Министерство образования и науки РФ
ГОУВПО «Удмуртский государственный университет»
Факультет информационных технологий
и вычислительной техники

В.В. Головизин

Практические занятия по курсу «Алгебра и геометрия». Часть I

Учебно-методическое пособие

Ижевск 2010

УДК 514.2
ББК 22.151
Г 60

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим советом УдГУ

Рецензенты: к.п.н. **Н.А. Баранова**
к.ф.-м.н. **В.И. Родионов**

Головизин В.В.
Г60 Практические занятия по курсу «Алгебра и геометрия». Ч. 1: учеб.-метод. пособие. Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2010. 151 с.

Данная часть пособия состоит из первых 17 практических занятий первого семестра, каждое из которых посвящено отдельной теме, содержит примеры решений задач, задачи для аудиторного решения, задачи повышенного уровня сложности, домашнее задание, четыре варианта самостоятельной работы, рассчитанных на решение в аудитории в течение 10 – 15 минут, и небольшой тест для самопроверки.

Пособие предназначено для студентов, изучающих курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Оно может быть полезно преподавателям, ведущим практические занятия, а также студентам, изучающим данную дисциплину в рамках дистанционного обучения.

УДК 514.2
ББК 22.151

© Головизин В.В., 2010

© Издательство «Удмуртский университет», 2010

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 4
ПЗ 1 Решето Эратосфена 5
ПЗ 2 Алгоритм Евклида 9
ПЗ 3 Сравнения по модулю 15
ПЗ 4 Сравнения 1-й степени 25
ПЗ 5 Комплексные числа 37
ПЗ 6 Квадратные корни из комплексных чисел . . . 44
ПЗ 7 Линейные операции с векторами 48
ПЗ 8 Декартовая система координат на прямой . . 58
ПЗ 9 Прямоугольная декартовая система координат на плоскости 69
ПЗ 10 Прямоугольная декартовая система координат в пространстве 80
ПЗ 11 Геометрический центр тяжести системы материальных точек и плоских фигур. 88
ПЗ 12 Полярная система координат на плоскости . . 95
ПЗ 13 Комплексная плоскость 105
ПЗ 14 Корни из комплексных чисел 114
ПЗ 15 Скалярное произведение векторов 126
ПЗ 16 Векторное произведение. 135
ПЗ 17 Смешанное произведение векторов 141
Список рекомендуемой литературы 150

«Ученик – это не мешок, который нужно заполнить, а факел, который нужно зажечь.»

Предисловие

Пособие предназначено, в первую очередь, для студентов первого курса, изучающих курс "Алгебра и геометрия" на факультетах ИТВТ и ФЭ, оно может быть полезным студентам математического факультета и студентам заочной формы обучения.

Имеется несколько причин, вызывающих необходимость появления на свет данного пособия. Во-первых, студентам очень удобно знать заранее, какая тема будет изучаться на каждом практическом занятии. Во-вторых, студент имеет возможность заранее подготовиться, для чего достаточно просмотреть примеры решения задач. Здесь же приведено домашнее задание, а задания для самостоятельных работ и тесты акцентируют внимание студентов на ключевых вопросах занятия, и позволяют ему проверить понимание текущей темы. В-третьих, в пособии учитывается весьма различный уровень математической подготовки студентов первого курса, что весьма актуально в последние годы. Это достигается нарастанием сложности решаемых в аудитории задач и расширением его списка задачами повышенного уровня сложности. И, наконец, данное пособие предоставляет студенту возможность приобрести навыки самостоятельной работы с литературой.

В заключение отметим, что пособие может быть полезно преподавателям при проведении практических занятий, самостоятельных и контрольных работ, для подготовки индивидуальных заданий студентам.

Практическое занятие 1
Решето Эратосфена

Теорминимум: понятие делимости и его свойства, простые и составные числа, решето Эратосфена, основная теорема арифметики.

Задачи для аудиторного решения

1. Составьте таблицу простых чисел не больших 100.
2. Составьте таблицы простых чисел на промежутках:
   а) [100; 200]; б) [200; 300]; в) [300; 500].
3. Найдите все простые числа на промежутках:
   а) [880, 890]; б) [1900, 1910]; в) [4030, 4130].
4. Найдите каноническое разложение в произведение простых множителей числа:
   а) 15!; б) 82 798 848; в) 81057 226 635 000.

Задачи повышенного уровня сложности

5. Для каких натуральных чисел их наибольший собственный делитель является простым числом?
6. Сколькими нулями оканчивается число: а) 25!; б) 200!
7. Найдите все целые решения уравнения $x^2 + 19 = y^2$.

Домашнее задание

1. Составьте таблицу простых не больших 1000.
2. Найдите все простые числа на промежутках:а) [1910, 1920]; б) [4130, 4230].
3. Докажите теорему о свойствах делимости.

Примеры

Пример 1. Составить таблицу простых чисел, не превышающих числа 50.

Решение. Составляем список №1, причем из этого списка сразу исключаем все четные числа, кроме числа 2:

{2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35,

37, 39, 41, 43, 45, 47, 49}.

Составляем список №2. Он состоит из простых чисел, не превосходящих $\sqrt{50}$, т.е. не больше 7:

{2, 3, 5, 7}.

Составляем список №3. Он получается из списка №1 вычеркиванием всех составных чисел кратных простым числам из списка №2. Все четные числа кроме числа 2 из списка №1 уже исключены. Вычеркиваем из списка №1 все числа кратные числу 3, кроме самого числа 3. Заметим, что если число в списке №1 кратно 3, то следующее число кратное 3 стоит в этом списке через две позиции на третьей:

$\{2,3,5,7,\sout{9},11,13,\sout{15},17,19,\sout{21},23,25,\sout{27},29,31,\sout{33},$

$35,37,\sout{39},41,43,\sout{45},47,49\}$

Вычеркиваем из списка №1 все числа кратные числу 5, кроме самого числа 5. Заметим, что если число в списке №1 кратно 5, то следующее число кратное 5 стоит в этом списке через четыре позиции на пятой:

$\{2,3,5,7,\sout{9},11,13,\sout{15},17,19,\sout{21},23,\sout{25},\sout{27},29,31,\sout{33},$

$\sout{35},37,\sout{39},41,43,\sout{45},47,49\}$

Вычеркиваем из списка №1 все числа кратные числу 7, кроме самого числа 7. Заметим, что если число в списке №1 кратно 7, то следующее число кратное 7 стоит в этом списке через шесть позиций на седьмой:

$\{2,3,5,7,\sout{9},11,13,\sout{15},17,19,\sout{21},23,\sout{25},\sout{27},29,31,\sout{33},$

$\sout{35},37,\sout{39},41,43,\sout{45},47,\sout{49}\}$

Выписываем оставшиеся, невычеркнутые числа и получаем список №3, который состоит из искомых простых чисел.

Ответ: {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47}.

Пример 2. Найти все простые числа из промежутка $[2520, 2530]$.

Решение. Так как $50 < \sqrt{2530} < 51$, то нам понадобится таблица простых чисел, не превышающих числа 50, которую мы получили в предыдущем примере. Выписываем все нечетные числа из заданного промежутка:

$$2521,\ 2523,\ 2525,\ 2527,\ 2529.$$

Находим ближайшее к числу 2521 нечетное число делящееся на три – 2523. Следовательно, следующее нечетное число делящееся на три стоит в списке через две позиции. Это число 2529. Вычеркиваем их:

$$2521,\ \sout{2523},\ 2525,\ 2527,\ \sout{2529}\ .$$

Число 2525 единственное в списке, делящееся на 5. Вычеркиваем его:

$$2521,\ \sout{2523},\ \sout{2525},\ 2527,\ \sout{2529}\ .$$

Находим, ближайшее к числу 2521 нечетное число делящееся на 7. Это число 2527. Вычеркиваем его:

$$2521,\ \sout{2523},\ \sout{2525},\ \sout{2527},\ \sout{2529}\ .$$

Остается число 2521. Убеждаемся, что это число не делится ни на одно из простых чисел, не превосходящих числа 50, следовательно число 2521 простое.

Ответ: 2521.

Пример 3. Найти все простые делители числа 18354.

Решение. Разделим данное число на 2:

$$18354 = 2 \cdot 9177\ .$$

Делим полученное число 9177 на 3:

$$9177 = 3 \cdot 3059\ .$$

Очевидно, что число 3059 не делится на 5. Проверяем его делимость на 7:

$$3059 = 7 \cdot 437\ .$$

Так как $20 < \sqrt{437} < 21$, то нужно проверить делимость числа 437 на простые числа не превосходящие числа 20, т.е. на числа 11, 13, 17, 19. Выясняем, что 437 делится на 19:

$$437 = 19 \cdot 23\ .$$

Так как 23 простое число, то процесс разложения на простые множители закончен. В процессе работы удобно заполнять следующую таблицу:

18354	2
9177	3
3059	7
437	19
23	23

Ответ: $18354 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 23$.

Пример 4. Разложить на простые множители число $2^{24} - 1$.

Решение. Разложим выражение $2^{24} - 1$ как разность квадратов:

$$2^{24} - 1 = (2^{12} - 1)(2^{12} + 1)\ .$$

Разложим $2^{12} - 1$ как разность квадратов, а $(2^{12} + 1)$ как сумму кубов:

$$2^{12} - 1 = (2^6 - 1)(2^6 + 1),\ \ 2^{12} + 1 = (2^4 + 1)(2^8 - 2^4 + 1)\ .$$

Получаем:

$$2^{24} - 1 = 63 \cdot 65 \cdot 17 \cdot 241 = 7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 241\ .$$

Так как $15 < \sqrt{241} < 16$, и число 241 не делится на простые числа не превосходящие 15, то оно простое.

Ответ: $2^{24} - 1 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 241$.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Определение делимости на множестве целых чисел.
2. Найдите все простые числа на промежутке [110, 120].

Вариант 2

1. Определение собственного делителя целого числа.
2. Найдите все простые числа на промежутке [420, 430].

Вариант 3

1. Определение простого числа.
2. Найдите все простые числа на промежутке [1230, 1240].

Вариант 4

1. Определение составного числа.
2. Найдите все простые числа на промежутке [2140, 2150].

Тест

1. Выпишите все простые числа, не превосходящие числа 10.
2. Выпишите первые 10 простых чисел.
3. Выпишите все простые числа из первой сотни натуральных чисел.
4. Найдите все простые числа из промежутка [300, 310].
5. Найдите все простые числа из промежутка [1500, 1510].
6. Найдите каноническое разложение числа 720 в произведение простых множителей.
7. Найдите каноническое разложение числа 10! в произведение простых множителей.
8. Найдите наименьшее составное число большее 10, имеющее единственный простой делитель.
9. Докажите свойство транзитивности делимости целых чисел.
10. Найдите число нулей на конце числа 100!
11. Докажите, что наибольший простой делитель числа n! не превосходит n.
12. Найдите все простые числа на промежутке [2140, 2150].

Практическое занятие 2
Алгоритм Евклида

Теорминимум: НОД, НОК и их свойства, алгоритм деления с остатком, алгоритм Евклида, взаимно простые числа.

Задачи для аудиторного решения

1. Найдите НОД и НОК чисел: а) 3069 и 2637;
   б) 6567 и 4279; в) 29408339 и 26442001;
   г) 81719, 52003, 33649 и 30107.
2. Найдите линейное представление НОД чисел:
   а) 678 и 582; б) 703 и 697; в) 81719 и 52003;
   г) 33649 и 30107.

Задачи повышенного уровня сложности

3. Найдите все пары простых чисел p и q, удовлетворяющих условию $p^2 - 2q^2 = 1$. (Смотрите пример 5.)
4. Найдите наибольшее трехзначное число x, для которого $D(x, 540) = 36$.
5. При каких натуральных n будут взаимно простыми числа: а) $2n+3$ и $n+1$; б) n^2+1 и $n+3$?
6. Докажите, что если число n не делится на 2 и 3, то число n^2-1 делится на 24.
7. Докажите, что при любом n число $n^5 - n$ делится на 30.
8. Докажите, что $D(2^n-1, 2^m-1) = 2^{D(n,m)}-1$.

Домашнее задание

1. Найдите НОД и НОК чисел: а) 2261 и 861;
   б) 3612 и 1536; в) 213166494391 и 57337099343.
2. Найдите линейное представление НОД чисел:
   а) 42 и 91; б) 1073 и 899.
3. Используя свойство линейной представимости НОД, докажите теорему о вынесении общего множителя за знак НОД.

Примеры

Пример 1. Найти НОД и НОК чисел 5321 и 4998.

Решение. Вычислим $D(5321, 4998)$ с помощью алгоритма Евклида. Делим число $a = 5321$ на число $b = 4998$, и находим неполное частное q_1 и остаток r_1:

$$5321 = 4998 \cdot 1 + 323,$$

где $q_1 = 1, r_1 = 323$. Далее, делим число $b = 4998$ на остаток $r_1 = 323$:

$$4998 = 323 \cdot 15 + 153,$$

где неполное частное $q_2 = 15$, остаток $r_2 = 153$. Далее, де-

лим остаток $r_1 = 323$ на остаток $r_2 = 153$:

$$323 = 153 \cdot 2 + 17,$$

где неполное частное $q_3 = 2$, остаток $r_3 = 17$. Делим остаток $r_2 = 153$ на остаток $r_3 = 17$:

$$153 = 17 \cdot 9.$$

Последним ненулевым остатком является число $r_3 = 17$, оно и будет искомым НОД.

Для вычисления НОК воспользуемся формулой:

$$K(a,b) = \frac{ab}{D(a,b)} = \frac{a}{D(a,b)} \cdot b = \frac{5321}{17} \cdot 4998 = 313 \cdot 4998 = 1564374.$$

Ответ: $D(5321,4998) = 17$, $K(5321,4998) = 1564374$.

Пример 2. Найти линейное представление НОД чисел 5321 и 4998.

Решение. Воспользуемся таблицей

	q_1	q_2	...	q_n
x_0	x_1	x_2	...	x_n
y_0	y_1	y_2	...	y_n

,

где, числа x_n и y_n могут быть вычислены по рекуррентным формулам:

$$x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_k = x_{k-2} - x_{k-1}q_k,$$

$$y_0 = 1,\ y_1 = -q_1,\ y_k = y_{k-2} - y_{k-1}q_k,$$

$$k = 2,3,...,n,$$

откуда находим линейную представимость НОД

$$D(a,b) = a \cdot x_n + b \cdot y_n.$$

В нашем случае неполные частные уже найдены в предыдущем примере:

$$q_1 = 1,\ q_2 = 15,\ q_3 = 2.$$

Заполняем таблицу:

		1	15	2
0	1	x_2	x_3	
1	−1	y_2	y_3	

.

Вычисляем

$$x_2 = 0 - 1 \cdot 15 = -15, \quad y_2 = 1 - (-1) \cdot 15 = 16.$$

Заносим найденные значения в таблицу:

		1	15	2
0	1	−15	x_3	
1	−1	16	y_3	

.

Вычисляем

$$x_3 = 1 - (-15) \cdot 2 = 31, \quad y_3 = -1 - 16 \cdot 2 = -33.$$

Заносим в таблицу:

		1	15	2
0	1	−15	31	
1	−1	16	−33	

.

Ответ: $D(5321,4998) = 5321 \cdot 31 + 4998 \cdot (-33)$.

Пример 3. Докажите, что любые два последовательных натуральных числа являются взаимно простыми.

Доказательство. Пусть n и $n+1$ – два произвольных последовательных числа. Воспользуемся формулой:

$$D(a,b) = D(a,b-a).$$

Тогда, $D(n,n+1) = D(n,1) = 1$, ч.т.д.

Пример 4. Сократима ли дробь $\frac{n+4}{n^2+8n+15}$ при каком-нибудь значении натурального числа n?

Решение. Найдем корни квадратного трехчлена и разложим

его на линейные множители:

$$n^2+8n+15=(n+3)(n+5).$$

Дробь можно записать в виде

$$\frac{n+4}{(n+3)(n+5)}.$$

Натуральные числа $n+3, n+4, n+5$ являются последовательными, поэтому число $n+4$ взаимно простое с числами $n+3$ и $n+5$, а потому дробь несократимая ни при каких натуральных числах n.

Ответ: нет.

Пример 5. Докажите, что если $p>3$ – простое число, то число $1+2p^2$ является составным.

Доказательство. Разделим p на 3 с остатком:

$$p=3q+r,\quad 0\le r<3.$$

Так как p – простое и больше 3, то p не делится на 3, следовательно, остаток $r>0$ и $r=1$ или $r=2$. Вычислим

$$1+2p^2=1+2(3q+r)^2=1+18q^2+12qr+2r^2=$$

$$=3(6q^2+4qr)+(1+2r^2).$$

При $r=1$, $1+2r^2=3$. При $r=2$, $1+2r^2=9$. Отсюда следует, что число

$$1+2p^2=3(6q^2+4qr)+(1+2r^2)$$

делится на 3, т.е. является составным, ч.т.д.

Пример 6. Докажите, что при любом целом n число n^2+1 не делится на 3.

Доказательство. Разделим n на 3 с остатком:

$$n=3q+r,\quad r\in\{0,1,2\}.$$

Тогда $n^2+1=(3q+r)^2+1=3(3q^2+2qr)+(r^2+1)$, и это число делится на 3 тогда и только тогда, когда число r^2+1 делится на 3. Подставляя вместо r числа 0, 1, 2, убеждаемся, что во всех случаях число r^2+1 на 3 не делится, следовательно, не делится на 3 и число n^2+1, ч.т.д.

Пример 7. При каких натуральных n числа $3n+1$ и $5n+1$ будут взаимно простыми?

Решение. Пусть НОД данных чисел равен d. Тогда d делит число $(3n+1)x+(5n+1)y$ при любых целых x и y. Возьмем $x=5, y=-3$. Тогда d делит число $5(3n+1)-3(5n+1)=2$, следовательно, $d=1$ или $d=2$, причем в последнем случае оба числа должны быть четными, т.е. число n должно быть нечетным.

Ответ: при всех четных n.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Определение наибольшего общего делителя двух целых чисел.
2. Используя алгоритм Евклида найдите НОД и НОК чисел 111 и 93.

Вариант 2

1. Определение взаимно простых чисел.
2. С помощью алгоритма Евклида найдите НОД и НОК чисел 371 и 329.

Вариант 3

1. Определение наименьшего общего кратного двух целых чисел.
2. С помощью алгоритма Евклида найдите НОД и НОК чисел 8598 и 6702.

Вариант 4

1. Определение неполного частного и остатка от деления одного целого числа на другое.
2. С помощью алгоритма Евклида найдите НОД и НОК чисел 9926 и 6286.

Тест

1. Выпишите все делители числа 24.
2. Выпишите все делители чисел 72 и 108 и найдите их НОД и НОК.
3. Найдите НОД чисел 72 и 108 с помощью алгоритма Евклида.
4. Используя алгоритм Евклида, найдите НОД и НОК чисел 1533 и 903.
5. Вычислите $\frac{1}{943}-\frac{1}{1219}$ и запишите в виде несократимой дроби.

6. Найдите линейное представление НОД чисел 97 и 37.
7. Найдите общий знаменатель дробей $\frac{111}{21120}$ и $\frac{1237}{30720}$.
8. Докажите, что среди трех последовательных натуральных чисел найдется в точности одно число делящееся на 3.
9. Докажите, что для всех нечетных натуральных чисел n число n^2-1 делится на 8.
10. Крестьянка несла на базар яйца. Проезжавший всадник толкнул её, и все яйца разбились. На вопрос, сколько было яиц, она сказала: «Когда я раскладывала яйца по два, одно оказалось лишним. То же самое случилось, когда я раскладывала их по 3, по 4, по 5 и по 6. А вот когда я их разложила по 7, остатка не оказалось». Сколько яиц было у крестьянки?

Практическое занятие 3
Сравнения по модулю

Теорминимум: понятие сравнения по модулю, свойства сравнений, действия со сравнениями, признаки делимости, классы вычетов и их свойства, наименьший неотрицательный вычет, наименьший по абсолютной величине вычет, полная и приведенная система вычетов, функция Эйлера и ее свойства, теоремы Эйлера и Ферма.

Задачи для аудиторного решения

1. Среди чисел 123, 211, 134, 214, 303, 21 найдите все пары чисел, сравнимых между собой по модулю 5.
2. Среди чисел 135, 226, 106, 181, 225, 167, 452 найдите все пары чисел, сравнимых между собой по модулю 15.
3. Какие из чисел 137, 343, 633 сравнимы с числом 13 по модулю 31?
4. Найти сумму, разность и произведение сравнений $15\equiv 8\,(\mathrm{mod}\,7),\ 83\equiv 6\,(\mathrm{mod}\,7)$.
5. Умножьте сравнение $5\equiv 21(\mathrm{mod}16)$ на 6.
6. Сократите все части сравнения $16\equiv -80(\mathrm{mod}96)$ на общий множитель. Верно ли сравнение $8\equiv -40(\mathrm{mod}96)$?

7. Проведите все возможные сокращения в сравнении $224\equiv 14(\mathrm{mod}30)$.
8. Найдите наименьший неотрицательный вычет данных чисел по данному модулю:
   а) 127, 110, 203 по модулю 11;
   б) 136, 151, 210 по модулю 15;
   в) 406, 1596, 35671 по модулю 12.
9. Найдите наименьший по абсолютной величине вычет данных чисел по данному модулю:
   а) 99, 138, 202 по модулю 11;
   б) 299, 602, 300 по модулю 30;
   в) 2013, 34973 по модулю 36.
10. Найдите полную и приведенную систему вычетов по модулю: а) 8; б) 9; в) 10; г) 11.
11. Найдите полную и приведенную систему наименьших по абсолютной величине вычетов по модулю:
    а) 8; б) 9; в) 10; г) 11.
12. Вычислите значение функции Эйлера от чисел: 13, 169, 1001, 45000.
13. Вычислите количество примитивных классов вычетов по модулю: а) 30; б) 100.
14. В последовательности чисел 1, 2, …, 2700 найдите количество чисел взаимно простых с числом 2700.
15. Найдите остаток от деления: а) числа 13^{49} на 48;
    б) числа $3^{200}+7^{200}$ на 101; в) числа $7^{65}+11^{65}$ на 80.
16. Найдите последнюю цифру чисел 17^{281}, 19^{321}, 132^{161}.
17. Докажите, что число $37^{120}-1$ делится на 700.

Задачи повышенного уровня сложности

18. Докажите, что любые m последовательных натуральных чисел образуют полную систему вычетов по модулю m.
19. Докажите свойства сравнений.

20. Докажите закон сокращения в сравнениях.
21. Докажите признаки делимости.
22. Докажите, что наименьший неотрицательный вычет числа a по модулю m равен остатку от деления числа a на модуль m.
23. Число 0 и все натуральные числа выписаны одно за другим без запятых и пробелов в ряд: 012345678910111213… . Какая цифра стоит на 2010-й позиции?
24. Найдите две последние цифры чисел 17^{281}, 19^{321}, 132^{161}.
25. Докажите, что $15^{243} \not\equiv 10 \pmod{30}$.
26. Зная, что 12 июня 2010 года суббота, найдите день недели Дня независимости России в 2020-м году.
27. Докажите, что из любых 100 целых чисел можно выбрать 15 таких чисел, что для любых двух из них их разность делится на 7.
28. Докажите, что если два целых числа не делятся на 3, то и сумма их квадратов тоже не делится на 3.
29. Докажите, что числа вида $n = 9m + 4, m \in N$ нельзя представить в виде $n = a^3 + b^3 + c^3, a, b, c \in N$.

Домашнее задание

1. Среди чисел 146, 1201, 182, 241 найдите все пары чисел, сравнимых между собой по модулю 12.
2. Найти сумму, разность и произведение сравнений $25 \equiv 3 \pmod{11}$, $50 \equiv -5 \pmod{11}$. Умножьте первое сравнение на 2, а второе на -3.
3. Произведите правильные сокращения в сравнениях $45 \equiv 9 \pmod{18}$ и $30 \equiv 6 \pmod{8}$.
4. Найдите наименьший неотрицательный вычет числа 987 по модулю 24.
5. Найдите наименьший по абсолютной величине вычет

числа 98 по модулю 17.
6. Выпишите полную и приведенную систему вычетов по модулю 4.
7. Выпишите полную и приведенную систему наименьших по абсолютной величине вычетов по модулю 4.
8. Найдите число примитивных классов вычетов по модулю 1000.
9. Найдите остаток от деления числа 73^{12} на 7.
10. Найдите последнюю цифру числа $2^{2^5} + 1$.

Примеры

Пример 1. Сравнимы ли числа 226 и 167 по модулю 15?
Решение. Найдем разность данных чисел:

$$226 - 167 = 59.$$

Так как 59 не делится на 15, то данные числа не сравнимы друг с другом по модулю 15.
Ответ: нет.

Пример 2. Найти сумму, разность и произведение сравнений $5 \equiv -1 \pmod{6}$, $83 \equiv 5 \pmod{6}$.
Решение. 1) $5 + 83 \equiv -1 + 5 \pmod{6}$ или $88 \equiv 4 \pmod{6}$.
2) $5 - 83 \equiv -1 - 5 \pmod{6}$ или $-78 \equiv -6 \pmod{6}$.
3) $5 \cdot 83 \equiv (-1) \cdot 5 \pmod{6}$ или $415 \equiv -5 \pmod{6}$.
Ответ: $88 \equiv 4 \pmod{6}$, $-78 \equiv -6 \pmod{6}$, $415 \equiv -5 \pmod{6}$.

Пример 3. Умножить сравнение $3 \equiv -1 \pmod{4}$ на 6.
Решение. $3 \cdot 6 \equiv (-1) \cdot 6 \pmod{4}$.
Ответ: $18 \equiv -6 \pmod{4}$.

Пример 4. Сократить $88 \equiv 4 \pmod{6}$ на общий множитель.
Решение. Все три части сравнения можно сократить на об-

щий множитель 2:

$$88 \equiv 4 (\mathrm{mod}\, 6) \Leftrightarrow 44 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3).$$

Так как числа 2 и 3 взаимно простые, то последнее сравнение можно сократить на 2:

$$44 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3) \Leftrightarrow 22 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3).$$

Ответ: $22 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$.

Пример 5. Найти наименьший неотрицательный вычет числа 5439 по модулю 15.

Решение. Разделим данное число 5439 на 15 с остатком:

$$5439 = 15 \cdot 362 + 9 \text{ и } 9 < 15.$$

Следовательно, $15 | (5439 - 9)$ и $5439 \equiv 9 (\mathrm{mod} 15)$. Так как вычет 9 меньше модуля 15, то 9 – наименьший неотрицательный вычет числа 5439 по модулю 15.

Ответ: $5439 \equiv 9 (\mathrm{mod} 15)$.

Пример 6. Найти наименьший по абсолютной величине вычет числа 5439 по модулю 15.

Решение. $5439 \equiv 9 (\mathrm{mod} 15)$, но $9 > \frac{15}{2}$. Следовательно, 9 не является наименьшим по абсолютной величине вычетом. Вычтем из правой части сравнения $5439 \equiv 9 (\mathrm{mod} 15)$ модуль 15:

$$5439 \equiv 9 (\mathrm{mod} 15) \Leftrightarrow 5439 \equiv 9 - 15 (\mathrm{mod} 15) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5439 \equiv -6 (\mathrm{mod} 15).$$

Вычет (–6) числа 5439 по абсолютной величине равен $|-6| = 6 < \frac{15}{2}$, следовательно, наименьшим по абсолютной величине вычетом числа 5439 по модулю 15 является число –6.

Ответ: $5439 \equiv -6 (\mathrm{mod} 15)$.

Пример 7. Выписать полную систему вычетов по модулю 15.

Ответ: { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 }.

Пример 8. Выписать полную систему наименьших по абсолютной величине вычетов по модулю 15.

Решение. $8 \equiv 8 - 15 (\mathrm{mod} 15) \Leftrightarrow 8 \equiv -7 (\mathrm{mod} 15)$. Прибавляя по 1 к обеим частям сравнения, получаем:

$$9 \equiv -6 (\mathrm{mod} 15), \ldots, 14 \equiv -1 (\mathrm{mod} 15).$$

Ответ: { –7, –6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 }.

Пример 9. Выписать полную систему наименьших по абсолютной величине вычетов по модулю 8.

Решение. Выписываем полную систему вычетов по модулю 8: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Имеем, $4 \equiv -4 (\mathrm{mod} 8)$, $5 \equiv -3 (\mathrm{mod} 8)$, $6 \equiv -2 (\mathrm{mod} 8)$, $7 \equiv -1 (\mathrm{mod} 8)$.

Ответ: { –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4 }.

Пример 10. Выписать приведенную систему вычетов по модулю 15.

Решение. Из чисел: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 взаимно простыми с модулем 15 являются числа

1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14.

Ответ: { 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14 }.

Пример 11. Выписать все классы вычетов по модулю 6.

Ответ: $\{ \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5} \}$.

Пример 12. Выписать все примитивные классы вычетов по модулю 6.

Ответ: $\{ \overline{1}, \overline{5} \}$.

Пример 13. Найти остаток от деления числа 7^{2010} на 11.

Решение. Так как число 7 взаимно просто с модулем 11, то по теореме Эйлера $7^{\varphi(11)} \equiv 1(\mathrm{mod}11)$. Так как 11 – простое число, то $\varphi(11) = 11-1 = 10$, следовательно, $7^{10} \equiv 1(\mathrm{mod}11)$. Воспользуемся свойством степеней:

$$7^{2010} = (7^{10})^{201}.$$

Переходя от равенства к сравнению по модулю 11, получаем:

$$7^{2010} \equiv (7^{10})^{201}(\mathrm{mod}11) \equiv 1(\mathrm{mod}11).$$

Ответ: 1.

Пример 14. Найти последнюю цифру числа 7^{2010}.

Решение. Последняя цифра числа сравнима с его остатком при делении его на 10, поэтому она равна его наименьшему неотрицательному вычету по модулю 10:

$$7^{2010} \equiv r(\mathrm{mod}10).$$

Так как числа 7 и 10 взаимно простые, то, применяя теорему Эйлера, получаем

$$7^{\varphi(10)} \equiv 1(\mathrm{mod}10).$$

Вычисляем значение функции Эйлера $\varphi(10)$:

$$\varphi(10) = \varphi(2\cdot 5) = \varphi(2)\varphi(5) = (2-1)(5-1) = 4.$$

Таким образом,

$$7^4 \equiv 1(\mathrm{mod}10).$$

По свойству степеней,

$$7^{2010} = 7^{4\cdot 502+2} = (7^4)^{502}\cdot 7^2.$$

Переходя в этом равенстве к сравнению по модулю 10, получаем:

$$7^{2010} \equiv (7^4)^{502}\cdot 7^2(\mathrm{mod}10) \equiv 49(\mathrm{mod}10) \equiv 9(\mathrm{mod}10).$$

Ответ: 9.

Пример 15. Ваш знакомый родился 14 сентября 1993 года.

Зная, что 14 сентября 2010 года является вторником, найдите день недели дня рождения вашего знакомого.

Решение. Вычислим, сколько дней прошло с дня рождения 14 сентября 1993 года по 13 сентября 2010 года. День 14 сентября 1993 года считаем 0-м днем, тогда 14 сентября 1994 года – это 365-й день, так как 1994-й год был не високосный. Обозначим через n число дней считая с 15 сентября 1993 года по 14 сентября 2010 года включительно. Тогда день рождения 14 сентября 2010 года будет n-м днем. Вычисляем число n:

$$n = 365\cdot 17 + 4,$$

где 4 – по одному дню в високосные годы. Найдем наименьший неотрицательный вычет числа n по модулю 7. Так как число 364 делится на 7, то $365 \equiv 1(\mathrm{mod}7)$. Далее, $17 \equiv 3(\mathrm{mod}7)$, откуда следует:

$$n \equiv 365\cdot 17 + 4(\mathrm{mod}7) \equiv 3 + 4(\mathrm{mod}7) \equiv 0(\mathrm{mod}7).$$

Следовательно, 14 сентября 2010 года и 14 сентября 1993 года являются одинаковыми днями недели.

Ответ: вторник.

Пример 16. Докажите, что числа 15^{2010} и 21 несравнимы друг с другом по модулю 35.

Решение. Допустим противное. Пусть $15^{2010} \equiv 21(\mathrm{mod}35)$, тогда по свойствам сравнения $15^{2010} \equiv 21(\mathrm{mod}7)$, откуда следует, что $15^{2010} \equiv 0(\mathrm{mod}7)$ и $15 \equiv 0(\mathrm{mod}7)$, что неверно.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Определение сравнения по модулю.
2. Выпишите полную систему вычетов по модулю 7.
3. Найдите наименьший неотрицательный вычет числа 222 по модулю 7.

Вариант 2

1. Определение вычета данного числа по данному модулю.

2. Выпишите приведенную систему вычетов по модулю 7.
3. Найдите наименьший по абсолютной величине вычет числа 335 по модулю 7.

Вариант 3

1. Определение класса вычетов данного числа по данному модулю.
2. Выпишите полную систему наименьших по абсолютной величине вычетов по модулю 7.
3. Найдите остаток от деления числа 3^{2010} на 7.

Вариант 4

1. Определение наименьшего неотрицательного вычета данного числа по данному модулю.
2. Выпишите приведенную систему наименьших по абсолютной величине вычетов по модулю 8.
3. Найдите последнюю цифру числа 3^{2010}.

Тест

1. Какие из чисел 14, 51, 101 сравнимы с числом 3 по модулю 7?
2. По какому наименьшему модулю сравнимы друг с другом числа 209 и 1108?
3. Произведите сокращение в сравнении $84 \equiv 21 (\mathrm{mod}\, 9)$.
4. Найдите наименьший неотрицательный вычет числа 1234 по модулю 11.
5. Найдите наименьший по абсолютной величине вычет числа 2345 по модулю 17.
6. Выпишите полную систему вычетов по модулю 8.
7. Выпишите приведенную систему вычетов по модулю 8.
8. Выпишите полную систему наименьших по абсолютной величине вычетов по модулю 10.
9. Выпишите приведенную систему наименьших по абсолютной величине вычетов по модулю 10.
10. Выпишите пять чисел из класса вычетов числа 2941 по модулю 17.
11. Докажите, что класс вычетов числа 1019 по модулю 18 является примитивным классом вычетов.
12. Найдите число примитивных классов вычетов по модулю 999.
13. Вычислите значение функции Эйлера от числа 1011.
14. Найдите остаток от деления числа 2^{2010} на 5.
15. Найдите последнюю цифру числа 2^{2010}.
16. Допустим, что Новый Год пришелся на понедельник. На какой день недели приходится в этом же году праздник 9-е мая?

Практическое занятие 4
Сравнения 1-й степени

Теорминимум: действия с классами вычетов, понятие группы, группа классов вычетов, таблица Кэли, понятие кольца и поля, кольцо классов вычетов, поле классов вычетов, сравнения 1-й степени и методы их решений.

Задачи для аудиторного решения

1. Составьте таблицы сложения и умножения для классов вычетов по модулю: а) 2; б) 8; в) 12.
2. Составьте таблицу умножения для примитивных классов вычетов по модулю: а) 2; б) 8; в) 12.
3. Для каждого класса вычетов по модулю 12 найдите противоположный ему класс вычетов.
4. Найдите все делители нуля в кольце классов вычетов по модулю 12.
5. Найдите все обратимые классы вычетов по модулю 12 и обратные им классы вычетов.
6. С помощью таблицы умножения примитивных классов вычетов по модулю 8 найдите для каждого примитивного класса вычетов обратный ему класс вычетов.
7. В кольце классов вычетов по модулю 12 решите линейное уравнение $\overline{5} \cdot \overline{x} = \overline{2}$.
8. В группе примитивных классов вычетов по модулю 12 решите уравнение $\overline{7} \cdot \overline{x} = \overline{5}$.
9. Определите, разрешимо ли сравнение, и если да, то сколько решений оно имеет: а) $3x \equiv 25 (\mathrm{mod}\, 42)$; б) $13x \equiv 15 (\mathrm{mod}\, 36)$; в) $20x \equiv 64 (\mathrm{mod}\, 396)$.
10. Решите следующие сравнения методом перебора: а) $5x \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 8)$; б) $4x \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 9)$; в) $8x \equiv 10 (\mathrm{mod}\, 11)$.
11. Следующие сравнения решите с помощью теоремы Эйлера: а) $2x \equiv 13 (\mathrm{mod}\, 21)$; б) $5x \equiv 44 (\mathrm{mod}\, 51)$.
12. Используя алгоритма Евклида, решите сравнения:

а) $102x \equiv 133 (\mathrm{mod}\, 319)$; б) $235x \equiv 613 (\mathrm{mod}\, 661)$.

13. Решите сравнения: а) $16x \equiv 2\ (\mathrm{mod} 18)$;
б) $42x \equiv -24\ (\mathrm{mod}\, 78)$; в) $33x \equiv 192\ (\mathrm{mod}\, 237)$.

Задачи повышенного уровня сложности

14. Доказать, что сложение и умножение классов вычетов по заданному модулю не зависит от выбора их представителей.
15. Объясните, почему множество всех целых неотрицательных чисел не является группой ни относительно сложения, ни относительно умножения.
16. Докажите, что множество всех целых чисел является областью.
17. Докажите, что кольцо классов вычетов по простому модулю является полем.
18. Докажите, что в любом поле нет делителей нуля.
19. Определить, является ли множество все целых чисел кратных 3 замкнутым относительно сложения и умножения, и образует ли оно группу, кольцо или поле.
20. Решите в целых числах уравнение: а) $5x + 7y = 1$;
б) $15x + 17y = 11$; в) $105x + 173y = 101$.

Домашнее задание

1. Составьте таблицы сложения и умножения для классов вычетов по модулю 9.
2. Используя таблицу сложения классов вычетов по модулю 9, найдите для каждого класса вычетов противоположный ему класс вычетов.
3. Используя таблицу умножения классов вычетов по модулю 9, найдите все делители нуля.
4. Составьте таблицу умножения для примитивных классов вычетов по модулю 9 и, используя эту таблицу, найдите для каждого примитивного класса вычетов об-

ратный ему класс вычетов.

5. Решите сравнение $10x \equiv 9\ (\mathrm{mod}19)$ тремя различными способами.
6. Решите сравнение $30x \equiv 27\ (\mathrm{mod}57)$.

Примеры

Пример 1. Составить таблицы сложения и умножения для классов вычетов по модулю 10.

Решение. Выпишем все классы вычетов по модулю 10:

$$Z_{10} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \bar{9}\}.$$

Пусть $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ – полная система наименьших неотрицательных вычетов по модулю 10, и $a, b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ – какие-то наименьшие неотрицательные вычеты по модулю 10. По правилу сложения классов вычетов $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$. Если $a + b < 10$, то число $a + b$ является наименьшим неотрицательным вычетом в классе $\overline{a+b}$. Если же $a + b \geq 10$, то наименьшим неотрицательным вычетом в классе $\overline{a+b}$ будет число $a + b - 10$ и $\overline{a+b-10} = \overline{a+b}$, так как $a + b \equiv a + b - 10\ (\mathrm{mod}10)$. Таким образом, при сложении классов вычетов будем руководствоваться правилом:

$$\bar{a} + \bar{b} = \begin{cases} \overline{a+b}, & a+b<10 \\ \overline{a+b-10}, & a+b \geq 10 \end{cases}.$$

Аналогично, при умножении классов, $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b} = \bar{r}$, где $a \cdot b \equiv r\ (\mathrm{mod}10)$, и r – наименьший неотрицательный вычет числа ab по модулю 10. Например,

$$\bar{7} + \bar{8} = \overline{15} = \overline{15-10} = \bar{5}, \quad 15 \equiv 5\ (\mathrm{mod}10),$$

$$\bar{7} \cdot \bar{8} = \overline{56} = \bar{6}, \quad 56 \equiv 6\ (\mathrm{mod}10),$$

Замечание. Для удобства записи мы не ставим в таблицах

черточку над числом в обозначении класса вычета.

Ответ:

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8

·	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Пример 2. Составить таблицу умножения для примитивных классов вычетов по модулю 10.

Решение. Составим приведенную систему вычетов по модулю 10. Для этого, определяем какие из чисел:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

взаимно простые с модулем 10 и выписываем их:

1, 3, 7, 9.

Следовательно, множество примитивных классов вычетов по модулю 10 имеет 4 элемента:

$$Z_{10}^{*} = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{7}, \overline{9}\}.$$

Это множество образует группу относительно умножения. Таблицу умножения можно составить пользуясь таблицей умножения для кольца классов вычетов Z_{10}. Смотрите предыдущий пример.

Ответ:

·	1	3	7	9
1	1	3	7	9
3	3	9	1	7
7	7	1	9	3
9	9	7	3	1

.

Замечание. Так как операции сложения и умножения классов вычетов являются коммутативными, то это отражается в таблицах. Числа, стоящие в таблицах симметрично главной диагонали (слева направо) являются равными. Это можно использовать при их заполнении.

Пример 3. Для каждого класса вычетов по модулю 10 найти противоположный ему класс вычетов.

Решение. Используем определение противоположного элемента. В нашем случае, если $\overline{a} \neq \overline{0}$ и $\overline{a} + \overline{b} = \overline{0}$, то по определению: $-\overline{a} = \overline{b}$. Из таблицы сложения классов вычетов по модулю 10 находим все противоположные классы вычетов. Впрочем, легко заметить, что $a + b \equiv 10 \,(\mathrm{mod}10)$, откуда следует, что $b \equiv 10 - a \,(\mathrm{mod}10)$ и $-\overline{a} = \overline{b} = \overline{10 - a}$. Таким же образом доказывается формула для нахождения противоположного класса вычетов по любому модулю m:

$$-\bar{a} = \overline{m-a}.$$

Ответ: $-\bar{0}=\bar{0}, -\bar{1}=\bar{9}, -\bar{2}=\bar{8}, -\bar{3}=\bar{7}, -\bar{4}=\bar{6}, -\bar{5}=\bar{5},$
$-\bar{6}=\bar{4}, -\bar{7}=\bar{3}, -\bar{8}=\bar{2}, -\bar{9}=\bar{1}.$

Пример 4. Найти все делители нуля в кольце классов вычетов по модулю 10.

Решение. Из определения делителей нуля следует, что два ненулевых класса вычетов $\bar{a}, \bar{b}$ будут делителями нуля, если $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{0}$. Осталось внимательно рассмотреть таблицу умножения классов вычетов по модулю 10: $\bar{2}\cdot\bar{5}=\bar{0}, \quad \bar{4}\cdot\bar{5}=\bar{0}, \quad \bar{6}\cdot\bar{5}=\bar{0}, \quad \bar{8}\cdot\bar{5}=\bar{0}.$

Ответ: $\bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}.$

Замечание. Из определения делителей нуля в нашем случае следует, что $\bar{a}\cdot\bar{b}=\overline{ab}=\bar{0}$ или $ab \equiv 0 \pmod{m}$. Если бы число a было взаимно просто с модулем m, в сравнении то на него можно было бы сократить: $b \equiv 0 \pmod{m}$. Но это означает, что $\bar{b}=\bar{0}$, что противоречит определению делителя нуля. Следовательно, если класс вычетов $\bar{a}$ по модулю m является делителем нуля, то $D(a,m)>1$, т.е. число a не взаимно простое с модулем m. Легко доказать и обратное утверждение: если $D(a,m)>1$, то класс вычетов $\bar{a}$ по модулю m является делителем нуля. Отсюда следует, что делителями нуля являются те и только те классы вычетов, которые не являются примитивными, т.е. не являются взаимно простыми с модулем.

Пример 5. Найти все обратимые классы вычетов по модулю 10 и обратные им классы вычетов.

Решение. Обратимыми классами вычетов являются только примитивные классы вычетов и только они. Поэтому, по модулю 10 обратимыми классами вычетов являются классы $\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}, \bar{9}$. Если класс вычетов $\bar{a}$ является обратимым, то обратный ему класс вычетов $\left(\bar{a}\right)^{-1}$ удовлетворяет равенству $\bar{a}\cdot\left(\bar{a}\right)^{-1}=\bar{1}$, т.е. является решением линейного уравнения $\bar{a}\cdot\bar{x}=\bar{1}$ или сравнения $ax \equiv 1 \pmod{m}$.

Из таблицы примера 2 находим:

$$\left(\bar{1}\right)^{-1}=\bar{1}, \ \left(\bar{3}\right)^{-1}=\bar{7}, \ \left(\bar{7}\right)^{-1}=\bar{3}, \ \left(\bar{9}\right)^{-1}=\bar{9}.$$

Этот же результат мы получим, если будем решать сравнения:

$$1\cdot x \equiv 1 \pmod{10}, 3x \equiv 1 \pmod{10}, 7x \equiv 1 \pmod{10},$$
$$9x \equiv 1 \pmod{10}.$$

Ответ: $\left(\bar{1}\right)^{-1}=\bar{1}, \ \left(\bar{3}\right)^{-1}=\bar{7}, \ \left(\bar{7}\right)^{-1}=\bar{3}, \ \left(\bar{9}\right)^{-1}=\bar{9}.$

Пример 6. В кольце классов вычетов по модулю 10 решить линейное уравнение $\bar{3}\cdot\bar{x}=\bar{5}$.

Решение. Линейное уравнение $\bar{a}\cdot\bar{x}=\bar{b}$ в кольце классов вычетов по модулю m равносильно решению сравнения $ax \equiv b \pmod{m}$. Но данное уравнение можно решить с помощью таблицы умножения классов вычетов по модулю 10 (смотрите пример 1). По таблице находим: $\bar{3}\cdot\bar{5}=\bar{5}$.

Ответ: $\bar{x}=\bar{5}$.

Пример 7. Определить, разрешимо ли сравнение, и если да, то сколько решений оно имеет: а) $12x \equiv 15 \pmod{14}$;
б) $12x \equiv 15 \pmod{35}$; в) $12x \equiv 15 \pmod{9}$.

Решение. Сравнение $ax \equiv b \pmod m$ разрешимо тогда и только тогда, когда $D(a,m) \mid b$. Если сравнение разрешимо, то оно имеет $D = D(a,m)$ решений.

а) $D(12,14) = 2 \nmid 15$. Сравнение $12x \equiv 15 \pmod{14}$ не имеет решений.

б) $D(12,35) = 1$. Сравнение $12x \equiv 15 \pmod{35}$ разрешимо и имеет единственное решение.

в) $D(12,9) = 3$. Сравнение $12x \equiv 15 \pmod 9$ разрешимо и имеет 3 решения.

Ответ: а) не разрешимо; б) имеет единственное решение; в) имеет 3 решения.

Методы решения сравнений 1-й степени

Как следует из теории, достаточно научиться решать сравнения вида

$$ax \equiv 1 \pmod m, \quad D(a,m) = 1.$$

В основном применяется один из следующих трех методов.

1-й метод. Применяется в случаях, когда модуль m является небольшим натуральным числом. По сути, это метод перебора. Так как решением сравнения является один из классов вычетов по модулю m, то выписываем стандартную полную систему вычетов по этому модулю

$$\{0, 1, \dots, m-1\}$$

и последовательно подставляем в сравнение $ax \equiv 1 \pmod m$ вместо неизвестной x числа 0, 1, … , $m-1$. Так как сравнение разрешимо и имеет единственное решение, то только одно из этих чисел будет удовлетворять сравнению. Таким образом, решением сравнения будет класс вычетов $x \equiv x_0 \pmod m$, где x_0 одно из чисел множества $\{0, 1, \dots, m-1\}$, для которого сравнение $ax_0 \equiv 1 \pmod m$ оказывается верным.

2-й метод. Используем теорему Эйлера

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m.$$

Умножим обе части сравнения $ax \equiv 1 \pmod m$ на число равное $a^{\varphi(m)-1}$:

$$a^{\varphi(m)-1} \cdot ax \equiv a^{\varphi(m)-1} \pmod m,$$

отсюда, в силу теоремы Эйлера, получаем решение сравнения:

$$x \equiv a^{\varphi(m)-1} \pmod m.$$

Замечание. Формально решение сравнения найдено, но принято находить в классе вычетов наименьший неотрицательный вычет

$$a^{\varphi(m)-1} \equiv r \pmod m, \quad r \in \{0, 1, \dots, m-1\},$$

и записывать ответ в виде $x \equiv r \pmod m$.

3-й метод. Используется алгоритм Евклида, с помощью которого можно найти линейное представление НОД. Исходное сравнение $ax \equiv 1 \pmod m$ равносильно уравнению

$$ax + tm = 1$$

с двумя неизвестными x и t. Так как $D(a,m) = 1$, то существуют такие целые числа $x = x_0$ и $t = t_0$, что $ax_0 + mt_0 = 1$. Метод вычисления этих чисел описан ранее в ПЗ 1. Тогда класс вычетов $x \equiv x_0 \pmod m$ будет искомым.

Пример 8. Решить сравнение $5x \equiv 3 \pmod 7$ методом перебора.

Решение. Так как $D(5,7) = 1$, то сравнение имеет единственное решение. Последовательно подставляем в сравнение вместо неизвестной x числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, пока не получим верное сравнение:

$$5 \cdot 0 \not\equiv 3 \pmod 7, \quad 5 \cdot 1 \not\equiv 3 \pmod 7, \quad 5 \cdot 2 \equiv 3 \pmod 7.$$

Ответ: $x \equiv 2 \pmod 7$.

Пример 9. Решить сравнение $5x \equiv 3 \pmod{17}$ с помощью теоремы Эйлера.

Решение. Так как коэффициент при неизвестной – число 5 взаимно простое с модулем 17, то сравнение имеет единственное решение, и для его нахождения можно применить формулу:

$$x \equiv a^{\varphi(m)-1} b \pmod m \equiv 5^{\varphi(17)-1} \cdot 3 \pmod{17}.$$

Так как $\varphi(17) = 16$, то $x \equiv 5^{15} \cdot 3 \pmod{17}$. Найдем наименьший неотрицательный вычет числа 5^{15} по модулю 17:

$$5^4 = 625 = 17\cdot 36 + 13 \Rightarrow 5^4 \equiv 13\,(\mathrm{mod}17) \equiv -4\,(\mathrm{mod}17),$$

$$5^3 = 125 = 17\cdot 7 + 6 \Rightarrow 5^3 \equiv 6\,(\mathrm{mod}17)$$

Отсюда находим

$$5^{15} = (5^4)^3 \cdot 5^3 \equiv (-4)^3 \cdot 6\,(\mathrm{mod}17) \equiv (-64)\cdot 6\,(\mathrm{mod}17).$$

Так как, $-64 = 17\cdot(-4) + 4$, то $-64 \equiv 4\,(\mathrm{mod}17)$, и

$$5^{15} \equiv (-64)\cdot 6\,(\mathrm{mod}17) \equiv 4\cdot 6\,(\mathrm{mod}17) \equiv 7\,(\mathrm{mod}17).$$

Подставляя в решение найденный наименьший неотрицательный вычет, получаем:

$$x \equiv 5^{15}\cdot 3\,(\mathrm{mod}17) \equiv 7\cdot 3\,(\mathrm{mod}17) \equiv 4\,(\mathrm{mod}17).$$

Ответ: $x \equiv 4\,(\mathrm{mod}17)$.

Пример 10. Решить сравнение $35x \equiv 83(\mathrm{mod}107)$ с помощью алгоритма Евклида.

Решение. С помощью алгоритма Евклида находим НОД коэффициента при неизвестном и модуля.

$$107 = 35\cdot 3 + 2,$$

$$35 = 2\cdot 17 + 1,$$

$$2 = 1\cdot 2.$$

Последний ненулевой остаток равен 1, и $D(35,107) = 1$. Следовательно, данное сравнение имеет единственное решение. Сначала, мы найдем линейное представление найденного НОД, т.е. найдем такие числа x, y, для которых выполняется равенство:

$$107x + 35y = 1.$$

Из алгоритма Евклида выражаем остатки:

$$2 = 107 - 35\cdot 3,$$

$$1 = 35 - 2\cdot 17.$$

Подставим во второе равенство первое:

$$1 = 35 - 2\cdot 17 = 35 - (107 - 35\cdot 3)\cdot 17 = 107\cdot(-17) + 35\cdot 52.$$

Отсюда, переходя в последнем равенстве к сравнению по модулю 107, получаем:

$$35\cdot 52 \equiv 1\,(\mathrm{mod}107).$$

Теперь умножим обе части исходного сравнения $35x \equiv 83(\mathrm{mod}107)$ на 52:

$$52\cdot 35x \equiv 52\cdot 83(\mathrm{mod}107).$$

Отсюда, с учетом предыдущего сравнения, получаем:

$$x \equiv 52\cdot 83(\mathrm{mod}107) \equiv 4316(\mathrm{mod}107).$$

Осталось найти наименьший неотрицательный вычет числа 4316 по модулю 107. Делим 4316 на 107 с остатком:

$$4316 = 107\cdot 40 + 36.$$

Следовательно, $4316 \equiv 36\,(\mathrm{mod}107)$ и $x \equiv 36(\mathrm{mod}107)$.

Ответ: $x \equiv 36(\mathrm{mod}107)$.

Пример 11. Решить сравнение $35x \equiv 45(\mathrm{mod}\,65)$.

Решение. Так как

$$D(35,65) = 5D(7,13) = 5 \mid 45,$$

то сравнение имеет 5 решений по модулю 65. Сокращаем сравнение на 5:

$$\frac{35}{5}x \equiv \frac{45}{5}\left(\mathrm{mod}\frac{65}{5}\right).$$

Упрощаем получившееся сравнение:

$$7x \equiv 9\,(\mathrm{mod}13) \Leftrightarrow (-6)x \equiv (-4)\,(\mathrm{mod}13),$$

так как $7 \equiv -6\,(\mathrm{mod}13), 9 \equiv -4\,(\mathrm{mod}13)$. Сокращая сравнение $(-6)x \equiv (-4)\,(\mathrm{mod}13)$ на –2, получаем:

$$3x \equiv 2\,(\mathrm{mod}13).$$

Получившееся сравнение легко решить методом перебора:

$$x \equiv 5\,(\mathrm{mod}13).$$

Обозначим $x_0 = 5$. Тогда по формуле решений:

$$x \equiv x_0 + \frac{m}{D}k\,(\mathrm{mod}\,m),\ k = 0,1,\ldots,D-1,$$

где $x \equiv x_0 \pmod{\frac{m}{D}}$ – решение сравнения $\frac{a}{D}x \equiv \frac{b}{D} \pmod{\frac{m}{D}}$,

находим:

$$x \equiv 5 + \frac{65}{5}k \pmod{65}, \quad k = 0,1,2,3,4.$$

Подставляя значения k, получаем:

$$x \equiv 5 \pmod{65}, \; x \equiv 5 + 13 \pmod{65} \equiv 18 \pmod{65},$$
$$x \equiv 5 + 13 \cdot 2 \pmod{65} \equiv 31 \pmod{65},$$
$$x \equiv 5 + 13 \cdot 3 \pmod{65} \equiv 44 \pmod{65},$$
$$x \equiv 5 + 13 \cdot 4 \pmod{65} \equiv 57 \pmod{65}.$$

Ответ: $x \equiv 5 \pmod{65}, \; x \equiv 18 \pmod{65}, \; x \equiv 31 \pmod{65},$
$x \equiv 44 \pmod{65}, \; x \equiv 57 \pmod{65}$.

Пример 12. Решить в целых числах уравнение с двумя неизвестными $6x + 11y = 3$.

Решение. Перейдем в уравнении к сравнению по модулю 11 и решим его:

$$6x + 11y \equiv 3 \pmod{11} \Leftrightarrow 6x \equiv 3 \pmod{11} \Leftrightarrow 2x \equiv 1 \pmod{11},$$

откуда находим $x \equiv 6 \pmod{11}$. Все числа из последнего класса вычетов можно записать в виде $x = 6 + 11t, \; t \in \mathbb{Z}$. Подставим это выражение в исходное уравнение:

$$6(6 + 11t) + 11y = 3 \Leftrightarrow 11y = -33 - 66t \Leftrightarrow y = -3 - 6t.$$

Таким образом, все решения исходного уравнения имеют вид: $\begin{cases} x = 6 + 11t \\ y = -3 - 6t \end{cases}$, где $t \in \mathbb{Z}$. Можно доказать, что если t – пробегает все множество целых чисел, то соответствующие пары чисел $(x, y) = (6 + 11t, -3 - 6t)$ пробегают все множество решений данного уравнения.

Ответ: $\begin{cases} x = 6 + 11t \\ y = -3 - 6t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{Z}$.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Определение суммы классов вычетов по модулю m.
2. Составьте таблицу сложения для кольца Z_4.
3. Решите сравнение $4x \equiv 1 \pmod{5}$.

Вариант 2

1. Определение произведения классов вычетов по модулю m.
2. Составьте таблицу умножения для кольца Z_4.
3. Решите сравнение $4x \equiv 5 \pmod{7}$.

Вариант 3

1. Определение сравнения первой степени с одним неизвестным по модулю m.
2. Составьте таблицу умножения для группы Z_4^*.
3. Решите сравнение $4x \equiv 5 \pmod{17}$.

Вариант 4

1. Определение решения сравнения первой степени с одним неизвестным по модулю m.
2. Составьте таблицу умножения для группы Z_5^*.
3. Решите сравнение $5x \equiv 1 \pmod{36}$.

Тест

1. Составьте таблицу сложения для классов вычетов по модулю 4.
2. Составьте таблицу умножения для классов вычетов по модулю 4.
3. Составьте таблицу умножения для примитивных классов вычетов по модулю 8.
4. Для каждого класса вычетов по модулю 4 найдите противоположный ему класс вычетов.
5. Найдите все делители нуля в кольце классов вычетов по модулю 4.
6. Найдите все обратимые классы вычетов по модулю 8 и обратные им классы вычетов.
7. В кольце классов вычетов по модулю 4 решите уравнение $\bar{3} \cdot \bar{x} = \bar{2}$.
8. В группе примитивных классов вычетов по модулю 8 решите уравнение $\bar{7} \cdot \bar{x} = \bar{5}$.
9. Определите, разрешимо ли сравнение $3x \equiv 25 \pmod{75}$ и объясните почему да или почему нет.
10. Определите количество решений сравнения $15x \equiv 21 \pmod{72}$.
11. Решите сравнение $8x \equiv 3 \pmod{11}$.

Практическое занятие 5
Комплексные числа

Теорминимум: поле комплексных чисел, алгебраическая форма записи, мнимая единица, действительная и мнимая части комплексного числа, равенство комплексных чисел, действия с комплексными числами в алгебраической форме записи, комплексно сопряженные числа и их свойства.

Задачи для аудиторного решения

1. Вычислите:

   a) $(3-7i)+(6+5i)$; b) $3i+(7-2i)$; c) $(2-4i)-(-7-i)$;

   d) $\left(2\sqrt{3}-4\sqrt{2}\,i\right)-\left(\sqrt{27}-i\sqrt{32}\right)+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{2i}{\sqrt{3}}\right)$;

   e) $(-1-i)(-2+2i)$; f) $\left(\sqrt{3}-i\right)\left(\sqrt{3}+i\right)$; g) $(3+i)i$;

   h) $(1+i)^2$; j) $(1+i)^3$; k) $(1+i)^4$; l) $\frac{4+6i}{1-i}$; m) $\frac{1-2i}{3+i}$;

   n) $\frac{(5+i)(3+5i)}{2i}$; o) $(2+i)^3+(2-i)^3$; p) $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$.

2. Решите систему $\begin{cases} 2x-(2-i)y=4-6i \\ 4x-2yi=16-4i \end{cases}$.

3. Пусть $f(z)=2z^3-z^2-z+1$. Найдите $f(2+i)-f(2-i)$.

Задачи повышенного уровня сложности

4. Вычислите:

   a) i^3, i^4, i^{4n}, i^{4n+1}, i^{4n+2}, i^{4n+3}, где $n\in\mathbb{Z}$;

   b) i^n, где $n\in\mathbb{Z}$; c) $1+i+i^2+i^3+\ldots+i^{2011}$;

   d) $i+i^2+i^3+\ldots+i^{2012}$; e) $i+2i^2+3i^3+\ldots+2010i^{2010}$.

Домашнее задание

1. Вычислите:

   a) $(-2+6i)+(-4-8i)$; b) $5i+8i$; c) $6-(5+2i)$;

   d) $(3+2i)(2+3i)$; e) $(7-i)(7+i)$; f) $(-4-i)(4-i)$;

   g) $(2-4i)i$; h) $(1+i)^8$; j) $\frac{10-i}{1+i}$; k) $\frac{-2-3i}{1-2i}$;

   l) $\frac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$; m) $\frac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$; n) $\frac{(3-i)(1-4i)}{2-i}$.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3z-2\overline{\omega}=1 \\ \overline{z}-i\cdot\omega=-6i \end{cases}$.

Примеры

Пример 1. Найти сумму комплексных чисел: $z_1=-1+7i$ и $z_2=2-5i$.

Решение.

$z_1+z_2=(-1+7i)+(2-5i)=(-1+2)+(7i-5i)=1+2i$.

Ответ: $z_1+z_2=1+2i$.

Пример 2. Найти разность комплексных чисел: $z_1=-1+7i$ и $z_2=2-5i$.

Решение.

$z_1-z_2=(-1+7i)-(2-5i)=-1+7i-2+5i=-3+12i$.

Ответ: $z_1-z_2=-3+12i$.

Пример 3. Найти комплексное число, противоположное числу $z=-1+7i$.

Решение. $-z=-(-1+7i)=1-7i$.

Ответ: $-z=1-7i$.

Пример 4. Найти произведение комплексных чисел: $z_1 = -1+7i$ и $z_2 = 2-5i$.

Решение. $z_1 z_2 = (-1+7i)(2-5i)$. Раскрываем скобки и учитываем, что $i^2 = -1$:

$$z_1 z_2 = (-1+7i)(2-5i) = -2+5i+14i-35i^2 = 33+19i$$

Ответ: $z_1 z_2 = 33+19i$.

Пример 5. Найти комплексное число, комплексно-сопряженное комплексному числу $z = -1+7i$.

Решение. $\overline{z} = \overline{-1+7i} = -1-7i$. Ответ: $\overline{z} = -1-7i$.

Пример 6. Найти частное комплексных чисел: $z_1 = -1+7i$ и $z_2 = 2-5i$.

Решение. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{-1+7i}{2-5i} = \dfrac{(-1+7i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} = \dfrac{-37+9i}{29}$.

Ответ: $\dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{37}{29} + \dfrac{9}{29}i$.

Пример 7. Найти комплексное число, обратное комплексному числу $z = -1+7i$.

Решение. $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{-1+7i} = \dfrac{-1-7i}{(-1+7i)(-1-7i)} = \dfrac{-1-7i}{50}$.

Ответ: $z^{-1} = -\dfrac{1}{50} - \dfrac{7}{50}i$.

Пример 8. Найти $(-1+7i)^2$ и $(-1+7i)^3$.

Решение. $(-1+7i)^2 = 1-14i+49i^2 = 1-49-14i = -48-14i$.

$$(-1+7i)^3 = (-1+7i)^2(-1+7i) = (-48-14i)(-1+7i) =$$

$$= -2(24+7i)(-1+7i) = -2(-24-49+168i-7i) =$$

$$= -2(-73+161i) = 146-322i$$

Ответ: $(-1+7i)^2 = -48-14i$, $(-1+7i)^3 = 146-322i$.

Пример 9. Решить уравнение $(2-i)z-1+3i = 0$.

Решение. $z = \dfrac{1-3i}{2-i} = \dfrac{(1-3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{5-5i}{5} = 1-i$.

Ответ: $z = 1-i$.

Пример 10. Решить уравнение $3z+5\overline{z} = 5-11i$.

Решение. Пусть $z = x+yi$, где $x, y \in R$. Тогда $\overline{z} = x-yi$. Подставим в данное уравнение:

$$3(x+yi)+5(x-yi) = 5-11i.$$

Раскрываем скобки в левой части уравнения и приводим подобные члены:

$$8x-2yi = 5-11i.$$

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части:

$$8x = 5, \quad -2y = -11.$$

Отсюда находим:

$$x = \frac{5}{8},\ y = \frac{11}{2},\ z = \frac{5}{8} + \frac{11}{2}i.$$

Ответ: $z = \dfrac{5}{8} + \dfrac{11}{2}i$.

Пример 11. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x-(2+i)y = -7-5i \\ xi-5y = -7+15i \end{cases}.$$

Решение. Исключим из системы неизвестную x. Для этого, умножим первое уравнение на i, а второе – на –3:

$$\begin{cases} 3xi-(2+i)yi=(-7-5i)i \\ -3(xi-5y)=(-7+15i)(-3) \end{cases}.$$

Складывая уравнения, получаем:

$$(16-2i)y=26-52i.$$

Сокращаем на 2 и находим y:

$$y=\frac{13-26i}{8-i}=13\frac{(1-2i)(8+i)}{(8-i)(8+i)}=13\frac{10-15i}{65}=2-3i.$$

Подставляем найденное значение y во второе уравнение системы:

$$xi-5(2-3i)=-7+15i.$$

Решая это уравнение, находим значение неизвестной x:

$$x=-3i.$$

Ответ: $x=-3i,\ y=2-3i.$

Пример 12. Найти i^n, где $n\in\mathbb{Z}$.

Решение.

$$i^0=1,\ i^1=i,\ i^2=-1,\ i^3=i^2\cdot i=-i,$$
$$i^4=i^2\cdot i^2=(i^2)^2=(-1)^2=1.$$

Пусть $n\in\mathbb{Z}$ – произвольное целое число. Разделим его на 4 с остатком:

$$n=4m+r,$$

где остаток r равен либо 0, либо 1, 2 или 3. Тогда,

$$i^n=i^{4m+r}=(i^4)^m\cdot i^r=i^r=\begin{cases} 1, \text{если } n=4m \\ i, \text{если } n=4m+1 \\ -1, \text{если } n=4m+2 \\ -i, \text{если } n=4m+3 \end{cases},$$

где $m\in\mathbb{Z}$ – целое число – частное или неполное частное от деления числа n на 4.

Если использовать понятие сравнения целых чисел по модулю, то ответ можно записать в следующем виде.

Ответ: $i^n=\begin{cases} 1, \text{если } n\equiv 0(\mathrm{mod}\,4) \\ i, \text{если } n\equiv 1(\mathrm{mod}\,4) \\ -1, \text{если } n\equiv 2(\mathrm{mod}\,4) \\ -i, \text{если } n\equiv 3(\mathrm{mod}\,4) \end{cases}.$

Пример 13. Найти $\frac{1}{i},\ \frac{1}{i^3},\ i^{2010}$.

Решение. $\frac{1}{i}=i^{-1}=i^{-4+3}=(i^4)^{-1}\cdot i^3=i^3=-i,$

$\frac{1}{i^3}=i^{-3}=i^{-4+1}=(i^4)^{-1}\cdot i^1=i,\ i^{2010}=i^{2008+2}=i^{4\cdot 502+2}=i^2=-1.$

Ответ: $\frac{1}{i}=-i,\ \frac{1}{i^3}=i,\ i^{2010}=-1.$

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Определение комплексного числа.
2. Для комплексного числа $z=\sqrt{3}-i$ найти комплексно сопряженное число $\bar{z}$ и вычислить их сумму $z+\bar{z}$.
3. Вычислить ω^2, где $\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$.

Вариант 2

1. Определение мнимой части действительного числа.
2. Для комплексного числа $z=-1+\sqrt{3}i$ найти комплексно сопряженное число $\bar{z}$ и вычислить их разность $z-\bar{z}$.
3. Вычислить ε^2, где $\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Вариант 3

1. Определение числа комплексно сопряженного данному комплексному числу.
2. Для комплексного числа $z=-\sqrt{3}-i$ найти комплексно сопряженное число $\bar{z}$ и вычислить их произведение $z\cdot\bar{z}$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1-\omega & -1 \\ 1 & -\omega-1 \end{vmatrix}$, где $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}$.

Вариант 4

1. Определение мнимой единицы.
2. Для комплексного числа $z = -1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$ найти комплексно сопряженное число $\bar{z}$ и вычислить их частное $\frac{z}{\bar{z}}$.
3. Вычислить $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon+1 \\ 1-\varepsilon+\varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix}$, где $\varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

Тест

1. Найдите алгебраическую форму записи суммы и разности комплексных чисел $z_1 = 2 - 3\mathrm{i}$ и $z_2 = 3 + 2\mathrm{i}$.
2. Найдите алгебраическую форму записи комплексного числа, противоположного комплексному числу $-4 + 5\mathrm{i}$.
3. Найдите алгебраическую форму записи произведения комплексных чисел $z_1 = 2 - 3\mathrm{i}$ и $z_2 = 3 + 2\mathrm{i}$.
4. Найдите комплексное число, комплексно сопряженное комплексному числу $-3 - \mathrm{i}$.
5. Найдите алгебраическую форму записи комплексного числа, обратного комплексному числу $-3 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$.
6. Найдите алгебраическую форму записи частного $\frac{z_1}{z_2}$ комплексных чисел $z_1 = 2 - 3\mathrm{i}$ и $z_2 = 3 + 2\mathrm{i}$.
7. Решите уравнение $(-2 + \mathrm{i})z + 5 - 5\mathrm{i} = 0$.
8. Вычислите значение многочлена $f(z) = z^2 - 2z + 2$ при $z = 1 - 3\mathrm{i}$.
9. Решите уравнение $2z - 3\bar{z} = 4 - 5\mathrm{i}$.
10. Вычислите определитель: a) $\begin{vmatrix} \omega & \omega^2 \\ 1-\omega & 1+\omega \end{vmatrix}$, если $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$;

    b) $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \end{vmatrix}$, если $\varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

Практическое занятие 6
Квадратные корни из комплексных чисел

Теорминимум: понятие корня натуральной степени из комплексного числа, формула квадратных корней из комплексного числа, решение квадратных уравнений над полем комплексных чисел.

Теорема. Пусть $z = a + bi \in \mathbb{C}$ – произвольное комплексное число. Тогда

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\cdot\operatorname{sgn} b\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right),$$

где квадратные корни в правой части равенства являются арифметическими квадратными корнями из неотрицательных чисел.

Задачи для аудиторого решения

1. Решите уравнение: a) $(5-7i)-3z = 8+11i$;
   b) $z\cdot(0{,}6-0{,}8i) = 5-11i$; c) $3z + 5\bar{z} = 5-11i$.
2. Найдите квадратные корни из комплексного числа z:
   a) $z = 8-6i$; b) $z = i$; c) $z = -i$; d) $z = 1-i$;
   e) $z = -3-4i$; f) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$; g) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
3. Решите квадратное уравнение:
   a) $z^2 - 4z + 5 = 0$; b) $z^2 - 4iz + 5 = 0$;
   c) $z^2 - 4z + 1 - 4i = 0$; d) $z^2 - (7-2i)z + 13 - 13i = 0$.
4. Решите биквадратное уравнение:
   a) $z^4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; b) $z^4 - \sqrt{3}iz^2 - 1 = 0$.
5. Найдите остаток от деления многочлена $4x^{37} - 2x^{30} + 3x^{20} - x - 7$ на многочлен:
   a) $x + i$; b) $x - i$; c) $x^2 + 1$.

6. Решите квадратное уравнение с условием:
   a) $z^2 = -15+8i,\ \operatorname{Im} z > 0$; b) $z^2 = 5+12i,\ \operatorname{Re} z < 0$.
7. Решите уравнение: a) $z^2 + \overline{z} = 1+i$;
   b) $z^2 - 2(z+\overline{z}) + 4 = 0$; c) $z^2 + 2\overline{z} + 1 = 0$.

Задачи повышенного уровня сложности

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел:
   a) $9x^4 - 24x^3 - 2x^2 - 24x + 9 = 0$;
   b) $2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$.

Домашнее задание

1. Вычислите: a) $\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}$; b) $\sqrt{1+i}$; c) $\sqrt{\sqrt{3}-i}$.
2. Решить квадратное уравнение:
   a) $x^2 + x + 1 = 0$; b) $x^2 + 2x + 2 = 0$.
3. Решите уравнение $z^2 - (7+i)z + 14 + 5i = 0$.
4. Решите биквадратное уравнение: $z^4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Примеры

Пример 1. Вычислить $\sqrt{3+4i}$.

Решение. Используем формулу квадратных корней из комплексного числа. Здесь

$$a = 3,\ b = 4,\ \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{9+16} = 5,\ \operatorname{sgn} b = 1.$$

Подставляем в формулу и получаем:

$$\sqrt{3+4i} = \pm\left(\sqrt{\frac{5+3}{2}} + i\sqrt{\frac{5-3}{2}}\right) = \pm(2+i).$$

Ответ: $\sqrt{3+4i} = \pm(2+i)$.

Пример 2. Вычислить $\sqrt{-4},\ \sqrt{-3},\ \sqrt{-1}$.

Решение. Используем формулу $\sqrt{a} = \pm i\sqrt{|a|}$, где a – произвольное отрицательное действительное число.

$$\sqrt{-4} = \pm i\sqrt{-(-4)} = \pm 2i,\ \sqrt{-3} = \pm i\sqrt{3},\ \sqrt{-1} = \pm i.$$

Ответ: $\sqrt{-4} = \pm 2i,\ \sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}\,i,\ \sqrt{-1} = \pm i$.

Пример 3. Решить уравнение $z^2 - (7-2i)z + 13(1-i) = 0$.

Решение. Вычисляем дискриминант:

$$D = b^2 - 4ac = (7-2i)^2 - 4\cdot 13(1-i) = 49 - 28i - 4 - 52 + 52i =$$
$$= -7 + 24i.$$

Вычисляем корни из дискриминанта по формуле квадратных корней из комплексного числа:

$$\sqrt{-7+24i} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{7^2+24^2}-7}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{7^2+24^2}+7}{2}}\right) =$$
$$= \pm\left(\sqrt{\frac{25-7}{2}} + i\sqrt{\frac{25+7}{2}}\right) = \pm(3+4i).$$

Вычисляем корни уравнения по формуле корней квадратного уравнения:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2} = \frac{(7-2i) \pm (3+4i)}{2}$$

или

$$z_1 = \frac{(7-2i)-(3+4i)}{2} = 2-3i,\ z_2 = \frac{(7-2i)+(3+4i)}{2} = 5+i.$$

Ответ: $z_1 = 2-3i;\quad z_2 = 5+i$.

Пример 4. Решить уравнение $x^2 + 3x + 3 = 0$.

Решение. Вычислим дискриминант:

$$D = b^2 - 4ac = 9 - 12 = -3 < 0.$$

Отсюда следует, что действительных корней квадратное уравнение не имеет, но оно имеет два корня в поле комплексных чисел. Для вычисления корня из дискриминанта применяем формулу квадратных корней из отрицательного числа:

$$\sqrt{D} = \sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}\,i.$$

Теперь подставляем в формулу корней квадратного уравнения:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3}\,i}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,i.$$

Ответ: $-\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Формула квадратных корней из отрицательного действительного числа.
2. Найдите квадратные корни из числа $z = \sqrt{3} + i$.
3. Решите квадратное уравнение в поле комплексных чисел: $z^2 - z + 1 = 0$.

Вариант 2

1. Определение корня натуральной степени из комплексного числа.
2. Найдите квадратные корни из числа $z = \sqrt{3} - i$.
3. Решите квадратное уравнение в поле комплексных чисел: $z^2 - 2z + 4 = 0$.

Вариант 3

1. Определение функции сигнум.
2. Найдите квадратные корни из числа $z = 1 + i\sqrt{3}$.
3. Решите квадратное уравнение в поле комплексных чисел: $x^2 + x + 1 + i = 0$.

Вариант 4

1. Формула квадратных корней из комплексного числа.

2. Найдите квадратные корни из числа $z = 1 - i\sqrt{3}$.
3. Решите квадратное уравнение в поле комплексных чисел: $x^2 - x + 1 - i = 0$.

Тест

1. Извлеките корень $\sqrt{-1}$.
2. Извлеките корень $\sqrt{i}$.
3. Вычислите $\sqrt{\frac{1 - \sqrt{3}\,i}{2}}$.
4. Найдите комплексные корни уравнения $x^2 + x + 1 = 0$.
5. Решите уравнение $x^2 - 4x + 5 = 0$.
6. Решите уравнение $z^2 - 2i\,z + 3 = 0$.
7. Какие из следующих чисел являются корнями квадратного уравнения $x^2 - (3 - i)x + 3 - 3i = 0$: $1 - 2i$, $1 + 2i$, $2 + i$.
8. Решите биквадратное уравнение $z^4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$.
9. Решите уравнение $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$.
10. Разложите многочлен $x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ на линейные множители.
11. Найдите остаток от деления многочлена $f(x) = x^{17} + x^{11} - x^7 - 1$ на линейный двучлен $x - i$.

Практическое занятие 7
Линейные операции с векторами

Теорминимум: определение вектора как направленного отрезка, модуль вектора, коллинеарные векторы, положительное направление, ось, ориентация вектора на оси, сонаправленные и противоположно направленные векторы и оси, равенство векторов, свободные векторы, линейные операции с векторами, необходимые и достаточные условия коллинеарности двух векторов.

Задачи для аудиторного решения

1. Изобразите какой-нибудь произвольный вектор и отложите его от произвольно выбранной точки.
2. Изобразите на рисунке вектор, лежащий на оси и

имеющий правую (левую) ориентацию.

3. Изобразите два произвольных вектора, отложенных от одной точки, и постройте их сумму по правилу параллелограмма и по правилу треугольника.
4. Изобразите два произвольных вектора, отложенных от одной точки, и постройте их разность.
5. По данным векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, отложенными от одной точки, построить векторы: a) $2\bar{a}+\bar{b}$; b) $\frac{1}{2}(\bar{a}-2\bar{b})$; c) $\frac{3}{4}(\bar{a}+2\bar{b})-\frac{1}{4}(\bar{a}-2\bar{b})-\bar{a}-\bar{b}$.
6. В треугольнике ABC дано: $\overline{AB}=\bar{a}$, $\overline{AC}=\bar{b}$, M – середина стороны BC. Используя линейные операции с векторами, выразите вектор $\overline{AM}$ через векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$.
7. В треугольнике ABC: M – точка пересечения медиан, $\overline{AM}=\bar{a}$, $\overline{AC}=\bar{b}$. Используя линейные операции с векторами, выразите векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ через $\bar{a}$ и $\bar{b}$.
8. В равнобочной трапеции ABCD, $AD=2BC$, $\overline{AB}=\bar{a}$, $\overline{BC}=\bar{b}$. Выразите через векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ вектор $\overline{CD}$ и:
   a) постройте вектор $\overline{AB}+\overline{BC}+\frac{1}{2}\overline{CD}$;
   b) докажите, что $\overline{CD}-\overline{BA}=\overline{BC}$, $\frac{2}{3}\overline{AC}+\frac{1}{3}\overline{DB}=\overline{AB}$ и $\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{BC}-\overline{CD})=\overline{AB}$.
9. Даны векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Коллинеарны ли векторы:
   a) $\bar{c}=\bar{a}-2\bar{b}$ и $\bar{d}=-2\bar{a}+4\bar{b}$;
   b) $\bar{c}=\bar{a}-2\bar{b}$ и $\bar{d}=2\bar{a}+4\bar{b}$;
   c) $\bar{c}=\bar{a}-2\sqrt{3}\cdot\bar{b}$ и $\bar{d}=-\sqrt{3}\cdot\bar{a}+6\cdot\bar{b}$?

10. При каких значениях λ векторы $2\lambda\cdot\bar{a}$ и $(\lambda^3-1)\cdot\bar{a}$ сонаправленные?
11. Дано: $|\bar{a}|=13$, $|\bar{b}|=19$, $|\bar{a}+\bar{b}|=24$. Найти $|\bar{a}-\bar{b}|$.
12. Точка O является центром тяжести треугольника ABC. Доказать, что $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\bar{0}$.

Задачи повышенного уровня сложности

13. В параллелограмме ABCD: K и M – середины сторон BC и CD, $\overline{AK}=\bar{a}$, $\overline{AM}=\bar{b}$. Выразить векторы $\overline{BD}$ и $\overline{AD}$ через векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$.
14. В четырехугольнике ABCD диагонали, пересекаясь делятся пополам. Доказать, что этот четырехугольник – параллелограмм.
15. Пользуясь линейными операциями с векторами докажите, что медианы любого треугольника пересекаются в одной точке. (Указание: пусть O – точка пересечения медиан AD и BE, F – середина стороны AB. Выразите векторы $\overline{OF}$ и $\overline{CO}$ через векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.)
16. В треугольнике ABC, CN и BK – медианы. Докажите, что $\overline{AB}-\overline{AC}=\frac{2}{3}(\overline{CN}-\overline{BK})=\overline{CB}$. (Указание. Докажите, что $\overline{CB}=\overline{OB}-\overline{OC}$, где O – точка пересечения медиан.)

Домашнее задание

1. В равнобочной трапеции ABCD, $AD=2BC$, $\overline{AB}=\bar{a}$, $\overline{AD}=\bar{b}$. Выразите через векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ векторы: a) $\overline{AC}$; b) $\overline{BC}$; c) $\overline{CD}$; d) $\overline{BD}$.
2. При каких значениях x векторы $x^3\cdot\bar{a}$ и $(x^2-x-2)\cdot\bar{a}$ противоположно направлены?
3. Дано: $\bar{a}\perp\bar{b}$, $|\bar{a}|=5$, $|\bar{b}|=12$. Найти $|\bar{a}+\bar{b}|$ и $|\bar{a}-\bar{b}|$.

4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $\overline{AB} = \bar{p}$, $\overline{AD} = \bar{q}$, $\overline{AA_1} = \bar{r}$. Выразите через векторы $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$ векторы: $\overline{AC}, \overline{D_1B_1}, \overline{AC_1}, \overline{B_1C}, \overline{D_1B}, \overline{DB_1}$.

Примеры

Пример 1. Для данного вектора, лежащего на прямой, выбрать на ней положительное направление таким образом, чтобы вектор имел правую ориентацию.

Решение. Пусть дан вектор $\overline{AB}$, лежащий на прямой L.

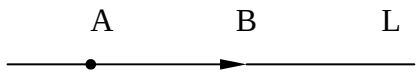

Рис. 1

Чтобы вектор $\overline{AB}$ был правоориентированным, нужно так выбрать направление на прямой L, чтобы его начало -- точка A предшествовала его концу – точке B. Следовательно, выбираем на прямой L положительное направление слева направо. Смотрите следующий рисунок.

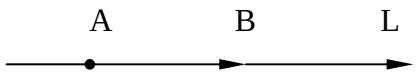

Рис. 2

Ответ: рисунок 2.

Пример 2. Построить сумму двух данных векторов по правилу параллелограмма.

Решение. Оба данных вектора откладываем от одной точки

и рассматриваем их как смежные стороны параллелограмма. Достраиваем до параллелограмма: через конец каждого вектора проводим прямую параллельную другому вектору. По определению суммы двух векторов, вектор $\bar{a} + \bar{b}$, отложенный от той же точки, что и векторы слагаемые, совпадает с диагональю построенного параллелограмма.

Ответ: рисунок 3.

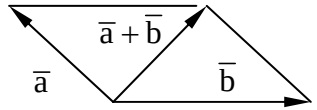

Рис. 3

Пример 3. Построить сумму двух или более данных векторов по правилу треугольника.

Решение. Пусть даны 3 вектора $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$. Отложим вектор $\bar{a}$ от произвольно выбранной точки A и обозначим его конец через B. Тогда $\bar{a} = \overline{AB}$. Отложим вектор $\bar{b}$ от точки B и обозначим его конец через C, тогда $\bar{b} = \overline{BC}$. Отложим вектор $\bar{c}$ от точки C и обозначим его конец через D, тогда $\bar{c} = \overline{CD}$.

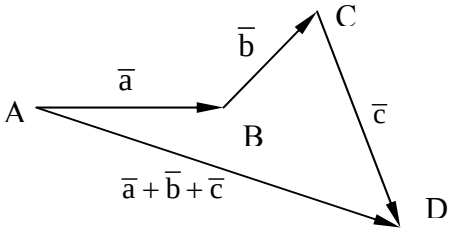

Рис. 4

По правилу треугольника сложения векторов, искомый вектор $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\overline{AD}$.

Ответ: рисунок 4.

Пример 4. Построить произведение данного вектора на данное число.
Решение. Пусть дан вектор $\bar{a}$ и число k. Найдем их произведение $k\cdot\bar{a}$. По определению умножения вектора на число, вектор $k\cdot\bar{a}$ коллинеарный вектору $\bar{a}$ и его модуль $|k\cdot\bar{a}|=|k|\cdot|\bar{a}|$. Отложим вектор $\bar{a}$ от произвольно выбранной точки A и обозначим его конец через B. Тогда $\bar{a}=\overline{AB}$. Проведем через точки A и B прямую L. Отложим вектор $k\cdot\bar{a}$ от точки A, тогда его конец, обозначим его через C, лежит на прямой L и $\overline{AC}=k\cdot\bar{a}$, причем его длина $AC=|k\cdot\bar{a}|$.

Если число $k>0$, то векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ – сонаправленные, $\overline{AB}\uparrow\uparrow\overline{AC}$ (рисунок 5):

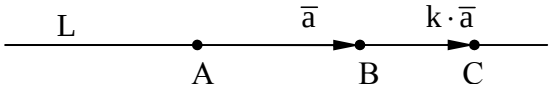

Рис. 5

Если же число $k<0$, то векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ имеют противоположные направления, $\overline{AB}\uparrow\downarrow\overline{AC}$ (рисунок 6):

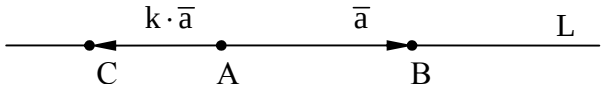

Рис. 6

Ответ: рисунки 5 и 6.

Пример 5. Построить вектор, противоположный данному.
Решение. По теореме о простейших свойствах векторного пространства, для любого вектора $\bar{a}$ противоположный ему вектор $-\bar{a}=(-1)\cdot\bar{a}$. Тогда, в соответствии с предыдущей задачей получаем, что векторы $-\bar{a}$ и $\bar{a}$ имеют равные модули, но противоположные направления.

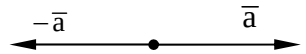

Рис. 7

Ответ: рисунок 7.

Пример 6. Построить разность векторов.
Решение. По определению, разностью $\bar{a}-\bar{b}$ называется вектор $\bar{a}+(-\bar{b})$, т.е. $\bar{a}-\bar{b}\doteq\bar{a}+(-\bar{b})$. Иначе, разностью векторов $\bar{a}-\bar{b}$ называется такой вектор $\bar{c}$, что $\bar{a}=\bar{b}+\bar{c}$.

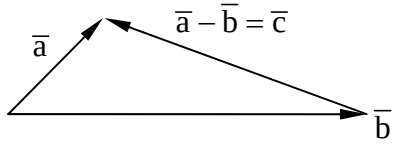

Рис. 8

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ отложены от одной точки, то начало вектора $\bar{a}-\bar{b}$ находится в конце вектора $\bar{b}$, а конец вектора $\bar{a}-\bar{b}$ находится в конце вектора $\bar{a}$.
Ответ: рисунок 8.

Пример 7. Определить взаимное расположение векторов $(1-k)\cdot\bar{a}$ и $(k-1)\cdot\bar{a}$, где $\bar{a}$ – произвольный ненулевой вектор, взависимости от значений произвольного числового параметра $k\in\mathbb{R}$.

Решение. Так как при умножении вектора на число получается вектор коллинеарный данному, то

$$(1-k)\cdot\bar{a}\parallel\bar{a}\parallel(k-1)\cdot\bar{a},$$

откуда следует, что данные векторы коллинеарные при любых значениях параметра k. Из определения умножения вектора на число следует, что

$$(1-k)\cdot\bar{a}\uparrow\uparrow(k+1)\cdot\bar{a}\Leftrightarrow(1-k)(k+1)\geq 0.$$

Решая последнее неравенство, находим ответ.

Ответ: при $k\in[-1;1]$, $(1-k)\cdot\bar{a}\uparrow\uparrow(k+1)\cdot\bar{a}$,

при $k\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$, $(1-k)\cdot\bar{a}\uparrow\downarrow(k+1)\cdot\bar{a}$.

Пример 8. Пусть O – точка пересечения медиан треугольника ABC, и AD – одна из его медиан. Найдите линейное выражение вектора $\overline{OA}$ через вектор $\overline{DA}$ и через векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

Решение. Смотрите рисунок 9. Из рисунка находим, что векторы $\overline{OA}$ и $\overline{DA}$ лежат на одной прямой и сонаправленные. Точка O делит медиану AD в отношении 2 : 1, считая от вершины, следовательно,

$$\overline{OA}=\frac{2}{3}\cdot\overline{DA}.$$

Далее, точка D – середина стороны BC, поэтому

$$\overline{DB}=\frac{1}{2}\cdot\overline{CB}=\frac{1}{2}(\overline{AB}-\overline{AC}).$$

Из треугольника ABD находим

$$\overline{DA}+\overline{AB}=\overline{DB}=\frac{1}{2}(\overline{AB}-\overline{AC})\Rightarrow\overline{DA}=-\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC}).$$

Так как $\overline{OA}=\frac{2}{3}\cdot\overline{DA}$, то $\overline{OA}=-\frac{1}{3}(\overline{AB}+\overline{AC})$.

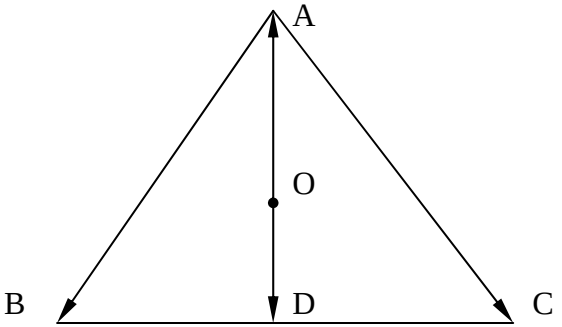

Рис. 9

Ответ: $\overline{OA}=\frac{2}{3}\cdot\overline{DA}$, $\overline{OA}=-\frac{1}{3}(\overline{AB}+\overline{AC})$.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Определение коллинеарных векторов.
2. Изобразите на рисунке произвольный треугольник ABC, и постройте векторы $\overline{AB}+\overline{AC}$ и $\overline{AB}-\overline{AC}$.
3. В треугольнике ABC, $\overline{AB}=\bar{a}$, $\overline{AC}=\bar{b}$, BD – медиана. Выразите вектор $\overline{DB}$ через векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Вариант 2

1. Определение оси.
2. Изобразите на рисунке произвольный треугольник ABC, и постройте векторы $-\overline{AB}$ и $\overline{BA}-\overline{BC}$.
3. В треугольнике ABC, AK – медиана, $\overline{AB}=\bar{a}$, $\overline{AK}=\bar{m}$ Выразите вектор $\overline{BK}$ через векторы $\bar{a}$ и $\bar{m}$.

Вариант 3

1. Определение сонаправленных векторов, лежащих на одной оси.

2. Изобразите на рисунке произвольный треугольник ABC, и постройте векторы $\frac{1}{2}\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{AC}$ и $\overline{AB}-\frac{1}{2}\overline{AC}$.
3. В треугольнике ABC, $\overline{AB}=\bar{a}$, $\overline{AC}=\bar{b}$, O – точка пересечения медиан. Выразить вектор $\overline{OB}$ через $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Вариант 4

1. Определение сонаправленных векторов, лежащих на параллельных прямых.
2. Изобразите на рисунке произвольный треугольник ABC, и постройте векторы $\frac{1}{2}\overline{AB}-\frac{1}{2}\overline{AC}$ и $\overline{AB}+\frac{3}{2}\overline{BC}$.
3. В треугольнике ABC, $\overline{AB}=\bar{a}$, $\overline{AC}=\bar{b}$, O – точка пересечения медиан. Выразить вектор $\overline{OC}$ через $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Тест

1. Изобразить вектор, лежащий на оси и имеющий левую ориентацию.
2. Изобразите два произвольных вектора, отложенных от одной точки, и постройте их сумму по правилу параллелограмма.
3. Изобразите два произвольных вектора, отложенных от одной точки, и постройте их сумму по правилу треугольника.
4. Изобразите два произвольных вектора, отложенных от одной точки, и постройте их разность.
5. По данному вектору $\bar{a}$ постройте противоположный ему вектор.
6. По данному вектору $\bar{a}$ постройте вектор $3\bar{a}$.
7. По данным векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ построить вектор $\frac{1}{2}(3\bar{a}-2\bar{b})$.
8. В треугольнике ABC дано: $\overline{AB}=\bar{a}$, $\overline{AC}=\bar{b}$, M – середина стороны BC. Используя линейные операции с векторами, выразите вектор $\overline{AM}$ через векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$.
9. Пусть O – точка пересечения медиан треугольника ABC, и AD – одна из его медиан. Найдите линейное выражение вектора $\overline{OA}$ через вектор $\overline{OD}$.
10. В равнобочной трапеции ABCD нижнее основание AD в два раза больше верхнего BC, MN – средняя линия. Выразите вектор $\overline{MN}$ через векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

Практическое занятие 8
Декартовая система координат на прямой

Теорминимум: проекция вектора на ось и её свойства, координата вектора оси, координатная форма записи вектора оси, радиус-вектор, координата точки оси, координатная прямая, вычисление координаты вектора числовой оси и расстояния между её двумя точками, деление отрезка в данном отношении, внутренним и внешним образом, вычисление отношения и координаты точки деления.

Задачи для аудиторного решения

1. Укажите на координатной оси Ox точки с заданными координатами: A(2); B(–3); $C(-3-\sqrt{2})$; $D(-3+\sqrt{2})$.
2. Изобразите на координатной оси Ox радиус-векторы точек A(3) и B(–2).
3. Известно, что вектор $\bar{a}\,\|\,Ox$, $|\bar{a}|=5$, и вектор $\bar{a}$ правоориентированный. Найдите проекцию вектора $\bar{a}$ на ось Ox, и запишите его в координатной форме записи.
4. Известна координата вектора оси Ox: $\bar{a}=(-8)$. Отложите этот вектор от точки A(11), и определите его ориентацию, модуль и координаты его конца.
5. Найдите модуль, координату вектора $\overline{AB}$ и его ориентацию на оси, если известны координаты его начала и конца: a) A(–3), B(–7); b) $A\left(\frac{4}{3}\right)$, $B\left(-\frac{7}{2}\right)$.
6. Найдите модуль и координату вектора $4\bar{a}-5\bar{b}$, если $\bar{a}=(-18)$, $\bar{b}=(-17)$.
7. Найдите расстояние AB, если: a) A(6), B(–1); b) $A\left(-\frac{1}{3}\right)$, $B\left(-\frac{4}{7}\right)$; c) $A\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)$.
8. На координатной оси Ox даны три точки своими координатами: A(–2), B(3) и C(–1). Найдите длины отрезков

AC и CB, и вычислите отношение, в котором точка C делит отрезок AB, считая от точки A, используя формулу $\lambda_{AB}^{C} = \pm\frac{AC}{CB}$.

9. Определите отношение, в котором точка C делит отрезок AB, считая от точки A, если A(2), B(6) и C(4). Воспользуйтесь формулой $\lambda_{AB}^{C} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C}$.
10. Найдите координаты точки C, которая делит отрезок AB в отношении $\lambda_{AB}^{C} = -3$, если A(–12) и B(7). Воспользуйтесь формулой $x_C = \frac{x_A + \lambda_{AB}^{C} \cdot x_B}{1 + \lambda_{AB}^{C}}$.
11. Найти координату середины отрезка, ограниченного двумя данными точками: a) A(3), B(5); b) C(–1), D(6).
12. Даны точки A(5) и B(–3). Определите координату точки M, симметричной точке A относительно точки B и координату точки C, симметричной точке B относительно точки M.
13. Определить координаты концов отрезка, который точками $P\left(-2\frac{3}{7}\right)$ и $Q\left(-\frac{2}{5}\right)$ разделен на три равные части.
14. Точка C делит отрезок AB, длина которого равна 10, в отношении $\lambda_{AB}^{C} = -\frac{2}{3}$. Найти длину отрезка AC.
15. Найти длину отрезка AB, если точка C делит его в отношении $\lambda_{AB}^{C} = -\sqrt{3}$ и $BC = 10$.
16. Даны три точки A(–7), B(–1) и C(1). Определить отношение, в котором каждая из них делит отрезок, ограниченный двумя другими.

Задачи повышенного уровня сложности

17. Точка A(2) удалена от точки $B\left(\frac{x+1}{3}\right)$ на расстоянии 5. Найдите x.
18. Известно, что расстояние между точками $A\left(2x - \frac{1}{3}\right)$ и $B\left(\frac{x+2}{4} - 1\right)$ равно 3. Найдите x.
19. При каких значениях параметра p решение неравенства $|3 - 1{,}5x| > 2 - \frac{p}{3}$ содержит луч $(-\infty; 5)$?
20. Найдите координаты различных точек $A\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right)$ и $B\left(2\frac{1}{3} - x\right)$ и отметьте их на числовой оси, если точка M(–2) является серединой отрезка AB.
21. Найдите значения x и y, при которых точка $M\left(\frac{x}{2} - y\right)$ является серединой отрезков AB и CE, где: $A\left(2x + \frac{y}{2} + 2{,}5\right)$; $B\left(\frac{x}{3} - \frac{2y}{5}\right)$; $C\left(y + \frac{x}{2} + 45\right)$; $E(3y - 2x)$.

Домашнее задание

1. a) Найдите точки A и B числовой прямой Ox, удаленные от точки M(– 5) на расстоянии 3, причем точка A предшествует точке B; b) найдите координату и модуль векторов: $\overline{AM}$, $\overline{MB}$, $\overline{BA}$; c) найдите проекцию вектора $3\overline{AM} - \frac{2}{3}\overline{MB} + \frac{3}{2}\overline{AB}$ на ось Ox и его модуль.

Укажите ориентацию этого вектора.

2. Найдите расстояние AB, если: a) A(–12), B(–3); b) A(13), B(–7); c) A(13), B(–7); d) $A\left(-\frac{5}{3}\right), B\left(-\frac{7}{4}\right)$; e) $A\left(-1-\sqrt{3}\right)$, $B\left(-1+\sqrt{3}\right)$.

3. На координатной оси Ox даны точки $A\left(-8\frac{2}{3}\right)$, $B(2,5)$.

   Найдите точку C, которая делит отрезок AB, считая от точки A, в отношении:

   a) $\lambda=\frac{2}{5}$; b) $\lambda=-\frac{2}{5}$; c) $\lambda=-1\frac{2}{5}$.

   Выполните чертеж и изобразите на оси Ox точки A, B и все найденные точки C.

4. Известно, что на оси Ox точка M(– 5) делит отрезок CB в отношении $\lambda=-0,75$. Найдите координаты точек B и C, если: a) $\text{пр}_x\overline{BC}=1$; b) $\text{пр}_x\overline{BC}=-2$.

Примеры

Пример 1. Изобразите на координатной оси Ox следующие точки с заданными координатами: A(5), B(–5).
Решение. Смотрите рисунок 1.

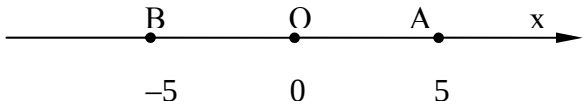

Рис. 1

Откладываем на координатной оси 5 единиц вправо и влево от начала координат. Так как $x_A=5>0$, то точка A находится на положительной полуоси на расстоянии 5 от начала координат: $OA=5$. Точка B симметрична точке A относительно начала координат, $OB=5$, и находится на отрицательной полуоси.
Ответ: рисунок 1.

Пример 2. Изобразите на координатной оси Ox радиус-вектор точки B(–5).
Решение. Смотрите рисунок 2.

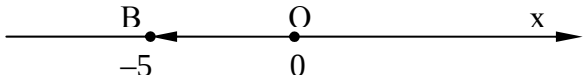

Рис. 2

Отложим на оси точку B(–5). Тогда вектор $\overline{OB}$ является радиус-вектором точки B.
Ответ: рисунок 2.

Пример 3. Найдите проекцию вектора $\bar{a}$ на ось Ox, если он лежит на этой оси, имеет левую ориентацию, и его модуль равен 5.
Решение. 1-й способ. Воспользуемся определением проекции вектора на ось. Пусть $\bar{a}=\overline{AB}$. Так как вектор лежит на оси, то точки A и B есть точки оси и совпадают с их проекциями на эту ось. Смотрите рисунок 3.

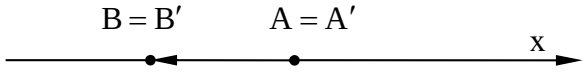

Рис. 3

Так как вектор левоориентированный, то есть $\overline{A'B'} \uparrow\downarrow Ox$, то по определению проекции

$$\text{пр}_x \bar{a} = \text{пр}_x \overline{AB} = -AB = -|\bar{a}| = -5.$$

2-й способ. Воспользуемся формулой для вычисления проекции вектора на ось:

$$\text{пр}_x \bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos(\bar{a} \wedge Ox) = 5 \cdot \cos\pi = -5.$$

Здесь, $(\bar{a} \wedge Ox) = \pi$ в силу левой ориентированности вектора на оси.

Ответ: –5.

Пример 4. Известно, что вектор $\bar{a}$ лежит на оси Ox, и известна его координата: $\bar{a} = (-7)$. Определить его ориентацию на этой оси.

Решение. Применим теорему о знаке декартовой координаты вектора оси. Согласно этой теореме, вектор левоориентированный, так как его декартовая координата отрицательная.

Ответ: левоориентированный.

Пример 5. Известно, что вектор $\bar{a}$ лежит на оси Ox, и известна его координата: $\bar{a} = (-7)$. Найдите его модуль.

Решение. Из теоремы о знаке декартовой координаты вектора оси следует, что

$$|\bar{a}| = |a_x| = |-7| = 7.$$

Ответ: 7.

Пример 6. Найдите координату и модуль вектора $\overline{AB}$, лежащего на оси Ox, если A(3), B(–4), и определите его ориентацию.

Решение. Для вычисления координаты вектора используем правило: для того, чтобы найти координату вектора нужно

из координаты конца вектора вычесть координату его начала.

$$\overline{AB} = (x_B - x_A) = (-4 - 3) = (-7).$$

Так как координата вектора отрицательная, то вектор $\overline{AB}$ левоориентированный на оси Ox, а его модуль равен 7.

Ответ: $\overline{AB} = (-7)$, $|\overline{AB}| = 7$, ориентация левая.

Пример 7. Найдите координату векторов $\bar{a} + \bar{b}$ и $2\bar{a} - 3\bar{b}$, если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарные оси Ox и известны их координаты: $\bar{a} = (12)$, $\bar{b} = (-7)$.

Решение. При сложении векторов, коллинеарных одной оси, их координаты складываются, а при умножении вектора на число, его координата умножается на это число. Отсюда находим:

$$\bar{a} + \bar{b} = (12 - 7) = (5),\ 2\bar{a} - 3\bar{b} = (24 + 21) = (45).$$

Ответ: $\bar{a} + \bar{b} = (5)$, $2\bar{a} - 3\bar{b} = (45)$.

Пример 8. Отложите на координатной оси Ox вектор $\bar{a} = (-11)$ от точки A(9), и найдите координату его конца.

Решение. Так как координата вектора отрицательная, то вектор $\bar{a}$ левоориентированный на оси Ox, а его модуль равен 11. Откладываем от точки A отрезок длиной 11 влево от неё, и находим конец вектора и его координату: B(–2).

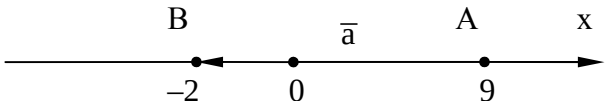

Рис. 4

Координату точки B можно вычислить чисто алгебраически:

$$\bar{a} = \overline{AB} = (-11) = (x_B - x_A),$$

откуда находим

$$x_B - x_A = -11 \Rightarrow x_B = x_A - 11 = 9 - 11 = -2.$$

Ответ: рисунок 4, $x_B = -2$.

Пример 9. Отложите на координатной оси Ox вектор $\bar{a}$ от точки A(9), и найдите координату его конца, если известно, что $\bar{a} \| Ox$ и $|\bar{a}| = 11$.

Решение. Так как направление вектора $\bar{a}$ неизвестно, то возможны два случая, в зависимости от его направления. Откладываем отрезки длиной 11 влево и вправо от точки A, и получаем точки B(–2) и C(20). Это геометрическое решение. Найдем решение алгебраическим методом. Так как $\bar{a} = \overline{AB}$, а его модуль есть расстояние от точки A до точки B, то воспользуемся формулой расстояния между двумя точками: $AB = |x_B - x_A|$. В этом уравнении известно, что $AB = 11$, $x_A = 9$. Обозначим $x_B = x$ и решая уравнение

$$|x - 9| = 11,$$

находим: $x_1 = -2$, $x_2 = 20$. Это координата конца вектора $\bar{a} = \overline{AB}$, т.е. точки B.

Ответ: –9 или 20.

Пример 10. Найдите расстояние между двумя точками координатной оси Ox: A(–12) и B(1 –7).

Решение. Воспользуемся формулой расстояния между двумя точками:

$$AB = |x_B - x_A| = |-7 - (-12)| = 5.$$

Ответ: 5.

Пример 11. Найдите множество точек координатной оси Ox, удовлетворяющих условию $|2 + x| > 5$.

Решение.

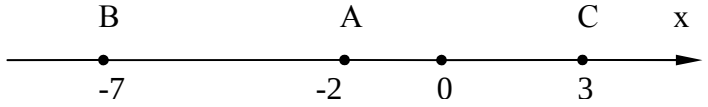

Рис. 5

Алгебраическое решение хорошо известно из курса алгебры средней школы. Решим задачу геометрическим методом. Запишем данное неравенство в виде:

$$|x - (-2)| > 5.$$

С геометрической точки зрения, x это координата точки оси Ox, которая удалена от точки A(–2) на расстояние не меньше, чем 5 единиц. Отложим от точки A отрезок длины 5 в обе стороны от точки A, и найдем координаты других концов этих отрезков. Смотрите рисунок 5.

$$x_B = x_A - 5 = -2 - 5 = -7, \quad x_C = x_A + 5 = -2 + 5 = 3.$$

Точки B(–7) и C(3) удалены от точки A на расстоянии равном 5 единиц. Точки оси Ox, удовлетворяющие условию задачи, расположены ещё дальше от точки A. Это все точки левее точки B и правее точки C.

Ответ: $x \in (-\infty; -7) \cup (3; \infty)$.

Пример 12. Найдите отношение, в котором точка C(3) делит отрезок AB, считая от точки A(–2), если все точки находятся на координатной оси Ox, и B(–7).

Решение. 1-й способ. Отложим данные точки на оси Ox (смотрите рисунок 5). Точка C делит отрезок AB внешним

образом, поэтому $\lambda_{AB}^{C} = -\frac{AC}{CB} = -\frac{|x_C - x_A|}{|x_B - x_C|} = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}$.

2-й способ. Воспользуемся формулой: $\lambda_{AB}^{C} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C}$. Тогда, $\lambda_{AB}^{C} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \frac{3-(-2)}{-7-3} = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

Пример 13. На координатной оси Ox найдите точку C, которая делит отрезок AB, считая от точки A в отношении $\lambda_{AB}^{C} = -\frac{7}{6}$, если A(–2), B(–7).

Решение. $x_C = \frac{x_A + \lambda_{AB}^{C} \cdot x_B}{1 + \lambda_{AB}^{C}} = \frac{-2 - \frac{7}{6}(-7)}{1 - \frac{7}{6}} = \frac{\frac{49}{6} - 2}{-\frac{1}{6}} = -37$.

Ответ: C(–37).

Пример 14. На координатной оси Ox найдите середину C отрезка AB, если A(–2), B(–7).

Решение. Воспользуемся формулой координаты середины отрезка:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2-7}{2} = -\frac{9}{2}.$$

Ответ: $C\left(-\frac{9}{2}\right)$.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Определение координаты вектора, если он коллинеарный координатной оси Ox.
2. Отметьте на координатной оси Ox точки A(–7) и B(4), и найдите координату середины отрезка AB.
3. Найдите проекцию вектора $\bar{a}$ на ось Ox, если известно, что он коллинеарный оси Ox, левоориентированный и его модуль равен 9.

Вариант 2

1. Определение деления отрезка точкой внутренним или внешним образом.
2. Отложите на координатной оси Ox, коллинеарный ей вектор $\bar{a}$, от точки A(–8), если известно, что он правоориентированный и его модуль равен 10. Найдите координату его конца и координату точки оси, равноудаленной от начала и конца этого вектора.
3. Найдите координату вектора $\overline{AB}$, лежащего на координатной оси Ox, если известны координаты его начала и конца: $x_A = -2$, $x_B = -9$. Найдите также его модуль, и определите его ориентацию на оси.

Вариант 3

1. Определение проекции вектора на ось.
2. На оси Ox даны точки: A(–3), B(4). Найдите координату вектора $\overline{BA}$, его модуль, и определите его ориентацию на оси. Найдите отношение, в котором начало координат делит отрезок AB, считая от точки A.
3. Расстояние между точками числовой оси $A\left(\frac{x-4}{x+3}\right)$ и B(–1) равно единице. Найдите x.

Вариант 4

1. Определение координаты точки числовой оси.
2. На координатной оси Ox лежит вектор $\bar{a} = (-7)$. Найдите координаты его конца, если он отложен от точки A(3). Найдите отношение, в котором конец этого вектора делит отрезок OA.
3. Расстояние между точками числовой оси $A\left(\frac{3x+1}{x-3}\right)$ и B(1) равно 1. Найти x.

Тест

1. Отметьте на координатной оси Ox точки, заданные своими координатами: A(5), B(–2), C(1), D(–7).

2. Изобразите на координатной оси Ox радиус-вектор точки A(6) и точки B(–3).
3. Найдите проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось Ox, если его начало и конец лежат на оси Ox и имеют координаты: $x_A = -\frac{3}{7}$, $x_B = -\frac{5}{11}$.
4. Найдите координату вектора $\bar{a}$, коллинеарного оси Ox, если он имеет на этой оси левую ориентацию и его модуль равен 11. Запишите этот вектор в координатной форме записи.
5. Найдите координату вектора $\bar{c} = 7\bar{a} + 8\bar{b}$, если векторы $\bar{a} = (-6)$ и $\bar{b} = (7)$ коллинеарные оси Ox.
6. Отложите вектор $\bar{a} = (-4)$, коллинеарный оси Ox от точки A(3) и найдите координаты его конца.
7. Найдите расстояние AB между точками $A\left(-\frac{3}{7}\right)$ и $B\left(-\frac{5}{11}\right)$.
8. Построить на координатной оси Ox точки, координаты которых удовлетворяют уравнениям: a) $|x| = 3$; b) $|2 - x| = 9$; c) $|x + 7| = 2$.
9. Найти ГМТ оси Ox, координаты которых удовлетворяют неравенствам: a) $|x - 2| \le 12$; b) $|x + 5| > 10$.
10. Найдите отношение, в котором точка C делит отрезок AB координатной оси Ox, считая от точки A, если A(2), B(–5), C(–7).
11. Найдите координату точки M, если A(–1), B(3) и $\lambda_{AB}^{M} = 2$.
12. Определить координаты середины отрезка CD, если C(–11), D(23).

Практическое занятие 9
Прямоугольная декартовая система координат на плоскости

Теорминимум: угол между векторами, между вектором и осью, вычисление проекции вектора на ось, ориентация координатных осей на плоскости, координатный угол, координаты точки плоскости, декартовые системы координат на плоскости, координаты вектора, координатная форма записи вектора, действия с векторами в координатной форме, расстояние между двумя точками на плоскости, модуль вектора, направляющие углы и косинусы вектора, орт вектора, деление отрезка в данном отношении, координаты середины отрезка.

Задачи для аудиторного решения

1. Построить точки с данными координатами в косоугольной системе координат с координатным углом 60^o: A(1; 2); B(–3; 1); C(1; –2); D(–2; –2).
2. Относительно косоугольной системы координат с координатным углом 45^o дана точка M(4; 2). Определить расстояние от этой точки до осей координат.

Следующие задачи решаем в ПДСК.

3. Постройте на координатной плоскости точку A(1; 4) и точки, симметричные данной относительно координатных осей и начала координат.
4. Постройте на координатной плоскости точку M(3; –2) и её радиус-вектор, и найдите его координаты.
5. Отложите от точки A(2; –3) вектор $\bar{a} = (-2; 5)$.
6. Найдите модуль, направляющие косинусы и орт вектора $\bar{a} = (-3; 4)$.
7. Найдите координаты вектора $\bar{a}$, если известен его модуль и координаты его орта: $|\bar{a}| = 2$, $\bar{a}^o = (-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5})$.
8. Найдите координаты вектора, если его модуль равен 5, а угол между вектором и осью ординат равен 150^o.
9. Найдите координаты вектора $\overline{AB}$, если известны координаты его начала и конца: $A\left(\frac{8}{3}; -\frac{9}{4}\right)$, $B\left(-\frac{7}{4}; \frac{11}{3}\right)$.
10. Найдите координаты вектора $\bar{d} = \bar{a} + 2\bar{b} - 3\bar{c}$, если $\bar{a} = (-1; -7)$, $\bar{b} = (2; 5)$, $\bar{c} = (1; -3)$.
11. Найдите площадь квадрата, если даны координаты его смежных вершин: A(3; –7); B(–1; 4).
12. Найдите отношение, в котором точка C(4; 5) делит отрезок AB, считая от точки A, если A(1; –1), B(3; 3). Убедитесь сначала, что данные точки лежат на одной

прямой.

13. На отрезке AB, где A(–4; 5), B(1; –1), найдите точку C, которая делит его в отношении 3 : 5, считая от точки A.
14. Найдите координаты середины отрезка AB, если известны координаты его концов: a) A(–4; 5), B(1; –1); b) $A\left(\frac{8}{3};-\frac{9}{4}\right)$, $B\left(-\frac{7}{4};\frac{11}{3}\right)$.

Задачи повышенного уровня сложности

15. Найдите координаты точки M в косоугольной системе координат с координатным углом 30^o, если расстояние ее от осей координат равны соответственно 1 и 1,5.
16. Найдите координаты вершин правильного шестиугольника со стороной 1, если за оси координат приняты две его смежные стороны, а вершина противолежащая началу координат, имеет положительные координаты.
17. Через точку A(4; 2) проведена окружность, касающаяся координатных осей. Определить ее центр и радиус.
18. Даны три точки A(1; –1), B(3; p) и C(4; 5). При каком p треугольник ABC прямоугольный?
19. Даны смежные вершины квадрата A(2; –1) и B(–1; 3). Найдите координаты двух его других вершин.
20. Прямая линия отсекает на оси Ox отрезок $OA = 4$ и на оси Oy отрезок $OB = 7$. Найдите координаты основания перпендикуляра, опущенного из начала координат на данную прямую.
21. Сторона ромба равна $5\sqrt{2}$, две его противоположные вершины имеют координаты (4; 9) и (–2; 1). Докажите, что этот ромб является квадратом.
22. В треугольнике с вершинами A(2; 3), B(6; 3) и C(6; –5) найдите длину биссектрисы внутреннего угла B.
23. Покажите, что точки A(–3; 8), B(1; 5) и C(4; 1) могут

служить тремя вершинами ромба ABCD (или ABDC). Используя равенство $\overline{AB} = \pm\overline{CD}$, найдите координаты точки D, и вычислите площадь этого ромба.

Домашнее задание

1. Найти координаты точки, симметричной точке A(–3; 4) относительно оси абсцисс косоугольной системы координат с координатным углом 60^o.
2. В треугольнике с вершинами A(2; 3), B(6; 3) и C(6; –5) найти: a) длину высоты BD; b) отношение в котором точка D делит отрезок AC и координаты точки D; c) координаты вектора $\overline{BD}$ и его направляющие углы; d) координаты, модуль, орт и направляющие углы вектора $\overline{CM} + \frac{3}{4}\overline{BA}$.

Примеры

Пример 1. Построить точку M(2; 1) в общей ДСК с координатным углом 60^o, и найти расстояния от неё до координатных осей.

Решение. Смотрите рисунок 1. На оси Ox откладываем точку C(2). На оси Oy откладываем точку D(1). Через точки C и D проводим прямые, параллельные координатным осям. Их точка пересечения есть искомая точка M(2; 1). Из точки M опускаем перпендикуляры на координатные оси: MA и MB. Это искомые расстояния от точки M до координатных осей. По построению, OCMD является параллелограммом, поэтому $CM = OD = 1, MD = OC = 2$. В прямоугольном треугольнике AMC, угол A прямой, угол ACM равен координатному углу, следовательно,

$$AM = CM \cdot \sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Аналогично, из треугольника DMB находим

$$BM = DM \cdot \sin 60^o = \sqrt{3}.$$

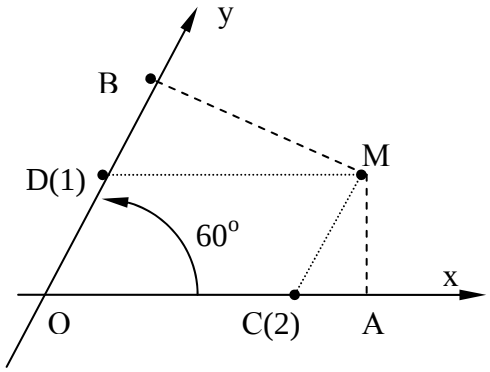

Рис. 1

Ответ: рисунок 1, $d(M,Ox) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $d(M,Oy) = \sqrt{3}$.

Пример 2. Отложить на координатной плоскости Oxy вектор $\bar{a} = (-3;1)$ от точки A(2; 1).

Решение. Смотрите рисунок 2. Обозначим через B – конец искомого вектора, C и D – проекции точки A на координатные оси. Проекция вектора $\bar{a}$ на ось абсцисс равна минус 3, поэтому откладываем на оси Ox от точки C влево от нее 3 единицы и отмечаем точку E(–1). Проекция вектора $\bar{a}$ на ось равна 1, поэтому откладываем на оси Oy от точки D вверх от нее одну единицу и отмечаем точку F(2). В точках E и F восстанавливаем перпендикуляры. Их точка пересечения есть искомая точка B.

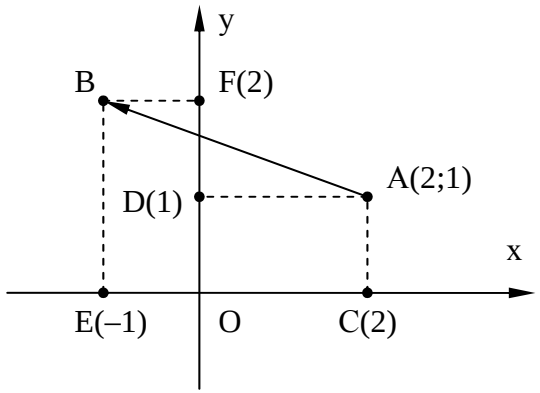

Рис. 2

Построенный вектор $\overline{AB}$ равен данному вектору $\bar{a}$, так как равны их координаты – проекции на координатные оси.
Ответ: рисунок 2.

Пример 3. Найти модуль, орт и направляющие косинусы вектора $\bar{a} = (-3;1)$.

Решение. $|\bar{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$, $\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|} = \frac{-3}{\sqrt{10}}$,

$$\cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \bar{a}^o = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3;1) = \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

Ответ: $|\bar{a}| = \sqrt{10}$, $\cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$,

$$\bar{a}^o = \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

Пример 4. Найти координаты вектора $\bar{a}$, и записать его в координатной форме, если его модуль равен 10, а направ-

ляющий угол β в 2 раза больше направляющего угла α.

Решение. Воспользуемся соотношением

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1,$$

и тем, что по условию задачи $\beta=2\alpha$. Получаем уравнение

$$\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha=1.$$

Воспользуемся формулой косинуса половинного аргумента:

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},$$

и, подставляя в уравнение, получаем

$$2\cos^2 2\alpha+\cos 2\alpha-1=0.$$

Решая последнее уравнение находим его корни, учитывая, что, по определению, направляющий угол не превосходит 180^o:

$$\alpha_1=\frac{\pi}{6};\ \alpha_2=\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, $\beta_1=\frac{\pi}{3};\ \beta_2=\pi$. Теперь, зная направляющие углы вектора, находим его орт:

$$\bar{a}_1^o=(\cos\alpha_1;\cos\beta_1)=(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}),\quad \bar{a}_2^o=(\cos\alpha_2;\cos\beta_2)=(0;-1).$$

Умножая орт вектора на его модуль, получаем запись вектора в координатной форме:

$$\bar{a}=|\bar{a}|\cdot\bar{a}^o=|\bar{a}|(\cos\alpha;\cos\beta)=(|\bar{a}|\cos\alpha;|\bar{a}|\cos\beta).$$

Ответ: $\bar{a}_1=(5\sqrt{3};5),\ \bar{a}_2=(0;-10)$.

Пример 5. Найти координаты вектора $\overline{AB}$, если A(1; 3), B(–1; 7).

Решение. Воспользуемся формулой:

$$\overline{AB}=(x_B-x_A;\ y_B-y_A)=(-2;4).$$

Ответ: $\overline{AB}=(-2;4)$.

Пример 6. Найти координаты вектора $2\bar{a}-4\bar{b}$, если $\bar{a}=(5;-1),\ \bar{b}=(2;7)$.

Решение. Действия с векторами в координатной форме удобнее производить, когда координаты вектора записаны не в строчку, а столбцом:

$$2\bar{a}-4\bar{b}=2\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-30\end{pmatrix}.$$

Ответ: $2\bar{a}-4\bar{b}=(2;-30)$.

Пример 7. Найти расстояние между точками A(–1; 7) и B(1; 3).

Решение. Воспользуемся формулой расстояния между двумя точками координатной плоскости:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{2^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}.$$

Ответ: $2\sqrt{5}$.

Пример 8. Найти отношение, в котором точка C(2; 1) делит отрезок AB, считая от точки A, если A(1; 3), B(–1; 7).

Решение. 1-й способ. Сначала убеждаемся в том, что данные точки находятся на одной прямой. Находим координаты векторов $\overline{CB}=(-3;6)$ и $\overline{AC}=(1;-2)$. Координаты этих векторов пропорциональны:

$$\frac{1}{-3}=\frac{-2}{6},$$

следовательно, векторы коллинеарные и данные точки лежат на одной прямой. Более того,

$$\overline{AC} = (1; -2) = -\frac{1}{3}\overline{CB} = -\frac{1}{3}(-3; 6).$$

Из определения отношения, в котором точка C делит отрезок AB, считая от точки A:

$$\overline{AC} = \lambda_{AB}^{C} \cdot \overline{CB},$$

находим, что $\lambda_{AB}^{C} = -\frac{1}{3}$.

2-й способ. Если данные точки находятся на одной прямой, то верны равенства:

$$\lambda_{AB}^{C} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C}.$$

Подставляя данные координаты в эти равенства, получаем:

$$\frac{2-1}{-1-2} = \frac{1-3}{7-1} = -\frac{1}{3}.$$

Следовательно, данные точки лежат на одной прямой и искомое отношение $\lambda_{AB}^{C} = -\frac{1}{3}$.

3-й способ. Сначала убедимся в том, что данные точки лежат на одной прямой. Для этого найдем длины отрезков AB, AC, CB:

$$AB = 2\sqrt{5},\ AC = \sqrt{5},\ CB = 3\sqrt{5}.$$

Так как $CB = CA + AB$, то это означает, что точки A, B и C лежат на одной прямой. Далее, воспользуемся теоремой о вычислении отношения, в котором точка C делит отрезок AB, считая от точки A:

$$\lambda_{AB}^{C} = \pm\frac{AC}{CB},$$

где знак плюс берется в том случае, когда точка C делит отрезок AB внутренним образом, и знак минус, когда точка C делит отрезок AB внешним образом. Получаем отсюда:

$$\lambda_{AB}^{C} = \pm\frac{AC}{CB} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \pm\frac{1}{3}.$$

Если бы точка C находилась между точками A и B на отрезке AB, тогда выполнялось бы одно из следующих неравенств:

$$x_A < x_C < x_B \text{ или } x_B < x_C < x_A,$$

но в нашем случае, $x_C = 2 > x_A = 1 > x_B = -1$. Это означает, что точка C делит отрезок AB внешним образом, и нужно выбрать знак минус.

Ответ: $\lambda_{AB}^{C} = -\frac{1}{3}$.

Пример 9. Найти координаты точки C, если известно, что она делит отрезок A(1; 3), B(–1; 7), считая от точки A, в отношении 3 : 2.

Решение. Воспользуемся формулами:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda_{AB}^{C} \cdot x_B}{1 + \lambda_{AB}^{C}},\quad y_C = \frac{y_A + \lambda_{AB}^{C} \cdot y_B}{1 + \lambda_{AB}^{C}}.$$

По условию задачи, $\lambda_{AB}^{C} = 1{,}5$. Из данных формул находим:

$$x_C = \frac{1 + 1{,}5\,(-1)}{1 + 1{,}5} = -\frac{1}{5},\ y_C = \frac{3 + 1{,}5 \cdot 7}{1 + 1{,}5} = 5\frac{2}{5}.$$

Ответ: $C\left(-\frac{1}{5}; \frac{27}{5}\right)$.

Пример 10. Найти координаты середины отрезка AB, если A(1; 3), B(–1; 7).

Решение. По формулам координат середины отрезка:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0,\ y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 + 7}{2} = 5.$$

Ответ: (0; 5).

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Определение угла между векторами.
2. На координатной плоскости Oxy даны координаты точек: A(–3; 2), B(1; –1): a) постройте точки A и B на плоскости Oxy; b) найдите координаты вектора $\overline{AB}$; c) найдите координаты середины отрезка AB; d)* докажите, что начало координат не лежит на прямой, проходящей через точки A и B.

Вариант 2

1. Определение угла между вектором и осью.
2. На координатной плоскости Oxy даны координаты точек: A(–1; –1), B(3; 2): a) постройте точки A и B на плоскости Oxy; b) найдите координаты вектора $\overline{AB}$; c) найдите координаты середины отрезка AB; d)* докажите, что начало координат не лежит на прямой, проходящей через точки A и B.

Вариант 3

1. Определение координат вектора в ПДСК на плоскости.
2. Отложите вектор $\overline{AB} = (1; -2)$ от точки A(–2; 1), и: a) постройте чертеж и найдите координаты точки B; b) найдите модуль вектора $\overline{AB}$ и его направляющие косинусы.

Вариант 4

1. Определение координат точки в ПДСК на плоскости.
2. Отложите вектор $\overline{AB} = (-1; 2)$ от точки A(2; –1), и: a) постройте чертеж и найдите координаты точки B; b) найдите модуль вектора $\overline{AB}$ и его направляющие косинусы.

Тест

1. Отметьте на координатной плоскости Oxy точки: A(3; 4), B(–1; 2), C(–1; –2), D(3; –4).
2. Отметьте на координатной плоскости Oxy точки, симметричные точке A(2; 4) относительно осей координат и начала координат.
3. Отметьте на координатной плоскости Oxy точки, симметричные точке A(2; 4) относительно биссектрисы координатного угла и биссектрисы угла, смежного с координатным.
4. Найдите координаты радиус-вектора точки A(2; 5) и изобразите его на координатной плоскости.
5. Отложите от точки A(–2; –3) вектор $\bar{a} = (-2; 3)$ и найдите координаты его конца.

6. Найдите модуль и направляющие косинусы вектора $\bar{a} = (-4; 3)$.
7. Запишите в координатной форме орт вектора $\bar{a} = (4; -3)$.
8. Запишите вектор $\overline{AB}$ в координатной форме записи, если A(–5; –8), B(–8; 5).
9. Найдите расстояние между точками $A\left(-\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}\right)$ и $B\left(-\frac{4}{3}; -\frac{3}{2}\right)$, и координаты середины отрезка AB.
10. На отрезке AB найдите точку, которая делит его в отношении $\lambda = -\frac{5}{4}$, считая от точки $A\left(-\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}\right)$, если $B\left(-\frac{4}{3}; -\frac{3}{2}\right)$.

Практическое занятие 10
Прямоугольная декартовая система координат в пространстве

Теорминимум: ориентация трех взаимно перпендикулярных координатных осей в пространстве, координаты точки и прямоугольная декартовая система координат в пространстве, координаты вектора и координатная форма записи, действия с векторами в координатной форме, расстояние между двумя точками в пространстве, модуль вектора, его направляющие углы и косинусы, орт вектора, деление отрезка в данном отношении.

Задачи для аудиторного решения

1. Постройте в ПДСК Oxyz точку A(4; 3; 5) и её проекции на координатные оси и координатные плоскости, и найти их координаты.
2. Найдите расстояния от точки B(4; 3; –5) до координатных плоскостей и координатных осей.
3. Найдите координаты точек, которые симметричны точке M(5; 4; – 2) относительно координатных плоскостей, координатных осей и начала координат.
4. Найдите проекции радиус-вектора точки A(1; 2; 5) на координатные оси, и запишите его в координатной форме.

5. Найдите модуль и направляющие углы радиус-вектора точки A(2; –1; –2).
6. Найдите модуль и направляющие косинусы вектора $\bar{a} = (-7; -6; 6)$.
7. Найдите орт вектора $\bar{a} = (-6; 2; -3)$.
8. Найдите проекции вектора на координатные оси, если его модуль равен 2, и известны его направляющие углы: $\alpha = 45^o$, $\beta = 120^o$, $\gamma = 60^o$. Запишите этот вектор в координатной форме.
9. Найдите координаты вектора, если его модуль равен $\sqrt{2}$, направляющие углы $\alpha = 45^o$, $\beta = 135^o$, и известно, что направляющий угол γ – острый.
10. Найдите координаты вектора, если точка A(–2; –13; 19) является его началом, а точка B(–11; –9; 23) – концом.
11. Найдите координаты вектора $\bar{c} = 5\bar{a} + 2\bar{b}$, если $\bar{a} = (-1; 1; -2)$, $\bar{b} = (3; -4; 5)$.
12. Найдите длины сторон треугольника с вершинами A(2; 2; –2), B(3; –1; –3), C(–3; 6; 1), и длину его медианы, проведенной из вершины A.
13. Прямая проходит через точки A(2; 5; –2) и B(–1; 3; –4). Найдите на данной прямой точку, которая делит отрезок AB в отношении $\lambda = -\frac{4}{7}$, считая от точки A.
14. Убедитесь, что точки A(1; –1; 0), B(0; 1; 3) и C(–2; 5; 9) лежат на одной прямой, и найдите отношение, в котором точка A делит отрезок BC, считая от точки B.

Задачи повышенного уровня сложности

15. Даны вершины треугольника A(1; 2; –1), B(2; –1; 3) и C(–4; 7; 5). Вычислите длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине B.

16. На отрицательной полуоси абсцисс найдите точку B, расстояние от которой до точки A(–1; 4; 8) равно 12.
17. Даны две вершины A(2; –3; –5) и B(–1; 3; 2) параллелограмма ABCD и точка K(4; –1; 7) пересечения его диагоналей. Определите две другие вершины этого параллелограмма.
18. Прямая проходит через точки A(–1; 6; 6) и B(3; –6; –2). Найдите точки ее пересечения с координатными плоскостями.
19. Ребро куба равно 1. Найдите длину отрезка, соединяющего середины двух скрещивающихся ребер.
20. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер правильного тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.
21. Докажите, что в произвольном треугольнике ABC вектор $\overline{AB}^o + \overline{AC}^o$ лежит на биссектрисе угла BAC.

Домашнее задание

1. Найдите центр сферы радиуса 3, которая касается всех трех координатных плоскостей и расположена в первом октанте (в шестом октанте).
2. Дано: A(3; –2; 5), B(–2; 1; –3), C(5; 1; –1). a) Запишите векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ в координатной форме и найдите их орты $\overline{AB}^o$, $\overline{AC}^o$, $\overline{BC}^o$; b) найдите координаты вектора $\frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$ и его модуль; c) найдите модуль и направляющие косинусы вектора $\overline{AM}$, где точка M делит отрезок BC в отношении 2 : 1.
3. Вектор имеет направляющие углы $\alpha = 120^o$ и $\gamma = 45^o$. Найти его тупой направляющий угол β.

Примеры

Пример 1. Построить точку M(1; 2; 2) в координатном пространстве Oxyz, и найти расстояния от неё до координатных плоскостей и осей.

Решение. Легко видеть, что расстояние от точки M до координатной плоскости Oxy равно модулю её аппликаты:

$$d(M; Oxy) = |z_M| = 2.$$

Аналогично, $d(M; Oxz) = |y_M| = 2$, $d(M; Oyz) = |x_M| = 1$.

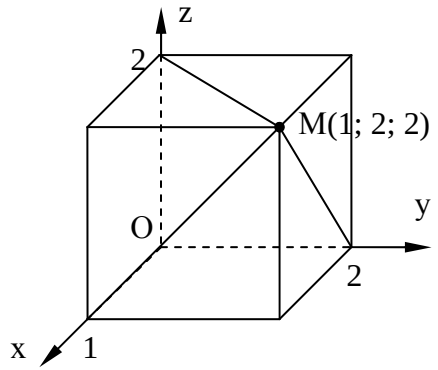

Рис. 1

Расстояние от точки M до координатных осей:

$$d(M, Ox) = \sqrt{y_M^2 + z_M^2} = 2\sqrt{2}, \quad d(M, Oy) = \sqrt{x_M^2 + z_M^2} = \sqrt{5},$$

$$d(M, Oz) = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = \sqrt{5}.$$

Ответ: рисунок 1, $d(M; Oxy) = d(M; Oxz) = 2$,

$d(M; Oyz) = 1$, $d(M, Ox) = 2\sqrt{2}$, $d(M, Oy) = d(M, Oz) = \sqrt{5}$.

Пример 2. Найти модуль и направляющие косинусы вектора $\bar{a} = (-2; 1; -2)$. Записать в координатной форме орт данного вектора.

Решение. Воспользуемся формулой для вычисления модуля вектора:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1} = 3.$$

Вычисляем направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|} = -\frac{2}{3}, \ \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|} = \frac{1}{3}, \ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|} = -\frac{2}{3}.$$

Мы знаем, что направляющие косинусы вектора равны координатам его орта. Осталось записать ответ.

Ответ: $|\bar{a}| = 3$, $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, $\cos\beta = \frac{1}{3}$, $\cos\gamma = -\frac{2}{3}$,

$$\bar{a}^o = (-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}).$$

Пример 3. Найти координаты вектора $\bar{a}$, если его орт имеет координаты $\bar{a}^o = (-\frac{6}{7}; -\frac{2}{7}; \frac{3}{7})$ и $|\bar{a}| = 3$.

Решение. Сначала проверим, что $|\bar{a}^o| = 1$. Действительно,

$$|\bar{a}^o| = \sqrt{\left(-\frac{6}{7}\right)^2 + \left(-\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2} = \frac{1}{7}\sqrt{36 + 4 + 9} = 1.$$

Из определения орта вектора следует:

$$\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \bar{a}^o = 3 \cdot (-\frac{6}{7}; -\frac{2}{7}; \frac{3}{7}) = (-\frac{18}{7}; -\frac{6}{7}; \frac{9}{7}).$$

Ответ: $\bar{a} = (-\frac{18}{7}; -\frac{6}{7}; \frac{9}{7})$.

Пример 4. Найти координаты вектора $\bar{a}$, если его модуль равен 2, $\alpha = 60^o$, $\gamma = 120^o$.

Решение. Воспользуемся тем, что сумма квадратов направ-

ляющих косинусов вектора равна 1:

$$\cos^2 60^o + \cos^2 \beta + \cos^2 120^o = 1.$$

Отсюда находим,

$$\cos\beta = \pm \frac{\sqrt{2}}{2},$$

т.е. $\beta = 45^0$ или $\beta = 135^0$. Возможны два варианта:

$$\bar{a} = 2(\cos 60^o, \cos 45^o, \cos 120^o) = (1; \sqrt{2}; -1)$$

или

$$\bar{a} = 2(\cos 60^o, \cos 135^o, \cos 120^o) = (1; -\sqrt{2}; -1).$$

Ответ: $\bar{a} = (1; \sqrt{2}; -1)$ или $\bar{a} = (1; -\sqrt{2}; -1)$.

Пример 5. Найти координаты вектора $\overline{AB}$, если A(1; –3; 12), B(–2; 11; 9).

Решение. Воспользуемся правилом нахождения координат вектора:

$$\overline{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (-3; 14; -3).$$

Ответ: $\overline{AB} = (-3; 14; -3)$.

Пример 6. Найти координаты вектора $3\bar{a} - 2\bar{b}$, если $\bar{a} = (5; -1; -3)$, $\bar{b} = (2; 7; -5)$.

Решение. $3\bar{a} - 2\bar{b} = 3\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $3\bar{a} - 2\bar{b} = (11; 11; 1)$.

Пример 7. Найти расстояние между точками A(0; 1; –9) и B(–7; 7: –3).

Решение. Вычисляем по формуле:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} =$$

$$= \sqrt{(-7)^2 + (7-1)^2 + (-3+9)^2} = \sqrt{49 + 36 + 36} = 11.$$

Ответ: 11.

Пример 8. Найти отношение, в котором точка C(2; 4; 5) делит отрезок AB, если A(0; 1; 9) и B(–2; –2; 13).

Решение. Воспользуемся формулой:

$$\lambda_{AB}^C = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C} = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_C}.$$

Заметим, что если данные точки не лежат на одной прямой, то одно из двух равенств в формуле не выполняется:

$$\frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} \neq \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C} \text{ или } \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C} \neq \frac{z_C - z_A}{z_B - z_C}.$$

Подставляем данные координаты в формулу:

$$\lambda_{AB}^C = \frac{2-0}{-2-2} = \frac{4-1}{-2-4} = \frac{5-9}{13-5} \text{ или } \lambda_{AB}^C = -\frac{1}{2}.$$

Одновременно мы убедились в том, что точки A, B и C находятся на одной прямой.

Ответ: $\lambda_{AB}^C = -\frac{1}{2}$.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Определение координат вектора.
2. Дана точка A(3; 5; 1). Найдите проекции её радиус-вектора на координатные оси.
3. Найдите расстояние от точки A(3; 5; 1) до: a) координатной плоскости Oxz; b) координатной оси Oy; c) начала координат.

Вариант 2

1. Определение орта вектора.
2. Найдите координаты радиус-вектора точки A(5; 1; 3).
3. Найдите расстояние от точки A(5; 1; 3) до: a) координатной плоскости

Oyz; b) координатной оси Ox; c) начала координат.

Вариант 3

1. Определение правоориентированной тройки взаимно перпендикулярных осей.
2. В координатном пространстве Oxyz точки A(2; –3; 5) и B(3; –1; 2) являются вершинами параллелограмма OABC. Найдите: a) координаты вершины C; b) длину медианы OD треугольника OAB.

Вариант 4

1. Определение координат точки в ПДСК Oxyz.
2. В координатном пространстве Oxyz точки B(3; –1; 2) и C(1; 2; –3) являются вершинами параллелограмма OABC. Найдите: a) координаты вершины A; b) длину медианы OD треугольника OBC.

Тест

1. Постройте в ПДСК Oxyz точку A(1; 2; 3) и её проекции на координатные оси и координатные плоскости, и найти их координаты.
2. Найдите расстояния от точки B(–1; 2; 3) до координатных плоскостей и координатных осей.
3. Найдите проекции ее радиус-вектора $\overline{OA}$ на координатные оси, и запишите его в координатной форме, если A(–3; –7; 12).
4. Найдите модуль и направляющие косинусы вектора $\bar{a} = (1; 2; -2)$.
5. Вектор $\bar{a}$ имеет направляющие углы $\alpha = 60^o$, $\beta = 120^o$. Вычислите его направляющий угол $\gamma = (\bar{a} \wedge Oz)$, если известно, что он является тупым.
6. Найдите координаты вектора $\overline{AB}$, если A(0; –5; 2), B(–1; –3; –3).
7. Найти расстояние от точки A(12; –9; 4) до точки B(–2; 3; –2).
8. Найдите середину отрезка AB, если A(–3; 1; 2), B(3; 6; 1).
9. На отрезке AB найдите точку, которая делит его в отношении 5 : 2, считая от точки A, если A(4; –3; –1), B(–8; 6; –5).
10. Найдите отношение, в котором точка C(6 ; –9;15) делит отрезок AB, считая от точки A(2; –1; 3), если B(0; 3; –3).
11. Найти координаты орта вектора $\bar{a} = (1; 2; -2)$.
12. Найдите координаты вектора $3\bar{a} - 4\bar{b} + 2\bar{c}$, если $\bar{a} = (1; 2; -2)$, $\bar{b} = (2; -2; 1)$, $\bar{c} = (1; 0; 8)$.

Практическое занятие 11
Геометрический центр тяжести системы материальных точек и плоских фигур

Теорминимум: ГЦТ системы из двух и более материальных точек, ГЦТ треугольника, трапеции, многоугольника.

Задачи для аудиторного решения

1. Найти ГЦТ системы материальных точек: A(–6; 3; 9), $m_A = 7$, B(0; –2; 1), $m_B = 4$.
2. Даны концы A(3; –5; 2) и B(–1; 3; 0) однородного стержня. Определить координаты его центра тяжести.
3. Найти ГЦТ системы материальных точек: A(0; 0; 1), B(0; 4; 0) и C(7; 0; 0), $m_A = 2$, $m_B = 3$, $m_C = 4$.
4. Найти центр тяжести треугольника ABC: A(0; 0; 1), B(0; 4; 0), C(7; 0; 0).
5. На координатной плоскости Oxy даны точки: A(1; 0), B(–1; 2), C(–2; –1), D(–1; –2). Постройте данные точки на чертеже, и найдите координаты центра тяжести четырехугольника ABCD.
6. Однородная пластина имеет форму квадрата со стороной 2p, от которого отрезан треугольник; прямая разреза проходит через середины смежных сторон квадрата. Определить центр тяжести пластины.
7. Правильный шестиугольник ABCDEF со стороной 1 изготовлен из куска картона. Его разрезали пополам по прямой AD. Найдите центр тяжести полученной равнобочной трапеции ABCD. Систему координат введите так, как вам удобно.

Задачи повышенного уровня сложности

8. Дан правильный шестиугольник ABCDEF со стороной 1. Стороны BC и DE продляются за вершины C и D до пересечения в точке K. Найдите ГЦТ пятиугольника

ABKEF. Систему координат введите сами.

9. Правильный шестиугольник ABCDEF со стороной 1 изготовлен из куска картона. От него отрезали треугольник ABC. Найдите центр тяжести оставшейся фигуры. Систему координат введите так, как вам удобно.
10. Однородная проволока согнута в виде прямого угла со сторонами a и b. Найдите её центр тяжести.

Домашнее задание

1. Центр тяжести однородного стержня находится в точке C(1; –1; 5), а один из его концов в точке M(–2; –1; 7). Определить координаты другого конца стержня.
2. Найдите ГЦТ треугольника с вершинами A(1; 2; 3), B(2; 3; 1), C(3; 1; 2).
3. Где находится центр тяжести стержня, составленного из двух однородных стержней равной длины, но различной массы, если масса одного из них в полтора раза больше массы другого?

Примеры

Пример 1. Найти ГЦТ системы из материальных точек A(3; 5; –1) и B(–3; –4; 8), с массами $m_A = 1$ и $m_B = 2$.

Решение. Пусть C – искомый ГЦТ. Тогда

$$x_C = \frac{x_A \cdot m_A + x_B \cdot m_B}{m_A + m_B} = \frac{3-6}{3} = -1,$$

$$y_C = \frac{y_A \cdot m_A + y_B \cdot m_B}{m_A + m_B} = \frac{5-8}{3} = -1,$$

$$z_C = \frac{z_A \cdot m_A + z_B \cdot m_B}{m_A + m_B} = \frac{-1+16}{3} = 5.$$

Ответ: C(–1; –1; 5).

Пример 2. Найти ГЦТ однородного стержня, если известны координаты его концов: (–3; 8; –3) и (1; 4; –5).

Решение. ГЦТ однородного стержня находится в его середине.

Ответ: (–1; 6; –4).

Пример 3. Найти ГЦТ стержня, если он составлен из двух стержней длины 3 и 4 соответственно, и известно, что масса короткого стержня в 3 раза больше массы более длинного стержня.

Решение. Введем систему координат. Допустим, что стержень лежит на оси Ox, где начало координат совпадает с местом стыка обоих стержней. Смотрите рисунок 1.

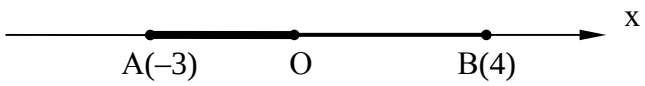

Рис. 1

Обозначим через m массу длинного стержня, тогда масса короткого стержня равна 3m. Заменим короткий стержень на материальную точку (C, 3m), где C – его ГЦТ , который находится в середине короткого стержня, Поэтому точка C имеет на оси Ox координату $x_C = -1,5$. Аналогично поступим с длинным стержнем, заменяя его на материальную точку D(2) и массой m. Тогда ГЦТ составного стержня будет совпадать с ГЦТ системы из двух материальных точек C(–1,5) и D(2) с массами 3m и m соответственно. Обозначим искомый ГЦТ буквой F. Тогда

$$x_F = \frac{x_C \cdot m_C + x_D \cdot m_D}{m_C + m_D} = \frac{-1,5 \cdot 3m + 2m}{4m} = -\frac{2,5}{4} = -\frac{5}{8}.$$

Ответ: ГЦТ составного стержня находится на коротком

стержне, на расстоянии 0,625 от места стыковки стержней.

Пример 4. Найти ГЦТ системы из трех материальных точек A(–12; 7; –9), B(11; 14; –15), C(10; 17; –4) с массами $m_A = 0{,}5,\ m_B = 1,\ m_C = 1{,}5$.

Решение. Обозначим искомый ГЦТ буквой D.

$$x_D = \frac{x_A \cdot m_A + x_B \cdot m_B + x_C \cdot m_C}{m_A + m_B + m_C} = \frac{(-12)\cdot\frac{1}{2} + 11 + 10\cdot\frac{3}{2}}{3} = \frac{20}{3},$$

$$y_D = \frac{7\cdot\frac{1}{2} + 14 + 17\cdot\frac{3}{2}}{3} = \frac{43}{3},\ z_D = \frac{(-9)\frac{1}{2} - 15 - 4\cdot\frac{3}{2}}{3} = -\frac{17}{2}.$$

Ответ: $\left(\frac{20}{3}; \frac{43}{3}; -\frac{17}{2}\right)$.

Пример 5. Найти ГЦТ треугольника с вершинами в точках A(0; 3; 9), B(–2; –3; 17), C(11; –12; 10).

Решение. Вычисляем по известным формулам:

$$x = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{0 - 2 + 11}{3} = 3,$$

$$y = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{3 - 3 - 12}{3} = -4, \quad z = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = 12.$$

Ответ: (3; –4; 12).

Пример 6. Из правильного шестиугольника ABCDEF со стороной a и центром O вырезали треугольник OBC. Найти центр тяжести оставшейся фигуры.

Решение. Введем ПДСК Oxy как на рисунке 2. Легко заметить, что в силу симметрии OCDE и OBAF – равные ромбы, ГЦТ которых находятся в точках G и H соответственно, а площадь каждого из них равна двум площадям треугольника OAB. ГЦТ фигуры из указанных двух ромбов, очевидно, находится в начале координат, а площадь этих двух ромбов равна $4S$, где через S обозначена площадь треугольника OAB. Заменяем указанные ромбы на их ГЦТ, то есть на точку O с массой $m_O = 4S$.

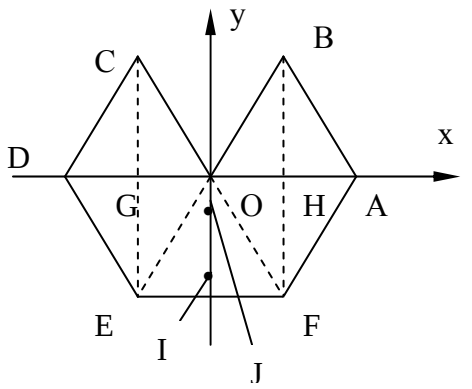

Рис. 2

Обозначим через I – ГЦТ треугольника OEF с массой S. Таким образом, имеем две материальные точки – точку O с массой 4S и точку I с массой S. Найдем координаты (x_1, y_1) точки I. Ясно, что

$$x_I = 0,\ y_I = -\frac{2}{3}h,$$

где h – высота равностороннего треугольника со стороной a, т.е. $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Получаем отсюда:

$$y_I = -\frac{2}{3}h = -\frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Имеем,

$$O(0;\,0),\ m_O = 4S;\quad I\left(0;-\frac{a}{\sqrt{3}}\right),\ m_I = S.$$

Обозначим через J – ГЦТ искомой фигуры. Тогда точка J есть ГЦТ системы из двух материальных точек O и I.

$$x_J = \frac{x_O m_O + x_I m_I}{m_O + m_I} = \frac{m_I}{M} x_I,\quad y_J = \frac{m_I}{M} y_I,$$

где $M = m_O + m_I = 5S$ – масса всей плоской фигуры.

$$x_J = \frac{1}{5} x_I = 0,\quad y_J = \frac{1}{5} y_I = -\frac{a}{5\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\left(0;-\frac{a}{5\sqrt{3}}\right)$.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Определение материальной точки.
2. Найдите в координатной плоскости Oxy ГЦТ однородного стержня AB, и выполните чертеж, если: A(3; 2), B(–5; –2).
3. Найдите ГЦТ однородного треугольника с вершинами A(3; 0; 0), B(0; 3; 0), C(0; 0; 3).

Вариант 2

1. Определение ГЦТ треугольника.
2. Найдите в координатной плоскости Oxy координаты конца A однородного стержня AB, и выполните чертеж, если B(–2; –1), и его ГЦТ имеет координаты C(2; 1).
3. Найдите ГЦТ системы из двух материальных точек, заданных на координатной плоскости: A(3; 2), $m_A = 5$ и B(–4; –1), $m_B = 10$.

Вариант 3

1. Определение ГЦТ системы из двух материальных точек.
2. Найдите ГЦТ системы материальных точек A(1; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 3), $m_A = 1$, $m_B = 2$, $m_C = 3$.
3. Стороны квадрата O(0; 0), A(0; 1), B(1; 1), C(1; 0) представляют собой однородные стержни с массами $m_{OA} = 1, m_{AB} = 2, m_{BC} = 3$, $m_{OC} = 4$. Найдите их ГЦТ.

Вариант 4

1. Определение ГЦТ системы из трех материальных точек.
2. Найдите ГЦТ системы из двух материальных точек, заданных на координатной плоскости: A(–2; –3), $m_A = 5$ и B(1; 4), $m_B = 10$.
3. Квадратная пластинка с вершинами O(0; 0), A(0; 3), B(3; 3), C(3; 0) составлена из треугольника OAC с массой 3, и треугольника ABC с массой 2. Найдите ГЦТ квадратной пластинки.

Тест

1. Найдите ГЦТ двух материальных точек A(11; –6; 3), B(3; 7; –1), с массами $m_A = 2$, $m_B = 3$.
2. Масса точки A в два раза меньше массы точки B. Найдите их ГЦТ, если A(12; 3), B(3; –1).
3. Массы точек A и B равны. Найдите их ГЦТ, если A(11; –6; 3) и B(3; 8; –1).
4. Даны концы A(1; –4; 5) и B(–4; 0; 7) однородного стержня. Определите координаты его центра тяжести.
5. Найдите ГЦТ системы из трех материальных точек A(2; 12; 10), B(1; 4; 1), C(1; 2; 3), $m_A = 2$, $m_B = 3$, $m_C = 4$.
6. Найдите ГЦТ системы из трех материальных точек A(2; 12; 10), B(1; 4; 1), C(1; 2; 3) с равными массами.
7. Найдите ГЦТ системы из трех материальных точек A(2; 12; 10), B(1; 4; 1) и C(1; 2; 3), если их массы, соответственно, образуют арифметическую прогрессию с разностью прогрессии, равной массе вершины A.
8. Найдите ГЦТ однородного треугольника с вершинами в точках A(–1; 3; –2), B(8; 4; –3), C(0; –6; 1).
9. Центр тяжести однородного стержня находится в точке C(2; –2; 4), а один из его концов в точке A(–1; 1; 3). Определите координаты другого конца стержня.
10. Найдите центр тяжести равнобочной трапеции, которая получится из равностороннего треугольника со стороной 1, если отрезать от него одну из его вершин, причем линия разреза идет по средней линии треугольника. Систему координат введите так, как вам удобно.

Практическое занятие 12
Полярная система координат на плоскости

Теорминимум: полюс, полярный луч, полярная система координат на плоскости, полярные координаты точки плоскости и их связь с её декартовыми координатами, полярный угол вектора плоскости и его связь с направляющими углами вектора.

Задачи для аудиторного решения

1. Постройте в полярной системе координат точки, заданные полярными координатами:
   $A\left(3;\frac{\pi}{2}\right)$; $B(2;\pi)$, $C\left(3;-\frac{\pi}{4}\right)$, $D(4;3)$; $E(1;-1)$.
2. Определить полярные координаты точек, симметричных данным относительно полюса и полярной оси:
   $A\left(3;\frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(2;-\frac{\pi}{2}\right)$, $C\left(3;-\frac{\pi}{3}\right)$, $D(5;-2)$.
3. Полярная система координат на плоскости совмещена стандартным образом с ПДСК. В полярной системе координат даны точки: $M_1\left(6;\frac{\pi}{2}\right)$, $M_2(5;0)$, $M_3\left(2;\frac{\pi}{4}\right)$, $M_4\left(10;-\frac{\pi}{3}\right)$, $M_5\left(8;\frac{2\pi}{3}\right)$. Определите декартовы координаты этих точек.
4. Полярная система координат на плоскости совмещена с ПДСК. Найдите полярные координаты точек, заданные декартовыми координатами:
   $A(0;5)$, $B(-3;0)$, $C(\sqrt{3};1)$, $D(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$, $E(1;-\sqrt{3})$.
5. В полярной системе координат даны две вершины $A\left(3;-\frac{4\pi}{9}\right)$ и $B\left(5;\frac{3\pi}{14}\right)$ параллелограмма ABCD, точка пересечения диагоналей которого совпадает с полюсом. Определить две другие вершины этого параллелограмма.
6. В полярной системе координат даны точки $A\left(8;-\frac{2\pi}{3}\right)$ и $B\left(6;\frac{\pi}{3}\right)$. Вычислить полярные координаты середины отрезка AB.
7. Вычислить площадь треугольника OAB, где O – полюс полярной системы координат, $A\left(5;\frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(4;\frac{\pi}{12}\right)$ – полярные координаты двух его других вершин.

Задачи повышенного уровня сложности

8. В полярной системе координат даны две противоположные вершины квадрата: $A\left(6;-\frac{7\pi}{12}\right)$ и $C\left(4;\frac{\pi}{6}\right)$. Найдите его площадь.
9. Полярная система координат совмещена с ПДСК стандартным образом. Найти ГМТ плоскости, координаты которых совпадают в обеих системах координат.
10. Одна из вершин треугольника совпадает с полюсом полярной системы координат, а другие вершины находятся в точках $A(2;0)$ и $B\left(4;\frac{\pi}{3}\right)$. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.
11. Полюс полярной системы координат совмещен с вершиной правильного треугольника со стороной 1, а полярный луч направлен по его стороне. Найдите полярные координаты всех вершин треугольника.

Домашнее задание

1. В ПДСК даны точки: A(0; 1), B(0; –1), C(1; 0), D(–1; 0), E(1; 1), F(1; –1), G(–1; –1), H(–1; 1), $I(1;\sqrt{3})$, $J(-\sqrt{3};1)$. Найдите их полярные координаты в полярной системе координат стандартным образом совмещенной с прямоугольной.
2. Вычислить площадь треугольника, вершины которого заданы в полярной системе координат:
$$A\left(3;\frac{\pi}{8}\right),\ B\left(8;\frac{7\pi}{24}\right),\ C\left(6;\frac{5\pi}{8}\right).$$
3. Полюс полярной системы координат совмещен с центром правильного треугольника со стороной 1, а полярный луч параллелен его стороне. Найдите полярные координаты всех вершин треугольника.

Примеры

Пример 1. В полярной системе координат на плоскости построить точки с заданными полярными координатами: $A\left(1;\frac{3\pi}{4}\right),\ B(1;1),\ C\left(1;-\frac{4\pi}{3}\right)$.

Решение. Смотрите рисунок 1, где $OA = OB = OC = 1$.

Ответ: рисунок 1.

Пример 2. В полярной системе координат на плоскости дана точка $A(1;\frac{3\pi}{4})$. Постройте точку, симметричную данной относительно полюса и полярного луча.

Решение. Смотрите рисунок 2, где $OA = OB = OC = 1$.

Ответ: точка $B(1;-\frac{\pi}{4})$ симметрична точке A относительно

полюса; точка $C(1;-\frac{3\pi}{4})$ симметрична точке A относительно полярного луча.

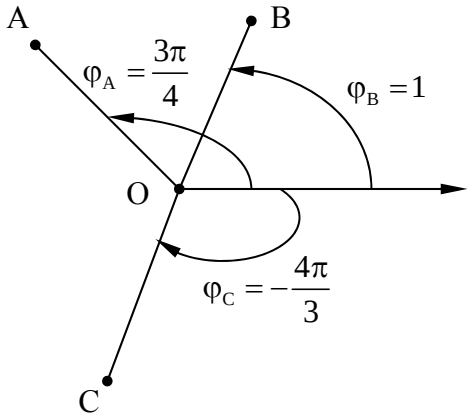

Рис. 1

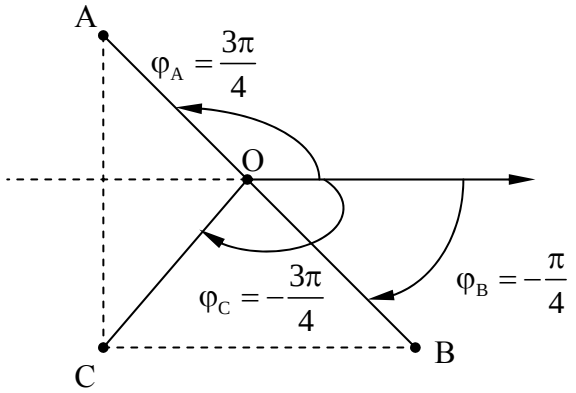

Рис. 2

Пример 3. В полярной системе координат на плоскости, стандартным образом совмещенной с прямоугольной, найдите декартовые координаты точек $A(1;\frac{3\pi}{4})$, $B(1;1)$ и $C(1;-\frac{2\pi}{3})$.

Решение. Воспользуемся формулами связи полярных и декартовых координат точки:

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\varphi \\ y = r\cdot\sin\varphi \end{cases}.$$

Получаем:

$$x_A = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y_A = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x_B = \cos 1, \quad y_B = \sin 1,$$

$$x_C = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}, \quad y_A = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $A(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2})$, $B(\cos 1;\sin 1)$, $C(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Пример 4. В полярной системе координат на плоскости, стандартным образом совмещенной с прямоугольной, найти полярные координаты точек: A(1; 1), $B(-\sqrt{3};1)$, $C(-1;-\sqrt{3})$, D(3; –4).

Решение. Для вычисления полярного радиуса точек используем формулу: $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

Получаем:

$$r_A = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad r_B = \sqrt{3+1} = 2,$$

$$r_C = \sqrt{1+3} = 2, \quad r_D = \sqrt{9+16} = 5.$$

Для вычисления полярного угла воспользуемся формулой:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \text{ если } \varphi\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right), \text{ или}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\pi, \text{ если } \varphi\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right).$$

Так как точка A лежит в первой четверти, а точка D – в четвертой, то

$$\varphi_A = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi_D = \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{4}{3}.$$

Так как точка B лежит во второй четверти, а точка C – в третьей, то

$$\varphi_B = \pi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6},$$

$$\varphi_C = \pi + \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

Ответ: $A\left(\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(2;\frac{5\pi}{6}\right)$, $C\left(2;\frac{4\pi}{3}\right)$, $D\left(5;-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$.

Пример 5. Найти направляющие углы и полярный угол вектора $\bar{a} = (-\sqrt{3};-1)$. Отложить вектор от начала координат и построить чертеж.

Решение. Построим чертеж (смотрите рисунок 3). Обозначим через M конец вектора $\bar{a}$, отложенного от начала координат. Тогда вектор $\bar{a} = \overline{OM}$ есть радиус-вектор точки M и координаты точки M совпадают с координатами её радиус-вектора: $M(-\sqrt{3};-1)$. Тогда полярный угол вектора, по определению, совпадает с полярным углом точки M в по-

лярной системе координат. Так как точка М находится в третьей четверти, то её полярный угол равен

$$\varphi_M = \pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}.$$

Угол между вектором $\overline{OM}$ и осью Ох равен

$$\alpha = \frac{5\pi}{6},$$

а угол между вектором $\overline{OM}$ и осью Оу равен

$$\beta = \varphi_M - \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}.$$

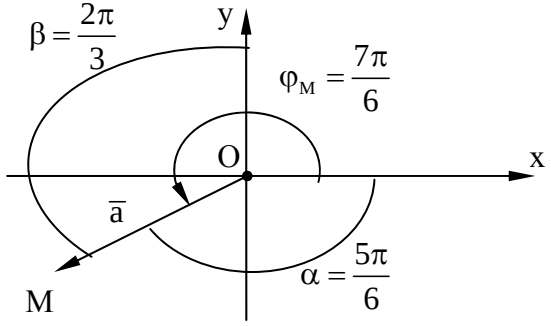

Рис. 3

Ответ: $(\overline{a} \wedge Ox) = \frac{5\pi}{6}$, $(\overline{a} \wedge Oy) = \frac{2\pi}{3}$, полярный угол вектора $\overline{a}$ равен $\frac{7\pi}{6}$, рисунок 3.

Пример 6. Найти площадь треугольника с вершинами, заданными в полярной системе координат: O(0; 0), $A\left(1; \frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(2; \frac{7\pi}{6}\right)$.

Решение. Построим данный треугольник в полярной системе координат (смотрите рисунок 4). Из рисунка видим, что внутренний угол АОВ треугольника равен

$$\angle AOB = \varphi_B - \varphi_A = \frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}.$$

Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними:

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin(\angle AOB) = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

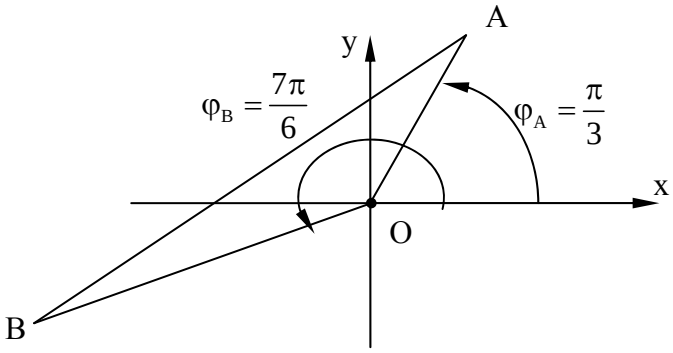

Рис. 4

Ответ: $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}$.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Определение полярного радиуса точки.
2. Постройте в полярной системе координат точку $A\left(2; -\frac{\pi}{3}\right)$ и найдите полярные координаты точки, симметричной точке А относительно полюса.
3. Постройте в полярной системе координат треугольник АВС и найдите его угол при вершине А, если его вершины имеют координаты: $A(0; 0)$, $B\left(3; -\frac{\pi}{3}\right)$, $C\left(4; \frac{4\pi}{3}\right)$.

Вариант 2

1. Определение полярного угла точки.
2. Постройте в полярной системе координат точку $A\left(2; \frac{2\pi}{3}\right)$ и найдите полярные координаты точки, симметричной точке А относительно полярного луча.
3. Постройте в полярной системе координат треугольник АВС и найдите его угол при вершине А, если его вершины имеют координаты: $A(0; 0)$, $B\left(3; -\frac{\pi}{6}\right)$, $C\left(4; \frac{7\pi}{6}\right)$.

Вариант 3

1. Определение полярных координат точки.
2. ПДСК совмещена с полярной. Точка $A\left(2; \frac{5\pi}{3}\right)$ задана полярными координатами. Найдите декартовые координаты точки А, и постройте чертеж ПДСК, на котором укажите её полярные и декартовые координаты.
3. Найдите площадь треугольника АВС, если известны полярные координаты его вершин: $A(0; 0)$, $B\left(3; -\frac{\pi}{3}\right)$, $C\left(4; \frac{4\pi}{3}\right)$.

Вариант 4

1. Определение полярной системы координат.
2. ПДСК совмещена с полярной. Точка А(–3; –4) задана декартовыми координатами. Найдите полярные координаты точки А, и постройте чертеж ПДСК, на котором укажите её полярные и декартовые координаты.

3. Вершины треугольника АВС заданы полярными координатами: $A(0; 0)$, $B\left(3; -\frac{\pi}{6}\right)$, $C\left(4; \frac{7\pi}{6}\right)$. Найдите его площадь и постройте чертеж.

Тест

1. В полярной системе координат на плоскости постройте точки, заданные полярными координатами: $A\left(2; -\frac{\pi}{2}\right)$, $B(3; \pi)$, $C\left(1; \frac{5\pi}{4}\right)$.
2. Определить полярные координаты точек, симметричных точке $A\left(\sqrt{3}; -\frac{5\pi}{6}\right)$ относительно полюса и полярной оси.
3. Постройте на координатной плоскости, точку с полярными координатами $M\left(4; \frac{7\pi}{6}\right)$ и найдите её декартовые координаты.
4. Зная декартовые координаты точки $M(\sqrt{3}, -1)$, найдите её полярные координаты и укажите их на координатной плоскости.
5. На плоскости дан квадрат со стороной 1 и полярная система координат, в которой полюсом служит центр квадрата, а полярный луч проходит через середину его стороны. Найдите полярные координаты вершин квадрата.
6. На плоскости дан квадрат со стороной 1 и полярная система координат, в которой полюсом служит центр квадрата, а полярный луч проходит через одну из его вершин. Найдите полярные координаты вершин квадрата.
7. На плоскости дан квадрат со стороной 1 и полярная система координат, в которой полюсом служит вершина квадрата, а полярный луч проходит через вершину, противоположную полюсу. Найдите полярные координаты вершин квадрата.
8. На плоскости дан правильный треугольник со стороной 1 и полярная система координат, в которой полюсом служит центр треугольника, а полярный луч проходит параллельно его стороне. Найдите полярные координаты вершин треугольника.
9. Вычислить площадь треугольника OAB, где O – полюс полярной системы координат, $A\left(5; \frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(4; \frac{\pi}{12}\right)$ – полярные координаты двух его других вершин.

Практическое занятие 13
Комплексная плоскость

Теорминимум: комплексная плоскость, модуль и аргумент комплексного числа, тригонометрическая форма записи комплексных чисел, умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме записи, формула Муавра.

Задачи для аудиторного решения

1. Отметьте на комплексной плоскости комплексные числа $\pm 1 \pm \sqrt{3}\cdot i$, найдите их модули, аргументы и запишите в тригонометрической форме.
2. Вычислить:

   a) $\left(\cos 20^0 + i\sin 20^0\right)\left(\cos 25^0 + i\sin 25^0\right)$;

   b) $\left(\cos 20^0 + i\sin 20^0\right)^{99}$; c) $\dfrac{2\left(\cos\dfrac{4\pi}{9} + i\sin\dfrac{4\pi}{9}\right)}{3\left(\cos\dfrac{5\pi}{18} + i\sin\dfrac{5\pi}{18}\right)}$;
3. Вычислить $(\cos 17^0 + i\sin 17^0)^{100} + (\cos 5^0 - i\sin 5^0)^{20}$.
4. Вычислить: a) $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{12}$; b) $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{2010}$.
5. Изобразите на комплексной плоскости множество комплексных чисел z, удовлетворяющих условию:

   a) $|z|=3$; b) $|z|<2$; c) $\arg z = \dfrac{\pi}{6}$; d) $z+\overline{z}=4$.
6. Запишите в тригонометрической форме число $2\left(\sin 20^0 - i\cos 20^0\right)$.

Задачи повышенного уровня сложности

7. Запишите в тригонометрической форме:

   a) $\sin\alpha + i\cos\alpha$; b) $2+\sqrt{3}+i$;

   (Указание: представьте числа 2 и $\sqrt{3}+i$ векторами на комплексной плоскости и найдите полярные координаты их суммы.)

   c) $1-\cos x + i\sin x, \quad x\in(2\pi;3\pi)$.
8. Изобразите множество точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

   a) $\sqrt{2} < |(1-i)z-i| < 2\sqrt{2}$; b) $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}+i\right) \le \operatorname{Im}\dfrac{2}{z}$.
9. Из всех чисел z, удовлетворяющих условию $z\cdot\overline{z}=25$, найдите такие, что $|z-7|+|z-5i|$ принимает наименьшее значение.
10. При каких значениях p среди комплексных чисел z таких, что $|z-1+i\sqrt{3}|\le p$, найдется ровно одно такое, что $z^4\in\mathbb{R}$?
11. Пусть $\left|z+z^{-1}\right|=1$. Какое наибольшее значение может принимать $|z|$?
12. Пользуясь формулой Муавра, выведите формулы для $\cos 3x$ и $\sin 3x$.
13. Пользуясь формулой Муавра, выразите через первые степени синуса и косинуса аргументов кратных x, функции $\sin^3 x$ и $\cos^3 x$.

Домашнее задание

1. Отметьте на комплексной плоскости комплексные числа $\pm\sqrt{3}\pm i$, найдите их модули, аргументы и запишите в тригонометрической форме.
2. Вычислить $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}$.
3. Изобразите на комплексной плоскости множество ком-

плексных чисел z, удовлетворяющих условию:

a) $z\cdot\overline{z}=3$; b) $\arg z=\dfrac{170\pi}{3}$ и $|z|\le 3$.

4. Запишите в тригонометрической форме $\dfrac{1+i\,tg\alpha}{1-i\,tg\alpha}$.

Примеры

Пример 1. Построить на комплексной плоскости комплексное число $z=1+i$ и комплексно сопряженное ему $\overline{z}$. Найти их модули, аргументы и записать в тригонометрической форме.

Решение.

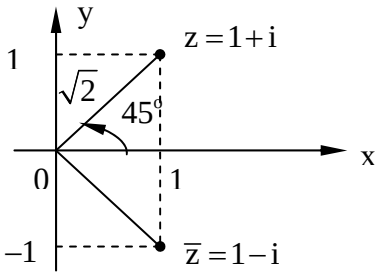

Рис. 1

Комплексное число $z=1+i$ соответствует на комплексной плоскости точке z с декартовыми координатами (1; 1). Отметим ее на координатной плоскости. Смотрите рисунок 1, из которого мы видим, что $|1+i|=\sqrt{2}$ и $\arg(1+i)=\dfrac{\pi}{4}$. Отсюда,

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Найдем, далее, тригонометрическую форму числа комплексно сопряженного числу $z=1+i$, т.е. $\overline{z}=1-i$. Декартовые координаты соответствующей точки на комплексной плоскости равны (1; –1). Из рисунка 1 мы видим, что

$$|1-i|=\sqrt{2},\ \arg(1-i)=-\frac{\pi}{4}$$

и

$$\overline{z}=1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

или

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

Ответ: $|1+i|=|1-i|=\sqrt{2}$, $\arg(1+i)=\dfrac{\pi}{4}$, $\arg(1-i)=\dfrac{7\pi}{4}$,

$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$, $1-i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$.

Пример 2. Записать комплексные числа $z_1=-1+i$ и $z_2=1-i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме и найти их произведение z_1z_2 и частное $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Решение. Модули комплексных чисел находим по формуле

$$|z|=|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2},\quad |z_1|=\sqrt{2},\quad |z_2|=2.$$

Аргументы комплексных чисел находим по формулам

$$\arg z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\ \text{ или }\ \arg z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\pi,$$

взависимости от четверти координатной плоскости, в которой находится данное комплексное число. Комплексное число $z_1=-1+i$ на комплексной плоскости отождествля-

ется с точкой (–1; 1) и находится во второй четверти, поэтому

$$\varphi_1 = \arg z_1 = \pi + \operatorname{arctg}(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Комплексное число $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ на комплексной плоскости находится в четвертой четверти, поэтому

$$\varphi_2 = \arg z_2 = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

Произведение и частное данных чисел находим, руководствуясь правилами умножения и деления комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме:

$$z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right).$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right).$$

Ответ:

$$z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right), \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right).$$

Пример 3. Вычислить $\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2010}$.

Решение. Комплексное число $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ на комплексной плоскости находится в третьей четверти, поэтому

$$|z| = 1, \ \varphi = \arg z = \pi + \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

Для вычисления степени данного числа, применим формулу Муавра:

$$\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2010} = \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^{2010} =$$

$$= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\cdot 2010\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\cdot 2010\right) =$$

$$= \cos(4\pi\cdot 670) + i\sin(4\pi\cdot 670) = \cos 0 + i\sin 0 = 1.$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2010} = 1$.

Пример 4. Найти тригонометрическую форму записи комплексного числа z, если: $z = -2$; $z = 3$; $z = 3i$; $z = -2i$; $z = -1 - 2i$.

Решение. Отметим данные точки на комплексной плоскости (смотрите рисунок 2):

$$z = -2 = -2 + 0\cdot i \leftrightarrow (-2; 0), \quad z = 3 = 3 + 0\cdot i \leftrightarrow (3; 0),$$

$$z = 3i = 0 + 3i \leftrightarrow (0; 3), \quad z = -2i = 0 - 2i \leftrightarrow (0; -2),$$

$$z = -1 - 2i \leftrightarrow (-1; -2).$$

Так как модуль комплесного числа равен расстоянию от начала координат до точки комплексной плоскости, отождествленной с этим числом, то из рисунка мы видим, что

$$|-2| = 2, \ |3| = 3, \ |3i| = 3, \ |-2i| = 2.$$

Модуль комплексного числа $z = -1 - 2i$ находим по формуле:

$$|-1 - 2i| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}.$$

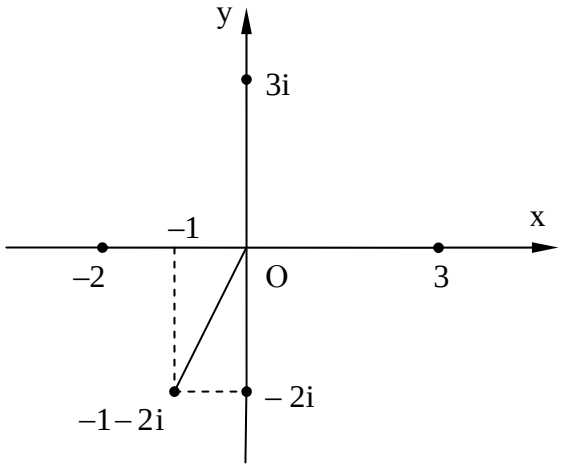

Рис. 2

Аргументы первых четырех чисел очевидны из рисунка 2:

$$\arg(-2)=\pi,\ \arg 3=0,\ \arg(3\mathrm{i})=\frac{\pi}{2},\ \arg(-2\mathrm{i})=\frac{3\pi}{2}.$$

Аргумент комплексного числа $z=-1-2\mathrm{i}$ находим по формуле, учитывая, что соответствующая точка находится в третьей четверти:

$$\arg(-1-2\mathrm{i})=\operatorname{arctg}\left(\frac{(-2)}{(-1)}\right)+\pi=\pi+\operatorname{arctg}2.$$

Ответ: $-2=2(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)$, $3=3(\cos 0+\mathrm{i}\sin 0)$,

$$3\mathrm{i}=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right),\ -2\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right),$$

$$-1-2\mathrm{i}=\sqrt{5}(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi),\ \text{где}\ \ \varphi=\pi+\operatorname{arctg}2.$$

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Определение тригонометрической формы комплексного числа.

2. Изобразите комплексное число $z=-1+\sqrt{3}\cdot\mathrm{i}$ точкой на комплексной плоскости, найдите его модуль, аргумент и запишите его в тригонометрической форме.
3. Вычислите $\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(\cos\frac{3\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{5}\right)$ и запишите в тригонометрической форме.

Вариант 2

1. Определение модуля комплексного числа.
2. Изобразите комплексное число $z=-\sqrt{3}+\mathrm{i}$ точкой на комплексной плоскости, найдите его модуль, аргумент и запишите его в тригонометрической форме.
3. Найдите тригонометрическую форму числа $\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{\cos\frac{2\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{5}}$.

Вариант 3

1. Определение аргумента комплексного числа.
2. Изобразите комплексное число $z=-3-\sqrt{3}\cdot\mathrm{i}$ точкой на комплексной плоскости, найдите его модуль, аргумент и запишите его в тригонометрической форме.
3. Вычислите $\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^5\left(\cos\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}\right)^3$ и запишите в тригонометрической форме.

Вариант 4

1. Определение комплексной плоскости.
2. Изобразите комплексное число $z=-\sqrt{3}-3\mathrm{i}$ точкой на комплексной плоскости, найдите его модуль, аргумент и запишите его в тригонометрической форме.
3. Найдите тригонометрическую форму числа $\dfrac{\left(-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^4}{\left(\cos\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}\right)^2}$.

Тест

1. Изобразите комплексное число $z=-3+4\mathrm{i}$ точкой комплексной плоскости. Проведите радиус-вектор отмеченной точки и найдите

его модуль.

2. Изобразите комплексное число $z = 4 - 3i$ точкой комплексной плоскости. Проведите радиус-вектор отмеченной точки. Постройте на этой же плоскости радиус-векторы точек, соответствующих комплексному числу противоположному данному и комплексно сопряженному данному.
3. Постройте комплексное число $z = -\sqrt{3} - i$ на комплексной плоскости, найдите его модуль, аргумент и запишите его в тригонометрической форме.
4. Дано: $z = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$. Изобразите это число на комплексной плоскости, найдите его модуль, аргумент, и запишите в алгебраической форме.
5. Дано: $z = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} - i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$. Изобразите это число на комплексной плоскости, найдите его модуль, аргумент, и запишите его в тригонометрической форме.
6. Найдите алгебраическую форму записи комплексного числа $z = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$.
7. Дано: $z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$, $z_2 = 3\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$. Найдите тригонометрическую и алгебраическую формы произведения $z_1 z_2$ и частного $\frac{z_1}{z_2}$ данных комплексных чисел.
8. Используя формулу Муавра, найдите степень комплексного числа $\left(2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\right)^{17}$, и найдите его тригонометрическую и алгебраическую форму записи.
9. Изобразите на комплексной плоскости множество комплексных чисел z, удовлетворяющих условию:

   a) $z + \bar{z} = 1$; b) $z \cdot \bar{z} = 1$; c) $\arg z = \frac{10\pi}{3}$ и $|z| \le 1$.

Практическое занятие 14
Корни из комплексных чисел

Теорминимум: формула корней произвольной степени из комплексного числа, расположение корней на комплексной плоскости, корни из 1, первообразные корни из 1, круговые многочлены, разложение степенного двучлена на неприводимые множители над полем комплексных, полем действительных и полем рациональных чисел.

Задачи для аудиторного решения

1. Выпишите формулу корней n-й степени из комплексного числа.
2. Дано: a) $\sqrt[3]{-8i}$; b) $\sqrt[3]{27i}$; c) $\sqrt[3]{27}$; d) $\sqrt[6]{1}$; e) $\sqrt[6]{-1}$. Найдите $|z|$ и $\arg z$; подставьте вычисленные данные в формулу корней n-й степени из комплексного числа z и запишите по отдельности каждый корень в тригонометрической форме; изобразите все найденные корни на комплексной плоскости.
3. Вычислите: a) $\sqrt[3]{\frac{8+24i}{3-i}}$; b) $\sqrt[4]{-\frac{32}{9(1-i\sqrt{3})}}$.
4. Разложите на линейные множители многочлен: a) $x^6 - 1$; b) $x^8 - 1$.
5. Разложите данные многочлены на неприводимые над полем действительных чисел: a) $x^6 - 1$; b) $x^8 - 1$.
6. Найдите сумму таких чисел z, что $z^4 = \sqrt{3} - i$. Укажите одно из этих чисел.
7. Найдите произведение таких чисел z, что $z^4 = 1 - i\sqrt{3}$. Укажите одно из этих чисел.

Задачи повышенного уровня сложности

8. Составьте таблицу умножения для группы корней 5-й степени из 1.
9. Разложить на линейные множители многочлен $x^6 - 64$.

10. Разложите многочлен x^8-256 на неприводимые над полем действительных чисел множители.
11. Разложите многочлен x^4+4 на два квадратных трехчлена с действительными коэффициентами.
12. Разложить многочлен $x^4+x^3+x^2+x+1$ на два квадратных трехчлена с действительными коэффициентами.
13. Вычислите значение функции Эйлера $\varphi(720)$.
14. Вычислите значение функции Мёбиуса $\mu(840)$.
15. Найдите степнь кругового многочлена $\Phi_{16800}(x)$.
16. Найдите круговой многочлен $\Phi_9(x)$.
17. Разложите многочлен x^9-1 на неприводимые над полем рациональных чисел.
18. Не вычисляя корней уравнения $x^2+x+1=0$, докажите, что его корни являются корнями 3-й степени из 1.
19. Вычислите $z^{142}+z^{-142}$, если $z+z^{-1}=1$.
20. Докажите что сумма всех корней n-й степени из 1 равна нулю.
21. Найдите сумму всех первообразных корней p-й степени из 1, если p – простое число.
22. Найдите сумму 100 членов геометрической прогрессии, первый член которой равен 1, а знаменатель равен $\cos\frac{\pi}{100}+i\sin\frac{\pi}{100}$. Ответ дайте в тригонометрической форме.

Домашнее задание

1. Найдите все данные корни и изобразите их на комплексной плоскости:

   a) $\sqrt[4]{1+i}$; b) $\sqrt[6]{-1+i\sqrt{3}}$; c) $\sqrt[3]{4(\sqrt{3}-i)}$; d) $\sqrt[4]{-4}$;

   e) $\sqrt[4]{8(\sqrt{3}i-1)}$; f) $\sqrt[3]{-1-i}$; g) $\sqrt[4]{-\frac{18}{1+i\sqrt{3}}}$.

2. Разложить на линейные множители многочлен:

   a) x^3+1; b) x^4+16.

3. Разложите многочлен $x^{10}-1$ на неприводимые над полем действительных чисел.
4. Найдите круговой многочлен $\Phi_{10}(x)$ и разложите многочлен $x^{10}-1$ на неприводимые над полем рациональных чисел.

Примеры

Пример 1. Вычислить $\sqrt[3]{-1+i}$.

Решение. Запишем число $z=-1+i$ в тригонометрической форме записи: $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$. Тогда

$$\sqrt[3]{-1+i}=\{\alpha_o,\alpha_1,\alpha_2\},$$

где $\alpha_k=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right)=$

$$=\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{3}\right)\right),\ k=0,1,2.$$

Ответ: $\sqrt[3]{-1+i}=\{\alpha_o,\alpha_1,\alpha_2\}$, где $\alpha_o=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$,

$\alpha_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$, $\alpha_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$.

Пример 2. Изобразить все корни $\sqrt[3]{-1+i}$ на комплексной

плоскости.

Решение. Корни уже найдены в примере 1. Изображаем координатные оси, проводим окружность радиуса $\sqrt[6]{2}$ с центром в начале координат и отмечаем на ней точки полярный угол которых равен:

$$\varphi_o = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi_1 = \frac{11\pi}{12}, \quad \varphi_2 = \frac{19\pi}{12}.$$

Соединим построенные точки отрезками прямых и получаем правильный треугольник. Смотрите рисунок 1.

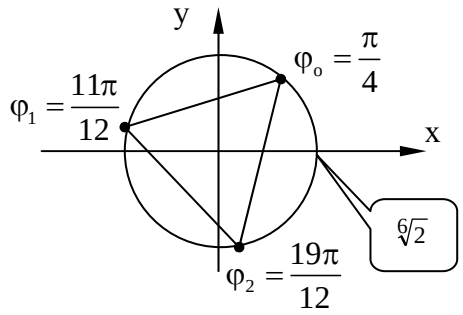

Рис. 1

Пример 3. Разложить степенной двучлен $x^6 - 1$ на линейные множители.

Решение. 1-й способ. Вычислим все корни 6-й степени из 1. Имеем,

$$\sqrt[6]{1} = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \varepsilon^5\},$$

где $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Вычисляя остальные корни по формуле

$$\varepsilon^k = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^k = \cos\frac{\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi k}{3},$$

$k = 2, 3, 4, 5$, получаем (смотрите рисунок 2):

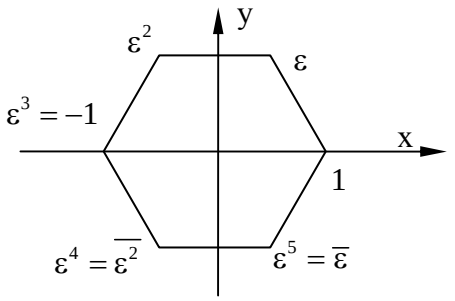

Рис. 2

$$\varepsilon^2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \ \varepsilon^3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1;$$

$$\varepsilon^4 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{\varepsilon^2}; \ \varepsilon^5 = \overline{\varepsilon} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отсюда,

$$x^6 - 1 = (x-1)(x+1)(x-\varepsilon)(x-\overline{\varepsilon})(x-\varepsilon^2)(x-\overline{\varepsilon^2}) =$$

$$= (x-1)(x+1)\left(x - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

2-й способ. Разложим многочлен $x^6 - 1$ по формуле разности квадратов:

$$x^6 - 1 = (x^3)^2 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1).$$

Воспользуемся формулами сокращенного умножения – разности и суммы кубов:

$$x^6-1=(x^3-1)(x^3+1)=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1).$$

Решая квадратные уравнения $x^2+x+1=0$ и $x^2-x+1=0$, находим корни соответствующих многочленов:

$$x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2},\ x_{3,4}=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

откуда находим разложение квадратных трехчленов на линейные множители.

Ответ: $x^6-1=(x-1)(x+1)\left(x-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot$

$$\cdot\left(x+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Пример 4. Разложить многочлен $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ на неприводимые множители над полем действительных чисел.

Решение. Воспользуемся результатами предыдущего примера. В примере 3, мы получили разложение

$$x^6-1=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1),$$

откуда находим

$$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=\frac{x^6-1}{x-1}=(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1).$$

Ответ: $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

Пример 5. Разложить степенной двучлен x^5-1 на неприводимые множители над полем действительных чисел.

Решение. Вычислим все корни 5-й степени из 1. Имеем,

$$\sqrt[5]{1}=\{1,\varepsilon,\varepsilon^2,\varepsilon^3,\varepsilon^4\},$$

где $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$. Легко видеть, что корни ε и ε^4 комплексно сопряженные, т.е. $\varepsilon^4=\overline{\varepsilon}$. Аналогично, $\varepsilon^3=\overline{\varepsilon^2}$. Разложение на линейные множители имеет вид:

$$x^5-1=(x-1)(x-\varepsilon)(x-\overline{\varepsilon})(x-\varepsilon^2)(x-\overline{\varepsilon^2}).$$

Перемножая линейные множители с комплексно сопряженными корнями, получаем:

$$x^5-1=(x-1)(x^2-(\varepsilon+\overline{\varepsilon})x+\varepsilon\cdot\overline{\varepsilon})(x^2-(\varepsilon^2+\overline{\varepsilon^2})x+\varepsilon^2\cdot\overline{\varepsilon^2}).$$

Так как

$$\varepsilon\cdot\overline{\varepsilon}=|\varepsilon|^2=1,\ \varepsilon^2\cdot\overline{\varepsilon^2}=|\varepsilon^2|^2=1,$$

$$\varepsilon+\overline{\varepsilon}=2\cos\frac{2\pi}{5},\ \varepsilon^2+\overline{\varepsilon^2}=2\cos\frac{4\pi}{5}=-2\cos\frac{\pi}{5},$$

то $x^5-1=(x-1)\left(x^2-\left(2\cos\frac{2\pi}{5}\right)x+1\right)\left(x^2+\left(2\cos\frac{\pi}{5}\right)x+1\right)$.

Ответ:

$$x^5-1=(x-1)\left(x^2-\left(2\cos\frac{2\pi}{5}\right)x+1\right)\left(x^2+\left(2\cos\frac{\pi}{5}\right)x+1\right).$$

Пример 6. Найти все корни 3-й степени из 1, изобразить их на комплексной плоскости, и построить для них таблицу умножения.

Решение. Обозначим для простоты записи:

$$\varepsilon=\varepsilon_1=\cos\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда $\sqrt[3]{1}=\{1,\varepsilon,\varepsilon^2\}$, где $\varepsilon^3=1$. Изобразим все корни третьей степени из 1 на комплексной плоскости. Т.к. их модуль равен 1, то все они лежат на тригонометрической (т.е. единичной) окружности. Смотрите рисунок 3. Здесь,

$\arg\varepsilon = \frac{2\pi}{3},\ \arg\varepsilon^2 = \frac{4\pi}{3}.$

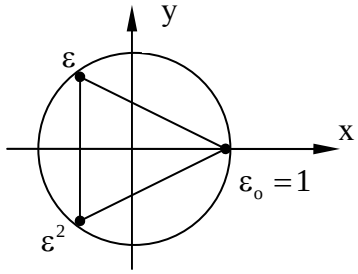

Рис. 3

Заполняем таблицу Кэли (таблицу умножения):

·	1	ε	ε^2
1	1	ε	ε^2
ε	ε	ε^2	1
ε^2	ε^2	1	ε

Таблица 1

Здесь, $\varepsilon^2 \cdot \varepsilon^2 = \varepsilon^4 = \varepsilon^3 \cdot \varepsilon = 1 \cdot \varepsilon = \varepsilon$.

Ответ: $\sqrt[3]{1} = \{1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$, рисунок 3 и таблица 1.

Пример 7. Найти значение функции Эйлера $\varphi(n)$ для чисел: a) $n = 15$; b) $n = 7$; c) $n = 18$.

Решение. a) $15 = 3 \cdot 5$ – разложение числа в произведение простых множителей. Применяя формулу вычисления

функции Эйлера, получаем

$$\varphi(15) = 15\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 2 \cdot 4 = 8.$$

b) Если число $n = p$ – простое число, то $\varphi(p) = p - 1$. Отсюда следует, что $\varphi(7) = 6$.

c) Функция Эйлера обладает свойством мультипликативности, т.е. если числа n и m взаимно простые, то

$$\varphi(n \cdot m) = \varphi(n) \cdot \varphi(m).$$

Отсюда следует, что $\varphi(18) = \varphi(2) \cdot \varphi(9) = (2-1)\varphi(9) = \varphi(9)$.

Воспользуемся формулой

$$\varphi(p^2) = p^2 - p,$$

где p – простое число. Получаем $\varphi(9) = \varphi(3^2) = 3^2 - 3 = 6$.

Ответ: $\varphi(15) = 8,\quad \varphi(7) = 6,\quad \varphi(18) = 6$.

Пример 8. Найти все первообразные корни 12-й степени из 1 и записать круговой многочлен $\Phi_{12}(x)$.

Решение. Во-первых, число первообразных корней 12-й степени из 1 равно

$$\varphi(12) = \varphi(2^2)\varphi(3) = (2^2 - 2)(3-1) = 4.$$

Во-вторых, выпишем все корни 12-й степени из 1: $\{\varepsilon^k\}$, где $k \in \{0, 1, \ldots, 11\}$,

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{12} + i\sin\frac{2\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}.$$

Первообразными корнями являются корни ε^k, для которых н.о.д.$(k,12) = 1$:

$$\varepsilon, \varepsilon^5, \varepsilon^7 = \overline{\varepsilon^5}, \varepsilon^{11} = \overline{\varepsilon} \text{ или } \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2},$$

где $\varepsilon^5 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$. Вычисляем круговой

многочлен

$$\Phi_{12}(x) \doteq (x-\varepsilon)(x-\overline{\varepsilon})(x-\varepsilon^5)(x-\overline{\varepsilon^5}) =$$
$$= (x^2-(\varepsilon+\overline{\varepsilon})x+\varepsilon\cdot\overline{\varepsilon})(x^2-(\varepsilon^5+\overline{\varepsilon^5})x+\varepsilon^5\overline{\varepsilon^5}) =$$
$$= (x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1) = (x^2+1)^2-(\sqrt{3}x)^2 =$$
$$= x^4-x^2+1.$$

Ответ: $\left\{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{i}{2}\right\}$, $\Phi_{12}(x) = x^4-x^2+1$.

Пример 9. Найти значение функции Мёбиуса $\mu(n)$ для чисел: a) $n=15$; b) $n=7$; c) $n=18$.

Решение. Ответ следует из определения функции Мёбиуса.

Ответ: $\mu(15) = (-1)^2 = 1$, $\mu(7) = -1$, $\mu(18) = 0$.

Пример 10. Разложить степенной двучлен $x^{12}-1$ на неприводимые множители над полем рациональных чисел.

Решение. 1-й способ. Воспользуемся формулой

$$x^n-1 = \Phi_{d_1}(x)\Phi_{d_2}(x)\ldots\Phi_{d_\tau}(x),$$

где $d_1, d_2, \ldots, d_\tau$ – все делители (положительные) числа n. Делители числа 12 суть числа: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Получаем:

$$x^{12}-1 = \Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_3(x)\Phi_4(x)\Phi_6(x)\Phi_{12}(x).$$

По этой же формуле, имеем

$$x-1 = \Phi_1(x),$$
$$x^2-1 = \Phi_1(x)\Phi_2(x) = (x-1)\Phi_2(x),$$

откуда находим $\Phi_2(x) = x+1$. Далее,

$$x^3-1 = \Phi_1(x)\Phi_3(x) = (x-1)\Phi_3(x),$$

Из последнего равенства находим

$$\Phi_3(x) = \frac{x^3-1}{x-1} = x^2+x+1.$$

Далее,

$$x^4-1 = \Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_4(x) = (x-1)(x+1)\Phi_4(x),$$
$$\Phi_4(x) = \frac{x^4-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2-1} = x^2+1.$$

И, наконец,

$$x^6-1 = \Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_3(x)\Phi_6(x) =$$
$$= (x-1)(x+1)(x^2+x+1)\Phi_6(x) = (x+1)(x^3-1)\Phi_6(x),$$
$$\Phi_6(x) = \frac{x^6-1}{(x^3-1)(x+1)} = \frac{x^3+1}{x+1} = x^2-x+1.$$

Многочлен $\Phi_{12}(x) = x^4-x^2+1$ найден в примере 8. В результате получаем:

$$x^{12}-1 = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1).$$

2-й способ. Воспользуемся формулой

$$\Phi_n(x) = (x^{d_1}-1)^{\mu\left(\frac{n}{d_1}\right)}(x^{d_2}-1)^{\mu\left(\frac{n}{d_2}\right)}\ldots(x^{d_\tau}-1)^{\mu\left(\frac{n}{d_\tau}\right)},$$

где $d_1, d_2, \ldots, d_\tau$ – все делители числа n. Получаем:

$$\Phi_1(x) = (x-1)^{\mu(1)} = x-1,$$
$$\Phi_2(x) = (x-1)^{\mu\left(\frac{2}{1}\right)}(x^2-1)^{\mu\left(\frac{2}{2}\right)} = (x-1)^{-1}(x^2-1) = x+1,$$
$$\Phi_3(x) = (x-1)^{\mu(3)}(x^3-1)^{\mu(1)} = (x-1)^{-1}(x^3-1) = x^2+x+1,$$
$$\Phi_4(x) = (x-1)^{\mu(4)}(x^2-1)^{\mu(2)}(x^4-1)^{\mu(1)} =$$
$$= (x-1)^0(x^2-1)^{-1}(x^4-1) = x^2+1.$$
$$\Phi_6(x) = (x-1)^{\mu(6)}(x^2-1)^{\mu(3)}(x^3-1)^{\mu(2)}(x^6-1)^{\mu(1)} =$$
$$= (x-1)(x^2-1)^{-1}(x^3-1)^{-1}(x^6-1) = x^2-x+1.$$

$$\Phi_{12}(x)=(x-1)^{\mu(12)}(x^2-1)^{\mu(6)}(x^3-1)^{\mu(4)}(x^4-1)^{\mu(3)}\cdot$$
$$\cdot(x^6-1)^{\mu(2)}(x^{12}-1)^{\mu(1)}=(x-1)^0(x^2-1)(x^3-1)^0\cdot$$
$$\cdot(x^4-1)^{-1}(x^6-1)^{-1}(x^{12}-1)=\frac{(x^2-1)(x^{12}-1)}{(x^4-1)(x^6-1)}=\frac{x^6+1}{x^2+1}=$$
$$=\frac{(x^2)^3+1}{x^2+1}=x^4-x^2+1.$$

Ответ:

$$x^{12}-1=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1).$$

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Определение корня n-й степени из комплексного числа.
2. Вычислите все корни $\sqrt[3]{i}$, запишите их в тригонометрической форме и отметьте на комплексной плоскости.
3. Разложите многочлен x^3+1 на линейные множители.

Вариант 2

1. Определение первообразного корня n-й степени из 1.
2. Вычислите все корни $\sqrt[3]{-i}$, запишите их в тригонометрической форме и отметьте на комплексной плоскости.
3. Разложите многочлен x^3-1 на линейные множители.

Вариант 3

1. Определение функции Эйлера.
2. Вычислите все корни $\sqrt[4]{i}$, запишите их в тригонометрической форме и отметьте на комплексной плоскости.
3. Разложите многочлен x^4-16 на линейные множители.

Вариант 4

1. Определение кругового многочлена $\Phi_n(x)$.
2. Вычислите все корни $\sqrt[4]{-i}$, запишите их в тригонометрической форме и отметьте на комплексной плоскости.
3. Разложите многочлен x^4+1 на линейные множители.

Тест

1. Найдите все корни $\sqrt[3]{-i}$, запишите их в тригонометрической форме, и изобразите на комплексной плоскости.
2. Найдите все корни $\sqrt[4]{-16}$, запишите их в тригонометрической форме, и изобразите на комплексной плоскости.
3. Найдите все корни $\sqrt[3]{1}$, запишите их в тригонометрической форме, и изобразите на комплексной плоскости.
4. Разложите на линейные множители многочлен x^3-1.
5. Разложите степенной двучлен x^4-1 на линейные множители.
6. Разложите степенной двучлен x^4-1 на неприводимые множители над полем действительных чисел.
7. Найдите все первообразные корни 4-й степени из 1 и составьте для них таблицу умножения.
8. Найдите число первообразных корней 5-й степени из 1.
9. Разложите степенной двучлен x^5-1 на неприводимые множители над полем рациональных чисел.
10. Найдите круговой многочлен $\Phi_{10}(x)$.

Практическое занятие 15
Скалярное произведение векторов

Теорминимум: определение и простейшие свойства скалярного произведения, свойство линейности, скалярное произведение векторов в координатной форме, вычисление модуля вектора и угла между векторами, физический смысл скалярного произведения.

Задачи для аудиторного решения

1. Зная, что $|\bar{a}|=\sqrt{2}$, $|\bar{b}|=\sqrt{3}$, вычислите скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если угол между ними равен: a) $\frac{2\pi}{3}$; b) $\frac{3\pi}{4}$; c) $\frac{\pi}{6}$; d) $\frac{\pi}{2}$; e) $\frac{5\pi}{6}$; f) $\frac{\pi}{3}$; g) $\frac{\pi}{4}$.
2. Найдите скалярный квадрат вектора $\bar{a}$, если его модуль равен $\sqrt[3]{4}$.
3. Найдите модуль вектора, если известно, что его скалярный квадрат равен $\sqrt[3]{4}$.
4. Дано: $|\bar{a}|=2$, $|\bar{b}|=\sqrt{2}$, $(\bar{a}\wedge\bar{b})=\frac{\pi}{4}$. Найдите:

a) $(\bar{a}-\bar{b})^2$; b) $|\bar{a}-\bar{b}|$; c) $(3\bar{a}-2\bar{b})(\bar{a}+2\bar{b})$.

5. Даны векторы $\bar{a}=(4;-2;-4)$, $\bar{b}=(6;-3;2)$. Вычислите их скалярное произведение.
6. Вычислите скалярный квадрат вектора $\bar{a}=(4;-2;-4)$ и его модуль.
7. Вычислите проекцию вектора $\bar{a}=(5;2;5)$ на вектор $\bar{b}=(2;-1;2)$.
8. Вычислите косинус угла, образованного векторами $\bar{a}=(2;-4;4)$ и $\bar{b}=(-3;2;6)$.
9. Дано, что $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=5$. Найдите значение α, при котором векторы $\bar{a}+\alpha\bar{b}$ и $\bar{a}-\alpha\bar{b}$ ортогональные.
10. Найдите работу производимую силой $\bar{f}=(3;-2;-5)$, когда её точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки A(2; –3; 5) в точку B(3; –2; –1).
11. Даны вершины треугольника A(3; 2; –3), B(5; 1; –1) и C(1; –2; 1). Найдите его внешний угол при вершине A.
12. Даны три вектора $\bar{a}=3\bar{i}-6\bar{j}-\bar{k}$, $\bar{b}=\bar{i}+4\bar{j}-5\bar{k}$ и $\bar{c}=3\bar{i}-4\bar{j}+12\bar{k}$. Вычислите $\text{пр}_{\bar{c}}(\bar{a}+\bar{b})$.

Задачи повышенного уровня сложности

13. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\frac{\pi}{6}$. Зная, что $|\bar{a}|=\sqrt{3}$, $|\bar{b}|=1$, вычислите угол между векторами $\bar{p}=\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{q}=\bar{a}-\bar{b}$.
14. Даны две точки A(3; –4; –2), B(2; 5; –2). Найдите проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось, составляющую с координатными осями углы $\alpha=60^\circ$, $\beta=120^\circ$, а угол γ – тупой.
15. Найдите проекцию вектора $\bar{a}=(4;-3;2)$ на ось, которая образует с координатными осями равные острые углы.

16. Вектор $\bar{x}$ коллинеарный вектору $\bar{a}=(6;-8;-7{,}5)$ образует острый угол с осью Oz. Зная, что $|\bar{x}|=50$, найдите его координаты.
17. Найдите угол между медианой и биссектрисой, проведенными из вершины прямого угла треугольника, если его катеты относятся друг к другу как m : n.
18. Пусть ABCD – правильный тетраэдр с ребром 1, O – центр описанной около него сферы. Введите, удобным для вас образом, ПДСК Oxyz и найдите координаты вектора $\overline{OA}$, его модуль и направляющие косинусы, косинус угла между ребром AB и радиусом OA.

Домашнее задание

1. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ортогональные, вектор $\bar{c}$ образует с ними углы, равные 60°. Зная, что $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=5$, $|\bar{c}|=8$, вычислите:
   a) $\bar{a}\cdot\bar{b}$; b) $\bar{b}\cdot\bar{c}$; c) $\bar{a}\cdot\bar{c}$; d) $\bar{a}^2$; e) $\bar{b}^2$; f) $\bar{c}^2$;
   g) $(\bar{a}+2\bar{b}-3\bar{c})^2$.
2. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, попарно образуют друг с другом углы, каждый из которых равен 60°, $|\bar{a}|=4$, $|\bar{b}|=2$, $|\bar{c}|=6$. Найдите модуль вектора $\bar{p}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$.
3. Даны вершины треугольника A(–1; –2; 4), B(–4; –2; 0) и C(3; –2; 1). Найдите его внутренний угол при вершине B и расстояние от вершины B до основания высоты, опущенной из вершины A на сторону BC. (Указание: найдите $|\text{пр}_{\overline{BC}}\overline{BA}|$.)
4. Даны два вектора $\bar{a}=(3;-1;5)$ и $\bar{b}=(1;2;-3)$. Найдите вектор $\bar{c}$ при условии, что он перпендикулярен к оси Oz и удовлетворяет условиям: $\bar{c}\cdot\bar{a}=9$, $\bar{c}\cdot\bar{b}=-4$.

Указание к задаче 4: решите систему уравнений:

$$\bar{c}\cdot\bar{a}=9,\ \bar{c}\cdot\bar{b}=-4,\ \bar{c}\cdot\bar{k}=0,$$

где $\bar{c}=(x,y,z)$ и $\bar{k}$ – орт оси Oz.

Примеры

Пример 1. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $|\bar{a}|=2,\ |\bar{b}|=5,\ (\bar{a}\wedge\bar{b})=\frac{5\pi}{6}$.

Решение. По определению скалярного произведения

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos(\bar{a}\wedge\bar{b})=2\cdot5\cdot\cos\frac{5\pi}{6}=-5\sqrt{3}.$$

Ответ: $-5\sqrt{3}$.

Пример 2. Найти скалярный квадрат вектора $\bar{a}$, если его модуль равен 3.

Решение. Воспользуемся свойством скалярного произведения, что скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля: $\bar{a}^2=|\bar{a}|^2=3^2=9$.

Ответ: 9.

Пример 3. Найти модуль вектора, если его скалярный квадрат равен 18.

Решение. Воспользуемся свойством скалярного произведения, что скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля: $\bar{a}^2=|\bar{a}|^2=18$. Отсюда находим модуль вектора.

Ответ: $3\sqrt{2}$.

Пример 4. Найдите $(\bar{a}+\bar{b})^2$ и $|\bar{a}+\bar{b}|$, если $|\bar{a}|=2$, $|\bar{b}|=\sqrt{2}$, $(\bar{a}\wedge\bar{b})=\frac{3\pi}{4}$.

Решение. Воспользуемся свойством линейности скалярного произведения, и найдем скалярный квадрат суммы:

$$(\bar{a}+\bar{b})^2=\bar{a}^2+2\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}^2=|\bar{a}|^2+2|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\frac{3\pi}{4}+|\bar{b}|^2=2.$$

Отсюда, $|\bar{a}+\bar{b}|=\sqrt{(\bar{a}+\bar{b})^2}=\sqrt{2}$.

Ответ: $(\bar{a}+\bar{b})^2=2,\ |\bar{a}+\bar{b}|=\sqrt{2}$.

Пример 5. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}=(-2;5;-3),\ \bar{b}=(1;2;3)$.

Решение. Воспользуемся формулой вычисления скалярного произведения векторов, заданных в координатной форме: $\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=-2+10-9=-1$.

Ответ: –1.

Пример 6. Найти скалярный квадрат вектора $\bar{a}=(-2;6;-3)$, и его модуль.

Решение. Вычисляем скалярный квадрат данного вектора, используя формулу скалярного произведения векторов, заданных в координатной форме:

$$\bar{a}^2=\bar{a}\cdot\bar{a}=x_1x_1+y_1y_1+z_1z_1=x_1^2+y_1^2+z_1^2=4+36+9=49.$$

По свойству скалярного произведения, модуль вектора равен квадратному корню из его скалярного квадрата:

$$|\bar{a}|=\sqrt{\bar{a}^2}=\sqrt{49}=7.$$

Ответ: 7.

Пример 7. Найти проекцию вектора $\bar{a}=(1;2;4)$ на вектор $\bar{b}=(-2;6;-3)$.

Решение. Воспользуемся формулой вычисления проекции вектора на вектор, если векторы заданы в координатной форме:

$$\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{-2+12-12}{\sqrt{4+36+9}} = -\frac{2}{7}.$$

Ответ: $-\frac{2}{7}$.

Пример 8. Найти угол между векторами $\bar{a} = (-3; 0; 4)$ и $\bar{b} = (-2; 6; -3)$.

Решение. Вычисляем скалярное произведение данных векторов и их модули:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = 6 + 0 - 12 = -6, \quad |\bar{a}| = 5, \quad |\bar{b}| = 7.$$

По формуле угла между векторами, находим

$$(\bar{a} \wedge \bar{b}) = \arccos\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \arccos\left(-\frac{6}{35}\right).$$

Ответ: $\arccos\left(-\frac{6}{35}\right)$.

Пример 9. Выяснить, ортогональны ли векторы $\bar{a} = (-2; 6; 4)$ и $\bar{b} = (1; -3; 5)$.

Решение. Два ненулевых вектора ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю. Вычисляем скалярное произведение данных векторов:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = -2 - 18 + 20 = 0.$$

Ответ: данные векторы ортогональные.

Пример 10. Вычислить, какую работу производит сила $\bar{f} = (3; -5; 2)$, когда ее точка приложения перемещается из начала в конец вектора $\bar{s} = (2; -5; -7)$.

Решение. Работа равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения: $A = \bar{f}\cdot\bar{s} = 6 + 25 - 14 = 17$.

Ответ: 17.

Пример 11. Вычислить тупой угол, образованный медианами, проведенными из вершин острых углов равнобедренного прямоугольного треугольника.

Решение.

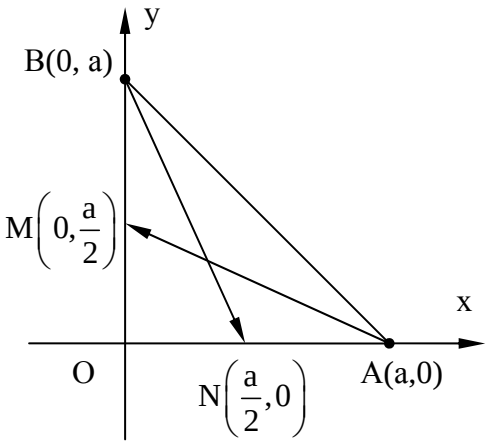

Рис. 1

Обозначим длины катетов данного равнобедренного прямоугольного треугольника через a, и введем систему координат как на рисунке 1. Искомый угол равен углу между векторами

$$\overline{AM} = \left(-a; \frac{a}{2}\right) = a\left(-1; \frac{1}{2}\right) \text{ и } \overline{BN} = \left(\frac{a}{2}; -a\right) = a\left(\frac{1}{2}; -1\right),$$

$$\cos(\overline{AM} \wedge \overline{BN}) = \frac{\overline{AM}\cdot\overline{BN}}{|\overline{AM}|\cdot|\overline{BN}|} = -\frac{4}{5}.$$

Ответ: $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Определение скалярного произведения двух векторов.
2. Вычислить скалярный квадрат вектора $\bar{a}$, если $|\bar{a}| = \sqrt{3}$.
3. Найти $|\bar{a} + \bar{b}|$, если $|\bar{a}| = |\bar{b}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $(\bar{a} \wedge \bar{b}) = 30^o$.

Вариант 2

1. Определение скалярного квадрата вектора.
2. Вычислить скалярное произведение $\bar{a} \cdot \bar{b}$, если $|\bar{a}| = \sqrt{3}$, модуль вектора $\bar{b}$ в 2 раза больше и угол между ними равен 150^o.
3. Найти модуль разности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $|\bar{a}| = |\bar{b}| = \frac{2}{\sqrt{3}}$, а угол между ними равен 150^o.

Вариант 3

1. Формула угла между векторами, заданными в координатной форме.
2. Вычислить модуль вектора $\bar{a}$, если скалярный квадрат вектора $\frac{\bar{a}}{\sqrt[3]{2}}$ равен $\sqrt[3]{4}$.
3. Найти $|\bar{a} + \sqrt{3} \cdot \bar{b}|$, если $|\bar{a}| = |\bar{b}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $(\bar{a} \wedge \bar{b}) = 120^o$.

Вариант 4

1. Формула проекции вектора на вектор, если векторы заданы в координатной форме.
2. Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $|\bar{a}| = \sqrt{3}$, модуль вектора $\bar{b}$ на $\sqrt{3}$ больше и угол между ними равен 150^o.
3. Найти $|\bar{a} - \sqrt{3} \cdot \bar{b}|$, если $|\bar{a}| = |\bar{b}| = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $(\bar{a} \wedge \bar{b}) = 135^o$.

Тест

1. Дано: $(\bar{a} \wedge \bar{b}) = \frac{\pi}{3}$, $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$. Вычислить:

   a) $\bar{a} \cdot \bar{b}$; b) $\bar{a}^{-2}$; c) $(\bar{a} + \bar{b})^2$; d) $|\bar{a} + \bar{b}|$.
2. Вычислите скалярное произведение двух векторов единичной длины, если угол между ними равен 150^o.
3. Дан правильный треугольник ABC со строной 1. Вычислите $\text{пр}_{\overline{CA}} \overline{AB}$.
4. Пусть BD – высота правильного треугольника ABC со стороной, равной 1. Найдите $\overline{AB} \cdot \overline{BD}$.
5. Пусть $\bar{i}$ и $\bar{j}$ – орты координатных осей ПДСК Oxy. Не пользуясь координатной формой записи, вычислите $\text{пр}_{\bar{i}+\bar{j}} \bar{j}$. Постройте чертеж.
6. Вычислите скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $\bar{a} = (1; 2; -2)$, $\bar{b} = (2; -2; 1)$.
7. Даны векторы $\bar{a} = (2; -3; -1)$, $\bar{b} = (1; -3; 2)$. Вычислите $(\bar{a} + \bar{b})^2$ и $|\bar{a} + \bar{b}|$.
8. Вычислите косинус угла между векторами $\bar{a} = (2; -4; 4)$ и $\bar{b} = (-3; 2; 6)$.
9. Вычислите проекцию вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$, если $\bar{a} = (1; 2; -2)$, $\bar{b} = (6; -7; 6)$.
10. Вычислить $\text{пр}_{\bar{c}}(\bar{a} + \bar{b})$, если $\bar{a} = 3\bar{i} - 6\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + 4\bar{j} - 5\bar{k}$, $\bar{c} = 3\bar{i} - 4\bar{j} + 12\bar{k}$.
11. Вычислите проекцию вектора $\bar{a} = (1; 2; -2)$ на противоположный ему вектор.

Практическое занятие 16
Векторное произведение

Теорминимум: определение и простейшие свойства векторного произведения векторов, свойства линейности, вычисление векторного произведения векторов заданных в координатной форме, применения векторного произведения.

Задачи для аудиторного решения

1. Изобразите два произвольных вектора, отложенные от одной точки под углом 45^o между ними, и постройте их векторные произведения.
2. Угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен 150^o. Зная, что $|\bar{a}|=2\sqrt{6}$, $|\bar{b}|=7\sqrt{2}$, вычислите $|\bar{a}\times\bar{b}|$.
3. Угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен 120^o, $|\bar{a}|=1$, $|\bar{b}|=2$. Вычислите $(\bar{a}\times\bar{b})^2$ и $((2\bar{a}+\bar{b})\times(\bar{a}+2\bar{b}))^2$.
4. Даны векторы $\bar{a}=(3;-1;-2)$, $\bar{b}=(1;2;-1)$. Найдите $\bar{a}\times\bar{b}$, $(2\bar{a}+\bar{b})\times\bar{b}$ и $(2\bar{a}-\bar{b})\times(2\bar{a}+\bar{b})$.
5. Даны векторы $\bar{a}=(3;-1;-2)$, $\bar{b}=(1;2;-1)$. Найдите $|\bar{a}\times\bar{b}|$ и синус угла между данными векторами.
6. Вычислите площадь треугольника ABC, если A(1; 2; 0), B(3; 0; –3) и C(5; 2; 6).
7. Сила $\bar{P}=(2;-4;5)$ приложена к точке M(4; –2; 3). Найдите момент этой силы относительно точки A(3; 2; –1).

Задачи повышенного уровня сложности

8. Вектор $\bar{x}$, ортогональный векторам $\bar{a}=(4;-2;-3)$ и $\bar{b}=(0;1;3)$ образует с осью Oy тупой угол. Найдите координаты вектора $\bar{x}$, если его модуль равен 26.
9. Найдите вектор $\bar{x}$, если он ортогонален векторам $\bar{a}=(2;-3;1)$ и $\bar{b}=(1;-2;3)$, и $\bar{x}\cdot(\bar{i}+2\bar{j}-7\bar{k})=10$.

Домашнее задание

1. В ПДСК изобразите орты $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ координатных осей. Изобразите вектор $\bar{i}+\bar{j}$, и постройте векторы $\bar{i}\times(\bar{i}+\bar{j})$ и $(\bar{i}+\bar{j})\times\bar{k}$, найдите их модули, используя определение векторного произведения.
2. Дано: $|\bar{a}|=2$, $|\bar{b}|=3$, $(\bar{a}\wedge\bar{b})=\frac{\pi}{3}$. Найдите $|\bar{a}\times\bar{b}|$.
3. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ортогональны, $|\bar{a}|=|\bar{b}|=10$. Вычислите $|(\bar{a}+\bar{b})\times(\bar{a}-\bar{b})|$ и $|(3\bar{a}-\bar{b})\times(\bar{a}-2\bar{b})|$.
4. Найдите векторное произведение векторов $\bar{a}=(-1;2;-2)$ и $\bar{b}=(2;-2;1)$.
5. Даны вершины треугольника A(1; –1; 2), B(5; –6; 2) и C(1; 3; –1). Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

Примеры

Пример 1. Угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен 30^o. Зная, что $|\bar{a}|=6$, $|\bar{b}|=5$, вычислить $|\bar{a}\times\bar{b}|$.

Решение. $|\bar{a}\times\bar{b}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin(\bar{a}\wedge\bar{b})=6\cdot5\cdot\sin\frac{\pi}{6}=15$.

Ответ: 15.

Пример 2. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ортогональны. Зная, что $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=4$, вычислить $|(\bar{a}+\bar{b})\times(\bar{a}-\bar{b})|$.

Решение. Вычисляем векторное произведение, стоящее под знаком модуля, используя свойство линейности векторного произведения. Раскрываем скобки, сохраняя порядок сомножителей:

$$(\bar{a}+\bar{b})\times(\bar{a}-\bar{b})=\bar{a}\times\bar{a}-\bar{a}\times\bar{b}+\bar{b}\times\bar{a}-\bar{b}\times\bar{b}.$$

Так как $\bar{a}\parallel\bar{a}$ и $\bar{b}\parallel\bar{b}$, то по свойству векторного произве-

дения $\bar{a}\times\bar{a}=\bar{b}\times\bar{b}=\bar{0}$. По свойству антикоммутативности $\bar{b}\times\bar{a}=-\bar{a}\times\bar{b}$. Получаем

$$(\bar{a}+\bar{b})\times(\bar{a}-\bar{b})=-\bar{a}\times\bar{b}-\bar{a}\times\bar{b}=-2\bar{a}\times\bar{b},$$

$$|(\bar{a}+\bar{b})\times(\bar{a}-\bar{b})|=|-2\bar{a}\times\bar{b}|=2|\bar{a}+\bar{b}|=$$

$$=2|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin(\bar{a}\wedge\bar{b})=2\cdot3\cdot4\cdot\sin\frac{\pi}{2}=24.$$

Ответ: 24.

Пример 3. Угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен $\frac{3\pi}{4}$. Зная, что $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=2\sqrt{2}$, вычислить $((2\bar{a}-\bar{b})\times(2\bar{a}+\bar{b}))^2$.

Решение. Выражение, которое нам нужно вычислить есть скалярный квадрат вектора $\bar{c}=(2\bar{a}-\bar{b})\times(2\bar{a}+\bar{b})$.

Раскрываем скобки:

$$\bar{c}=(2\bar{a}-\bar{b})\times(2\bar{a}+\bar{b})=$$

$$(2\bar{a})\times(2\bar{a})+(2\bar{a})\times\bar{b}-\bar{b}\times(2\bar{a})-\bar{b}\times\bar{b}=4(\bar{a}\times\bar{b})$$

Находим модуль вектора $\bar{c}$:

$$|\bar{c}|=|4(\bar{a}\times\bar{b})|=4\cdot|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin(\bar{a}\wedge\bar{b})=4\cdot3\cdot2\sqrt{2}\cdot\sin\frac{3\pi}{4}=24.$$

Вычисляем скалярный квадрат вектора $\bar{c}$:

$$\bar{c}^2=|\bar{c}|^2=24^2=576.$$

Ответ: 576.

Пример 4. Вычислить векторное произведение векторов $\bar{a}=(7;2;-2)$, $\bar{b}=(-3;0;1)$.

Решение. По формуле вычисления векторного произведения векторов, заданных в координатной форме:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\7&2&-2\\-3&0&1\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}2&-2\\0&1\end{vmatrix}\cdot\bar{i}-\begin{vmatrix}7&-2\\-3&1\end{vmatrix}\cdot\bar{j}+\begin{vmatrix}7&2\\-3&0\end{vmatrix}\cdot\bar{k}=2\bar{i}-\bar{j}+6\bar{k}.$$

Ответ: $\bar{a}\times\bar{b}=(2;-1;6)$.

Пример 5. Даны точки A(0; 1; 2), B(–3; 3; 0) и C(6; 5; 2). Вычислить площадь треугольника ABC.

Решение. Находим площадь треугольника ABC:

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|.$$

Вычисляем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB}=(-3;2;-2),\ \overline{AC}=(6;4;0).$$

Вычисляем векторное произведение $\overline{AB}\times\overline{AC}$:

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\-3&2&-2\\6&4&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-2\\4&0\end{vmatrix}\cdot\bar{i}-\begin{vmatrix}-3&-2\\6&0\end{vmatrix}\cdot\bar{j}+$$

$$+\begin{vmatrix}-3&2\\6&4\end{vmatrix}\cdot\bar{k}=8\bar{i}-12\bar{j}-24\bar{k}=4(2\bar{i}-3\bar{j}-6\bar{k}).$$

Вычисляем модуль вектора $\overline{AB}\times\overline{AC}$:

$$|\overline{AB}\times\overline{AC}|=4\sqrt{2^2+3^2+6^2}=4\cdot7=28.$$

Находим площадь треугольника:

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|=14.$$

Ответ: 14.

Пример 6. Дано: $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=26$ и $|\bar{a}\times\bar{b}|=72$. Вычис-

лить $\bar{a}\cdot\bar{b}$.

Решение. Из определения векторного произведения находим синус угла между векторами:

$$\sin(\bar{a}\wedge\bar{b})=\frac{|\bar{a}\times\bar{b}|}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{72}{3\cdot 26}=\frac{12}{13}.$$

Используя основное тригонометрическое тождество, находим косинус угла между векторами и искомое скалярное произведение:

$$\cos(\bar{a}\wedge\bar{b})=\pm\sqrt{1-\sin^2(\bar{a}\wedge\bar{b})}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\pm\frac{5}{13},$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos(\bar{a}\wedge\bar{b})=3\cdot 26\cdot\left(\pm\frac{5}{13}\right)=\pm 30.$$

Ответ: $\bar{a}\cdot\bar{b}=\pm 30$.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Геометрический смысл модуля векторного произведения.
2. Дано: $\bar{a}\perp\bar{b}$, $|\bar{a}|=|\bar{b}|=1$. Найдите $|(3\bar{a})\times(\bar{a}-\bar{b})|$.
3. Даны точки A(–1; –2; 4), B(–4; –2; 1), C(3; –1; 4). Найдите $|\overline{AB}\times\overline{AC}|$.

Вариант 2

1. Определите ориентацию тройки векторов $\{\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{a}\times\bar{b}\}$.
2. Дано: $\bar{a}\perp\bar{b}$, $|\bar{a}|=|\bar{b}|=1$. Найдите $|(\bar{a}+\bar{b})\times(2\bar{b})|$.
3. Даны точки A(1; –2; 2), B(1; 4; 0), C(–4; 1; 1). Найдите $|\overline{BC}\times\overline{BA}|$.

Вариант 3

1. Определение момента силы относительно данной точки.
2. Система векторов $\{\bar{a},\bar{b}\}$ образует ортонормированный базис на плоскости. Образует ли тройка векторов $\{\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{a}\times\bar{b}\}$ ортонормированный базис пространства? Ответ обоснуйте.
3. Найдите площадь треугольника ABC, если A(2;–3), B(3; 2), C(–2; 5).

Вариант 4

1. Определение векторного произведения двух векторов.
2. Дано: $(\bar{a}\wedge\bar{b})=45^\circ$, $|\bar{a}|=|\bar{b}|=1$. Образует ли тройка векторов $\{\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{a}\times\bar{b}\}$ нормированный базис пространства?
3. Найдите площадь треугольника ABC, если A(–3; 2), B(5;–2), C(1; 3).

Тест

1. Вычислить $|\bar{a}\times\bar{b}|$ и изобразить на рисунке векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{a}\times\bar{b}$, отложив их от одной точки, если $(\bar{a}\wedge\bar{b})=\frac{\pi}{6}$, $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=2$.
2. Дан правильный треугольник ABC со стороной 1. Вычислите модуль векторного произведения вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{BC}$.
3. Пусть BD – высота правильного треугольника ABC со стороной 1. Найдите модуль векторного произведения $\overline{AB}\times\overline{BD}$.
4. Дан квадрат ABCD со стороной 1. Изобразите на чертеже данный квадрат и векторное произведение $\overline{AC}\times\overline{AB}$, отложив его от точки A, вычислите его модуль.
5. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ортогональны. Зная, что $|\bar{a}|=|\bar{b}|=10$, вычислите $|(\bar{a}+\bar{b})\times(\bar{a}-\bar{b})|$ и $|(3\bar{a}-\bar{b})\times(\bar{a}-2\bar{b})|$.
6. Дано: $\bar{a}=(3;-1;-2)$, $\bar{b}=(1;2;-1)$. Найдите $\bar{a}\times\bar{b}$ и $|\bar{a}\times\bar{b}|$.
7. Найдите $\bar{a}\times\bar{b}$, если $\bar{a}=(1;2;-2)$, $\bar{b}=(2;-2;1)$.
8. С помощью векторного произведения двух векторов найдите площадь треугольника ABC: A(–1; 2; –2), B(0; 4; –7), C(0; –5; 8).
9. Сила $\bar{P}=(2;-4;5)$ приложена к точке M(4; –2; 3). Найдите момент этой силы относительно точки A(3; 2; –1).
10. В ПДСК дан тетраэдр OABC и координаты его вершин: A(1; 0; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 2). Постройте чертеж, и изобразите на этом же чертеже векторное произведение вектора $\overline{OB}$ на вектор $\overline{OC}$. Найдите координаты этого векторного произведения.

Практическое занятие 17
Смешанное произведение векторов

Теорминимум: определение и простейшие свойства смешанного произведения, модуль и знак смешанного произведения, перестановка векторов в смешанном произведении, свойство линейности смешанного произведения, смешанное произведение векторов в координатной форме, вычисление объема пирамиды.

Задачи для аудиторного решения

1. Определить ориентацию тройки векторов: $\{\bar{k}, \bar{i}, \bar{j}\}$, $\{\bar{k}, \bar{j}, \bar{i}\}$, $\{\bar{j}, \bar{i}, \bar{k}\}$, $\{\bar{i}+\bar{j}, \bar{j}, \bar{k}\}$, $\{\bar{i}+\bar{j}, \bar{i}-\bar{j}, \bar{j}\}$, $\{\bar{i}+\bar{j}, \bar{i}-\bar{j}, \bar{k}\}$.
2. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют правоориентированный ортогональный базис. Вычислить $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$, если $|\bar{a}|=\frac{2}{3}$, $|\bar{b}|=2{,}5$, $|\bar{c}|=2{,}1$.
3. Вектор $\bar{c}$ ортогонален векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, угол между которыми равен 30^{o}. Вычислить $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$, если $|\bar{a}|=\frac{\sqrt{3}}{4}$, $|\bar{b}|=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $|\bar{c}|=12\sqrt{6}$.
4. Докажите тождество $(\bar{a}+\bar{b})(\bar{b}+\bar{c})(\bar{c}+\bar{a})=2\,\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$.
5. Дано: $\bar{a}=(1;-1;3)$, $\bar{b}=(-2;2;1)$, $\bar{c}=(3;-2;5)$. Вычислить $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$ и определить ориентацию тройки векторов $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$.
6. Найдите компланарные тройки векторов:
   a) $\bar{a}=(2;3;-1)$, $\bar{b}=(1;-1;3)$ $\bar{c}=(1;9;-11)$;
   b) $\bar{a}=(3;2;-1)$, $\bar{b}=(2;1;2)$, $\bar{c}=(3;-1;-2)$;
   c) $\bar{a}=(2;-1;2)$, $\bar{b}=(1;2;-3)$, $\bar{c}=(3;-4;7)$?
7. Докажите, что четыре точки A(1; 2; –1), B(0; 1; 5), C(–1; 2; 1), D(2; 1; 3) лежат в одной плоскости.

8. Вычислить объем треугольной пирамиды, вершины которой: A(2; –1; 1), B(5; 5; 4), C(3; 2; –1), D(4; 1; 3).
9. Даны вершины треугольной пирамиды: A(2; 3; 1), B(4; 1; –2), C(6; 3; 7), D(–5; –4; 8). Найти длину ее высоты, опущенной из вершины D.
10. Объем треугольной пирамиды равен 5, три ее вершины находятся в точках A(2; 1; –1), B(3; 0; 1), C(2; –1; 3). Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси ординат.

Задачи повышенного уровня сложности

11. Докажите, что объем параллелепипеда, построенного на диагоналях граней данного параллелепипеда, равен удвоенному объему данного параллелепипеда.
12. Докажите, что для любых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ векторы $\bar{a}-\bar{b}$, $\bar{b}-\bar{c}$, $\bar{c}-\bar{a}$ компланарные. Каков геометрический смысл этого факта?

Домашнее задание

1. Дано: $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=5$. Вычислите $(\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}-2\bar{b}+\bar{c})(\bar{c}-\bar{a})$.
2. Вычислите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}=(-1;2;-3)$, $\bar{b}=(-1;1;2)$, $\bar{c}=(2;-1;-1)$.
3. В треугольной призме $ABCA'B'C'$ векторы $\overline{AB}=(0;1;-1)$, $\overline{AC}=(2;-1;4)$ определяют основание, а вектор $\overline{AA'}=(-3;2;2)$ направлен по боковому ребру. Найдите объем призмы и ее высоту.

Примеры

Пример 1. Определить ориентацию троек векторов:
a) $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$; b) $\{\bar{i}, \bar{k}, \bar{j}\}$; c) $\{\bar{j}, \bar{k}, \bar{i}\}$.

Решение. a) Определяем ориентацию тройки векторов, ис-

пользуя определение ориентированной тройки векторов.

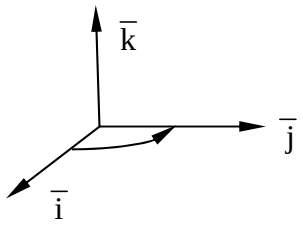

Рис. 1

Смотрим на рисунке 1 с конца третьего вектора – вектора $\bar{k}$, на плоскость, в которой лежат первые два вектора – $\bar{i}$ и $\bar{j}$. Осуществляем кратчайший поворот первого вектора $\bar{i}$ до совпадения со вторым вектором $\bar{j}$ и определяем направление вращения – против часовой стрелки. Из определения следует, что данная тройка является правой.

b) Тройка $\{\bar{i}, \bar{k}, \bar{j}\}$ получается из тройки $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ транспозицией второго и третьего векторов – $\bar{j}$ и $\bar{k}$. Транспозиция меняет ориентацию тройки векторов. Так как тройка $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ правая, то отсюда следует, что тройка $\{\bar{i}, \bar{k}, \bar{j}\}$ является левой.

c) Тройка $\{\bar{j}, \bar{k}, \bar{i}\}$ получается из тройки $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ круговой перестановкой. Вектор $\bar{i}$ с первого места переходит на третье, сдвигая векторы $\bar{j}$ и $\bar{k}$ влево. Круговая перестановка не меняет ориентацию тройки векторов, следовательно, тройка $\{\bar{j}, \bar{k}, \bar{i}\}$ является правой, как и тройка $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$.

Ответ: a), b) правые тройки; c) левая тройка.

Пример 2. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют левую тройку и взаимно ортогональны. Вычислить $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$, если $|\bar{a}|=4$, $|\bar{b}|=2$, $|\bar{c}|=3$.

Решение. По теореме о геометрическом смысле смешанного произведения

$$|\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}| = V(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}).$$

Так как параллелепипед прямоугольный, то его объем равен произведению длин трех его ребер пересекающихся в одной вершине, т.е. произведению модулей векторов, на которых он построен:

$$V(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot|\bar{c}| = 4\cdot 2\cdot 3 = 24.$$

По условию задачи тройка векторов $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ левая, следовательно, по той же теореме, $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} < 0$. Число, равное смешанному произведению $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$ отрицательное, а его модуль равен 24, т.е. $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} = -24$.

Ответ: $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} = -24$.

Пример 3. Вектор $\bar{c}$ ортогонален векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, угол между которыми равен 135^{o}. Вычислить $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$, если $|\bar{a}|=6$, $|\bar{b}|=|\bar{c}|=3$, тройка $\{\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}\}$ левая.

Решение. По условию задачи параллелепипед, построенный на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, является прямым. Смотрите рисунок 2.

Объем параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту:

$$V(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = S_{осн}\cdot H.$$

Высота параллелепипеда $H = |\bar{c}| = 3$. Основанием параллелепипеда является параллелограмм, площадь которого

$$S_{осн} = |\bar{a}\times\bar{b}| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin(\bar{a}\wedge b) = 6\cdot 3\cdot\sin 135^{o} = 9\sqrt{2}.$$

Отсюда находим

$$|\,\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\,| = V(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = 27\sqrt{2}\,.$$

Тройка $\{\bar{b},\ \bar{a},\ \bar{c}\}$ левая, следовательно, тройка $\{\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}\}$ является правой и $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} > 0$.

Ответ: $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} = 27\sqrt{2}$.

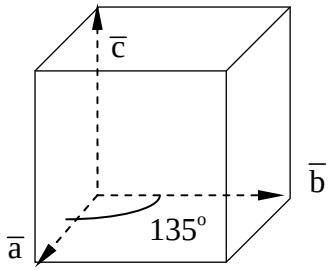

Рис. 2

Пример 4. Вычислить $(\bar{a}-2\bar{b})\cdot(3\bar{a}+4\bar{b}-\bar{c})\cdot\bar{c}$, если известно, что $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} = -17$.

Решение. Воспользуемся свойством линейности смешанного произведения, т.е. возможностью раскрывать скобки и выносить скалярные множители за знак смешанного произведения. Раскроем первую скобку:

$$(\bar{a}-2\bar{b})\cdot(3\bar{a}+4\bar{b}-\bar{c})\cdot\bar{c} =$$

$$= \bar{a}\cdot(3\bar{a}+4\bar{b}-\bar{c})\cdot\bar{c} - 2\bar{b}\cdot(3\bar{a}+4\bar{b}-\bar{c})\cdot\bar{c} =$$

В каждом из двух слагаемых раскрываем скобку:

$$= 3\bar{a}\cdot\bar{a}\cdot\bar{c} + 4\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} - \bar{a}\cdot\bar{c}\cdot\bar{c} - 6\bar{b}\cdot\bar{a}\cdot\bar{c} - 8\bar{b}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} + 2\bar{b}\cdot\bar{c}\cdot\bar{c} =$$

Смешанные произведения, содержащие два одинаковых сомножителя, равны нулю, так как такие тройки векторов являются компланарными. Убирая из получившейся суммы нулевые слагаемые, получаем

$$= 4\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} - 6\bar{b}\cdot\bar{a}\cdot\bar{c} = 4\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} + 6\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} = 10\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} = -170\,.$$

Так как по условию задачи $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} = -17$.

Ответ: $(\bar{a}-2\bar{b})\cdot(3\bar{a}+4\bar{b}-\bar{c})\cdot\bar{c} = -170$.

Пример 5. Вычислить смешанное произведение векторов $\bar{a} = (-2;-3;1)$, $\bar{b} = (4;7;-5)$, $\bar{c} = (6;-1;6)$.

Решение.

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & -5 \\ 6 & -1 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(42-5) + 3(24+30) + (-4-42) = 42\,.$$

Здесь мы воспользовались формулой вычисления смешанного произведения векторов, заданных в координатной форме.

Ответ: $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} = 42$.

Пример 6. Выяснить, образует ли тройка векторов $\bar{a} = (0;-3;1)$, $\bar{b} = (4;0;-5)$, $\bar{c} = (6;-1;0)$ базис пространства векторов.

Решение. По определению, базисом пространства векторов называется любая упорядоченная некомпланарная тройка векторов. Поэтому достаточно вычислить смешанное произведение $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$ данной тройки векторов. Если $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} = 0$, тогда данная тройка векторов является компланарной и не образует базиса. В противном случае – образует. Вычисляем смешанное произведение:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}0&-3&1\\4&0&-5\\6&-1&0\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}4&-5\\6&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4&0\\6&-1\end{vmatrix}=86.$$

Ответ: да.

Пример 7. Докажите, что следующие четыре точки лежат в одной плоскости: A(–3; 2; –1), B(0; 4; 5), C(2; 2; –1), $D=(-1;0;-7)$.

Решение. Очевидно, что если векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ компланарны, то данные точки лежат в одной плоскости. Смотрите рисунок 3. Вычисляем координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$:

$$\overline{AB}=(3;2;6),\ \overline{AC}=(5;0;0),\ \overline{AD}=(2;-2;-6).$$

Вычисляем смешанное произведение:

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix}3&2&6\\5&0&0\\2&-2&-6\end{vmatrix}=0,\ \text{ч.т.д.}$$

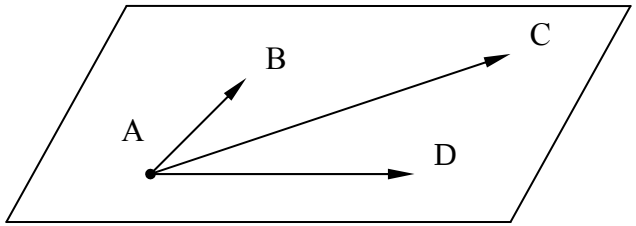

Рис. 3

Пример 8. Вычислить объем тетраэдра с вершнами в точках S(–4; 4; –1), A(1; 2; –3), B(3; –2; 2), C(5; –2; 5).

Решение. Вычисляем координаты векторов $\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$ и

их смешанное произведение:

$$\overline{SA}=(5;-2;-2),\ \overline{SB}=(7;-6;3),\ \overline{SC}=(9;-6;6),$$

$$\overline{SA}\cdot\overline{SB}\cdot\overline{SC}=\begin{vmatrix}5&-2&-2\\7&-6&3\\9&-6&6\end{vmatrix}=-84.$$

Вычисляем искомый объем: $V=\frac{1}{6}|\overline{SA}\cdot\overline{SB}\cdot\overline{SC}|=14$.

Ответ: 14.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Определение компланарных векторов.
2. Вычислите смешанное произведение векторов $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$, если $\bar{a}\times\bar{b}=(-3;3;1)$, $\bar{c}=(4;7;-5)$.
3. Компланарны ли векторы $\bar{a}=(3;3;1)$, $\bar{b}=(4;7;-5)$, $\bar{c}=(2;-1;7)$?

Вариант 2

1. Определение смешанного произведения векторов.
2. Вычислите $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$, если $\bar{a}=(14;7;-5)$ и $\bar{b}\times\bar{c}=(-1;4;3)$.
3. Определите ориентацию тройки векторов $\bar{a}=(-3;-3;1)$, $\bar{b}=(4;7;-5)$, $\bar{c}=(6;-1;6)$.

Вариант 3

1. Определение правой тройки векторов.
2. Определите ориентацию тройки векторов $\bar{a}=(-3;-3;1)$, $\bar{b}=(4;7;-5)$, $\bar{c}=(6;-1;6)$.
3. Найдите объем треугольной пирамиды ABCD, если известны координаты её вершин: A(2; –3; 0), B(3; 0; 2), C(0; –2; 5), D(–7; 7; –3).

Вариант 4

1. Определение транспозиции в упорядоченной тройке векторов.
2. Компланарны ли векторы $\bar{a}=(3;3;1)$, $\bar{b}=(4;7;-5)$, $\bar{c}=(2;-1;7)$?
3. Найдите объем треугольной пирамиды SABC, если известны координаты её вершин: S(–4; 4; –1), A(1; 2; –3), B(3; –2; 2), C(5; –2; 5).

Тест

1. Определить ориентацию тройки векторов: a) $\{\bar{k}, \bar{i}, \bar{j}\}$; b) $\{\bar{i}, \bar{k}, \bar{j}\}$; c) $\{\bar{j}, \bar{i}, \bar{k}\}$; d) $\{\bar{i}+\bar{j}, \bar{j}, \bar{k}\}$.
2. Векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют правую тройку и взаимно ортогональны. Вычислить $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$, если $|\bar{a}|=4$, $|\bar{b}|=2$, $|\bar{c}|=3$.
3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Определите ориентацию тройки векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC_1}$, $\overline{CB_1}$, и найдите их смешанное произведение.
4. Вычислите $(\bar{a}+2\bar{b})\cdot(3\bar{a}-2\bar{b}+\bar{c})\cdot\bar{c}$, если известно, что $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=-1$.
5. Вычислите смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, если $\bar{a}=(1;2;-2)$, $\bar{b}=(2;-2;1)$, $\bar{c}=(1;-10;8)$.
6. Определите ориентацию тройки векторов $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$, если $\bar{a}=(3;-1;1)$, $\bar{b}=(-2;1;2)$, $\bar{c}=(-2;3;5)$.
7. Выяснить, компланарные ли векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, если $\bar{a}=(2;3;-1)$, $\bar{b}=(1;-1;3)$, $\bar{c}=(1;9;-11)$.
8. Вычислить объем треугольной пирамиды ABCD, если её вершины имеют координаты: A(2; –1; 1), B(5; 5; 4), C(3; 2; –1), D(4; 1; 3).
9. Вычислите смешанное произведение векторов правоориентированного ортонормированного базиса. Ответ обоснуйте.
10. Вычислите объем параллелепипеда, построенного на векторах $(\bar{i}+\bar{j})$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ как на его ребрах, используя геометрический смысл смешанного произведения векторов и его свойство линейности.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1985. 320 с.
2. Виноградов И.М. Основы теории чисел. – М.: Наука, 1972. 168 с.
3. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. – М.: Физматлит, 2002. 240 с.
4. Кузютин В.Ф., Зенкевич Н.А., Еремеев В.В. Геометрия: учебник для вузов. – СПб.: Лань, 2003. 416 с.
5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975. 432 с.
6. Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – Минск.: Вышэйшая школа, 1968. 504 с.
7. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. – М.: Наука, 1984. 416 с.
8. Гусак А.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справочное пособие по решению задач. – Минск.: ТетраСистемс, 2001. 288 с.
9. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Физматгиз, 1960. 256 с.
10. Сборник задач по алгебре: учеб. пособие / под ред. А.И. Кострикина. – М.: Наука, 1987. 352 с.
11. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука, 1988. 288 с.

Учебное издание

Головизин Вячеслав Владимирович

Практические занятия по курсу
«Алгебра и геометрия». Часть I.

Учебно-методическое пособие

Компьютерный набор В.В. Головизин
Верстка В.И. Родионов

Авторская редакция

Подписано в печать 15.12.10. Формат 60 × 84 $\frac{1}{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,83. Уч.-изд. л.7,0.
Тираж 100 экз. Заказ № .

Издательство «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, Университетская, 1, корп. 4