ошибок называют выборкой, а N – объемом выборки. Каждое из измеренных значений содержит случайную погрешность

$$\Delta X_i = X_i - \mu, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.3)$$

где μ – истинное значение измеряемой величины. Поскольку истинное значение на практике неизвестно, то остаются неизвестными по величине и знаку случайные погрешности, возникающие при каждом измерении. В теории ошибок доказывается, что при увеличении числа N среднее арифметическое величин X_i стремится к истинному значению измеряемой величины μ , и при бесконечно большом N становится равным истинному значению. Однако при каждом реальном измерении N конечно. Согласно теории, если погрешности ΔX_i подчиняются нормальному закону распределения, то среднее значение выборки $\bar{X}$ является наилучшей оценкой истинного значения μ .

Английский математик Уильям Госсет, работавший на фирму «Гиннес» и вынужденный, в связи с запретом главы фирмы своим сотрудникам публиковать какие-либо результаты исследований, издавать свои работы под псевдонимом Стьюдент, предложил методику обработки результатов многократных измерений одной и той же величины, подчиняющейся нормальному закону распределения, в предположении, что систематические погрешности отсутствуют. Эта методика в настоящее время стала общепризнанной.

Ниже приводится основанная на этой методике **схема, по которой рекомендуется проводить учет случайных погрешностей многократных измерений $X_1, X_2, \dots, X_N$, подчиняющихся нормальному распределению.**

1. Вычислить среднее значение $\bar{X}$ по формуле

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i. \quad (4.4)$$

2. Найти случайное отклонение каждого измерения относительно среднего значения по формуле

$$\Delta X_i = X_i - \bar{X}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.5)$$

3. Характеристикой случайного рассеяния результатов наблюдения относительно среднего значения $\bar{X}$ является выборочное среднеквадратичное отклонение результатов измерений от среднего S , определяемое по формуле

$$S = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}. \quad (4.6)$$

В теории показывается, что при небольших N , в формуле (4.6) под корнем нужно делить на $(N-1)$, а не на N , кроме того, тем самым исключается возможность проведения однократного измерения, не имеющего самостоятельного смысла.

Для характеристики случайного отклонения $\bar{X}$ от истинного значения измеряемой величины μ вводят выборочное среднеквадратичное отклонение среднего $S_{\bar{X}}$. В теории ошибок доказывается, что

$$S_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}. \quad (4.7)$$

4. После нахождения $S_{\bar{X}}$, вычислить случайную погрешность среднего арифметического (оценочное значение абсолютной погрешности измеренной величины) ΔX по формуле

$$\Delta X = t_{N,W} S_{\bar{X}}, \quad (4.8)$$

где $t_{N,W}$ - коэффициент Стьюдента, зависящий от числа измерений N и доверительной вероятности W (Таблица 1).

5. Записать результат измерений в виде

$$X = \bar{X} \pm t_{N,W} S_{\bar{X}}, \quad (4.9)$$

имеющем тот смысл, что истинное значение измеренной величины лежит в интервале $\bar{X} - t_{N,W} S_{\bar{X}} < X < \bar{X} + t_{N,W} S_{\bar{X}}$ с заданной вероятностью W .

6. Найти относительную ошибку измерений по формуле

$$\varepsilon = \Delta X / \bar{X}. \quad (4.10)$$

Примечание

При проведении технических измерений, если на то нет каких-либо особых причин, рекомендуется брать $W = 0,95$.

В лабораториях кафедры общей физики УдГУ, при отсутствии дополнительных указаний, предлагается действовать следующим образом:

- 1) доверительная вероятность $W = 0,9$ при числе измерений $N \leq 4$;
- 2) доверительная вероятность $W = 0,95$ при $N \geq 5$.

Таблица 1. Значения коэффициентов Стьюдента

N	W=0,6	W=0,8	W=0,9	W=0,95
2	1,376	3,078	6,313	12,706
3	1,061	1,886	2,920	4,303
4	0,978	1,638	2,353	3,182
5	0,941	1,533	2,132	2,776
6	0,920	1,476	2,015	2,571
7	0,906	1,440	1,943	2,447
8	0,896	1,415	1,895	2,365
9	0,889	1,397	1,860	2,306
10	0,883	1,383	1,833	2,262
11	0,879	1,372	1,813	2,228
12	0,876	1,363	1,795	2,201

4.3 Связь систематических и случайных ошибок

При проведении любых измерений надо предварительно оценить и учесть все возможные систематические ошибки, т.е. в первую очередь, вычислить все необходимые поправки, которые определяются выбранной методикой измерения, во вторую очередь, принять во внимание класс точности измерительного прибора; продумать, нет ли каких-либо других существенных и неизвестных источников систематических ошибок.

Если случайная ошибка окажется существенно меньше систематической, то, очевидно, что нет смысла пытаться еще уменьшить величину случайной ошибки (путем увеличения числа измерений) – все равно результаты измерений не станут от этого точнее, ибо будут целиком определяться систематической погрешностью. Чтобы получить бóльшую точность, здесь надо искать пути к уменьшению систематической ошибки. Наоборот, если случайная ошибка существенно больше систематической ошибки, то именно случайную ошибку нужно уменьшать в первую очередь.

Отсюда вытекают следующие правила, которыми надо руководствоваться при проведении эксперимента или наблюдения:

1. Если систематическая ошибка является определяющей, т.е. ее величина существенно больше случайной ошибки, присущей данному методу, то достаточно выполнить измерение один раз.
2. Если случайная ошибка является определяющей, то измерение следует производить несколько раз для возможного уменьшения случайной ошибки до разумной величины, например, до значения, соизмеримого с систематической ошибкой.

. В идеале, число измерений во втором случае целесообразно выбирать таким, чтобы случайная ошибка среднего арифметического была меньше систематической ошибки с тем, чтобы последняя опять определяла окончательную ошибку результата. К сожалению, на практике это часто приводит к неприемлемо большому количеству измерений. Поэтому за основную ошибку в конечном итоге принимают случайную ошибку $t_{N,W} S_{\bar{X}}$, ограничиваясь в большинстве таких измерений, как было сказано выше, доверительной вероятностью 0,95.

Если окажется, что случайная ошибка результата измерений $t_{N,W} S_{\bar{X}}$ сравнима с величиной систематической погрешности Δ (например, задаваемой классом точности прибора), то в качестве доверительного интервала следует принять величину

$$\Delta X = \sqrt{(t_{N,W} S_{\bar{X}})^2 + \Delta^2}. \quad (4.11)$$

Выражение (4.11) можно рассматривать как расширение приведенного выше правила 2. В общем случае, если одна из ошибок меньше другой в три и более раз, то ее просто отбрасывают.

5. Оценка погрешностей косвенных измерений

Для оценки погрешностей косвенных измерений в настоящее время общепризнанных методов не существует. В учебных лабораториях кафедры общей физики УдГУ студентам предлагается придерживаться следующих простых, но не слишком строгих правил.

Пусть $y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$ есть косвенно измеряемая величина, являющаяся произвольной функцией непосредственно измеряемых и независимых величин $X_1, X_2, \dots, X_N$. В таком случае абсолютная ошибка Δy , допущенная при измерении этой величины, может быть оценена по формуле

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial X_1} \Delta X_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial X_2} \Delta X_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial X_N} \Delta X_N\right)^2}, \quad (5.1)$$

где $\frac{\partial y}{\partial X_i}$ есть частная производная функции $y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$ по переменной X_i , а ΔX_i – абсолютная ошибка величины X_i . Эти производные вычисляются в предположении, что $X_1 = \bar{X}_1$, $X_2 = \bar{X}_2$, ... Величины ΔX_i должны быть вычислены с одной доверительной вероятностью, тогда и абсолютная погрешность результата косвенного измерения Δy будет иметь ту же доверительную вероятность.

Ответ записывается в виде

$$y = \bar{y} \pm \Delta y \quad (5.2)$$

и $\varepsilon_y = \frac{\Delta y}{\bar{y}}, \quad (5.3)$

где $\bar{y}$ определяется по формуле

$$\bar{y} = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N). \quad (5.4)$$

Для формирования и закрепления навыков обработки результатов прямых и косвенных измерений, студенты следующим шагом должны провести Практическую работу №1 «Определение времени реакции человека».

Для знакомства с систематическими ошибками и проблемой их учета, студенты выполняют Практическую работу №2 «Влияние систематических ошибок и выбранного метода измерений на результаты непосредственных измерений».

Практическая работа №1

Определение времени реакции человека

Цель работы: определить время вашей реакции; познакомиться с видами измерений и видами погрешностей, научиться их определять; начать формировать навыки представления результатов измерений.

Оборудование: линейка.

Краткая теория и метод измерений

Время реакции человека - время от начала подачи сигнала до ответной реакции организма. Оно делится на 3 фазы: время прохождения нервных импульсов от рецептора до коры головного мозга; время, необходимое для переработки нервных импульсов и организации ответной реакции в центральной нервной системе; время ответного действия организма.

Время реакции человека зависит от вида сигнала-раздражителя, интенсивности раздражителя, тренированности, настроенности на восприятие сигнала, возраста и пола, сложности реакции (простая или избирательная). Время реакции человека на дискретные независимые раздражители меняется в широких пределах. Для простой реакции среднее время реакции человека в самых благоприятных случаях не менее 0,15 сек (распознавание зрительных образов не менее 0,4 сек).

Время реакции человека влияет на точность проводимых измерений, если в ходе измерения необходимо фиксировать факт какого-либо события – прохождение объекта через конкретную точку, появление импульса или светового сигнала... Известен случай, когда в 1796 году астроном Невил Маскелин уволил своего ассистента за систематическое проведение неточных астрономических измерений. Через 20 лет Фридрих Бессель предположил, что различие результатов Маскелина и ассистента было различием темпераментов (читай – различием их времён реакции).

В данной работе для оценки времени реакции человека используют падение линейки из состояния покоя. Опыты проводятся в парах. Один держит линейку вертикально, расположив нулевое деление внизу, другой располагает большой и указательный пальцы с двух сторон от нулевого деления на расстоянии 1 см от линейки. Первый в произвольный момент отпускает линейку, а второй ее ловит, тем самым фиксируя расстояние H , которое линейка успевает пройти.

Из формулы пути при движении в поле тяготения $H = g \cdot t^2 / 2$, выразим время

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}, \quad (1)$$

которое и является оценкой времени реакции ($g = 9,8 \text{ м/с}^2$).

Ход работы.

1. Каждому студенту провести не менее 10 измерений.
2. По схеме, представленной в параграфе 4, провести расчет погрешности прямых измерений величины H . Составить и заполнить соответствующую таблицу. Таблицу составляйте с учетом того, что она должна включать все значимые результаты этой практической работы, т.е. и результаты расчетов, о которых говорится и в следующих пунктах.
3. Провести по формуле (1) вычисления вашего времени реакции. Способом, изложенным в параграфе 5, сделать оценку абсолютной и относительной погрешности этой величины. Окончательно заполнить таблицу.
4. Сделать и записать выводы по работе.

Практическая работа №2

Влияние систематических ошибок и выбранного метода измерений на результаты непосредственных измерений

Цель работы: отследить влияние систематических ошибок на результаты измерений при различных методах измерения одинаковой величины; попытаться выявить, как конкретный студент фиксирует наступление события – с опережением или запаздыванием.

Оборудование: генератор гармонических колебаний, частотомер типа ЧЗ-54 (ЧЗ-33), секундомер, математический маятник.

Постановка задачи и описание методов измерений

При измерении отрезков времени следует учитывать, что используемые устройства имеют определенное время срабатывания, кроме того, на результат измерений могут повлиять индивидуальные особенности экспериментатора. В последнем случае прежде всего имеется в виду то, что одни люди фиксируют момент наступления события (например, прохождение светила через перекрестие астрометрического прибора) с опережением, другие с запаздыванием. Указанные факторы приводят к систематическим ошибкам, которые желательно либо исключить, либо учесть.

Пусть экспериментатору необходимо измерить время, в которое укладывается определенное число колебаний. Это можно сделать, одновременно запустив прибор, генерирующий (или считающий колебания), и секундомер, а можно начать отсчет времени секундомером в определенный момент, когда счетное устройство уже проработало некоторое время, и остановить, когда накопится нужное число колебаний. Скорее всего, измерения, проведенные этими разными методами, дадут различные результаты.

В первом случае на результате скажется то, что генератор (или пересчетное устройство) и секундомер имеют свое время срабатывания, и

эти времена не обязаны совпадать. Начиная измерение, мы включаем два прибора, а заканчивая, выключаем только один, т.е. начало и конец измерения проходят в разных условиях.

Во втором способе измерений время срабатывания генератора (пересчетного устройства) не влияет на конечный результат, начало и конец измерения проходят в одинаковых условиях. Причем это относится не только к срабатыванию секундомера (задержка примерно одна в начале и конце измерения), но и к особенностям темперамента экспериментатора (если он, например, фиксирует событие «с опережением», то это происходит как в начале, так и в конце измерения, ошибки компенсируются).

Студентам предлагается проверить изложенные соображения в ходе трех упражнений.

Упражнение 1.

1. Соединить генератор и частотомер. Включить генератор и установить на его выходе частоту 20 Гц.
2. Одновременно включив частотомер и секундомер, измерить время 100 колебаний. Записать результат, остановить частотомер, обнулить показания секундомера и частотомера. Опыт провести 10 раз.
3. Оставив на выходе генератора частоту 20 Гц, запустить частотомер.
4. Включив секундомер в момент, когда частотомер будет показывать 100 колебаний и остановив в момент, когда он будет показывать 200 колебаний, измерить время 100 колебаний. Записать результат. Остановить частотомер. Обнулить показания частотомера и секундомера. Опыт провести 10 раз.
5. Провести статистическую обработку результатов измерений. Найти средние значения, абсолютную и относительную ошибки.
6. Результаты всех измерений и статистической обработки представить в одной таблице.
7. Сделать выводы.

Упражнение 2.

1. Одновременно привести в колебания маятник и запустить секундомер. Измерить время пяти полных колебаний. Записать результат. Провести опыт 10 раз.
2. Наблюдая колебания маятника, начать измерение в момент, когда он будет находиться в одном из крайних отклонений. Измерить время пяти полных колебаний. Записать результат. Провести опыт 10 раз.
3. Провести статистическую обработку результатов измерений. Найти средние значения, абсолютную и относительную ошибки.
4. Результаты всех измерений и статистической обработки представить в одной таблице.
5. Сделать выводы.

Упражнение 3. (выполняется после того, как Упражнения 1 и 2 будут выполнены всеми студентами).

1. Составить сводную таблицу результатов измерений, проведенных всеми студентами (во всяком случае, таблица должна включать результаты измерений не менее 15 студентов).

Экспериментатор	Генератор, От 0 до 100, с	Генератор От 100 до 200, с	Маятник От 0 5Т, с	Маятник 5Т, с
1. ...				
2. ...				
...				
15.				

2. Проанализируйте отраженные в таблице результаты, сделайте выводы.

6. Проблема отбрасывания данных

Иногда результат одного измерения из серии разительно отличается от остальных результатов. Если это произошло, экспериментатору надлежит решить, является ли это следствием ошибки (в этом случае этот результат следует отбросить), или же это законный результат, и его следует рассматривать наравне с другими.

Данная проблема вплотную сталкивается с вопросом, который обычно не считают нужным упоминать, считая его само собой разумеющимся. Это вопрос о честности экспериментатора. В истории науки известны случаи, когда результаты эксперимента «подправлялись», причем не обязательно с каким-то корыстным или злым умыслом. Могло сказываться, например, и влияние авторитета других исследователей. Измеряя заряд электрона, Милликен принял для вязкости воздуха табличное, но не точное, заниженное значение, в результате элементарный заряд был измерен с систематической погрешностью, занижающей результат. Проводя независимые измерения элементарного заряда, другие исследователи, видимо, несколько «корректировали» свои результаты, о чем говорит временная динамика постепенного приближения фигурирующих в научных статьях значений элементарного заряда к значению, принятому в настоящее время. Не работай экспериментаторы с оглядкой на мэтра, эта динамика была бы куда более выраженной. На практике результат был таков – свои опыты Милликен проводил в 1913 году, и вплоть до 1930 года не только величина элементарного заряда, но и величины других констант, базисующихся на милликеновском значении (таких, как постоянная Планка и число Авогадро), содержали ошибку, превышавшую 0,5%. Для фундаментальных констант это немало.

Итак, отбрасывая выпадающий из общей выборки результат, следует руководствоваться объективными критериями.

Пусть, при измерении периода колебаний маятника было получено шесть результатов (в секундах):

$$3,8; 3,5; 3,9; 3,9; 3,4; 1,8, \quad (6.1)$$

Необходимо решить, следует ли отбросить последний результат, как промах.

Допустим, мы тщательно контролировали условия проведения каждого измерения и помним, что при проведении последнего были вынуждены использовать другой секундомер, который, как показала последующая проверка, отстаёт. В этом случае последний результат должен быть отброшен. Но не всегда удастся найти внешнюю причину аномального результата.

Другой путь – продолжать измерения. Допустим, мы продлили выборку до 100 измеренных значений. Если при этом величина, близкая к аномальной снова не появилась, вопрос о том, следует ли учитывать аномальный результат или нет снимается сам собой – на значение среднего этот результат уже не влияет. Если же данный результат возникает снова – возможно это самая интересная часть измерений, отражающая важный эффект, и с ней следует разобраться досконально. Однако, повторять измерение 100 раз в каждом случае, когда возникают сомнения, непрактично. Поэтому решение отбрасы-

вать или нет аномальный результат, делается на основании анализа самих результатов. Правда такого рода анализ достаточно разработан только для случая выборки, элементы которой подчиняются нормальному закону распределения.

Идея метода состоит в том, что подсчитывают вероятность получить отклонение результата наблюдения от среднего, равное отклонению подозрительного результата или большее. Если эта вероятность мала, то результат считают промахом и исключают из выборки, если же эта вероятность достаточно велика, то отклонение результата считают естественным в условиях нормального распределения и оставляют его.

Что значит “вероятность появления мала или велика”? Для решения этого вопроса задаются некоторым значением вероятности, которое отделяет область малых вероятностей от области достаточно больших. Это граничное значение вероятности называется уровнем значимости и обозначается буквой β . Если число наблюдений в выборке (объем выборки) порядка 10 , то вероятность появления каждого элемента порядка 0,1 или 10%. Поэтому в качестве границы маловероятных значений (в качестве уровня значимости β) выбирают вероятность 0,05 (5%) или даже 0,01 (1%). На практике вероятность обычно не считают, а пользуются уже готовыми таблицами, в которых для некоторых заранее заданных уровней значимости β (обычно это 0,1; 0,05; 0,025; 0,01) подсчитаны значения критических отклонений, выраженных в относительных единицах:

$$V_{\text{критич}} = \left| \frac{X_{\text{аном}} - \bar{X}}{S} \right|, \quad (6.2)$$

где $X_{\text{аном}}$ - значение из выборки, подозреваемое на промах, $\bar{X}$ - среднее значение результата, вычисленное вместе со значением, подозреваемым на

промах, $S = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}$ - среднеквадратичное отклонение наблюдений, так же вычисленное с учетом подозреваемой величины.

Итак, для проверки подозреваемого результата на промах следует:

а). вычислить $V_{\text{макс}} = \left| \frac{X_{\text{аном}} - \bar{X}}{S} \right|$; (6.3)

б). задать уровень значимости β (как правило мы будем принимать его равным 0,05, т.е. считать, что при вероятности выпадения аномального значения ниже 5%, его можно отбросить);

в). в соответствующей статистической таблице (например, Таблица 2) по выбранному значению β и объему выборки N найти $V_{\text{критич}}$;

г). если $V_{\max} < V_{\text{критич}}$, то оцениваемый результат $X_{\text{аном}}$ промахом не является, если же $V_{\max} \geq V_{\text{критич}}$, то при выбранном уровне значимости β подозрительный результат следует считать промахом, исключить из выборки, а по оставшимся $N - 1$ результатам заново определить $\bar{X}$ и $S_{\bar{X}}$, которые и использовать при записи результата измерения.

Описанный подход в определении промахов называют критерием Шовене. Его можно применять многократно, т.е., после того, как отброшена одна величина, остальные $N-1$ можно снова подвергнуть проверке на наличие промаха по той же схеме.

Таблица 2. Значения критических отклонений $V_{\text{критич}}$ при оценке выпадающих измерений на промах

N	β			N	β		
	0.1	0.05	0.01		0.1	0.05	0.01
3	1.41	1.41	1.41	13	2.26	2.43	2.71
4	1.65	1.69	1.72	14	2.30	2.46	2.76
5	1.79	1.87	1.96	15	2.33	2.49	2.80
6	1.89	2.00	2.13	16	2.35	2.52	2.84
7	1.97	2.09	2.27	17	2.38	2.55	2.87
8	2.04	2.17	2.37	18	2.40	2.58	2.90
9	2.10	2.24	2.46	19	2.43	2.60	2.93
10	2.15	2.29	2.54	20	2.45	2.62	2.96
11	2.19	2.34	2.61	22	2.49	2.66	3.01
12	2.23	2.39	2.66	25	2.54	2.72	3.07

На примере выборки (6.1)

3,8; 3,5; 3,9; 3,9; 3,4; 1,8 (с)

разберем, как проводить проверку выпадающего измерения на промах.

Среднее значение этой серии, найденное по всем шести величинам выборки равно $\bar{X} = 3,4$ с.

Среднеквадратичное отклонение наблюдений $S = 0,8$ с.

Максимальное относительное критическое отклонение

$$V_{\text{макс}} = \left| \frac{X_{\text{аном}} - \bar{X}}{S} \right| = 2.$$

В Таблице 2 для уровня значимости $\beta=0,05$ и $N=6$ находим $V_{\text{критич}} = 2.00$.

Условие $V_{\text{макс}} \geq V_{\text{критич}}$ хотя и на пределе, но выполняется, и значение 1,8 с следует считать промахом и отбросить.

Задания для самостоятельного решения (каждому студенту следует решить одну из задач по указанию преподавателя).

1. При измерении длины получены результаты (в мм):
44, 46, 48, 38, 45, 58, 47, 44, 43, 45.
Исследуйте на промах максимальное значение.
С учетом предыдущего исследования, исследуйте на промах минимальное значение.
2. Студент измеряет некую разность потенциалов (в Вольтах) и получает результаты:
0,86; 0,83; 0,87; 0,84; 0,82; 0,95; 0,83; 0,85; 0,89; 0,88.
Проведите исследование аномального результата на промах согласно критерию Шовене.
Сколько результатов, так же отличающихся от среднего, как и аномальный, следует ожидать?
3. Студент делает 14 измерений периода колебаний генератора (в десятых долях секунды):
7, 3, 9, 3, 6, 9, 8, 7, 8, 12, 5, 9, 9, 3.
Исследуйте результат 12 на промах согласно критерию Шовене. Сколько результатов, так же отличающихся от среднего, как и 12, следует ожидать?

7. Число измерений, необходимое для получения заданной точности

После проведения измерений и обработки их результатов при выбранной доверительной вероятности W доверительный интервал для результата измерений может оказаться слишком широким (слишком велика случайная погрешность измерений, измерения проведены грубо). Поскольку с ростом числа измерений

средняя квадратичная погрешность результата измерений $S_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{N}}$, а с ней и

доверительный интервал $\Delta X = t_{N,W} S_{\bar{X}}$, уменьшается, то может возникнуть желание (или необходимость) увеличивая число измерений получить желаемый (или требуемый) доверительный интервал при заданной доверительной вероятности.

Эта задача рассматривается в разделе математической статистики, называемом планированием эксперимента.

На случай нормального распределения измеряемой случайной величины существуют статистические таблицы (например, Таблица 3), помогающие рассчитать необходимое для получения заданной точности число проведенных измерений N .

Для определения числа измерений N , необходимого для получения заданного доверительного интервала при выбранной доверительной вероятности W , поступают следующим образом:

а). задают доверительный интервал ΔX ;

б). используя уже подсчитанное по результатам измерений выборочное среднеквадратичное отклонение измерений от среднего

$$S = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}, \text{ образуют относительный интервал}$$

$$\varepsilon = \Delta X / S; \quad (7.1)$$

в). задаются доверительной вероятностью W (или , что численно то же самое, надежностью α);

г) по ε и W (или α), используя Таблицу 3 (или аналогичную), находят число измерений N , необходимое для получения заданного доверительного интервала с выбранной вероятностью (надежностью).

Таблица 3. Число измерений N , необходимое для получения случайной относительной погрешности ε с надежностью α

ε	α			
	0,9	0,95	0,99	0,999
1,0	5	7	11	17
0,5	13	18	31	50
0,4	19	27	46	74
0,3	32	46	78	130
0,2	70	100	170	280
0,1	270	390	700	1100
0,05	1100	1500	2700	4300
0,01	27000	38000	66000	110000

8. Проблема объединения результатов разных измерений

Часто возникает необходимость объединить результаты измерения одной и той же величины, проведенные либо в разное время, либо разными экспериментаторами, либо даже сделанные в разных лабораториях на разном оборудовании. Как объединить эти результаты, чтобы получить единственную наилучшую оценку?

Пусть, например, студенты А и Б провели тщательные независимые измерения одной и той же величины X . При этом студент А получил среднее значение этой величины $\overline{X}_A$ и среднеквадратичное отклонение среднего (стандартное отклонение среднего) $S_{\overline{X}_A}$ (см. ф.(4.7)), а студент Б получил соответствующие значения $\overline{X}_B$ и $S_{\overline{X}_B}$.

Прежде чем рассматривать, как лучше соединить эти результаты, чтобы получить единственную наилучшую оценку X , отметим, что если различие между

двумя измерениями $|\overline{X}_A - \overline{X}_B|$ заметно больше обеих погрешностей $S_{\overline{X}_A}$

и $S_{\overline{X}_B}$, то очевидно что-то не в порядке по крайней мере хотя бы в одном из измерений. В этом случае можно утверждать, что рассматриваемые измерения противоречивы, и необходим тщательный их анализ с целью проверки, не связано ли одно из них (или оба сразу) с невыявленными систематическими ошибками.

Если два измерения непротиворечивы, имеет смысл искать наилучшую оценку $X_{\text{наил}}$ истинного значения X , основанную на этих двух измерениях. Первое, что приходит в голову, в качестве такой оценки взять среднее значение двух

измерений $\frac{\overline{X}_A + \overline{X}_B}{2}$, но этот путь не подходит, если две погрешности $S_{\overline{X}_A}$

и $S_{\overline{X}_B}$ не равны - вычисление простого среднего $\frac{\overline{X}_A + \overline{X}_B}{2}$ делает одинаково важными оба измерения, в то время как более точному следует приписать больший вес.

Пусть результаты обоих измерений подчиняются распределению Гаусса, тогда, согласно ф. (4.1), вероятность $W_\mu(\overline{X}_A)$ того, что студент А получит свое частное значение $\overline{X}_A$, пропорциональна

$$W_\mu(\overline{X}_A) \sim \frac{1}{S_{\overline{X}_A}} e^{-\frac{(\overline{X}_A - \mu)^2}{2S_{\overline{X}_A}^2}}, \quad (8.1)$$

а вероятность $W_{\mu}(\overline{X}_B)$ того, что студент Б получит свое частное значение $\overline{X}_B$, пропорциональна

$$W_{\mu}(\overline{X}_B) \sim \frac{1}{S_{\overline{X}_B}} e^{-\frac{(\overline{X}_B - \mu)^2}{2S_{\overline{X}_B}^2}}. \quad (8.2)$$

Здесь μ - истинное (неизвестное) значение, введение индекса μ у вероятностей в явном виде указывает на зависимость этих вероятностей от неизвестного истинного значения (кроме того, эти вероятности зависят от соответствующих ширин

$S_{\overline{X}_A}$ и $S_{\overline{X}_B}$).

Студенты работали независимо, поэтому вероятность $W_{\mu}(\overline{X}_A, \overline{X}_B)$ того, что студент А получил значение $\overline{X}_A$ а студент Б значение $\overline{X}_B$ равна произведению вероятностей (8.1) и (8.2)

$$W_{\mu}(\overline{X}_A, \overline{X}_B) = W_{\mu}(\overline{X}_A) W_{\mu}(\overline{X}_B) \sim \frac{1}{S_{\overline{X}_A} S_{\overline{X}_B}} e^{-\frac{\chi^2}{2}}, \quad (8.3)$$

где

$$\chi^2 = \left(\frac{\overline{X}_A - \mu}{S_{\overline{X}_A}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{X}_B - \mu}{S_{\overline{X}_B}}\right)^2 \quad (8.4)$$

важная величина, представляющая собой сумму квадратов отклонений результатов двух измерений от истинного значения, деленных на соответствующие погрешности. Иногда эту величину называют «суммой квадратов».

Наилучшей оценкой μ будет значение, при котором вероятность (8.3) максимальна, или, что то же самое, минимален показатель экспоненты χ^2 .

Поскольку максимизация вероятности влечет за собой минимизацию «суммы квадратов» χ^2 , этот метод оценки μ называют «методом наименьших квадратов».

Т.о., для определения наилучшей оценки необходимо продифференцировать (8.4) по μ и приравнять производную к нулю, в результате получим

$$2\left(\frac{\overline{X}_A - \mu}{S_{\overline{X}_A}^2}\right) + 2\left(\frac{\overline{X}_B - \mu}{S_{\overline{X}_B}^2}\right) = 0. \quad (8.5)$$

Решая это уравнение относительно μ , получаем наилучшую оценку $X_{\text{наил}}$,

равную

$$X_{\text{наил}} = \left(\frac{\overline{X_A}}{S_{X_A}^2} + \frac{\overline{X_B}}{S_{X_B}^2} \right) / \left(\frac{1}{S_{X_A}^2} + \frac{1}{S_{X_B}^2} \right). \quad (8.6)$$

Этот результат можно записать компактнее, если ввести обозначения для весов

$$w_A = \frac{1}{S_{X_A}^2} \quad \text{и} \quad w_B = \frac{1}{S_{X_B}^2}. \quad (8.7)$$

Подставляя (8.7) в (8.6), получим

$$X_{\text{наил}} = \frac{w_A \overline{X_A} + w_B \overline{X_B}}{w_A + w_B}. \quad (8.8)$$

Если два исходных измерения одинаково точны ($S_{X_A} = S_{X_B}$ и, следовательно $w_A = w_B$), то $X_{\text{наил}}$ оказывается равным простому среднему значению $\frac{\overline{X_A} + \overline{X_B}}{2}$. В общем случае формула (8.8) дает взвешенное среднее; это выражение аналогично формуле для центра масс двух тел и переходит в него, если веса w_A и w_B заменить на массы двух тел, а $\overline{X_A}$ и $\overline{X_B}$ на их координаты.

Если измерения студента А точнее измерений студента Б, то

$S_{X_A} < S_{X_B}$, и следовательно, $w_A > w_B$; поэтому $X_{\text{наил}}$ будет ближе к $\overline{X_A}$, чем к $\overline{X_B}$, как и должно быть.

Обобщим полученные результаты на произвольное число серий измерений одной и той же величины.

Пусть в N сериях измерений получены отдельные значения одной и той же физической величины с соответствующими погрешностями

$$\overline{X_1} \pm S_{X_1}; \overline{X_2} \pm S_{X_2}; \dots; \overline{X_N} \pm S_{X_N}. \quad (8.9)$$

Рассуждая по изложенной выше схеме мы получим, что наилучшая оценка, основанная на этих измерениях, равна взвешенному среднему

$$X_{\text{наил}} = \frac{\sum_{i=1}^N w_i \overline{X_i}}{\sum_{i=1}^N w_i}, \quad (8.10)$$

где веса w_i - это обратные значения квадратов соответствующих погрешностей

$$w_i = \frac{1}{S_{\overline{X_i}}^2} \quad (8.11)$$

для $i=1, 2, \dots, N$.

Т.к. вес $w_i = \frac{1}{S_{\overline{X_i}}^2}$, связанный с конкретным измерением, содержит

квадрат соответствующей погрешности $S_{\overline{X_i}}$, то измерение менее точное, чем остальные, внесет значительно меньший вклад в конечный результат (8.10).

Например, если одно измерение в 3 раза менее точное, чем остальные, то его вес в 9 раз меньше весов других измерений, и на практике это измерение можно просто игнорировать.

Поскольку конечный результат (8.10) для $X_{\text{наил}}$ – это простая функция исходных значений $\overline{X_1}, \overline{X_2}, \dots, \overline{X_N}$, то погрешность нашего результата несложно вычислить методом расчета ошибок косвенных измерений. В результате получим

$$S_{X_{\text{наил}}} = \sqrt{\sum_{i=1}^N w_i}. \quad (8.12)$$

Задания для самостоятельного решения (каждому студенту следует решить одну из задач по указанию преподавателя).

1. Три студента измеряли сопротивление несколько раз и получили три следующих результата (в Омах) 11 ± 1 , 12 ± 1 , 10 ± 3 . Какова наилучшая оценка сопротивления и ее погрешность по этим трем результатам? Можно ли полностью игнорировать результаты третьего студента? Если да, то какова наилучшая оценка сопротивления и ее погрешность?
2. Два измерения скорости звука дают результаты (в м/с) 334 ± 1 ; 336 ± 2 .
Можно ли считать эти результаты непротиворечивыми? Если да, то вычислите наилучшую оценку скорости звука и ее погрешность.
Ответьте на те же вопросы для результатов 334 ± 1 ; 336 ± 5 .

3. Два студента измеряют сопротивление различными методами. Каждый проводит по 10 измерений и вычисляет среднее и стандартное отклонение. Пусть студентами получены результаты (в Омах) 72 ± 8 ; 78 ± 5 . Рассматривая оба результата, найдите наилучшую оценку сопротивления и ее погрешность. Оцените приблизительно, сколько измерений должен сделать первый студент (используя свой метод измерений), чтобы вес его результата был такой же, как и у второго студента.

9. Точность записи результатов измерений и правила округлений

Точность записи (число значащих цифр) отдельных измерений и последующих вычислений при их обработке должна быть согласована с необходимой точностью результата измерения. Здесь в начальной учебной лаборатории рекомендуется придерживаться следующих правил.

1. При числе измерений менее 100 окончательную погрешность результата измерения следует округлять до одной значащей цифры. Например, если расчет погрешности дает 0,347 м/с, то это значение нужно округлить до 0,3 м/с. Есть только одно исключение из этого правила – если первая значащая цифра в погрешности 1, то сохраняют две значащие цифры в погрешности. Пусть, например, некоторый расчет дал погрешность 0,14, округлив это значение до 0,1, мы уменьшим ошибку сразу на 40%, так что правильнее в этом случае – привести в качестве погрешности величину 0,14.

2. Число цифр в результатах промежуточных расчетов обычно должно быть на одну больше, чем в окончательном результате. Погрешности при промежуточных вычислениях должны быть выражены не более чем тремя значащими цифрами.

3. Когда погрешность в измерении рассчитана, необходимо проанализировать, какие цифры в измеренной величине являются значимыми. Утверждение типа $L = 127, 547 \pm 2$ см нелепо. Погрешность 2 означает, что вместо цифры 7 на третьем месте от начала в действительности может быть любая цифра в интервале от 5 до 9, последующие же цифры 5, 4 и 7 приводить вовсе бессмысленно, и они должны быть округлены. Корректная запись результата будет выглядеть так

$$L = 128 \pm 2 \text{ см.}$$

Т.е. округлять результат измерения следует так, чтобы он оканчивался цифрой того же разряда, что и значение погрешности.

4. Если первая (слева направо) из заменяемых нулями или отбрасываемых цифр меньше 5, то оставшиеся цифры не изменяют. Лишние цифры в целых числах заменяют нулями, а в десятичных дробях отбрасывают. Например, при сохранении четырех значащих цифр число 782 447 должно быть округлено до 782 400; число 283,437 – до 283,4.

5. Если первая из заменяемых нулями или отбрасываемых цифр равна 5, а за ней не следует никаких цифр или идут нули, то округление производят до ближайшего четного числа, т.е. четную последнюю цифру или нуль оставляют без изменения, нечетную увеличивают на единицу. Например, при сохранении трех значащих цифр число 264,50 округляют до 264; число 645,5 округляют до 646.

6. Если первая из заменяемых нулями или отбрасываемых цифр больше 5 или равна 5, но за ней следует отличная от нуля цифра, то последнюю оставляемую цифру увеличивают на единицу. Например, при сохранении трех значащих цифр число 17,58 округляют до 17,6; число 18598 – до 18600; число 352,512 – до 353.

В настоящее время выработаны некоторые общие правила записи физических констант, результатов измерений и расчетов, ставшие фактическим стандартом (по крайней мере, в физике). Все указанные исходные данные, предполагаемые для дальнейшего использования, записывают только значащими цифрами (в виде десятичных дробей). Запятую ставят сразу после первой отличной от нуля цифры, а число (в составе значащих цифр) умножают на десять в соответствующей степени. Нули, стоящие в начале или конце числа, как правило, не записывают. Например, числа 0,00435 и 234000 записывают в виде $4,35 \cdot 10^{-3}$ и $2,34 \cdot 10^5$. Подобная запись, иногда называемая **стандартной**, упрощает возможные дальнейшие вычисления, особенно в случае формул, удобных для логарифмирования (т.е. умножение, деление, возведение в степень и т.п.),

Именно в такой стандартной форме в физических справочниках приводят основные физические константы. Например, скорость света в вакууме $c = 2,9979 \cdot 10^8$ м/с, заряд электрона $e = 1,60219 \cdot 10^{-19}$ Кл и т.д. Подобным же образом с использованием стандартной формы числа можно записать и полный результат измерения, т.е. с учетом ошибки, например, $(2,3407 \pm 0,0002) \cdot 10^{-3}$ А, естественно, дополнительно указав доверительную вероятность, если здесь ошибка – случайная.

10. Правила графического представления результатов. Метод наименьших квадратов для случая линейной зависимости

10.1 Графическое представление результатов измерений

Результаты эксперимента важно представить в наглядной форме, удобной для использования и обработки. С этой целью составляют таблицы, строят графики, выражают полученные закономерности аналитически, с помощью формул.

Представленные в виде таблиц данные легче сравнивать, анализировать, подвергать дальнейшей обработке.

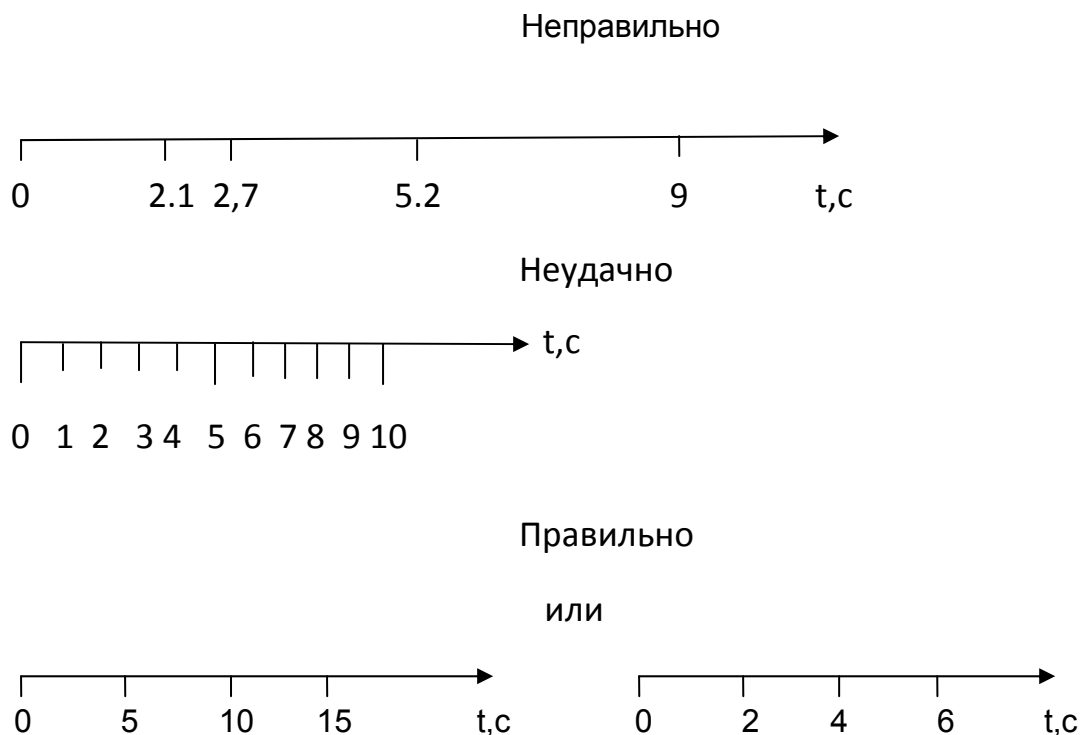
При построении графика функциональная зависимость становится явной, а результаты опыта наглядными. Чаще всего график представляет зависимость между двумя переменными. При его построении необходимо пользоваться определенными правилами.

1. График выполняется на миллиметровой бумаге, на которую наносятся координатные оси. Для величины, зависимость от которой рассматривается, всегда используется ось абсцисс.

2. График должен содержать надпись, из которой было бы ясно физическое содержание представленной закономерности.

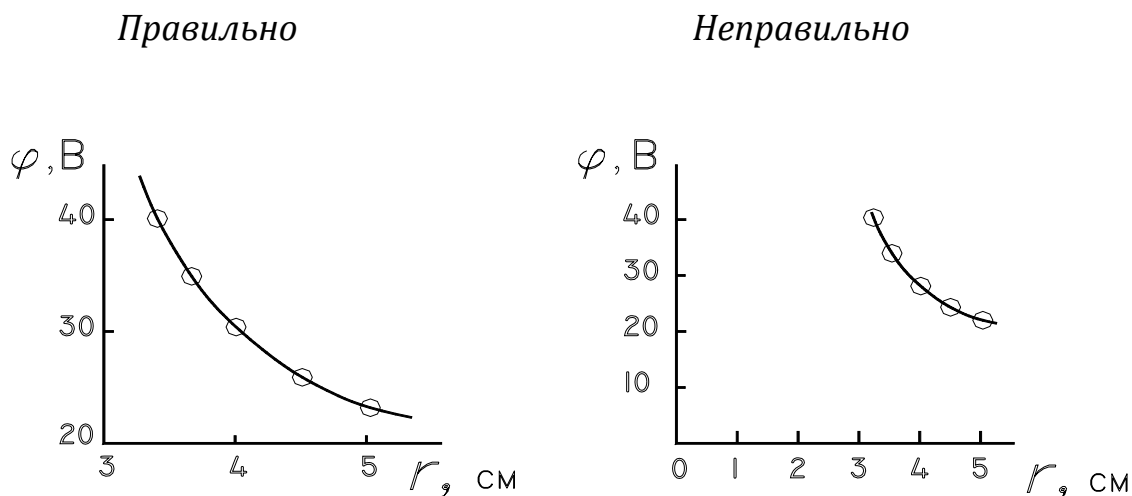
3. На оси наносится масштаб, неудачный выбор которого – одна из наиболее распространенных ошибок, зачастую обесценивающая график. При выборе масштаба необходимо помнить, что точность построения графика должна быть не ниже точности измерений. Масштаб наносится равноотстоящими друг от друга делениями так, чтобы расстояние между ними составляло 1, 2, 5 единиц (допустимы 2,5 и 4). Число делений с цифрами на каждой оси составляет обычно от 4 до 10. На рис.4 приведены примеры правильного и неправильного нанесения масштаба.

Рис. 4. Примеры неправильного, неудачного и правильного нанесения масштаба



4. Масштаб нужно выбирать так, чтобы кривая заняла весь лист (см. рис.5), а погрешность измерения соответствовала одному-двум мелким делениям графика. При этом начало отсчета не обязательно начинать с нуля, иногда удобнее выбирать округленное число, отличное от нуля.

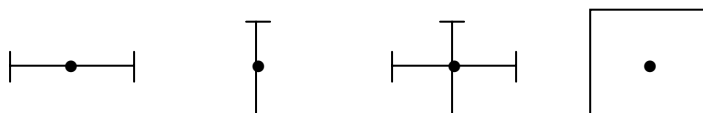
Рис. 5. Примеры правильного и неправильного выбора масштаба и начала отсчета



5. На концах осей указываются откладываемые величины и, через запятую, используемые единицы их измерения. Обычно туда же выносятся и порядок масштаба ($10^{\pm n}$, где n – целое число).

6. Экспериментальные значения величин (точки) отчетливо наносятся вместе с погрешностями - отрезками длиной в доверительный интервал (или систематическую погрешность), расположенными параллельно соответствующей оси (см. рис 6).

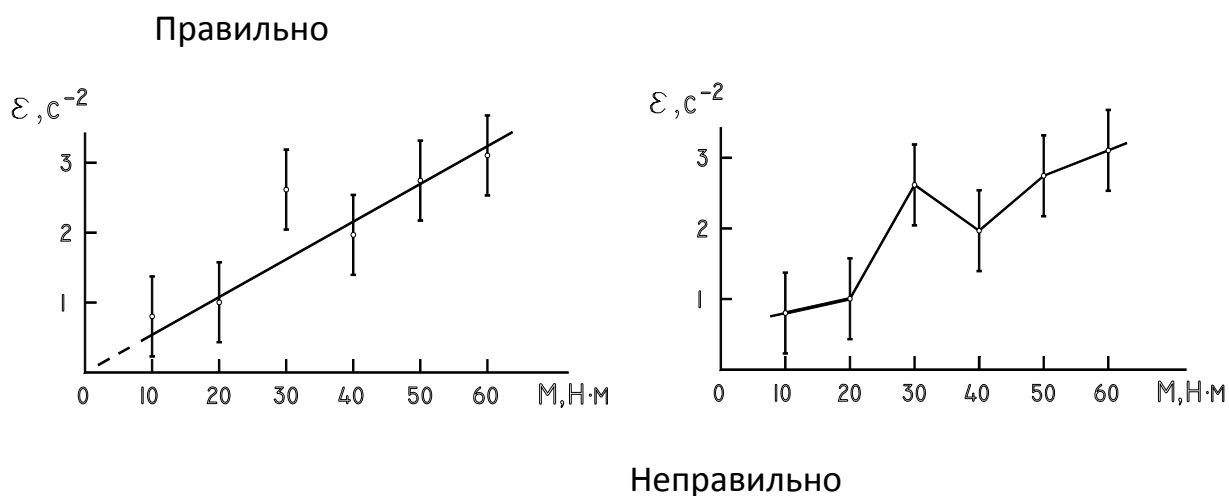
Рис. 6 Варианты нанесения на график экспериментальных точек вместе с доверительными интервалами (или систематическими погрешностями)



Если при построении кривой в выбранном масштабе доверительные интервалы не видны *вдоль обеих осей координат*, экспериментальные точки проставляются в виде маленьких кружочков (треугольников и т.д.) с центром в точке, соответствующей экспериментальным данным.

7. Экспериментальная кривая проводится плавно через доверительные интервалы всех или большинства экспериментальных точек так, чтобы экспериментальные точки наиболее близко и равномерно располагались с разных сторон кривой (см. рис.7, на котором речь идет о линейной зависимости). При этом сумма отрезков отклонений точек от кривой в одну сторону должна быть равна сумме отклонений точек от этой же кривой в другую сторону; по возможности не должно быть очень больших отклонений точек от кривой, лучше иметь два-три небольших отклонения, чем одно большое.

Рис. 7. Правильное и неправильное представление данных на графике



Исключение составляет градуировочный график, на котором точки соединяются последовательно прямыми линиями, так как при этом мы считаем

значения величин точными, а кривая служит для отыскания промежуточных значений линейной интерполяцией.

8. Если на графике изображается теоретическая кривая, то указывается формула, по которой она рассчитывается.

9. При изображении нескольких кривых на одном поле графика каждая из них нумеруется или выделяется каким-то другим способом. В свободной части поля даются соответствующие пояснения.

10.2 Построение прямой методом парных точек

Угловой коэффициент k линейной зависимости

$$y=k \cdot x+b \quad (10.1)$$

можно достаточно точно определить методом парных точек.

Пронумеруем экспериментальные точки и возьмем две из них, например 1 и 4, и проведем через них прямую. Угловой коэффициент этой прямой равен

$$k_1 = \frac{y_4 - y_1}{x_4 - x_1}.$$

Возьмем другую пару точек - 2 и 5, снова построим прямую и

определим ее угловой коэффициент. Проведя таким образом еще несколько прямых, получим набор угловых коэффициентов. Их среднее даст коэффициент k искомой прямой. Погрешность углового коэффициента Δk определяется так же, как и погрешность серии измерений. Пары точек для проведения вспомогательных прямых следует выбирать так, чтобы расстояния между x -ми координатами этих точек для всех пар были одинаковыми и немного превышали половину всего интервала значений величины x . При этом точность определения k будет наибольшей, лишь немного уступающей точности при использовании метода наименьших квадратов (см. ниже).

Для нахождения b нужно учесть, что наилучшая прямая должна проходить через центр тяжести экспериментальных точек, т.е. через точку с координатами, равными средним значениям $\bar{X}$ и $\bar{y}$, вычисляемым согласно формуле (4.4). следовательно, b находится из уравнения прямой $b = \bar{y} - k\bar{x}$. Оценка погрешности b делается так, как это принято для косвенных измерений.

10.3 Метод наименьших квадратов для случая линейной зависимости

Окончательная обработка результатов эксперимента предполагает определение аналитической зависимости между величинами. Зачастую известно, что эта зависимость линейная, или можно предположить, что это так, глядя на расположение экспериментально полученных точек. В этом случае необходимо наилучшим образом определить параметры описывающей эту зависимость прямой.

На первом графике рисунка 7 прямая проведена в определенной мере произвольно, можно привести достаточно разумные, но все равно субъективные обоснования того, что она должна идти несколько иначе, например, с чуть большим углом наклона. Метод наименьших квадратов в случае линейной зависимости позволяет достаточно просто однозначно определять параметры этой зависимости, исходя из данных эксперимента.

Итак, пусть величины y и x связаны линейной зависимостью

$$y=k \cdot x+b,$$

нахождение углового коэффициента k и свободного члена b методом наименьших квадратов сводится к определению таких их значений, при которых сумма квадратов расстояний от прямой $y=k \cdot x+b$ до экспериментальных точек с координатами x_i, y_i ($i=1,2, \dots, n$) была бы наименьшей. Это эквивалентно минимуму суммы

$$\sum_{i=1}^n (y_i - kx_i - b)^2. \quad (10.2)$$

Т.е. величины k и b выбраны оптимально, если

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial k} \left[\sum (y_i - kx_i - b)^2 \right] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial b} \left[\sum (y_i - kx_i - b)^2 \right] = 0 \end{cases}. \quad (10.3)$$

Учет этих условий минимальности суммы (10.2) дает два уравнения, которые можно использовать для определения k и b

$$\begin{cases} \sum x_i \cdot y_i = k \cdot \sum x_i^2 + b \cdot \sum x_i \\ \sum y_i = k \cdot \sum x_i + n \cdot b \end{cases}. \quad (10.4)$$

Если ввести обозначения средних значений

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{и} \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i, \quad (10.5)$$

то систему уравнений (10.4) можно записать в виде

$$\begin{cases} k = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \\ b = \bar{y} - k \cdot \bar{x} \end{cases} \quad (10.6)$$

Метод наименьших квадратов позволяет найти и погрешность определения величин k и b . Приведем только результаты расчетов этих погрешностей.

Средняя квадратическая погрешность определения углового коэффициента k равна

$$S_k = \sqrt{\frac{\sum (y_i - k \cdot x_i - b)^2}{(n-2) \sum (x_i - \bar{x})^2}} \quad (10.7)$$

Средняя квадратическая погрешность определения свободного члена b равна

$$S_b = \sqrt{\frac{\sum (y_i - kx_i - b)^2 \cdot \left[\sum (x_i - \bar{x})^2 + \bar{x} \cdot \sum x_i \right]}{n \cdot (n-2) \cdot \sum (x_i - \bar{x})^2}}, \text{ или}$$

$$S_b = S_k \cdot \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 + \bar{x} \cdot \sum x_i}{n}} \quad (10.8)$$

Доверительные интервалы для величин k и b находим, умножая найденные среднеквадратичные отклонения на коэффициенты Стьюдента.

Задание для студентов.

Выполняя в лаборатории молекулярной физики Лабораторную работу №1 «Определение показателя адиабаты воздуха» (см. И.В.Милютин, С.Р.Галлямов, С.Н.Костенков Лабораторные работы по молекулярной физике. УдГУ, 2009г.), для каждой из трех проводимых серий измерений сначала постройте методом парных точек оценочный график зависимости

$$\ln \frac{\Delta P}{\Delta P_1} = - \frac{\alpha}{m_0 \cdot c_p} \tau + \ln \frac{\gamma - 1}{\gamma} \quad (\text{ф.}(21) \text{ в тексте лабораторной работы}),$$

проведя его штриховой линией. Затем определите методом наименьших квадратов угловой коэффициент и свободный член этой зависимости и проведите соответствующую прямую сплошной линией на том же графике. Определите так же доверительные интервалы этих величин с вероятностью 0,95.

Опираясь на метод наименьших квадратов, определите доверительный интервал показателя адиабаты (с той же вероятностью).

ЛИТЕРАТУРА

Использованная литература

1. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок. М.: Мир, 1985. 272 с.
2. Сквайрс Дж. Практическая физика. М.: Мир, 1971. 246 с.
3. Кассандрова О.Н., Лебедев В.В. Обработка результатов наблюдений. М.: Наука, 1970. 104 с.
4. Краткие сведения по обработке результатов физических измерений. Методические указания для студентов физического факультета. Составитель Г. П. Яковлев. Екатеринбург. Изд-во УрГУ, 2001. 26 с.
5. Оценка погрешностей при физических измерениях. Методическая разработка. Составители: В.Ю.Волощенко, В.Г.Сапогин. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2004. 31 с.

Дополнительная литература:

1. Зайдель А. Н. Ошибки измерений физических величин. Л., 1974.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1964.
3. Фаддеев М.А. Элементарная обработка результатов эксперимента: Учебное пособие. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2002. 108 с.
4. Деденко Л.Г., Керженцев В.В. Математическая обработка и оформление результатов эксперимента/ Под ред. проф. А.Н.Матвеева. М.: МГУ, 1977.
5. Шенк Х. Теория инженерного эксперимента. М.: Мир, 1972 г.
6. Худсон Д. Статистика для физиков. М.: Мир, 1970 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	стр. 3.
1. Измерения, их роль. Прямые и косвенные измерения. Погрешности измерений... ..	4.
2. Абсолютная и относительная погрешности. Классификация погрешностей: систематические и случайные погрешности, промахи.	5.
3. Промахи и систематические погрешности. Пути их устранения или учета.	6.
4. Случайные погрешности прямых измерений.	8.
4.1 Нормальное распределение (распределение Гаусса). Дисперсия.	8.
4.2 Вычисление случайной погрешности прямых измерений.	10.
4.3 Связь систематических и случайных ошибок.	12.
5. Оценка погрешностей косвенных измерений.	13.
<i>Практическая работа №1.</i> Определение времени реакции человека.	14.
<i>Практическая работа №2.</i> Влияние систематических ошибок и выбранного метода измерений на результаты непосредственных измерений.	15.
7. Проблема отбрасывания данных.	18.
<i>Задания для самостоятельного решения.</i>	21.
8. Число измерений, необходимое для получения заданной точности.	21.
9. Проблема объединения результатов разных измерений.	23.
<i>Задания для самостоятельного решения.</i>	26.
10. Точность записи результатов измерений и правила округлений.	27.
11. Правила графического представления результатов. Метод наименьших квадратов для случая линейной зависимости.	28.
10.1 Графическое представление результатов измерений.	28.
10.2 Построение прямой методом парных точек.	31.
10.3 Метод наименьших квадратов для случая линейной зависимости.	32.
<i>Задание для студентов.</i>	33.
Литература.	34.

Составитель

Игорь Владимирович Милютин

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОШИБОК

Краткие рекомендации по организации, проведению физического эксперимента,
обработке и представлению его результатов

учебно - методическое пособие для студентов специальностей «Физика»
и «Физика конденсированного состояния вещества»

Печатается с оригинал-макета заказчика