В.Я. Дерр

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} |K(t,s)|^2 dtds \doteq \mathcal{K} < +\infty, \quad A = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\, dP(t)$$

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{cl\,A} \oplus \mathfrak{B}_{A^*}$$

$$\left(\mathbf{L}_{\mathbf{l}}^{\mathbf{\Delta},\rho}\right)^* = \mathbf{L}_{\mathbf{l}^+}^{+,\mathbf{\Delta},\rho'}, \quad \left(\mathbf{L}_{\mathbf{l}^+}^{+,\mathbf{\Delta},\rho'}\right)^* = \mathbf{L}_{\mathbf{l}}^{\mathbf{\Delta},\rho}$$

Министерство образования и науки РФ ГОУВПО
«Удмуртский государственный университет»
Кафедра математического анализа

В.Я. Дерр

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Учебное пособие

Ижевск
2010

УДК 517.2
ББК 22.161.5

Рекомендовано к изданию учебно-методическим советом УдГУ

Рецензент доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Физико-технического института УрО РАН Ю.П.Чубурин

Дерр В.Я.
Д36 Теория линейных операторов в гильбертовых пространствах: учебное пособие – г. Ижевск: Изд–во «Удмуртский университет» , 2010. — 106 с. /УдГУ. — Ижевск, 2010. — 106с.

ISBN 978-5-4312-0007-6

Издание представляет собой учебное пособие для спецкурса одноименного названия и является продолжением предыдущих книг автора. В нем излагаются специальные вопросы теории линейных операторов: матричное и спектральное представление, специальные виды линейных ограниченных операторов, неограниченные линейные операторы, дифференциальные и квазидифференциальные операторы.

Для студентов математических факультетов классических и технических университетов, готовящих специалистов по математическим направлениям.

УДК 517.2
ББК 22.161.5

Содержание

Предисловие

В общем курсе функционального анализа, который читается студентам математического факультета, всегда не достает времени на изучение некоторых специфических разделов, которые являются неотъемлемой частью функционального анализа (матричное и спектральное представление операторов, неограниченные линейные операторы, теория расширения симметрических операторов и т. п.). Все усилия направлены на то, чтобы сколько-нибудь подробно изучить общие вопросы. Изучается в основном только теория линейных операторов в банаховых пространствах. Между тем некоторые из отмеченных выше тем представляют значительный интерес для теории и приложений функционального анализа к другим научным дисциплинам, для дальнейшей научной работы студентов в магистратуре и аспирантуре. Для восполнения указанных пробелов студентам-математикам читается специальный курс «Теория линейных операторов в гильбертовых пространствах». Предлагаемое вниманию читателей учебное пособие должно помочь этим студентам усвоить названный спецкурс.

Данное пособие по своему содержанию является продолжением книг [11; 13; 14], практически не пересекается с ними, однако в нем используется терминология и обозначения этих книг без дополнительных ссылок. Перед его чтением надо вспомнить многие разделы из [13; 14], в особенности раздел «Гильбертовы пространства», темы «Сопряженный оператор» , «Сопряженное пространство» , «Вполне непрерывные операторы», «Спектр линейного оператора» и некоторые другие разделы.

Если указанные выше книги являются одновременно курсом лекций, задачником и решебником, то настоящее учебное пособие содержит только теоретический материал, так как практические занятия по данному спецкурсу не предусмотрены. Однако, в книгу включены и некоторые вопросы, которые опубликованы только в периодических изданиях. Много в ней также материала для курсовых и выпускных квалификационных работ, а также магистерских диссертаций.

1. Линейные операторы Гильберта–Шмидта

1.1. Матричное представление линейного ограниченного оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве. Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство и $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — полная ОНС (базис) в нем. Рассмотрим всюду определенный в $\mathcal{H}$ линейный ограниченный оператор A: $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$. Обозначим через g_k образы e_k $(k = 1, 2, ...)$: $g_k \doteq Ae_k$; найдем коэффициенты Фурье a_{jk} элементов g_k:

$$a_{jk} \doteq (g_k, e_j) = (Ae_k, e_j), \quad j, k = 1, 2, ...$$

Как известно, при этом сходятся ряды

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 \left(= \|g_k\|^2\right), \quad k = 1, 2, ... \tag{1.1}$$

(равенство Парсеваля–Стеклова [13, с. 90]). Таким образом, оператор A порождает бесконечную матрицу

$$\mathcal{A} = (a_{jk})_{j,k=1}^{\infty} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Так как

$$a_{jk} = (Ae_k, e_j) = (e_k, A^* e_j) = \overline{(A^* e_j, e_k)} = \overline{a_{kj}^*},$$

где a_{jk}^* – элементы матрицы $\mathcal{A}^*$, соответствующей сопряженному оператору A^*, то сходятся ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2, \ j = 1, 2, ... \tag{1.3}$$

Итак, всякий линейный ограниченный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве порождает бесконечную матрицу (1.2), причем

выполняются условия (1.1) и (1.3). Столбцы этой матрицы представляют собой столбцы коэффициентов Фурье образов Ae_k. Сам оператор A можно восстановить по его матрице следующим образом.

Пусть $x \in \mathcal{H}$; разложим его в ряд Фурье по исходной ОНС: $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k,\ x_k = (x, e_k)$; при этом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \|x\|^2$. Так как оператор A непрерывен, то $Ax = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k A e_k$, а в силу непрерывности скалярного произведения

$$(Ax, e_j) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k (Ae_k, e_j) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} x_k \doteq y_j;$$

y_j – коэффициенты Фурье элемента Ax. Следовательно,

$$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} y_j e_j, \quad \text{где} \quad y_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} x_k. \tag{1.4}$$

Равенства (1.4) представляют линейный ограниченный оператор через его матрицу (1.2).

Можно доказать и обратное утверждение *если линейный оператор* $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *допускает представление* (1.4), *причем выполнены условия* (1.1) и (1.3), *то он ограничен.*

Представление (1.4) выглядит точно так же, как и представление линейного оператора в конечномерном пространстве. Точно так же, как и в конечномерном пространстве, выглядит и связь между матрицей суммы и произведения двух операторов. Если линейным ограниченным операторам A и B соответствуют матрицы $(a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ и $(b_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$. Тогда их произведению AB соответствует матрица $(c_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$, где $c_{jk} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{ji} b_{ik}$.

1.2. Абсолютная норма оператора. Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),\ \mathcal{D}(A) = \mathcal{H},\ \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — две полные ОНС. Рассмотрим двойной ряд

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} |(Af_k, e_j)|^2 \tag{1.5}$$

(быть может и расходящийся). Так как скалярные произведения (Af_k, e_j) представляют собой коэффициенты Фурье элементов Af_k по системе

$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, то применяя для всех $k = 1, 2, ...$ равенство Парсеваля – Стеклова, придем к равенству

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} |(Af_k, e_j)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|Af_k\|^2. \tag{1.6}$$

Однако, $(Af_k, e_j) = (f_k, A^* e_j) = \overline{(A^* e_j, f_k)}$, поэтому справедливо также равенство

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} |(Af_k, e_j)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|A^* e_j\|^2 \tag{1.7}$$

Сопоставляя равенства (1.6) и (1.7), приходим к выводу, что сумма ряда (1.5) не зависит от выбранных систем, а зависит только от самого оператора A.

Взяв $f_k = e_k,\ k = 1, 2, ...$, назовем *абсолютной нормой* оператора A выражение

$$N(A) \doteq \sqrt{\sum_{j,k=1}^{\infty} |(Ae_k, e_j)|^2} = \sqrt{\sum_{j,k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2} \tag{1.8}$$

Из равенств (1.6) и (1.7), видим, что $N(A^*) = N(A)$, а так как $\|f_1\| = 1$, то из (1.6) следует $\|Af_1\| \leqslant N(A) = N(A) \cdot \|f_1\|$, т. е. $\|A\| \leqslant N(A)$.

Упражнение 1.1. Докажите, что абсолютная норма $N(A)$ удовлетворяет аксиомам нормы.

Теорема 1.1. *Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$. Если $N(A) < +\infty$, то оператор A вполне непрерывен.*

Доказательство. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – полная ОНС в $\mathcal{H}$. Согласно определению абсолютной нормы и равенству (1.7)

$$(N(A))^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|A^* e_k\|^2.$$

Сходимость ряда в правой части означает, что для любого натурального n найдется такое натуральное N_n что

$$\sum_{k=N_n+1}^{\infty} \|A^* e_k\|^2 < \frac{1}{n^2}. \tag{1.9}$$

Для любого $x \in \mathcal{H}$ $Ax = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(Ax, e_k)e_k$ (разложение Ax в ряд Фурье). Введем операторы $A_n x = \sum\limits_{k=1}^{N_n}(Ax, e_k)e_k, n = 1, 2, ...$ Так как $\mathcal{R}(A_n) = \langle\{e_k\}_{k=1}^{N_n}\rangle$, $n = 1, 2, ...$ конечномерны, то операторы A_n вполне непрерывны.

Пусть x пробегает единичный шар $B_{\mathcal{H}}[0, 1]$. Применив теорему Пифагора [13, с.с. 85, 95] и неравенство Коши – Буняковского [13, с. 81], последовательно получим

$$\|Ax - A_n x\|^2 = \|\sum_{N_n+1}^{\infty}(Ax, e_k)e_k\|^2 = \sum_{N_n+1}^{\infty}|(Ax, e_k)|^2 =$$
$$= \sum_{N_n+1}^{\infty}|(x, A^* e_k)|^2 \leqslant \|x\|^2 \sum_{N_n+1}^{\infty}\|A^* e_k\|^2 < \frac{1}{n^2} \to 0,$$

то есть $A_n \rightrightarrows A$. В силу следствия 3.2 из [14, с. 87] оператор A вполне непрерывен.

1.3. Оператор Гильберта– Шмидта. Пусть $\mathcal{H} = \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, ядро $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ обладает свойством

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}|K(t, s)|^2 dtds \doteq \mathcal{K} < +\infty. \tag{1.10}$$

Ядро, обладающее таким свойством называется ядром Гильберта – Шмидта. Рассмотрим линейный интегральный оператор с ядром Гильберта – Шмидта

$$(Ax)(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(t, s)x(s)ds. \tag{1.11}$$

Оператор (1.11) называется интегральным оператором Гильберта – Шмидта.

Покажем, что условие (1.10) обеспечивает действие оператора в пространстве $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$. Пусть $x \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$. Тогда, применив неравенство Гельдера (p=2), получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |(Ax)(t)|^2 dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(t,s)x(s)ds \right|^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |K(t,s)|^2 \, ds \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x(s)|^2 \, ds \leqslant \mathcal{K} \cdot \|x\|^2$$

Итак, оператор A действует в $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, ограничен, причем

$$\|A\| \leqslant \sqrt{\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} |K(t,s)|^2 dtds} = \sqrt{\mathcal{K}}.$$

Теорема 1.2. $N(A) = \sqrt{\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} |K(t,s)|^2 dtds} = \sqrt{\mathcal{K}}.$

Доказательство. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — полная ОНС в $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{A} = (a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ — матрица оператора A в этом базисе. Рассмотрим пространство $\mathbb{L}_2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \mathbb{L}_2(\mathbb{R}^2)$ функций двух переменных, суммируемых с квадратом на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. На этом пространстве функции

$$Ejk(t,s) = e_k(t)\overline{e_j(s)} \ (j,k = 1,2,...)$$

образуют полную ОНС. С учетом этого

$$a_{jk} = (Ae_k, e_j) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(t,s)e_k(s) \, ds \right) \overline{e_j(t)} \, dt =$$

$$= \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} K(t,s)\overline{E(t,s)} \, dsdt = (K, E_{jk})_{\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^2)}. \quad (1.12)$$

Таким образом, a_{jk} представляют собой коэффициенты Фурье элемента $K \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}^2)$ по системе $\{E_{jk}\}_{j,k=1}^{\infty}$. Следовательно,

$$N^2(A) = \sum_{j,k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 = \|K\|^2_{\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^2)} = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} |K(t,s)|^2 dtds.$$

.

В связи с доказанной теоремой назовем оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, где $\mathcal{H}$ – произвольное сепарабельное гильбертово пространство, *оператором Гильберта – Шмидта*, если $N(A) < +\infty$.

2. Специальные виды операторов

2.1. Положительные операторы. Квадратный корень. Напомним, оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ называется самосопряженным, если $A^* = A$. Таким образом, линейный ограниченный самосопряженный оператор A обладает свойством: $(Ax,\, x) = (x,\, Ax)$ (см. [14, с. 71]). Множество $S(\mathcal{H})$ самосопряженных операторов образует подпространство в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ [14, с. 72].

Самосопряженный оператор $A \neq 0$ называется *положительным*, если $(Ax, x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathcal{H}$. Если A — положительный оператор, то пишем также $A \geqslant 0$. Неравенство $A \geqslant B$ $\big(B \leqslant A\big)$ понимается так: $A - B \geqslant 0$.

Если B — самосопряженный оператор, то B^2 — положительный оператор: $(B^2x, x) = (Bx, Bx) \geqslant 0$.

Легко видеть также, что для любого оператора $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),\ A \neq 0$ операторы A^*A и AA^* положительны.

Из теоремы 4.12 [14, с. 101] следует, что спектр $\sigma(A)$ положительного оператора A обладает свойством $\sigma(A) \subset [0, +\infty)$.

Очевидно, сумма положительных операторов положительна. Менее очевидно следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть* $A \geqslant 0,\ B \geqslant 0,\ AB = BA$. *Тогда* $AB \geqslant 0$.

Доказательство. Следующим образом определим последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$: $A_1 \doteq \dfrac{A}{\|A\|},\ A_{n+1} = A_n - A_n^2,\ n = 1, 2, \ldots$ Непосредственно из определения видим, что операторы A_n перестановочны между собой и с оператором B.

Имеют место неравенства ($\mathbf{1}$ — тождественный оператор)

$$0 \leqslant A_n \leqslant \mathbf{1},\ n = 1, 2, \ldots \tag{2.1}$$

Действительно, при $n = 1$ они очевидны. Допустив справедливость неравенств (2.1) для некоторого n, получаем ($x \in \mathcal{H}$):

$$\big(A_n^2(\mathbf{1} - A_n)x,\, x\big) = \big((\mathbf{1} - A_n)x,\, A_n\big) \geqslant 0,$$

что означает положительность оператора $A_n^2\big(\mathbf{1} - A_n\big)$. Точно так же доказывается положительность оператора $\big(\mathbf{1} - A_n\big)^2 A_n$. Отсюда $A_{n+1} = A_n^2\big(\mathbf{1} - A_n\big) + \big(\mathbf{1} - A_n\big)^2 A_n \geqslant 0$ и $\mathbf{1} - A_{n+1} = (\mathbf{1} - A_n) + A_n^2 \geqslant 0$. Таким образом, неравенства (2.1) верны для $n + 1$. По индукции они верны для всех $n = 1, 2, \ldots$

Из определения операторов A_n имеем $A_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k^2 + A_{n+1}$; отсюда ввиду (2.1) $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k^2 = A_1 - A_{n+1} \leqslant A_1$, т. е. $\sum\limits_{k=1}^{n} (A_k x\, A_k x) \leqslant (A_1 x\, x)$. Значит, числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|A_k x\|^2$ сходится и $\|A_k x\| \to 0$ при $k \to \infty$. Из сказанного следует, что $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} A_k^2\right) x = A_1 x - A_{n+1} x \to A_1 x$ $(n \to \infty)$. Как отмечалось выше, $BA_k = A_k B$ $(k = 1, 2, \ldots)$, поэтому ($x \in \mathcal{H}$)

$$(ABx,\, x) = \|A\|(BA_1 x\, x) = \|A\| \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (BA_k^2 x\, x) =$$

$$= \|A\| \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (BA_k x\, A_k x) \geqslant 0.$$

Этим завершается доказательство теоремы.

Последовательность самосопряженных операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *ограниченной сверху* самосопряженным оператором C, если $A_n \leqslant C$, $n = 1, 2, \ldots$ Для того, чтобы последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ была ограничена сверху, необходимо и достаточно, чтобы существовала константа c такая, что $A_n \leqslant c\mathbf{1}$: если $A_n \leqslant C$, то

$$(A_n x, x) \leqslant (Cx, x) \leqslant \|C\|(x, x) = (\|C\|x, x) \quad \text{то есть} \quad A_n \leqslant \|C\|\mathbf{1}.$$

Наоборот, если существует такая константа c, то можно положить $C = c\mathbf{1}$.

Теорема 2.2. *Всякая возрастающая, ограниченная сверху последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ самосопряженных (положительных) опе-*

раторов, перестановочных между собой и с ограничивающим оператором C, сильно сходится к некоторому самосопряженному (положительному) оператору A.

Доказательство. Надо доказать, что для любого $x \in \mathcal{H}$ $A_n x \to Ax$ $(n \to \infty)$, причем оператор A самосопряженный (положительный).

Из условия теоремы следует, что последовательность $\{A_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ является возрастающей последовательностью положительных операторов: ввиду перестановочности операторов A_n при $n > m$, $x \in \mathcal{H}$

$$\big(A_n^2 x,\, x\big) - \big(A_m^2 x,\, x\big) = \big((A_n^2 - A_m^2)x,\, x\big) = \Big((A_n - A_m)(A_n + A_m)x\, x\Big) \geqslant 0.$$

В силу теоремы 2.1 и условий настоящей теоремы

$$A_m^2 \leqslant A_m A_n \leqslant A_n^2 \leqslant C^2 \quad (m < n), \tag{2.2}$$

и значит для любого $x \in \mathcal{H}$

$$\big(A_m^2 x\, x\big) \leqslant \big(A_m A_n x\, x\big) \leqslant \big(A_n^2 x,\, x\big) \leqslant \big(C^2 x\, x\big).$$

Возрастающая, ограниченная сверху числовая последовательность имеет предел. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \big(A_n^2 x,\, x\big) \doteq \alpha$; тогда и $\lim\limits_{n,m\to\infty} \big(A_n A_m x,\, x\big) = \alpha$. Поэтому

$$\|A_n x - A_m x\|^2 = \big(A_n x - A_m x,\, A_n x - A_m x\big) = \Big((A_n - A_m)^2 x,\, x\Big) =$$
$$= \big(A_n^2 x,\, x\big) - 2\big(A_n A_m x,\, x\big) + \big(A_m^2 x,\, x\big) \to 0 \quad (n, m \to \infty).$$

Итак, последовательность $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Пусть Ax — ее предел. В силу непрерывности скалярного произведения A — самосопряженный (положительный) оператор.

З а м е ч а н и е 2.1. Точно так же можно доказать утверждение: *убывающая, ограниченная снизу последовательность самосопряженных (положительных) операторов, перестановочных между собой и с ограничивающим оператором, сильно сходится к некоторому самосопряженному (положительному оператору).*

Положительный оператор B называется квадратным корнем из положительного оператора A, если $B^2 = A$ (пишем $B = \sqrt{A}$).

Имеет место следующая теорема существования квадратного корня из положительного оператора.

Теорема 2.3. *Каждый положительный оператор A имеет единственный положительный квадратный корень $\sqrt{A}$. Оператор $\sqrt{A}$ перестановочен с любым оператором, который перестановочен с A.*

Доказательство. Пусть сначала $A \leqslant \mathbf{1}$. Определим последовательность $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ следующим образом.

$$B_0 = 0, \quad B_{n+1} = B_n + \frac{1}{2}\left(A - B_n^2\right) = \frac{1}{2}A + B_n\left(\mathbf{1} - \frac{1}{2}B_n\right). \qquad (2.3)$$

Тогда $B_1 = \frac{1}{2}A$, $B_2 = A - \frac{1}{8}A^2, \ldots$; с помощью метода математической индукции убеждаемся в том, что: а) B_n – многочлены от A, и следовательно, перестановочны между собой и с любым оператором, перестановочным с A; б) B_n самосопряженные операторы (как линейные комбинации самосопряженных операторов). Покажем, что $B_n \leqslant \mathbf{1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

При $n = 0$ это неравенство верно; предположим, что оно верно для некоторого n. Тогда

$$\mathbf{1} - B_{n+1} = \mathbf{1} - B_n - \frac{1}{2}\left(A - B_n^2\right) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - A) + \frac{1}{2}(\mathbf{1} - B_n)^2 \geqslant 0,$$

так как $\mathbf{1} - A \geqslant 0$ по условию, а $\mathbf{1} - B_n \geqslant 0$ по индуктивному предположению. По индукции $B_n \leqslant \mathbf{1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Положительность B_n при всех n видна теперь из второго представления в (2.3). Покажем, что последовательность $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастающая. Из первого представления (2.3) получаем

$$B_{n+1} - B_n = B_n - B_{n-1} - \frac{1}{2}(B_n^2 - B_{n-1}^2) =$$
$$= (B_n - B_{n-1})(\mathbf{1} - \frac{1}{2}(B_n + B_{n-1})) \geqslant 0$$

если $B_n - B_{n-1} \geqslant$. Так как $B_1 - B_0 = B_1 \geqslant 0$, то по индукции $B_{n+1} - B_n \geqslant 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

По теореме 2.2 существует сильный предел $B \doteq \lim\limits_{n\to\infty} B_n$, причем $\|B\| \leqslant 1$, так как $\|B_n\| \leqslant \|\mathbf{1}\| = 1$, и B перестановочен с любым оператором, перестановочным с A. Перейдем к пределу в равенстве (2.3).

$$B = B + \frac{1}{2}(A - B^2) \quad \Rightarrow \quad A = B^2 \quad \Rightarrow \quad B = \sqrt{A}.$$

Пусть теперь A — произвольный положительный оператор. Полагаем $A_0 \doteq \frac{A}{\|A\|}$. Тогда $A_0 \leqslant \mathbf{1}$ и по доказанному существует $B_0 = \sqrt{A_0}$. Очевидно, $B \doteq \sqrt{\|A\|} \cdot B_0 = \sqrt{\|A\|} \cdot \sqrt{A_0} = \sqrt{A}$.

Существование корня квадратного доказано. Докажем его единственность.

Предположим, что B и C — два квадратных корня из A. Так как они оба перестановочны с A, то $BC = CB$. Для произвольного $x \in \mathcal{H}$ положим $y = (B - C)x$. Тогда

$$(By, y) + (Cy, y) = ((B + C)y, y) = ((B^2 - C^2)x, y) = (0, y) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (By, y) = 0, \quad (Cy, y) = 0$$

(сумма неотрицательных слагаемых равна нулю в том и только том случае, когда оба слагаемых равны нулю). По доказанному существуют $\sqrt{B}$ и $\sqrt{C}$. Так как $\sqrt{B}$ самосопряженный оператор, то

$$\|\sqrt{B}y\|^2 = (\sqrt{B}y, \sqrt{B}y) = (By, y) = 0 \Rightarrow \sqrt{B}y = 0 \Rightarrow By = \sqrt{B}(\sqrt{B}y) = 0;$$

аналогично $\quad \sqrt{C}y = 0$. Таким образом, получаем

$$\|Bx - Cx\|^2 = ((B-C)x, (B-C)x) = ((B-C)^2x, x) = ((B-C)y, x) = (0, x) = 0,$$

то есть $Bx = Cx$. Отсюда, ввиду произвольности x, $\quad B = C$.

2.2. Ортопроекторы. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $\mathcal{H}_1$ – его подпространство, $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1^{\perp}$ – ортогональное дополнение $\mathcal{H}_1$. Тогда $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Это означает, что любой элемент $\mathcal{H}$ единственным образом представляется в виде $x = x' + x''$, где $x' \in \mathcal{H}_1, x'' \in \mathcal{H}_2$, причем x' называется проекцией (ортогональной) на подпространство $\mathcal{H}_1$ [13, с. 85]. Оператор, ставящий в соответствие элементу x его проекцию x' называется *ортопроектором* (просто *проектором*, если

ясно, что речь идет об ортогональной проеции) на подпространство $\mathcal{H}_1$: $Px = x'$. Если нужно подчеркнуть, что речь идет о проекторе на подпространство $\mathcal{H}_1$, то пишем $P_{\mathcal{H}_1}$.

Ортопроектор $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ обладает свойствами:

1) P — линейный оператор;

2) P — ограниченный оператор и $\|P\| = 1$;

3) $P^2 = P$;

4) $P^* = P$;

5) P — положительный оператор.

6) $P = P_G$ вполне непрерывен тогда и только тогда, подпространство G конечномерно.

7) Спектр $\sigma(P_G) = \{0, 1\}$ состоит из собственных значений; собственному значению $\lambda = 1$ соответствует собственное подпространство G, собственному значению $\lambda = 0$ – собственное подпространство $G^\perp$.

Линейность проектора очевидна; из представления $x = x' + x''$ и теоремы Пифагора следует, что $\|Px\| = \|x'\| \leqslant \|x\|$; следовательно оператор P ограничен и $\|P\| \leqslant 1$; взяв $x \in \mathcal{H}_1$, получаем равенство $Px = x$, откуда следует, что $\|P\| = 1$. Далее,

$$P^2x = P(Px) = Px' = x' = Px$$

для любого $x \in \mathcal{H}$, значит, $P^2 = P$. Пусть теперь

$$x = x' + x'', y = y' + y'',\ x', y' \in \mathcal{H}_1,\ x'', y'' \in \mathcal{H}_2.$$

Тогда $(Px, y) = (x', y' + y'') = (x', y') = (x, y') = (x, Py)$ (так как $(x', y'') = (x'', y') = 0$). Из уже доказанного следует, что для любого $x \in \mathcal{H}$ $(Px, x) = (P^2x, x) = (Px, Px) \geqslant 0$, то есть $P \geqslant 0$. Свойство 6) сразу следует из свойств вполне непрерывного оператора. Свойство 7) следует из теоремы о разложении гильбертова пространства в ортогональную сумму подпространств и определения ортопроектора.

Упражнение 2.1. Найдите резольвентный оператор для ортопроектора P.

Оказывается, свойства 3) и 4) вполне определяют оператор ортогонального проектирования.

Теорема 2.4. *Пусть P — линейный оператор на $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}(P) = \mathcal{H}$ и 1) $P^2 = P$, 2)$P^* = P$. Тогда существует подпространство G такое, что $P = P_G$.*

Доказательство. Докажем ограниченность P.

$$\|Px\|^2 = (Px, Px) = (x, P(Px)) = (x, P^2x) = (x, Px) \leqslant \|x\| \cdot \|Px\| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|Px\| \leqslant \|x\| \Rightarrow \|P\| \leqslant 1.$$

Далее, обозначим $G = \{x \in \mathcal{H} : \ Px = x\}$. Очевидно, что G — линейное многообразие в $\mathcal{H}$. Пусть x^* — его предельная точка. Это означает, что существует последовательность $\{x_n\} \subset G$, сходящаяся к x^*. Переходя в равенстве $Px_n = x_n$ к пределу (по доказанному оператор P непрерывен), получим, что $Px^* = x^*$, т. е. $x^* \in G$. Итак, G — подпространство $\mathcal{H}$.

Пусть P_G — оператор ортогонального проектирования на G, $x \in \mathcal{H}$ — произвольный элемент и $y \doteq Px$. Тогда $Py = P^2x = Px = y$, т. е. $y = Px \in G$, Пусть теперь z — произвольный элемент G. Тогда $(P_Gx, z) = (x, P_Gz) = (x, z))$ и $(Px, z) = (x, Pz) = (x, z)$. Вычтем из первого равенства второе. В итоге получим $(P_Gx - Px, z) = 0$ для любого $z \in G$. Это означает, что $(P_G - P)x = 0$ для любого $x \in \mathcal{H}$, т. е. $P_G - P = 0$, $P = P_G$.

З а м е ч а н и е 2.2. Из представления $\mathcal{H} = G \oplus G^\perp$ следует, что оператор $\mathbf{1} - P_G$ есть ортопроектор на $G^\perp$.

Теорема 2.5. *Пусть G_1, G_2 — подпространства $\mathcal{H}$, $G = G_1 \cap G_1$; произведение ортопроекторов P_{G_1}, P_{G_2} является ортопроектором тогда и только тогда, когда они перестановочны, т. е. когда $P_{G_1}P_{G_2} = P_{G_2}P_{G_1}$; при этом $P_{G_1}P_{G_2} = P_G$.*

Доказательство. Если $P_{G_1}P_{G_2}$ — ортопроектор, то

$$P_{G_1}P_{G_2} = (P_{G_1}P_{G_2})^* = P^*_{G_2}P^*_{G_1} = P_{G_2}P_{G_1}.$$

Элемент $y = P_{G_1}P_{G_2}x = P_{G_2}P_{G_1}x$ согласно первому равенству принадлежит G_1, согласно второму — G_2, значит, $y \in G$; этим доказано, что $P_{G_1}P_{G_2} \subset P_G$. Обратное включение очевидно.

Предположим, что $P_{G_1}P_{G_2} = P_{G_2}P_{G_1} \doteq P$. Тогда

$$P^2 = (P_{G_1}P_{G_2})^2 = P_{G_1}P_{G_2}P_{G_1}P_{G_2} = P_{G_1}P_{G_1}P_{G_2}P_{G_2} = (P_{G_1}P_{G_2})^2 = \\ = P_{G_1}P_{G_2} = P$$

и

$$P^* = (P_{G_1}P_{G_2})^* = P^*_{G_2}P^*_{G_1} = P_{G_2}P_{G_1} = P_{G_1}P_{G_2} = P.$$

По теореме 2.4 $P = P_{G_1}P_{G_2}$ — ортопроектор.

Следствие 2.1. *Подпространства G_1, G_2 ортогональны тогда и только тогда, когда $P_{G_1}P_{G_2} = 0$.*

Пусть $G_1, G_2, ..., G_n$ — подпространства $\mathcal{H}$ и $P = P_{G_1}+P_{G_2}+...+P_{G_n}$.

Теорема 2.6. *Оператор P — ортопроектор тогда и только тогда, когда подпространства G_i $(i = 1, 2, .., n)$ попарно ортогональны; в этом случае $P = P_G$,* где $G = G_1 \oplus G_2 \oplus ... \oplus G_n$.

Доказательство. Если подпространства $G_1, G_2, ..., G_n$ попарно ортогональны, то $P_{G_i}P_{G_j} = 0$ $(i \neq j)$. Поэтому

$$P^2 = (P_{G_1}+P_{G_2}+...+P_{G_n})^2 = P^2_{G_1}+P^2_{G_2}+...+P^2_{G_n} = P_{G_1}+P_{G_2}+...+P_{G_n} = P.$$

Равенство $P^* = P$ очевидно, поэтому по теореме 2.4 P ортопроектор.

Пусть $x \in \mathcal{H}$. Тогда $y \doteq Px = \sum\limits_{k=1}^{n} P_{G_k}x = \sum\limits_{k=1}^{n} y'_k$, где $y'_k \in G_k$. В силу единственности представления элемента $y \in G$ в виде $y = \sum\limits_{k=1}^{n} y'_k$, где $y'_k \in G_k$ $(k = 1, 2, ..., n)$ $\quad P = P_G (= P_{G_1 \oplus G_2 \oplus ... \oplus G_n})$.

Докажем вторую половину теоремы. Пусть P — ортопроектор, $x \in \mathcal{H}$. Так как $\|P\|$=1, то для любых двух различных индексов i и j $(n \geqslant 2)$

$$\|x\|^2 \geqslant (Px, x) = \sum_{k=1}^{n}(P_{G_k}x, x) \geqslant (P_{G_i}x, x) + (P_{G_j}x, x) = \\ = (P^2_{G_i}x, x) + (P^2_{G_j}x, x) = (P_{G_i}x, P_{G_i}x) + (P_{G_j}x, P_{G_j}x),$$

т. е. $\|P_{G_i}x\|^2 + \|P_{G_j}x\|^2 \leqslant \|x\|^2$. Пусть в этом равенстве $x = P_{G_j}y$, где y пробегает все пространство $\mathcal{H}$. Тогда

$$\|P_{G_i}P_{G_j}y\|^2 + \|P_{G_j}y\|^2 \leqslant \|P_{G_j}y\|^2,$$

откуда $P_{G_i}P_{G_j}y = 0$. Ввиду произвольности $y \in \mathcal{H}$ это означает, что$P_{G_i}P_{G_j} = 0$. Согласно следствию 2.1 $G_i \perp G_j$.

Если $G = G_1 \oplus G_2$, где G, G_1, G_2 — подпространства $\mathcal{H}$, то будем писать также $G_2 = G \ominus G_1$.

Теорема 2.7. *Пусть G_1, G_2 — подпространства $\mathcal{H}$. Разность $P_{G_1} - P_{G_2}$ есть ортопроектор тогда и только тогда, когда $G_2 \subset G_1$; в этом случае $P_{G_1} - P_{G_2} = P_{G_1 \ominus G_2}$.*

Доказательство. Пусть разность $P_{G_1} - P_{G_2}$ есть ортопроектор на подпространство G $(P_{G_1} - P_{G_2} = P_G)$. Тогда $P_G + P_{G_2} = P_{G_1}$, и значит, $G \perp G_2$ и $G \oplus G_2 = G_1$. Отсюда получаем, что $G_2 \subset G_1$ и $G = G_1 \ominus G_2$.

Пусть теперь $G_2 \subset G_1$ и $G = G_1 \ominus G_2$. Тогда $G \perp G_2$ и $G_1 = G \oplus G_2$. Поэтому $P_{G_1} = P_G + P_{G_2}$, т. е. $P_{G_1} - P_{G_2} = P_G$.

Теорема 2.8. *Пусть G_1, G_2 — подпространства $\mathcal{H}$. Включение $G_2 \subset G_1$ эквивалентно неравенствам*

$$P_{G_1} \geqslant P_{G_2} \quad \text{и} \quad \|P_{G_1}x\| \geqslant \|P_{G_2x}\| \quad (x \in \mathcal{H}). \tag{2.4}$$

Доказательство. Заметим. что каждое из неравенств (2.4)эквивалентно неравенству $(P_{G_1}x, x) \geqslant (P_{G_2}x, x)$. Пусть $G_2 \subset G_1$. По теореме 2.7 $P_{G_1} - P_{G_2}$ является ортопроектором, поэтому $P_{G_1} - P_{G_2} \geqslant 0$, $P_{G_1} \geqslant P_{G_2}$. Из включения $G_2 \subset G_1$ также следует, что для любого $x \in \mathcal{H}$ $P_{G_2}x = P_{G_2}P_{G_1}x$, следовательно, $\|P_{G_2}x\| = \|P_{G_2}(P_{G_1}x)\| \leqslant \|P_{G_1}x\|$.

Пусть выполнены неравенства (2.4) и $x \in G_1^{\perp}$. Тогда $P_{G_1}x = 0$, а в силу второго неравенства (2.4) и $P_{G_2}x = 0$, то есть $x \in G_2^{\perp}$. Итак, доказано, что $G_1^{\perp} \subset G_2^{\perp}$, а это эквивалентно включению $G_2 \subset G_1$.

Теорема 2.9. *Возрастающая последовательность ортопроекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ сильно сходится к некоторому ортопроектору P.*

Доказательство. Надо доказать, что для любого $x \in \mathcal{H}$ $P_nx \to Px$ $(n \to \infty)$. Из условия теоремы следует, что числовая последовательность $\{\|P_nx\|^2\}_{n=1}^{\infty}$ также является возрастающей:

$$\|P_nx\|^2 = (P_nx, P_nx) = (P_n^2x, x) = (P_nx, x) \geqslant (P_mx, x) = (P_m^2x, x) = \\ = (P_mx, P_mx) = \|P_mx\|^2 \quad \text{при} \quad n > m;$$

кроме того, она ограничена: $\|P_n x\|^2 \leqslant \|x\|^2$. Следовательно, эта последовательность сходится и поэтому является фундаментальной.

Пусть $n > m$. В силу теорем 2.8 и 2.7 разность $P_n - P_m$ является ортопроектором. По этой причине

$$\|P_n x - P_m x\|^2 = \|(P_n - P_m)x\|^2 = \big((P_n - P_m)x, (P_n - P_m)x\big) =$$
$$= \big((P_n - P_m)x, x\big) = (P_n x, x) - (P_m x, x) = (P_n x, P_n x) - (P_m x, P_m x) =$$
$$= \|P_n x\|^2 - \|P_m x\|^2 \to 0$$

при $n \to \infty$. Итак, последовательность $\{P_n x\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, значит существует $y \in \mathcal{H}$ такой, что $y = \lim P_n x$. Таким образом, имеем оператор $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, который каждому $x \in \mathcal{H}$ ставит в соответствие $y = \lim P_n x,\ y = Px$. Этот оператор,очевидно линейный. Из неравенства $\|P_n x\| \leqslant \|x\|$ при $n \to \infty$ получаем, что он ограниченный. При любом n и любых $x, y \in \mathcal{H} \quad (P_n x, P_n y) = (P_n x, y) = (x, P_n y)$ откуда при $n \to \infty$ следует, что $(Px, Py) = (Px, y) = (x, Py)$, то есть $P^2 = P = P^*$. По теореме 2.4 P – ортопроектор.

Теорема 2.10. Если последовательность ортопроекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ слабо сходится к некоторому ортопроектору P, то она сходится к нему и сильно.

Доказательство. Сначала докажем, что если последовательность $\{y_n\} \subset \mathcal{H}$ сходится к элементу y слабо и сходится последовательность норм: $\|y_n\| \to \|y\|$, то $y_n \to y$ сильно.

Действительно,

$$\|y_n - y\|^2 = (y_n - y, y_n - y) = \|y_n\|^2 - (y, y_n) - (y_n, y) + \|y\|^2 \to 0, \quad (2.5)$$

так как $(y_n, y) \to (y, y) = \|y\|^2, (y, y_n) \to (y, y) = \|y\|^2$.

Слабая сходимость последовательности операторов означает, что для любого $x \in \mathcal{H} \quad (P_n x, x) \to (Px, x)$, т. е.

$$(P_n^2 x, x) \to (P^2 x, x),\ (P_n x, P_n x) \to (Px, Px),$$

или $\|P_n x\| \to \|Px\|$. Для завершения доказательства осталось подставить в (2.5) $y_n = P_n x, y = Px$.

2.3. Унитарные и изометрические операторы. Оператор $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H},\ \mathcal{D}(U) = \mathcal{H},\ \mathcal{R}(U) = \mathcal{H}$ называется *унитарным*, если для любых $x, y \in \mathcal{H}$ имеет место равенство

$$(Ux, Uy) = (x, y) \tag{2.6}$$

Заметим, что в этом определении ничего не говорится о линейности оператора U.

Отметим следующие свойства унитарного оператора.

1°. Унитарный оператор обладает обратным, который также является унитарным оператором.

Так как унитарный оператор U по определению сюръективен, то достаточно доказать его инъективность. Пусть $x \neq y$. Предположим, что вопреки требуемому, $Ux = Uy$. Тогда

$$0 = (Ux - Uy, Ux - Uy) = (Ux, Ux) - (Ux, Uy) - (Uy, Ux) + (Uy, Uy) =$$
$$= (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y) = (x - y, x - y) \neq 0,$$

следовательно U биективен, а это означает, что существует оператор $U^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{H},\ \mathcal{D}(U^{-1}) = \mathcal{R}(U) = \mathcal{H},\ \mathcal{R}(U^{-1}) = \mathcal{D}(U) = \mathcal{H}$. Пусть x и y произвольны, положим $x' = U^{-1}x, y' = U^{-1}y$. Тогда из определения (2.6) следует $(x, y) = (Ux', Uy') = (x', y') = (U^{-1}x, U^{-1}y)$, т. е. унитарность оператора U^{-1}.

2°. Для любых x и y выполняется равенство $(Ux, y) = (x, U^{-1}y)$.

В обозначениях предыдущего п.^{o}

$$(Ux, y) = (Ux, Uy') = (x, y') = (x, U^{-1}y).$$

$3.^o$ Унитарный оператор линеен.

Пусть $x = \alpha u + \beta v,\ y$ — произволен; В силу свойства 2°

$$(Ux, y) = (x, U^{-1}y) = (\alpha u + \beta v, U^{-1}y) = \alpha(u, U^{-1}y) + \beta(v, U^{-1}y) =$$
$$= \alpha(Uu, y) + \beta(Uv, y) = (\alpha Uu + \beta Uv, y).$$

Ввиду произвольности $y \quad U(\alpha u + \beta v) = \alpha Uu + \beta Uv$, т. е. U линейный оператор.

4°. Унитарный оператор ограничен; $\|U\| = 1$.

Подставив в определение (2.6) $y = x$, получим

$$\|Ux\|^2 = (Ux, Ux) = (x, x) = \|x\|^2,$$

откуда следует, что $\|U\| = 1$.

5° Из линейности и свойства 2° сразу следует, что для унитарного оператора сопряженный оператор совпадает с обратным: $U^* = U^{-1}$, т. е. $U^*U = UU^* = I$.

6° Если U–унитарный оператор, то и U^k при любом целом k также является унитарным оператором:

$$(U^k x, U^k y) = (U^{k-1}x, U^{k-1}y) = ... = (x, y)$$

при $k > 0$; аналогично рассуждаем и при $k < 0$.

7° Если линейный оператор A обладает свойствами

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{H} = \mathcal{R}(A), \quad (Ax, Ax) = (x, x) \quad (x \in \mathcal{H}), \tag{2.7}$$

то оператор A является унитарным.

Пусть $y \in \mathcal{H}$ и $\alpha \in \mathbb{C}$ произвольны. В силу (2.7) и линейности A

$$\big(A(x + \alpha y), A(x + \alpha y)\big) = (x + \alpha y, x + \alpha y),$$

$$(Ax, Ax) + \alpha(Ay, Ax) + \overline{\alpha}(Ax, Ay) + |\alpha|^2(Ay, Ay) = \\ = (x, x) + \alpha(y, x) + \overline{\alpha}(x, y) + |\alpha|^2(y, y).$$

Применив еще раз (2.7), получим

$$\alpha(Ay, Ax) + \overline{\alpha}(Ax, Ay) = \alpha(y, x) + \overline{\alpha}(x, y),$$

откуда ввиду произвольности α следует, что $(Ax, Ay) = (x, y)$.

8° Спектр $\sigma(U)$ унитарного оператора U лежит на единичной окружности $\{\lambda : \ |\lambda| = 1\}$.

Пусть $|\lambda| < 1$. Так как $U - \lambda \cdot \mathbf{1} = U(\mathbf{1} - \lambda \cdot U^{-1})$, то оператор $U - \lambda \cdot \mathbf{1}$ непрерывно обратим, потому что $\|\lambda \cdot U^{-1}\| = |\lambda| < 1$. Если $|\lambda| > 1$, то $U - \lambda \cdot \mathbf{1} = -\lambda(\mathbf{1} - \frac{1}{\lambda}U)$ и оператор $U - \lambda \cdot \mathbf{1}$ непрерывно обратим, потому что $\|\frac{1}{\lambda}U\| = \frac{1}{|\lambda|} < 1$. Сказанное означает, что возможно только включение $\sigma(U) \subset \{\lambda : \ |\lambda| = 1\}$.

9° Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор. Тогда оператор $U \doteq e^{iA}$ — унитарный.

В силу свойства 7° достаточно показать. что для любого $x \in \mathcal{H}$ $(Ux, Ux) = (x, x)$. Имеем

$$(Ux, Ux) = (e^{iA}x, e^{iA}x) = (x, (e^{iA})^* e^{iA}x) = (x, e^{-iA}e^{iA}x) = (x, x).$$

Пусть $\mathcal{H}_i$ — гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot, \cdot)_i$, $i = 1, 2$. Оператор $V : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, $\mathcal{D}(V) = \mathcal{H}_1$, $\mathcal{R}(V) = \mathcal{H}_2$ называется *изометрическим*, если для любых $x, y \in \mathcal{H}_1$ $(Vx, Vy)_2 = (x, y)_1$. Если $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$ то получаем определение унитарного оператора. Следующие свойства изометрического оператора доказываются точно так же, как и для унитарного оператора.

1°. Изометрический оператор обладает обратным, который также является изометрическим оператором.

$2.^o$ Изометрический оператор линеен.

3°. Изометрический оператор ограничен; $\|V\| = 1$.

4° Если линейный оператор $A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ обладает свойствами

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}_1,\ \mathcal{R}(A) = \mathcal{H}_2, \quad (Ax, Ax)_2 = (x, x)_1 \quad (x \in \mathcal{H}), \tag{2.8}$$

то оператор A является изометрическим.

Заметим, что об изометрическом операторе уже шла речь, когда мы доказывали теорему Рисса–Фишера об изометрическом изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств [13, с. 91].

В дальнейшем будет полезным следующее определение. Пусть A_i — линейные операторы, действующие в пространствах $\mathcal{H}_i$, $i = 1, 2$, так, что $\mathcal{D}(A_i) \subset \mathcal{H}_i$, $\mathcal{R}(A_i) \subset \mathcal{H}_i$, $i = 1, 2$; операторы A_1 и A_2 называются *унитарно эквивалентными*, если существует изометрический оператор V; $\mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, переводящий $\mathcal{D}(A_1)$ в $\mathcal{D}(A_2)$ и

$$\mathcal{D}(A_2) = V\mathcal{D}(A_1), \quad A_1 = V^{-1}A_2V.$$

2.4. Нормальные операторы. Оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ называется нормальным, если

$$A^*A = AA^*. \tag{2.9}$$

Так, например, а) унитарный оператор нормален, так как (см. свойство 5°) $U^*U = UU^* = \mathbf{1}$; б) самосопряженный оператор A нормален, так как $A^* = A$, и следовательно, выполняется равенство (2.9).

Теорема 2.11. *Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Тогда*

1) *для того, чтобы A был нормален, необходимо и достаточно. чтобы для любого $x \in \mathcal{H}$ выполнялось равенство $\|A^*x\| = \|Ax\|$;*

2) *если A нормален, то $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^\perp$;*

3) *если A нормален и $Ax = \lambda x$ при некоторых $x \in \mathcal{H}$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, то $A^*x = \overline{\lambda}x$;*

4) *если A нормален и $\lambda \neq \mu$ — собственные значения A, то соответствующие λ и μ собственные подпространства ортогональны.*

Доказательство.1. Пусть $x \in \mathcal{H}$ и $\|A^*x\| = \|Ax\|$. Тогда

$$\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x),\ \|A^*x\|^2 = (A^*x, A^*x) = (AA^*x, x);$$

вычтя из первого равенства второе, получим в итоге $\big((A^*A - AA^*)x,\, x\big) = 0$, что ввиду произвольности x означает: $A^*A - AA^* = 0$, т. е. выполнено равенство (2.9).

2. Покажем, что $\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^\perp$. Пусть $y \in \mathcal{N}(A^*)$; это значит, что $A^*y = 0$; отсюда следует, что для любого $x \in \mathcal{H}$ $(x, A^*y) = 0$, $(Ax, y) = 0$, т. е. y ортогонален Ax при любом $x \in \mathcal{H}$, следовательно $y \in \mathcal{R}(A)^\perp$; этим доказано, что $\mathcal{N}(A^*) \subset \mathcal{R}(A)^\perp$. Все соотношения здесь обращаются, т. е. имеет место следующая цепочка импликаций:

$$y \in \mathcal{R}(A)^\perp \ \Rightarrow\ (Ax, y) = 0\ (\forall x \in \mathcal{H}) \ \Rightarrow\ (x, A^*y) = 0\ (\forall x \in \mathcal{H}) \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ A^*y = 0 \Rightarrow y \in \mathcal{N}(A^*) \ \Rightarrow\ \mathcal{R}(A)^\perp \subset \mathcal{N}(A^*).$$

Итак, равенство $\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^\perp$ доказано.

Из доказанного выше утверждения 1) следует:

$$x \in \mathcal{N}(A) \ \Rightarrow\ Ax = 0 \ \Rightarrow\ A^*x = 0 \ \Rightarrow\ x \in \mathcal{N}(A^*) \ \Rightarrow\ \mathcal{N}(A) \subset \mathcal{N}(A^*);$$

точно так же доказывается и обратное включение $\mathcal{N}(A^*) \subset \mathcal{N}(A)$, то есть на самом деле имеет место равенство $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^*)$.

3. Применим доказанное утверждение 2) к оператору $A - \lambda\mathbf{1}$: $\mathcal{N}(A - \lambda\mathbf{1}) = \mathcal{N}(A^* - \overline{\lambda}\mathbf{1})$. Это равенство означает, что если x удовлетворяет равенству $(A - \lambda\mathbf{1})x = 0$, то он также удовлетворяет и равенству $(A^* - \overline{\lambda}\mathbf{1})x = 0$.

4. Пусть $Ax = \lambda x, \quad Ax = \mu x$ и $\lambda \neq \mu$. Тогда

$$\lambda(x,y) = (\lambda x, y) = (Ax, y) = (x, A^* y) = (x, \overline{\mu} y) = \mu(x,y) \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\lambda - \mu)(x,y) = 0 \ \Rightarrow \ (x,y) = 0 \ \Rightarrow \ x \perp y.$$

3. Спектральное представление ограниченного оператора

3.1. Спектральная функция. Напомним определение интеграла Римана–Стилтьеса для функций со значениями в банаховых пространствах. Пусть заданы банаховы пространства $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ и для любых $x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}$ определено произведение (справа) $x \cdot y \in \mathcal{Z}$. Пусть $x(t) : J \to \mathcal{X}$, $y(t) : J \to \mathcal{Y}$, $z(t) : J \to \mathcal{Z}$, $\tau = \{t_k\}_{k=0}^n$ — разбиение промежутка $J \subset \mathbb{R}$, $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$. Составим сумму

$$\mathfrak{S}_\tau(x,y) = \sum_{k=1}^n x(\xi_k)(y(t_k) - y(t_{k-1})) \ (\in \mathcal{Z})$$

Стилтьеса x по y по промежутку J. Элемент $I \doteq \int\limits_a^b x(t)\, dy(t) \in \mathcal{Z}$ называется интегралом Римана–Стилтьеса функции $x(\cdot)$ по функции $y(\cdot)$ по промежутку $J = [a,b]$, если

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ \big(\forall \tau :\ d(\tau) < \delta\big)\ \big(\|\mathfrak{S}_\tau(x,y) - I\|_{\mathcal{Z}} < \varepsilon\big).$$

Несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dy(t)$ определяется обычным образом. Так определенный интеграл обладает многими свойствами обычного интеграла Римана–Стилтьеса (см. [11], более точные ссылки см. ниже).

Операторнозначная функция $P : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ называется (абстрактной) *спектральной функцией*, если она обладает следующими свойствами.

1. При каждом $t \in \mathbb{R} \quad P(t)$ — ортопроектор.
2. Для каждого $x \in \mathcal{H} \quad \lim\limits_{t \to -\infty} \|P(t)x\| = 0, \quad \lim\limits_{t \to +\infty} \|P(t)x - x\| = 0.$

3. При $t > s$ $P(t) \geqslant P(s)$ ($P(\cdot)$ — возрастающая (в нестрогом смысле) операторнозначная функция).

Из свойства 3 следует, что для каждого $x \in \mathcal{H}$ существуют пределы $\lim\limits_{t \to \alpha - 0)} P(t)x \doteq P(\alpha-)x$ и $\lim\limits_{t \to \alpha + 0)} P(t)x \doteq P(\alpha+)x$ (пределы в смысле сильной сходимости).

Пусть Δ означает промежуток $(\alpha, \beta]$. Обозначим через $P(\Delta)$ разность $P(\beta+) - P(\alpha+)$.

Из свойства 3 и теоремы 2.7 следует, что $P(\Delta)$ — ортопроектор, причем, если $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ попарно не пересекаются, то

$$P(\Delta_j) \cdot P(\Delta_k) = 0 \quad \text{при } k \neq j.$$

Уточним определение интеграла Римана–Стилтьеса по спектральной функции. Пусть $J \doteq (a, b]$, $\varphi : J \to \mathbb{C}$, $\tau = \{t_k\}_{k=0}^n$ — разбиение J,

$$\mathfrak{S}_\tau = \sum_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k) P(\Delta_k) \tag{3.1}$$

(в приведенном выше определении интеграла Римана–Стилтьеса мы положили $\mathcal{X} = \mathbb{C}, \mathcal{Y} = \mathcal{Z} = \mathcal{L}(\mathcal{H})$). Оператор $I \doteq \int\limits_a^b \varphi(t)\, dP(t)$ называется интегралом Римана–Стилтьеса скалярной функции $\varphi(\cdot)$ по спектральной функции $P(\cdot)$, если

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall \tau :\ d(\tau) < \delta)\ (\|\mathfrak{S}_\tau - I\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \varepsilon)$$

т. е. если $\mathfrak{S}_\tau \rightrightarrows I$ при $d(\tau) \to 0$. Отметим, что интеграл по спектральной функции заведомо существует, если φ — непрерывная функция. Этот интеграл обладает многими свойствами обычного интеграла Римана – Стилтьеса. В частности, для него справедлива обычная формула вычисления [11, с. 53] (по поводу определения производной и интеграла Римана от функции со значениями в банаховых пространствах см. [14, с. 123]). Несобственный интеграл определяется как обычно:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dP(t) \doteq \lim_{a \to -\infty, b \to +\infty} \int\limits_a^b \varphi(t)\, dP(t).$$

(Предел понимается в смысле равномерной сходимости операторов в пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{H})$).

Пример 1. Пусть $\mathcal{H}$ — конечномерное гильбертово пространство, A — действующий в нем самосопряженный оператор. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ — занумерованные в порядке возрастания его различные собственные значения (как известно, они вещественны), H_1, H_2, ..., H_p — соответствующие им собственные подпространства, P_1, P_2, ..., P_p — ортопроекторы на них. Тогда

$$\mathcal{H} = H_1 \oplus H_2 \oplus ... \oplus H_p, \quad \text{или, что тоже самое} \quad \mathbf{1} = P_1 + P_2 + ... + P_p. \tag{3.2}$$

Положим

$$P(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{для} \quad t < \lambda_1, \\ P_1 \quad \text{для} \quad \lambda_1 \leqslant t < \lambda_2, \\ P_1 + P_2 \quad \text{для} \quad \lambda_2 \leqslant t < \lambda_3, \\ \dots \quad \dots \quad \dots\dots \\ P_1 + P_2 + ... + P_{p-1} \quad \text{для} \quad \lambda_{p-1} \leqslant t < \lambda_p, \\ \mathbf{1} \quad \text{для} \quad \mathbf{t} \geqslant \lambda_{\mathbf{p}}. \end{cases}$$

Отметим, что скачки $P(t)$ в точках λ_k равны P_k.

Легко видеть, что $P(\cdot)$ обладает всеми свойствами спектральной функции. Умножив обе части равенства (3.2) на A (слева), получим $A = \sum\limits_{k=1}^{p} AP_k$. Так как для любого $x \in \mathcal{H}$ $\quad P_k x \in H_k$, то $AP_k x = \lambda_k P_k x$; следовательно, $AP_k = \lambda_k P_k$ и $A = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k P_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\, dP(t)$ (см. [11, с. 53]).

Пример 2. Пусть $\mathcal{H}$ — бесконечномерное гильбертово пространство, A — действующий в нем вполне непрерывный самосопряженный оператор. Как известно, спектр его вещественен и состоит из не более, чем счетного множества собственных чисел, единственной предельной точкой которого является нуль. Полагаем $\lambda_0 = 0$, а остальные собственные числа занумеруем в порядке убывания их абсолютных величин: $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant |\lambda_| \geqslant ....$ Пусть H_k — собственные подпространства, соответствующие λ_k, $k = 0, 1, 2, ...$ Как известно, H_k попарно ортогональны и конечномерны (кроме H_0, которое может быть даже

несепарабельным), $\mathcal{H} = H_o \oplus H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots$ Пусть P_k — ортопроекторы на $H_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$ Как и в предыдущем примере (см. [11, с. 53])

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\, dP(t), \tag{3.3}$$

где $P(t) = \sum\limits_{k:\lambda_k<t} P_k$ удовлетворяет всем условиям спектральной функции.

Пример 3. Пусть $\mathcal{H} = \mathbb{L}_2[-1, +1],\ (Ax)(t) = tx(t)$ (оператор умножения на независимую переменную). Так как

$$\|Ax\|^2 = \int\limits_{-1}^{1} |(Ax)(t)|^2\, dt = \int\limits_{-1}^{1} t^2 |x(t)|^2\, dt \leqslant \int\limits_{-1}^{1} |x(t)|^2\, dt = \|x\|^2,$$

то A — ограниченный оператор и $\|A\| \leqslant 1$. Пусть $\hat{x}_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, t^n$. Тогда $\|\hat{x}_n\| = 1$ и

$$\|A\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 \geqslant \|A\hat{x}\|^2 = \int\limits_{-1}^{1} t^2 \cdot \frac{2n+1}{2} t^{2n}\, dt = \frac{2n+1}{2n+3} = 1 - \frac{2}{2n+3}.$$

Ввиду произвольности $n \in \mathbb{N}$ отсюда следует, что $\|A\| \geqslant 1$, и значит, $\|A\| = 1$.

При любом $\lambda \notin [-1, 1]$ оператор $A - \lambda\mathbf{1}$ непрерывно обратим, так как

$$(R_\lambda(A)y)(t) = ((A - \lambda\mathbf{1})^{-1}y)(t) = \frac{1}{t-\lambda} y(t) \quad \text{и}$$
$$\|R_\lambda(A)\| \leqslant \max\{\frac{1}{|\lambda - 1|}, \frac{1}{|\lambda + 1|}\}.$$

Следовательно, спектр $\sigma(A)$ оператора A лежит в отрезке $[-1, 1]$. Так как для всех $\lambda \in [-1, 1]$ оператор $R_\lambda(A)$ определен на неплотном в $\mathbb{L}_2[-1, 1]$ множестве

$$\{x \in \mathbb{L}_2[-1, 1] :\ \frac{x(t)}{t-\lambda} \in \mathbb{L}_2[-1, 1]\} \supset \{x \in \mathbb{L}_2[-1, 1] :\ x(\lambda) = 0\},$$

то $\sigma(A) = [-1, 1]$, причем спектр остаточный, собственных значений у оператора A нет.

Так как

$$(Ax, y) = \int\limits_{-1}^{1} (Ax)(t)\overline{y(t)}\,dt = \int\limits_{-1}^{1} tx(t)\overline{y(t)}\,dt = \int\limits_{-1}^{1} x(t)\overline{ty(t)}\,dt = (x, Ay),$$

то оператор A самосопряженный.

Не имея собственных подпространств, оператор A, тем не менее, имеет инвариантные подпространства. Полагаем

$$H_t = \begin{cases} \{0\} \quad \text{для} \quad t \leqslant -1, \\ \{x \in \mathbb{L}_2[-1,1] : \ x(s) \equiv 0, \ \text{если } t < s \leqslant 1\} \quad \text{для} \quad -1 < t < 1, \\ \mathcal{H}(= \mathbb{L}_2[-1,1]) \quad \text{для} \quad t \geqslant 1. \end{cases}$$

Легко непосредственно убедиться, что при всех t H_t — подпространства $\mathcal{H}$ и $A(H_t) \subset H_t$, т. е. H_t — инвариантные подпространства, причем $H_{t_1} \subset H_{t_2}$ при $t_2 > t_1$. Пусть $P(t)$ означает ортопроектор на H_t. В силу отмеченных свойств H_t $P(t)$ обладает всеми свойствами спектральной функции, причем на этот раз спектральная функция даже непрерывна.

Составим интегральную сумму (3.1), положив $a < -1, b = 1, \ \varphi(t) = t$:

$$\mathfrak{S}_\tau = \sum_{k=1}^{n} \xi_k P(\Delta_k).$$

Для $x \in \mathbb{L}_2[-1,1]$

$$\big(P(\Delta_k)x\big)(t) = \begin{cases} x(t) & \text{при} \quad t \in (t_{k-1} t_k], \\ 0 & \text{при} \quad t \notin (t_{k-1} t_k]. \end{cases}$$

Поэтому

$$\|(A - \mathfrak{S}_\tau)x\|^2 = \|Ax - \mathfrak{S}_\tau x\|^2 = \int\limits_{-1}^{1} |tx(t) - (\mathfrak{S}_\tau x)(t)|^2\,dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} |tx(t) - \xi_k x(t)|^2\,dt \leqslant d^2(\tau) \cdot \|x\|^2.$$

Таким образом, $\|A - \mathfrak{S}_\tau\| \leqslant d(\tau)$. Это означает, что $\mathfrak{S}_\tau \rightrightarrows A$ при $d(\tau) \to 0$, т. е. имеет место представление

$$A = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\, dP(t)$$

Наша ближайшая цель — показать, что любой ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ имеет такое представление.

3.2. Спектральное представление ограниченного самосопряженного оператора. Здесь мы покажем, что самосопряженный ограниченный оператор допускает представление вида (3.3).

Пусть A — самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$, тогда $A^2 \geqslant 0$. Полагаем

$$|A| \doteq \sqrt{A^2}, \qquad A^+ \doteq \frac{1}{2}\big(|A| + A\big), \qquad A^- \doteq \frac{1}{2}\big(|A| - A\big). \tag{3.4}$$

Из доказательства теоремы 2.3 следует, что операторы $|A|, A^+, A^-$ перестановочны с A и между собой, а непосредственно из определений видим, что

$$A = A^+ - A^-, \quad |A| = A^+ + A^-, \quad |A|^2 = A^2, \quad A^+A^- = A^-A^+ = 0.$$

Кроме того, для любого $x \in \mathcal{H}$ $\Big\||A|x\Big\| = \|Ax\|$; так как A и $|A|$ самосопряженные, то

$$\Big\||A|x\Big\|^2 = (|A|x, |A|x) = (|A|^2x, x) = (A^2x, x) = (Ax, Ax) = \|Ax\|^2$$

Рассмотрим снова

Пример 3. Пусть $\mathcal{H} = \mathbb{L}_2[-1, +1]$, $(Ax)(t) = tx(t)$. Здесь $(A^2x)(t) = t^2x(t)$, $(|A|x)(t) = |t|x(t)$,

$$(A^+x)(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad -1 \leqslant t < 0, \\ tx(t) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 0, \end{cases}$$

$$(A^-x)(t) = \begin{cases} -tx(t) \quad \text{при} \quad -1 \leqslant t < 0, \\ 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 0, \end{cases}$$

Пример 4. Пусть $\mathcal{H} = \mathbb{R}_2^2$, оператор A в базисе $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ (в дальнейшем в этом примере отождествляем оператор и его матрицу в указанном базисе). Легко видеть, что $A^2 = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$. Пусть $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; тогда $B > 0$, $B^2 = A^2$ и в силу единственности квадратного корня $|A| = \sqrt{A^2} = B$; $A^+ = \frac{1}{2}(|A| + A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $A^- = \frac{1}{2}(|A| - A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Здесь $\mathcal{N}(A^+) = \Delta \doteq \{(x, y) : \ y = x\}$, $\quad \mathcal{N}(A^-) = \{(x, y) : \ y = -x\}$.

Отметим также, что $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{-2, 4\}$.

Пример 5. Пусть $\mathcal{H} = \mathbb{L}_2[-1, +1]$,

$$(Ax)(t) = \int\limits_{-1}^{1} sin\ \pi\,(t+s)x(s)\,ds, \quad (Bx)(t) = \int\limits_{-1}^{1} cos\ \pi\,(t+s)x(s)\,ds,$$

$$(Cx)(t) = \int\limits_{-1}^{1} cos\ \pi\,(t-s)x(s)\,ds;$$

тогда A, B и C — самосопряженные вполне непрерывные операторы,

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) = \sigma(B) = \sigma_p(B) = \{-1, 0, 1\},\ \sigma(C) = \sigma_p(C) = \{0, 1\}$$

и

$$(A^2x)(t) = (A(Ax))(t) = \int\limits_{-1}^{1} sin\ \pi\,(t+s)(Ax)(s)\,ds =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} sin\ \pi\,(t+s) \int\limits_{-1}^{1} sin\ \pi\,(s+\tau)x(\tau)\,d\tau\,ds =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} x(\tau)\,d\tau \int\limits_{-1}^{1} \underbrace{sin\ \pi\,(t+s) sin\ \pi\,(s+\tau)}_{=\frac{1}{2}\left(cos\,\pi(t-\tau) - cos\,\pi\,(2s+t+\tau)\right)}\,ds = \int\limits_{-1}^{1} cos\ \pi\,(t-\tau)x(\tau)\,d\tau,$$

$$(B^2x)(t) = (B(Bx))(t) = \int\limits_{-1}^{1} cos\ \pi\,(t+s)(Bx)(s)\,ds =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} cos\ \pi\,(t+s) \int\limits_{-1}^{1} cos\ \pi\,(s+\tau)x(\tau)\,d\tau\,ds =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} x(\tau)\,d\tau \int\limits_{-1}^{1} \underbrace{cos\ \pi\,(t+s)cos\ \pi\,(s+\tau)}_{=\frac{1}{2}\left(cos\,\pi(t-\tau)+cos\pi\,(2s+t+\tau)\right)}\ ds = \int\limits_{-1}^{1} cos\ \pi\,(t-\tau)x(\tau)\,d\tau,$$

$$(C^2x)(t) = (C(Cx))(t) = \int\limits_{-1}^{1} cos\ \pi\,(t-s)(Cx)(s)\,ds =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} cos\ \pi\,(t-s) \int\limits_{-1}^{1} cos\ \pi\,(s-\tau)x(\tau)\,d\tau\,ds =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} x(\tau)\,d\tau \int\limits_{-1}^{1} \underbrace{cos\ \pi\,(t-s)cos\ \pi\,(s-\tau)}_{=\frac{1}{2}\left(cos\,\pi(t-\tau)+cos\,\pi\,(2s-t-\tau)\right)}\ ds = \int\limits_{-1}^{1} cos\ \pi\,(t-\tau)x(\tau)\,d\tau.$$

Таким образом, $A^2 = B^2 = C^2 = C \geqslant 0$. Так как, очевидно, операторы A и B не являются положительными, то в силу единственности квадратного корня из положительного оператора $|A| = |B| = \sqrt{A^2} = C$.

$$(A^+x)(t) = \int\limits_{-1}^{1} \big(cos\ \pi\,(t-s) + sin\ \pi\,(t+s)\big)x(s)\,ds, \quad (A^-x)(t) =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \big(cos\ \pi\,(t-s) - sin\ \pi\,(t+s)\big)x(s)\,ds,$$

$$(B^+x)(t) = \int\limits_{-1}^{1} \big(cos\ \pi\,(t-s) + cos\ \pi\,(t+s)\big)x(s)\,ds, \quad (B^-x)(t) =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \big(cos\ \pi\,(t-s) - sin\ \pi\,(t+s)\big)x(s)\,ds,$$

$C^+ = C, \quad C^- = 0.$

Пусть A — самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$. Тогда имеет место включение $\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{N}(A^+)$.. Действительно, пусть $x \in \mathcal{N}(A)$; это значит, что $Ax = 0$. Но тогда по доказанному выше и $|A|x = 0$. Следовательно, $A^+x = \frac{1}{2}(|A| + A)x = 0$, т. е. $x \in \mathcal{N}(A^+)$.

Пусть P — ортопроектор на подпространство $\mathcal{N}(A^+)$. Свойства этого ортопроектора отмечаются следующей леммой.

Лемма 3.1. 1. *Ортопроектор P перестановочен с любым ограниченным оператором, перестановочным с A; в частности с A, $|A|$, A^+, A^-.*

2. $A^- = PA^- = -PA = P|A| \geqslant 0, \quad A^- = 0$ *тогда и только тогда, когда* $A \geqslant 0$.

3. $A^+ = (\mathbf{1} - P)A^+ = (\mathbf{1} - P)A = (\mathbf{1} - P)|A| \geqslant 0$; $A^+ = 0$ *тогда и только тогда, когда* $A \leqslant 0$.

4. $A = (\mathbf{1} - 2P)|A|$.

Доказательство. **1**. Пусть C перестановочен с A : $\quad CA = AC$. Тогда и $C^*A = AC^*$; очевидно также, что C перестановочен и с $|A|, A^+, A^-$. Далее, для любого $x \in \mathcal{H} \quad Px \in \mathcal{N}(A^+)$, поэтому $A^+CPx = CA^+Px = 0$. Значит, $CPx \in \mathcal{N}(A^+)$, $PCPx = CPx$, $PCP = CP$. Аналогично, для сопряженного оператора $PC^*P = C^*P$ или $PCP = PC$. Отсюда получаем, что $CP = PC$.

2. Так как для всех $x \in \mathcal{H}$ $A^+A^-x = 0$, то $A^-x \in \mathcal{N}(A^+)$; значит, $PA^-x = A^-x$; отсюда $PAx = P(A^+ - A^-)x = -PA^-x = A^-x$. Далее, $P|A|x = P(A^+ + A^-)x = PA^-$. Так как x произволен, то получаем требуемое. Пусть $A \leqslant 0$. Тогда по доказанному одновременно выполняются неравенства $A^- \leqslant 0$ и $A^- \geqslant 0$, т. е. $A^- = 0$. Обратно, если $A^- = 0$, то $A = |A|$, следовательно, $A \geqslant 0$.

3. Так как для всех $x \in \mathcal{H}$ $PA^+x = 0$, то $PA^+ = 0$. Поэтому $(\mathbf{1} - P)A^+ = A^+$; в силу **2**. $PA^- = -A^-$, $P|A| = A^-$ поэтому $(\mathbf{1} - P)A = A + A^- = A^+$, $0 \leqslant (\mathbf{1} - P)|A| = |A| - A^- = A^+$. Последнее утверждение доказывается так же, как в **2**.

4. $(\mathbf{1} - 2P)|A| = |A| - 2P|A| = |A| - 2A^- = A^+ - A^- = A$.

Теорема 3.1. *Каждый ограниченный самосопряженный оператор A обладает единственной спектральной функцией $P(\cdot)$, так что имеет место представление*

$$A = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\, dP(t) \tag{3.5}$$

Доказательство. Пусть $m \doteq \inf\limits_{\|x\|=1} (Ax, x)$, $M \doteq \sup\limits_{\|x\|=1} (Ax, x)$. Тогда

$$m(x, x) \leqslant (Ax, x) \leqslant M(x, x) \quad \text{для любого } x \in \mathcal{H}.$$

Введем обозначения

$$A_t = A - t\mathbf{1}, \qquad A_t^+ = (A_t)^+, \qquad A_t^- = (A_t)^-,$$
$$P(t) \text{ — ортопроектор на подпространство } \mathcal{N}(A_t^+).$$

Покажем, что $P(\cdot)$ является спектральной функцией оператора A. Начнем с доказательства импликации

$$t > s \quad \Longrightarrow \quad P(t) \geqslant P(s). \tag{3.6}$$

Пусть $t > s$. По лемме 6.1 (свойство 1) оператор $P(t)$ перестановочен с любым оператором, перестановочным с оператором A, в частности, $P(t)P(s) = P(s)P(t)$ и $P(s)(\mathbf{1} - P(t)) = (\mathbf{1} - P(t))P(s)$. По теореме 2.5 оператор $Q \doteq P(s)(\mathbf{1} - P(t))$ является ортопроектором. При этом имеют место равенства

$$P(s)Q = Q, \qquad (\mathbf{1} - P(t))Q = Q. \tag{3.7}$$

Действительно, $P(s)Q = P^2(s)(\mathbf{1} - P(t)) = P(s)(\mathbf{1} - P(t)) = Q$; второе равенство доказывается аналогично.

Пусть G — подпространство, на которое проектирует Q и $x \in G$. Тогда $Qx = x$ и

$$(A_s x, x) = (A_s Qx, x) = \big(A_s P(s) Qx, x\big) =$$
$$= \big(P(s) A_s Qx, x\big) \overset{\text{лемма } 6.1 \text{ св. } 2}{=} -(A_s^- Qx, x) = -(A_s^- x, x) \leqslant 0,$$

$$(A_t x, x) = (A_t Qx, x) = \Big(A_t\big(\mathbf{1} - P(t)\big)Qx, x\Big) =$$
$$= ((\mathbf{1} - P(t)) A_t Qx, x) \overset{\text{лемма } 6.1 \text{ св. } 3}{=} (A_t^+ Qx, x) = (A_t^+ x, x) \geqslant 0,$$

Таким образом,

$$((A - s\mathbf{1})x, x) \leqslant 0, \qquad ((A - t\mathbf{1})x, x) \geqslant 0.$$

Вычитая из первого неравенства второе, получим, что $(t-s)(x,x) \leqslant 0$, т. е. $(x,x) = 0$, $x = 0$. Это означает, что $G = \{0\}$,, т. е. $Q = 0$. Следовательно, $P(s) = P(s)P(t)$. Это равенство эквивалентно включению $\mathcal{N}(A_s^+) \subset \mathcal{N}(A_t^+)$. В силу теорем 2.7 и 2.8 $P(t) \geqslant P(s)$. Этим импликация (3.6) доказана.

Покажем, что при $t < m$ $P(t) = 0$. Предположим противное, $P(t) \neq 0$. Тогда найдется $x \in \mathcal{H}$ такой, что $P(t)x \neq 0$. Положив $y \doteq P(t)x$, получим $P(t)y = y$. Не ограничивая общности, можно считать также, что $\|y\| = 1$. Отсюда получаем

$$(Ay, y) - t = (Ay, y) - t(y, y) = \big((A - t \cdot \mathbf{1})y, y\big) =$$
$$= \big((A - t \cdot \mathbf{1})P(t)y, y\big) \overset{\text{лемма } 6.1 \text{ св. } 2}{=} -(A_t^- y, y) \leqslant 0,$$

т. е. $(Ay, y) \leqslant t < m$, что противоречит определению m. Итак, при $t < m$ $P(t) = 0$. Аналогично доказывается, что при $t > M$ $P(t) = \mathbf{1}$.

Таким образом доказано, что $P(t)$ — спектральная функция.

Покажем, что $P(\cdot)$ непрерывна справа в каждой точке $s \in [m, M]$. Выше было показано. что при $t > s$ имеет место равенство $P(s)\big(\mathbf{1} - P(t)\big) = 0$, или $P(s)\big(P(s) - P(t)\big) = 0$, откуда при $t \to s + 0$ в силу монотонности $P(\cdot)$ следует, что

$$P(s)\big(P(s) - P(s+)\big) = 0. \tag{3.8}$$

Из монотонности $P(\cdot)$ следует, что $(P(s) - P(s+)) \leqslant 0$. Предположим, что $(P(s) - P(s+)) < 0$. Тогда для любого $x \in \mathcal{H}$, $x \neq 0$ $((P(s) - P(s+))x, x) < 0$, в частности для $x \in G_0$, $x \neq 0$, где G_0 — подпространство, на которое проектирует $P(s) - P(s+)$. Поэтому $0 > ((P(s) - P(s+))x, x) = (x, x)$, что противоречит определению скалярного проиведения. Следовательно, $P(s) - P(s+) = 0$, что и означает непрерывность $P(\cdot)$ справа.

Следующим этапом является доказательство неравенства

$$sP(\Delta) \leqslant AP(\Delta) \leqslant tP(\Delta), \quad \Delta = (s, t], \quad s < t. \tag{3.9}$$

Имеем,

$$P(t)P(\Delta) = P(t)\big(P(t) - P(s)\big) = P(t) - P(s) = P(\Delta),$$
$$\big(\mathbf{1} - P(s)\big)P(\Delta) = P(\Delta) - P(s)\big(P(t) - P(s)\big) = P(\Delta).$$

С помощью этих равенств получаем

$$(A - t \cdot \mathbf{1})P(\Delta) = A_t P(\Delta) = A_t P(t)P(\Delta) = -A_t^- P(\Delta) \leqslant 0,$$

т. е. $AP(\Delta) \leqslant tP(\Delta)$;

$$(A - s \cdot \mathbf{1})P(\Delta) = A_s P(\Delta) = A_s(\mathbf{1} - P(s))P(\Delta) = A_s^+ P(\Delta) \geqslant 0,$$

т. е. $AP(\Delta) \geqslant sP(\Delta)$. Этим неравенства (3.9) доказаны.

Докажем спектральное представление (3.5). Полагаем $a < m, b = M$. Пусть $\tau = \{t_k\}_{k=0}^n$ — разбиение $(a, b]$ на полуинтервалы $(t_{k-1}, t_k]$. Согласно неравенствам (3.9)

$$t_{k-1}P(\Delta_k) \leqslant AP(\Delta_k) \leqslant t_k P(\Delta_k) \quad (k = 1, 2, ..., n).$$

Так как $\sum\limits_{k=1}^{n} P(\Delta_k) = \mathbf{1}$, то сложив все эти неравенства, получим

$$\sum_{k=1}^{n} t_{k-1}P(\Delta_k) \leqslant A \leqslant \sum_{k=1}^{n} t_k P(\Delta_k).$$

Пусть $\xi_k \in (t_{k-1}, t_k]$ $(k = 1, 2, ..., n)$. Тогда из последнего неравенства следует

$$\sum_{k=1}^{n}(t_{k-1} - \xi_k)P(\Delta_k) \leqslant A - \sum_{k=1}^{n}\xi_k P(\Delta_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n}(t_k - \xi_k)P(\Delta_k),$$

откуда

$$-d(\tau)\mathbf{1} \leqslant A - \sum_{k=1}^{n}\xi_k P(\Delta_k) \leqslant d(\tau)\mathbf{1}.$$

Окончательно получаем

$$\left\| A - \sum_{k=1}^{n}\xi_k P(\Delta_k) \right\| \leqslant d(\tau) \to 0.$$

Это означает справедливость представления (3.5).

Так как семейство интегральных сумм равномерно сходится к интегралу Стилтьеса, то имеют место также и сильная и слабая сходимости. Поэтому для любого $x \in \mathcal{H}$

$$Ax = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, dP(t)x \quad \text{и } (Ax, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, d\big(P(t)x, x\big).$$

Здесь интеграл в правой части — обычный интеграл Стилтьеса по скалярной функции.

Единственность спектральной функции будет доказана в следующем пункте.

З а м е ч а н и е 3.1. . Как было видно из доказательства, для ограниченного самосопряженного оператора интеграл в (3.5) на самом деле распространяется на конечный промежуток $(a, b] \supset [m, M]$.

3.3. Функции от ограниченного самосопряженного оператора A Пусть $\varphi : [a, b] \to \mathbb{P}$ — непрерывная функция, причем имеет место строгое включение $[m, M] \subset [a, b]$. Функцией $\varphi(A)$ называется интеграл $\varphi(A) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dP(t)$ где $P(\cdot)$ — спектральная функция оператора A. Так, $\mathbf{1} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dP(t)$, а если A положительный оператор, то

$\sqrt{A} = \int\limits_0^{+\infty} \sqrt{t}\, dP(t)$. Отметим также, что $A^n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^n\, dP(t)$, а с учетом сказанного в конце предыдущего пункта

$$\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (A^2x, x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2\, d(P(t)x, x); \tag{3.10}$$

Здесь также интеграл в правой части — обычный интеграл Стилтьеса по скалярной функции.

Далее,

$$A_t = A - t \cdot \mathbf{1} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (s-t)\, dP(s), \quad A_t^+ = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (s-t)^+\, dP(s) =$$
$$= \int\limits_{t}^{+\infty} (s-t)\, dP(s), \quad |A| = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |t|\, dP(t). \tag{3.11}$$

Пусть λ — регулярное число ограниченного самосопряженного оператора A, спектральная функция которого $P(\cdot)$. Тогда резольвентный оператор имеет представление

$$R_\lambda(A) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dP(t)}{t-\lambda}.$$

Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор. Как было показано в 2.3, п. 9° оператор $U \doteq e^{iA}$ является унитарным. И если $P(\cdot)$ — спектральная функция оператора A, причем $[m, M] \subset [0, 2\pi]$, то $U = \int\limits_0^{2\pi} e^{it}\, dP(t)$.

Завершим доказательство теоремы 3.1, докажем единственность спектральной функции. Пусть наряду с $P(\cdot)$ существует спектральная

функция $Q(\cdot)$, так что (см. (3.5), (3.11, (3.10))

$$A = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\, dQ(t), \quad A_t = A - t\cdot\mathbf{1} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (s-t)\, dQ(s),$$

$$A_t^+ = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (s-t)^+\, dQ(s), \quad \|A_t^+ x\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big((s-t)^+\big)^2\, d(Q(s)x, x) =$$

$$= \int\limits_{t}^{+\infty} (s-t)^2\, d\big(Q(s)x,\, x\big). \quad (3.12)$$

Пусть $x \in \mathcal{N}(A_t^+)$. Тогда согласно (3.12)

$$0 = \|A_t^+ x\|^2 = \int\limits_{t}^{+\infty} (s-t)^2\, d\big(Q(s)x,\, x\big);$$

так как интегрируемая функция неотрицательна, а интегрирующая — возрастающая, то последнее равенство возможно лишь в случае, если интегрирующая функция не зависит от s (напомним, что и последнем равенстве речь идет об обычном интеграле Стилтьеса от скалярной функции по скалярной). Это значит, что $\big(Q(s)x,\, x\big) = (x,\, x)$ при $s \geqslant t$; в частности $\big(Q(t)x,\, x\big) = (x,\, x)$. Отсюда следует, что

$$\|Q(t)x - x\|^2 = \big(Q(t)x - x,\, Q(t)x - x\big) =$$
$$= \big(Q(t)x,\, x\big) - 2\big()\big(Q(t)x,\, x\big) + (x,\, x) = 0, \quad \text{т. е. } Q(t)x = x.$$

Следовательно, оператор $Q(\cdot)$ есть ортопроектор на подпространство $\mathcal{N}(A_t^+)$; так как ортопроектор полностью определяется этим подпространством, то $Q(t) \equiv P(t)$.

.

4. Неограниченные линейные операторы

4.1. Замкнутые операторы. Оператор $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ (не обязательно линейный) называется *замкнутым*, если имеет место импликация

$$\big(x_n \in \mathcal{D}(A)\ (n \in \mathbb{N}),\ x_n \to x,\ Ax_n \to y\big) \Longrightarrow \big(x \in \mathcal{D}(A),\ y = Ax\big) \tag{4.1}$$

Очевидно, непрерывный оператор замкнут, но обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места: замкнутый оператор может и не быть непрерывным. Если оператор только замкнут, то из сходимости последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(A)$ еще не следует сходимость последовательности $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$. Однако, если $x_n \to x$ и $x'_n \to x$ $(x_n, x'_n \in \mathcal{D}(A)$, то последовательности $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{Ax'_n\}_{n=1}^{\infty}$ не могут сходиться к различным пределам.

Понятие замкнутости оператора может быть переформулировано на следующем геометрическом языке. Множество пар

$$\mathfrak{G}_A \doteq \{\langle x, Ax\rangle :\ x \in \mathcal{D}(A)\} \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}\}$$

называется *графиком* оператора A. Очевидны следующие простые свойства графика.

1. Два оператора совпадают тогда и только тогда, когда совпадают их графики.

2. Множество $S \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ тогда и только тогда является графиком некоторого оператора, когда имеет место импликация

$$\langle x, y\rangle \in S,\ \langle x, y'\rangle \in S \Longrightarrow y = y'.$$

3.Оператор A линеен тогда и только тогда , когда его график $\mathfrak{G}_A$ есть линейное многообразие в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

4. Оператор A замкнут тогда и только тогда, когда его график $\mathfrak{G}_A$ замкнут в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

5. Если оператор A замкнут, то оператор $A - \lambda\mathbf{1}$ также замкнут.

6. Если оператор A замкнут и оператор A^{-1} существует, то оператор A^{-1} также замкнут. (Это связано с тем, что если $\mathfrak{G}_A = \{\langle x, Ax\rangle\}$, то $\mathfrak{G}_{A^{-1}} = \{\langle y, A^{-1}\rangle\} = \{\langle Ax, x\rangle\}$.)

Пусть оператор A не является замкнутым; тогда не будет замкнутым и его график $\mathfrak{G}_A$; если замыкание $cl\mathfrak{G}_A$ в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ есть график некоторого оператора, то этот оператор называется *замыканием* оператора A и обозначается $cl\, A$. Говорят также, что A допускает замыкание. Таким образом, $\mathfrak{G}_{cl\, A} = cl\mathfrak{G}_A$. Замыкание $cl\, A$ есть *минимальное замкнутое расширение* оператора A.

4.2. Общее определение сопряженного оператора. Пусть $A: \ \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — произвольный линейный оператор (вообще говоря не предполагается не только его ограниченность, но и замкнутость). Предположим лишь, что $\mathcal{D}(A)$ плотно в $\mathcal{H}$ (A — плотно определенный оператор).

Обозначим

$$\mathcal{D}^* \doteq \{y: \ \exists z \in \mathcal{H}: \ (Ax, y) = (x, z)\};$$

множество $\mathcal{D}^*$ не пусто, так как содержит по крайней мере 0. Заметим, что элемент z определяется по элементу y однозначно; действительно, пусть наряду с z существует также элемент $z' \in \mathcal{H}$ такой, что также $(Ax, y) = (x, z')$; из этих равенств следует, что $(x, z - z') = 0$ для всех $x \in \mathcal{D}(A)$, что в силу плотности $\mathcal{D}(A)$ означает, что $z - z' = 0$, $z = z'$. Для неплотно определенного оператора равенство $(Ax, y) = (x, z)$ выполняется и для $z + u$, где u пробегает $(\mathcal{D}(A))^{\perp}$.

Этот факт позволяет определить сопряженный оператор A^* следующим образом:

$$\mathcal{D}(A^*) \doteq \mathcal{D}^*, \qquad A^* y = z;$$

таким образом, *сопряженный оператор A^* существует в том и только том случае, когда $cl\, \mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$*; при этом он обладает свойством: $(Ax, y) = (x, A^* y)$, $x \in \mathcal{D}(A)$, $y \in \mathcal{D}(A^*)$; однако, равенство $(Ax, y) = (x, By)$ означает лишь, что $B \subset A^*$.

Отметим простейшие свойства сопряженного оператора (области определения всех нижеследующих операторов предполагаются плотными в $\mathcal{H}$).

1) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$;

2) если $A \subset B$, то $B^* \subset A^*$;

3) $(A+B)^* \supset A^* + B^*$;

4) $(AB)^* \supset B^* A^*$;

5) $(A+\lambda\mathbf{1})^* = A^* + \bar{\lambda}\mathbf{1}$.

Остановимся, например, на свойстве 4):

$$(ABx, y) = (Bx, A^* y) = (x, B^* A^* y);$$

это в силу сказанного выше означает требуемое включение.

Теорема 4.1. *Пусть оператор A имеет обратный A^{-1} и $\mathcal{D}(A)$ и $\mathcal{D}(A^{-1})$ плотны в $\mathcal{H}$; тогда $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$*

Доказательство. Если $x \in \mathcal{D}(A)$, $y \in \mathcal{D}((A^{-1})^*)$, то

$$(x, y) = (A^{-1}Ax, y) = (Ax, (A^{-1})^* y),$$

т. е.

$$(A^{-1})^* y) \in \mathcal{D}(A^*) \quad \text{и} \quad A^*(A^{-1})^* y = y. \tag{4.2}$$

С другой стороны, если $x \in \mathcal{D}(A^{-1})$, $y \in \mathcal{D}(A^*)$, то

$$(x, y) = (AA^{-1}x, y) = (A^{-1}x, A^* y),$$

что означает

$$A^* y \in \mathcal{D}((A^{-1})^*) \quad \text{и} \quad (A^{-1})^* A^* y = y. \tag{4.3}$$

Из равенств (4.2) и (4.3) следует, что $(A^{-1})^*$ является обратным к A^*. Этим равенсвто $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ доказано.

Опишем сопряженный оператор с помощью понятия графика оператора. Для этого определим в $\mathfrak{H} \doteq \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ скалярное произведение $\big(\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle\big)_{\mathfrak{H}} \doteq (x_1, x_2) + (y_1, y_2)$ (через $\langle x, y\rangle$ обозначен элемент $\mathfrak{H}$); это скалярное произведение порождает норму

$$\|\langle x, y\rangle\|_{\mathfrak{H}} = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}.$$

Определим также оператор $U:\ \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ равенством: $U\langle x, y\rangle = \langle iy, -ix\rangle$. Так как

$$\big(U\langle x, y\rangle, U\langle x, y\rangle\big)_{\mathfrak{H}} = (\langle iy, -ix\rangle, \langle iy, -ix\rangle)_{\mathfrak{H}} =$$
$$= (iy, iy) + (-ix, -ix) = (y, y) + (x, x) = \|\langle x, y\rangle)\|^2,$$

то в силу свойства (2.7) U — унитарный оператор.

Теорема 4.2. *Пусть $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — плотно определенный линейный оператор. Тогда A^* — замкнутый линейный оператор.*

Доказательство. Подействуем на все элементы графика $\mathfrak{G}_A \subset \mathfrak{H}$ оператором U и обозначим

$$\mathfrak{B}_A \doteq U(\mathfrak{G}_A) = \{\langle iAx, -ix\rangle,\ x \in \mathcal{D}(A)\}, \quad \mathfrak{C} \doteq \mathfrak{B}_A^{\perp}.$$

Множество $\mathfrak{C}$ состоит из пар $\langle y, z\rangle$, удовлетворяющих условию

$$(\langle iAx, -ix\rangle, \langle y, z\rangle)_{\mathfrak{H}} = 0 \quad (x \in \mathcal{D}(A)),$$

из которого следует, что $(Ax, y) - (x, z) = 0$. Значит,

$$y \in \mathcal{D}(A^*),\ z = A^*y,\ \langle y, z\rangle \in \mathfrak{G}_{A^*}.$$

Таким образом, $\mathfrak{G}_{A^*} = \mathfrak{B}_A^{\perp}$. Так как ортогональное дополнение любого множества есть (замкнутое) подпространство, то отсюда получаем, что A^* — замкнутый линейный оператор.

Теорема 4.3. *Пусть $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — плотно определенный линейный оператор. Тогда, если A допускает замыкание $cl\, A$, то $A^{**} = cl\, A$; если сам оператор A замкнут, то $A^{**} = A$.*

Доказательство. Из доказательства предыдущей теоремы следует, что $\mathfrak{H} = cl\, \mathfrak{B}_A \oplus \mathfrak{G}_{A^*}$. Подействуем на обе части этого равенства оператором U. В итоге

$$U(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H},\ U(\mathfrak{B}_A) = \{\langle i(-ix), -i(iAx)\rangle\} = \{\langle x, Ax\rangle\} = \mathfrak{G}_A,$$

следовательно, $U(cl\, \mathfrak{B}_A) = cl\, \mathfrak{G}_A = \mathfrak{G}_{\tilde{A}}$, $U(\mathfrak{G}_{A^*}) = \mathfrak{B}_{A^*}$, т. е. $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{cl\, A} \oplus \mathfrak{B}_{A^*}$. Отсюда видим, что $\mathfrak{G}_{cl\, A} = (\mathfrak{B}_{A^*})^{\perp}$, а из доказательства предыдущей теоремы следует, что $(\mathfrak{B}_{A^*})^{\perp} = \mathfrak{G}_{A^{**}}$. Значит, $\mathfrak{G}_{A^{**}} = \mathfrak{G}_{cl\, A}$, т. е. $A^{**} = cl\, A$. В частности, если оператор A замкнут, то $A = cl\, A$ и $A^{**} = A$.

Плотно определенный оператор $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ называется *симметрическим*, если он обладает свойством $(Ax, y) = (x, Ay)$ для любых $x, y \in \mathcal{D}(A)$.

Непосредственно из определения следует, что плотно определенный оператор будет симметрическим в том и только том случае, если

$A \subset A^*$. Так как сопряженный оператор замкнут, то отсюда следует, что симметрический оператор допускает замыкание.

Плотно определенный оператор называется *самосопряженным*, если $A^* = A$. Отсюда сразу видим, что самосопряженный оператор замкнут.

4.3. Спектральное разложение самосопряженного оператора в общем случае. На (неограниченные) самосопряженные операторы распространяется утверждение теоремы 3.1. А именно, справедлива теорема.

Теорема 4.4. *Каждый самосопряженный оператор $A: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ обладает единственной спектральной функцией $P(\cdot)$, так что имеет место представление*

$$A = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\, dP(t). \tag{4.4}$$

Элемент $x \in \mathcal{D}(A)$ тогда и только тогда, когда существует интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2\, d\|P(t)x\|^2 \tag{4.5}$$

При этом условии

$$Ax = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\, dP(t)x. \tag{4.6}$$

Всякий оператор, обладающий свойствами (4.4) – (4.6) *является самосопряженным.*

Нижеследующая теорема доказывается точно так же, как и для ограниченного оператора.

Теорема 4.5. *Спектр самосопряженного оператора вещественен. Собственные векторы самосопряженного оператора, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.*

Спектральное представление резольвентного оператора $R_\lambda(A)$ самосопряженного оператора A имеет такой же вид, как и для случая ограниченного оператора, а именно, $R_\lambda(A) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dP(t)}{t-\lambda}$.

Следующая теорема дает описание спектра самосопряженного оператора в терминах спектральной функции.

Теорема 4.6. *Пусть $P(\cdot)$ — спектральная функция самосопряженного оператора A.*

1. Вещественное число λ_0 тогда и только тогда является регулярной точкой оператора A, когда спектральная функция $P(\cdot)$ постоянна в некоторой окрестности точки λ_0.

2. Вещественное число λ_0 тогда и только тогда является собственным значением оператора A, когда $P(\lambda_0)-P(\lambda_0-)\neq 0$. В этом случае $P(\lambda_0)-P(\lambda_0-)$ — оператор проектирования на собственное подпространство оператора A, соответствующее собственному значению λ_0.

Доказательство. Из теоремы 4.4 следует равенство

$$\|(A-\lambda_0\mathbf{1})x\|^2=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(t-\lambda_0)^2\,d(P(t)x,x)\quad\text{для}\quad x\in\mathcal{D}(A). \tag{4.7}$$

1. Пусть спектральная функция $P(\cdot)$ постоянна в ε-окрестности точки λ_0. Тогда равенство (4.7) принимает вид

$$\|(A-\lambda_0\mathbf{1})x\|^2=\int\limits_{-\infty}^{\lambda_0-\varepsilon}(t-\lambda_0)^2\,d(P(t)x,x)+\int\limits_{\lambda_0+\varepsilon}^{+\infty}(t-\lambda_0)^2\,d(P(t)x,x)>$$
$$>\varepsilon^2\left(\int\limits_{-\infty}^{\lambda_0-\varepsilon}d(P(t)x,x)+\int\limits_{\lambda_0+\varepsilon}^{+\infty}d(P(t)x,x)\right)=\varepsilon^2\|x\|^2.$$

Из неравенства $\|(A-\lambda_0\mathbf{1})x\|^2>\varepsilon^2\|x\|^2$ следует, что резольвентный оператор $R_\lambda(A)=(A-\lambda_0\mathbf{1})^{-1}$ определен на всем $\mathcal{H}$ и непрерывен, то есть λ_0 — регулярная точка оператора A.

Пусть λ_0 — регулярная точка оператора A. Согласно теореме 1.10 из [14, с. 24] найдется число $m>0$ такое, что

$$\|(A-\lambda_0\mathbf{1})x\|\geqslant m\|x\|\quad\text{для всех}\quad x\in\mathcal{D}(A). \tag{4.8}$$

Допустим, что спектральная функция $P(\cdot)$ не является постоянной в m-окрестности точки λ_0. Это значит, что существует положительное

$\eta < m$ такое, что $P \doteq P(\lambda_0+\eta) - P(\lambda_0-\eta) \neq 0$. Так как P — ортопроектор, то найдется $x \in \mathcal{D}(A)$, $x \neq 0$, $Px = x$. Подставим такой x в правую часть (4.7) и учтем, что $P(t)P = 0$ при $t < \lambda_0 - \eta$, $\quad P(t)P = P$ при $t > \lambda_0 + \eta$. Тогда

$$\|(A-\lambda_0\mathbf{1})x\|^2 = \int\limits_{\lambda_0-\eta}^{\lambda_0+\eta} (t-\lambda_0)^2\, d(P(t)x,x) \leqslant \eta^2 \int\limits_{\lambda_0-\eta}^{\lambda_0+\eta} d(P(t)x,x) =$$
$$= \eta^2\|Px\|^2 = \eta^2\|x\|^2 < m^2\|x\|^2.$$

Полученное неравенство противоречит (4.8). Следовательно, $P(\cdot)$ постоянна в m-окрестности точки λ_0.

2. Пусть λ_0 — собственное значение оператора A, а x_0 — соответствующий ему собственный вектор. В силу (4.7)

$$0 = \|(A-\lambda_0\mathbf{1})x_0\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (t-\lambda_0)^2\, d(P(t)x_0,x_0).$$

В силу известного свойства интеграла Римана–Стилтьеса это равенство возможно лишь в том случае, когда скалярная функция $\big(P(t)x_0,x_0\big)$ постоянна при $t < \lambda_0$ и $t > \lambda_0$, т. е. когда

$$\big(P(t)x_0,x_0\big) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < \lambda_0, \\ \|x_0\|^2 & \text{при} \quad t \geqslant \lambda_0 \end{cases}$$

(так как $P(-\infty) = 0$, $P(+\infty) = \mathbf{1}$). Это равенство означает, что

$$\|\big(P(\lambda_0) - P(\lambda_0-)\big)x_0\|^2 = \big(P(\lambda_0) - P(\lambda_0-)x_0,x_0\big) = \|x_0\|^2 \neq 0,$$

поэтому $P(\lambda_0) - P(\lambda_0-) \neq 0$. Из этого же равенства следует, что $x_0 = (P(\lambda_0) - P(\lambda_0-))x_0$, т. е. x_0 принадлежит подпространству, на которое проектирует ортопроектор $P(\lambda_0) - P(\lambda_0-)$.

Пусть $P(\lambda_0) - P(\lambda_0-) \neq 0$ и $x = \big(P(\lambda_0) - P(\lambda_0-)\big)x \neq 0$. Тогда

$$P(t)x = P(t)\big(P(\lambda_0)-P(\lambda_0-)\big)x = \big(P(\lambda_0)-P(\lambda_0-)\big)x = x \quad \text{при} \quad t \geqslant \lambda_0$$

и

$$P(t)x = P(t)\big(P(\lambda_0) - P(\lambda_0-)\big)x = 0 \quad \text{при} \quad t < \lambda_0.$$

Поэтому

$$\|(A-\lambda_0\mathbf{1})x\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (t-\lambda_0)^2\, d\big(P(t)x, x\big) = 0,$$

т. е. x — собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_0.

5. Теория расширений симметрических операторов

5.1. Предварительные замечания и примеры. Поставим задачу описать все симметрические расширения симметрического оператора, в частности, выясним условия, при которых данный симметрический оператор имеет самосопряженные расширения.

Пусть B — симметрическое расширение симметрического оператора A. Тогда

$$A \subset B \subset B^* \subset A^*. \tag{5.1}$$

Это означает, что все симметрические расширения оператора A являются сужениями сопряженного оператора A^*. Симметрический оператор A называется *максимальным*, если он не имеет симметрических расширений, отличных от A.

Если $A^* = A$, то согласно (5.1) $B = A$. Следовательно, всякий самосопряженный оператор есть максимальный симметрический оператор.

Прежде чем перейти к решению поставленной задачи, рассмотрим ряд примеров.

Пример 6. Пусть $\mathcal{H} = \mathbb{L}_2[0,1] \doteq \mathbb{L}_2,\ A, B, C : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{L}_2$,

$$\mathcal{D}(A) \doteq \{x :\ x(\cdot) \quad \text{абсолютно непрерывна}, \quad x' \in \mathbb{L}_2\}, \quad Ax \doteq i\,x',$$

$$\mathcal{D}(B) \doteq \{x \in \mathcal{D}(A);\ x(0) = x(1)\}, \quad Bx \doteq i\,x',$$

$$\mathcal{D}(C) \doteq \{x \in \mathcal{D}(A);\ x(0) = x(1) = 0\}, \quad Cx \doteq i\,x'.$$

Очевидно, что $\mathcal{D}(C), \mathcal{D}(B), \mathcal{D}(A)$ плотны в $\mathbb{L}_2$ и

$$C \subset B \subset A, \qquad A^* \subset B^* \subset C^*. \tag{5.2}$$

Для любого $y \in \mathbb{L}_2$ найдется $x \in \mathcal{D}(A)$ такой, что

$$Ax = ix' = y \quad \Big(x(t) = x(a) - i \int\limits_0^t y(s)\, ds\Big);$$

следовательно, $\mathcal{R}(A) = \mathbb{L}_2$. Далее, пусть $y \in \mathcal{R}(B)$; тогда, взяв в качестве x решение задачи $ix' = y$, $x(0) = x(1)$, получим, что $x(t) = x(0) - i\int\limits_0^t y(s)\, ds$; отсюда $\int\limits_0^1 y(s)\, ds = 0$, т. е. $y \perp \langle 1 \rangle$; это означает, что $\mathcal{R}(B) = \langle 1 \rangle^\perp$. Точно так же установим, что $\mathcal{R}(C) = \langle 1 \rangle^\perp$. Таким образом,

$$\mathcal{R}(A) = \mathbb{L}_2, \quad \mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(C) = \langle 1 \rangle^\perp \tag{5.3}$$

Покажем, что

$$A^* = C, \qquad B^* = B, \qquad C^* = A. \tag{5.4}$$

1. Пусть $x \in \mathcal{D}(A)$, $y \in \mathcal{D}(C)$. Тогда

$$(Ax, y) = \int\limits_0^1 i\, x'(t)\overline{y(t)}\, dt = \int\limits_0^1 i\, \overline{y(t)}\, dx(t) =$$

$$= i\,(\overline{y(1)}x(1) - \overline{y(0)}x(0)) - \int\limits_0^1 i\, x(t)\overline{y'(t)}\, dt = \int\limits_0^1 x(t)\overline{iy'(t)}\, dt = (x, Cy)$$

(так как $y(0) = y(1) = 0$). Это значит, что $C \subset A^*$.

2. Пусть $x, y \in \mathcal{D}(B)$. Точно так же, как и выше

$$(Bx, y) = \int\limits_0^1 i\, x'(t)\overline{y(t)}\, dt = \int\limits_0^1 i\, \overline{y(t)}\, dx(t) =$$

$$= i\,(\overline{y(1)}x(1) - \overline{y(0)}x(0)) - \int\limits_0^1 i\, x(t)\overline{y'(t)}\, dt = \int\limits_0^1 x(t)\overline{iy'(t)}\, dt = (x, By)$$

(так как $x(0) = x(1),\ y(0) = y(1)$). Следовательно, $B \subset B^*$.

3. Пусть $x \in \mathcal{D}(A),\ y \in \mathcal{D}(C)$. Тогда, как и выше в п.1, убеждаемся, что $(Cx, y) = (x, Ay)$, то есть $A \subset C^*$.

Докажем противоположные включения. Пусть F означает один из операторов $A,\ B$ или C,

$$x \in \mathcal{D}(F), \quad y \in \mathcal{D}(F^*), \qquad g = F^* y, \qquad G(t) = \int\limits_0^t g(s)\, ds.$$

Тогда

$$\int\limits_0^1 i\, x'(t)\overline{y(t)}\, dt = (Fx, y) = (x, F^* y) = (x, g) = \int\limits_0^1 x(t)\overline{g(t)}\, dt =$$

$$= \int\limits_0^1 x(t)\, d\overline{G(t)} = x(1)\overline{G(1)} - \underbrace{x(0)\overline{G(0)}}_{=0} + \int\limits_0^1 i\, x'(t)\overline{i\, G(t)} dt; \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int\limits_0^1 i\, x'(t)(\overline{y(t) - i\, G(t)})\, dt - x(1)\overline{G(1)} = 0.$$

Так как x пробегает плотное множество, то последнее равенство эквивалентно системе равенств

$$\begin{cases} \int\limits_0^1 i\, x'(t)(\overline{y(t) - i\, G(t)})\, dt = (Fx, y - i\, G) = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x(1)\overline{G(1)} = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем, что

$$y - i\, G \in \mathcal{R}(F)^{\perp} \tag{5.5}$$

Если $F = A$, то $G(1) = 0$ (так как возможно $x(1) \neq 0$) и в силу (5.3) $y - G = 0$; это значит, что $y(t) = \int\limits_0^t g(s)\, ds$, то есть функция $y(\cdot)$ абсолютно непрерывна и $y(0) = G(0) = 0,\ y(1) = G(1) = 0$; следовательно, $y \in \mathcal{D}(C), \quad A^* \subset C$, и окончательно, $A^* = C$.

Если $F = B$, то также $G(1) = 0$ и в силу (5.3) $y - G = const$; отсюда снова получаем абсолютную непрерывность $y(\cdot)$ и равенство

$y(0) = y(1)$, то есть $y \in \mathcal{D}(B)$, $\quad B^* \subset B$, что вместе с ранее доказанным означает $B^* = B$.

Наконец, если $F = C$, то второе равенство системы выполняется при любых G, так как $x(1) = 0$; а из (5.3) и (5.5) снова получаем, что $y - G = const$, что означает абсолютную непрерывность $y(\cdot)$, $\quad y \in \mathcal{D}(A)$, $C^* \subset A$, $C^* = A$.

Таким образом, равенства (5.4) доказаны.

Из соотношений (5.4) и(5.2) получаем, что $C \subset B = B^* \subset C^*$, т. е. C замкнутый ($C = A^*$) *симметрический* оператор, B — его *самосопряженное расширение*; Оператор A также является замкнутым расширением оператора C, но уже не симметрическим. Отметим, кроме того, что $A^{**} = A$, $C^{**} = C$.

Найдем спектры операторов A, B, C. Так как уравнение $Ax = \lambda x$ $\big(i\,x' = \lambda x\big)$ имеет ненулевое решение $\big(x(t) = e^{-i\,\lambda t}\big)$ при любом $\lambda \in \mathbb{C}$, то спектр $\sigma(A)$ оператора A состоит из собственных значений (чисто точечный), которые заполняют всю комплексную плоскость, $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \mathbb{C}$.

Уравнение $Bx = \lambda x$ $(i\,x' = \lambda x,\ x(0) = x(1))$ имеет ненулевые решения, если λ — решение уравнения $e^{-i\,\lambda} = 1$ (в общее решение $x(t) = ce^{-i\,\lambda t}$ уравнения $i\,x' = \lambda x$ надо подставить граничные условия $x(0) = x(1)$); таким образом, $\sigma_p(B) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \{2\pi\,n\}$. При $\lambda \notin \sigma_p(B)$ резольвентный оператор $R_B(\lambda)$ имеет представление

$$(R_B(\lambda))(t) = \int\limits_0^1 G(t,s)y(s)\,ds, \tag{5.6}$$

где

$$G(t,s) = \frac{i}{e^{-i\,\lambda} - 1} \cdot \begin{cases} e^{-i\,\lambda(t-s)} & \text{при} \quad s \leqslant t, \\ e^{-i\,\lambda(1+t-s)} & \text{при} \quad s > t \end{cases} \qquad -$$

функция Грина задачи

$$x' + i\,\lambda x = -i\,y(t), \quad x(0) = x(1), \quad t \in [0,1], y \in \mathcal{H}, \tag{5.7}$$

которая соответствует уравнению $Bx - \lambda x = y$. Как видно из представления (5.6) резольвентный оператор непрерывен (даже вполне непре-

рывен), поэтому значения $\lambda \notin \sigma_p(B)$ регулярны. Это означает, что $\sigma(B) = \sigma_p(B) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \{2\pi\, n\}$.

Уравнение $Cx = \lambda x$, эквивалентное задаче $i\,x' = \lambda x,\ x(0) = x(1) = 0$ имеет только нулевое решение, следовательно, $\sigma_p(C) = \varnothing$; уравнение же $Cx - \lambda x = y$ эквивалентно задаче $x' + i\,\lambda x = -i\,y(t), \quad x(0) = x(1) = 0$, которая имеет решение

$$x(t) = -i \int\limits_0^t e^{-i\,\lambda(t-s)} y(s)\, ds$$

только для $y \in M \doteq \langle e^{i\,\bar{\lambda}(1-t)} \rangle^{\perp}$; как известно (см. [13, с. 85]), M — подпространство в $\mathbb{L}_2$, значит, M не является плотным в $\mathbb{L}_2$. Следовательно, резольвентный оператор определен только на множестве M. По этой причине каждое комплексное число является точкой остаточного спектра, $\sigma(C) = \sigma_r(C) = \mathbb{C}$.

Пример 7. Наряду с операторами A, B, C из предыдущего примера, рассмотрим также операторы

$$\mathcal{D}(D) \doteq \{x \in \mathcal{D}(A);\ x(0) = 0\}, \quad Dx \doteq i\,x',$$

$$\mathcal{D}(E) \doteq \{x \in \mathcal{D}(A);\ x(1) = 0\}, \quad Ex \doteq i\,x'.$$

Очевидно, $C \subset D \subset A, \quad C \subset E \subset A, \quad \mathcal{R}(D) = \mathcal{R}(E) = \mathbb{L}_2$; как и выше показывается, что $D^* = E,\ E^* = D$, то есть $D^{**} = D,\ E^{**} = E$; D и E также представляют собой (несимметричные) замкнутые расширения оператора C.

Резольвентный оператор $(R_D(\lambda)y)(t) = -i \int\limits_0^1 e^{-i\,\lambda(t-s)} y(s)\, ds$ непрерывен при всех $\lambda \in \mathbb{C}$, поэтому $\sigma(D) = \varnothing$. Точно так же $\sigma(E) = \varnothing$.

5.2. Дефектные подпространства. Преобразование Кэли. Пусть A — плотно определенный в $\mathcal{H}$ симметрический оператор, $\lambda \in \mathbb{C}$, $Im\,\lambda \neq\ 0$. Обозначим

$$\mathfrak{R}_\lambda \doteq \mathcal{R}(A - \lambda\,\mathbf{1}), \quad \mathfrak{R}_{\overline{\lambda}} \doteq \mathcal{R}(A - \overline{\lambda}\,\mathbf{1}), \quad \mathfrak{N}_\lambda \doteq \mathfrak{R}_\lambda^{\perp}, \quad \mathfrak{N}_{\overline{\lambda}} \doteq \mathfrak{R}_{\overline{\lambda}}^{\perp}.$$

Очевидно, $\mathfrak{R}_\lambda$ и $\mathfrak{R}_{\overline{\lambda}}$ – линейные многообразия в $\mathcal{H}$ (они могут быть незамкнутыми), $\mathfrak{N}_\lambda$ и $\mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}$ — подпространства $\mathcal{H}$ (как ортогональные

дополнения, см. [13, с. 85]). Они называются *дефектными подпространствами* оператора A.

Теорема 5.1. *Дефектные подпространства $\mathfrak{N}_\lambda$ и $\mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}$ являются собственными подпространствами оператора A^*, отвечающими собственным значениям $\overline{\lambda}$ и λ соответственно.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathfrak{N}_\lambda,\ y \in \mathcal{D}(A)$; тогда

$$(Ay - \lambda y, x) = 0, \quad (Ay, x) = \lambda(y, x) = (y, \overline{\lambda} x);$$

это значит, что $x \in \mathcal{D}(A^*)$ и $A^* x = \overline{\lambda} x$.

Обратно, если $A^* x = \overline{\lambda} x$, то для $y \in \mathcal{D}(A)$

$$(Ay, x) = (y, \overline{\lambda} x), \quad (Ay - \lambda y, x) = 0,$$

т. е. $x \in \mathfrak{N}_\lambda$. Точно так же рассуждаем для $\mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}$.

Преобразование Кэли. Пусть A — плотно определенный в $\mathcal{H}$ симметрический оператор, $\lambda \in \mathbb{C}$, $Im\,\lambda \neq 0$. Оператор

$$V = (A - \lambda\,\mathbf{1})(A - \overline{\lambda}\mathbf{1})^{-1}$$

называется *преобразованием Кэли* оператора A. Это определение корректно, так как невещественное число $\overline{\lambda}$ не может быть собственным значением симметрического оператора, поэтому обратный оператор в правой части существует. Заметим также, что сомножители V перестановочны: $(A - \lambda\,\mathbf{1})(A - \overline{\lambda}\mathbf{1})^{-1} = (A - \overline{\lambda}\mathbf{1})^{-1}(A - \lambda\,\mathbf{1})$, так как $(A - \lambda\,\mathbf{1})(A - \overline{\lambda}\mathbf{1}) = (A - \overline{\lambda}\mathbf{1})(A - \lambda\,\mathbf{1})$.

Теорема 5.2. 1. *Оператор V — изометрический, $\mathcal{D}(V) = \mathfrak{R}_{\overline{\lambda}}$, $\mathcal{R}(V) = \mathfrak{R}_\lambda$.*

2. *Множество $\mathcal{R}(\mathbf{1} - V) = \{z :\ z = y - Vy,\ y \in \mathcal{D}(V)\}$ плотно в $\mathcal{H}$.*

3. *Изометрический оператор V, обладающий свойством 2 является преобразованием Кэли некоторого плотно определенного симметрического оператора.*

Доказательство. 1. Пусть $y \in \mathcal{D}(V)$. Непосредственно из определения оператора V видим, что $y \in \mathcal{D}\big((A - \overline{\lambda}\mathbf{1})^{-1}\big) = \mathcal{R}(A - \overline{\lambda}\mathbf{1}) = \mathfrak{R}_{\overline{\lambda}}$; значит, $\mathcal{D}(V) \subset \mathfrak{R}_{\overline{\lambda}}$. Если $y \in \mathfrak{R}_{\overline{\lambda}}$, то оператор $(A - \overline{\lambda}\mathbf{1})^{-1}$ определен на

элементе y, причем $z \doteq (A - \overline{\lambda}\mathbf{1})^{-1}y \in \mathcal{D}(A)$; значит, определен и элемент $(A - \lambda\mathbf{1})z$, т. е. $y \in \mathcal{D}(V)$, $\mathfrak{R}_{\overline{\lambda}} \subset \mathcal{D}(V)$. Таким образом, доказано, что $\mathcal{D}(V) = \mathfrak{R}_{\overline{\lambda}}$.

Пусть $x \in \mathcal{D}(A)$, $\quad y \doteq (A - \overline{\lambda}\mathbf{1})x$; тогда $x = (A - \overline{\lambda}\mathbf{1})^{-1}y$, $\quad (A - \lambda\mathbf{1})x = Vy$; значит, $y \in \mathcal{D}(V)$, $\quad \mathcal{R}(V) = \mathcal{R}(A - \lambda\mathbf{1}) = \mathfrak{R}_{\lambda}$.

Покажем, что V — изометрический оператор. Пусть $x \in \mathcal{D}(A)$ и $y = (A - \overline{\lambda}\mathbf{1})x$. Тогда

$$(Vy, Vy) = ((A - \overline{\lambda}\mathbf{1})x, (A - \overline{\lambda}\mathbf{1})x) = \\ = (Ax, Ax) - \overline{\lambda}(Ax, x) - \lambda(x, Ax) + |\lambda|^2(x, x),$$

$$(y, y) = ((A - \overline{\lambda}\mathbf{1})x, (A - \overline{\lambda}\mathbf{1})x) = (Ax, Ax) - \lambda(Ax, x) - \overline{\lambda}(x, Ax) + |\lambda|^2(x, x);$$

так как $(Ax, x) = (x, Ax)$, то $(Vy, Vy) = (y, y)$. Согласно свойству 4° $\quad V$ — изометрический оператор.

2. Из полученных выше выражений для y и Vy следует, что $y - Vy = \big(\lambda - \overline{\lambda}\big)x$; это означает, что $\mathcal{R}(\mathbf{1} - V) = \mathcal{D}(A)$; так как $\mathcal{D}(A)$ плотно в $\mathcal{H}$, то этим утверждение 2 теоремы доказано.

3. Пусть изометрический оператор V удовлетворяет условию 2 и y — произвольное решение уравнения $y = Vy$. Тогда для любого $z \in \mathcal{D}(V)$ $\quad (z - Vz, y) = (z, y) - (Vz, y) = (z, y) - (Vz, Vy) = 0$ (так как V — изометрический оператор). Так как y ортогонален плотному в $\mathcal{H}$ множеству $\mathcal{R}(\mathbf{1} - V)$, то $y = 0$. Значит 1 не является собственным значением оператора V, т. е. существует оператор $(\mathbf{1} - V)^{-1}$.

Определим оператор A равенством

$$A \doteq (\lambda\mathbf{1} - \overline{\lambda}V)(\mathbf{1} - V)^{-1}. \tag{5.8}$$

Надо доказать два утверждения: а) оператор A симметрический с плотной областью определения; и б) преобразование Кэли оператора A совпадает с оператором V.

а) Непосредственно из определения (5.8) следует, что $A(\mathbf{1} - V) = \lambda\mathbf{1} - \overline{\lambda}V$, $\quad \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}((\mathbf{1} - V)^{-1}) = \mathcal{R}(\mathbf{1} - V)$; значит, $\mathcal{D}(A)$ плотно в $\mathcal{H}$ и для $y \in \mathcal{D}(V)$ $\quad A(y - Vy) = \lambda y - \overline{\lambda}Vy$; пусть $x, y \in \mathcal{D}(V)$; тогда

$x - Vx, y - Vy \in \mathcal{D}(A)$ и (V изометрический оператор!) и

$$\big(A(x - Vx), y - Vy\big) = (\lambda x - \overline{\lambda} Vx, y - Vy) =$$
$$= \lambda(x, y) - \overline{\lambda}(Vx, y) - \lambda(x, Vy) + \overline{\lambda}(Vx, Vy) =$$
$$= (\lambda + \overline{\lambda})(x, y) - \overline{\lambda}(Vx, y) - \lambda(x, Vy), \quad (x - Vx, A(y - Vy) =$$
$$= (x - Vx, \lambda y - \overline{\lambda} Vy) = (\lambda + \overline{\lambda})(x, y) - \overline{\lambda}(Vx, y) - \lambda(x, Vy).$$

Равенство $\big(A(x - Vx), y - Vy\big) = \big(x - Vx, A(y - Vy\big)$ означает, что A — симметрический оператор.

б) Из определения (5.8) следует: $A(\mathbf{1} - V) = \lambda\mathbf{1} - \overline{\lambda} V$, откуда $A - \lambda\mathbf{1} = (A - \overline{\lambda}\mathbf{1})V, \quad V = (A - \lambda\,\mathbf{1})(A - \overline{\lambda}\mathbf{1})^{-1}$, т. е. V — преобразование Кэли оператора A.

Следствие 5.1. *Пусть A_1, A_2 — симметрические операторы с плотной областью определения, а V_1, V_2 — их преобразования Кэли. Оператор A_2 тогда и только тогда является расширением оператора A_1, когда оператор V_2 является расширением оператора V_1.*

Теорема 5.3. *Для того, чтобы симметрический оператор A был замкнут, необходимо и достаточно, стобы его преобразование Кэли V был замкнутым оператором. Оператор V замкнут тогда и только тогда, когда замкнуты линейные многообразия $\mathfrak{R}_\lambda$ и $\mathfrak{R}_{\overline{\lambda}}$.*

Доказательство. Пусть оператор A замкнут, $x_n \in \mathcal{D}(A)$ и $y_n \doteq (A - \overline{\lambda}\mathbf{1})x_n \to y$. Так как оператор V изометричен, то и последовательность Vy_n сходится, $Vy_n = (A - \lambda\mathbf{1})x_n \to z$. Рассмотрим систему $\begin{cases} y_n = (A - \overline{\lambda}\mathbf{1})x_n \to y, \\ Vy_n = (A - \lambda\mathbf{1})x_n \to z. \end{cases}$ Из этой системы находим

$$x_n = \frac{y_n - Vy_n}{\lambda - \overline{\lambda}} \to \frac{y - z}{\lambda - \overline{\lambda}}, \qquad Ax_n = \frac{\lambda y_n - \overline{\lambda} Vy_n}{\lambda - \overline{\lambda}} \to \frac{\lambda y - \overline{\lambda} z}{\lambda - \overline{\lambda}};$$

так как A замкнут, то $y - z \in \mathcal{D}(A)$,

$$A(y - z) = \lambda y - \overline{\lambda} z; \tag{5.9}$$

из равенства (5.9) выводим

$$y = \frac{A(y - z) - \overline{\lambda}(y - z)}{\lambda - \overline{\lambda}} = \frac{(A - \overline{\lambda}\mathbf{1})(y - z)}{\lambda - \overline{\lambda}} \in \mathfrak{R}_{\overline{\lambda}} \quad \big(= \mathcal{D}(V)\big),$$

$$z = (A - \overline{\lambda}\mathbf{1})^{-1}(A - \lambda\,\mathbf{1})y = (A - \lambda\,\mathbf{1})(A - \overline{\lambda}\mathbf{1})^{-1}y = Vy.$$

Таким образом, доказано, что оператор V и линейное многообразие $\mathfrak{R}_{\overline{\lambda}}$ замкнуты. Но тогда замкнуто также и многообразие $\mathfrak{R}_{\lambda}$, как изометрический образ подпространства $\mathfrak{R}_{\overline{\lambda}}$.

Проведенные рассуждения проходят и в обратную сторону, так что из замкнутости V или $\mathfrak{R}_{\overline{\lambda}}$ следует замкнутость A.

5.3. Область определения сопряженного оператора. Напомним некоторые определения из линейной алгебры, которые понадобятся нам ниже.

Подпространства $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_n \subset \mathcal{H}$ называются *линейно независимыми,* если имеет место импликация

$$x_k \in \mathcal{L}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \Longrightarrow x_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Если подпространства $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_n$ линейно независимы, то множество всех сумм $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k,\ x_k \in \mathcal{L}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n$ называется *прямой суммой* подпространств $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_n$ и обозначается $\dot{\sum\limits_{k=1}^{n}} \mathcal{L}_k$. Очевидно, прямая сумма подпространств есть также подпространство.

Если подпространства $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_n$ линейно независимы, то любой $x \in \dot{\sum\limits_{k=1}^{n}} \mathcal{L}_k$ единственным способом представляется в виде

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k,\ x_k \in \mathcal{L}_k,\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Теорема 5.4. *Если A замкнутый симметрический оператор, то подпространства $\mathcal{D}(A)$, $\mathfrak{N}_{\lambda}$, $\mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}$ линейно независимы и*

$$\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A) \dotplus \mathfrak{N}_{\overline{\lambda}} \dotplus \mathfrak{N}_{\lambda}. \tag{5.10}$$

Доказательство. Пусть

$$x + y + z = 0, \qquad x \in \mathcal{D}(A), \quad y \in \mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}, \quad z \in \mathfrak{N}_{\lambda}. \tag{5.11}$$

Подействуем на обе части равенства оператором $A^* - \overline{\lambda}\mathbf{1}$. По теореме 5.1 $(A^* - \overline{\lambda}\mathbf{1})z = 0, \quad (A^* - \overline{\lambda}\mathbf{1})y = (\lambda - \overline{\lambda})y$, а $(A^* - \overline{\lambda}\mathbf{1})x = (A - \overline{\lambda}\mathbf{1})x$

так как оператор A – сужение оператора A^*. В итоге имеем

$$(A - \overline{\lambda}\mathbf{1})x + (\lambda - \overline{\lambda})y = 0. \tag{5.12}$$

Первое слагаемое принадлежит подпространству $\mathfrak{R}_{\overline{\lambda}}$, второе — подпространству $\mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}$; эти подпространства ортогональны, поэтому равенство (5.12) возможно лишь когда оба слагаемых равны нулю. Отсюда $y = 0$, а так как невещественное число $\overline{\lambda}$ не может быть собственным значением симметрического оператора, то и $x = 0$; из (5.11) следует, что и $z = 0$. Этим доказана линейная независимость подпространств $\mathcal{D}(A)$, $\mathfrak{N}_\lambda$, $\mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}$.

Осталось доказать представление (5.10). Это означает, что каждый элемент $u \in \mathcal{D}(A^*)$ можно представить в форме

$$u = x + y + z, \quad \text{где} \quad x \in \mathcal{D}(A), \quad y \in \mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}, \quad z \in \mathfrak{N}_\lambda. \tag{5.13}$$

Пусть $u \in \mathcal{D}(A^*)$. По самому определению $\mathcal{H} = \mathfrak{R}_{\overline{\lambda}} \oplus \mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}$, т. е. каждый $v \in \mathcal{H}$ единственным образом представляется в форме

$$v = v' + v'', \quad \text{где} \quad v' \in \mathfrak{R}_{\overline{\lambda}}, \quad v'' \in \mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}. \tag{5.14}$$

Применим представление (5.14) к элементу $v = (A^* - \overline{\lambda}\mathbf{1})u$. Так как $v' \in \mathfrak{R}_{\overline{\lambda}}$, то $v' = (A - \overline{\lambda}\mathbf{1})x$, где $x \in \mathcal{D}(A)$. Положим также $v'' = (\lambda - \overline{\lambda})y$, $y \in \mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}$. Тогда из представления (5.14) следует

$$(A^* - \overline{\lambda}\mathbf{1})u = (A - \overline{\lambda}\mathbf{1})x + (\lambda - \overline{\lambda})y = (A^* - \overline{\lambda}\mathbf{1})(x + y), \tag{5.15}$$

так как Ax можно записать как A^*x, а по теореме 5.1 $A^*y = \lambda y$. Из равенства (5.15) следует $(A^* - \overline{\lambda}\mathbf{1})(u - x - y) = 0$; положив здесь $z \doteq u - x - y$, получаем, что

$$(A^* - \overline{\lambda}\mathbf{1})z = 0,$$

что по теореме 5.1 означает $z \in \mathfrak{N}_\lambda$. Таким образом, представление (5.13), а вместе с ним представление (5.10) доказано.

Следствие 5.2. *Замкнутый симметрический оператор является самосопряженным тогда и только тогда, когда оба его дефектных подпространства состоят только из нуля:* $\mathfrak{N}_{\overline{\lambda}} = \mathfrak{N}_\lambda = \{0\}$.

Доказательство. По доказанной теореме в этом и только этом случае $\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A)$.

5.4. Формула Неймана. Индекс дефекта. Положим в представлении (5.10) $\lambda = -i$:

$$\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A) \dotplus \mathfrak{N}_i \dotplus \mathfrak{N}_{-i};$$

это представление означает, что все $x \in \mathcal{D}(A^*)$ единственным способом разлагаются в сумму

$$x = x^0 + x^- + x^+, \quad \text{где} \quad x^0 \in \mathcal{D}(A), \quad x^- \in \mathfrak{N}_i, \quad x^+ \in \mathfrak{N}_{-i}.$$

Теорема 5.5. *Для любого $x \in \mathcal{D}(A^*)$ имеет место следующая формула фон Неймана:*

$$\mathfrak{Im}(A^*x, x) = \|x^+\|^2 - \|x^-\|^2.$$

Доказательство. Согласно теореме 5.1

$$(Ax^0, x^- + x^+) = (x^0, A^*(x^- + x^+)) = (x^0, -ix^- + ix^+);$$

с помощью этого равенства получаем

$$\begin{aligned}(A^*x, x) &= (Ax^0 - ix^- + ix^+, x^0 + x^- + x^+) = \\ &= (Ax^0, x^0) + (x^0, -ix^- + ix^+) + (-ix^- + ix^+, x^0) - \\ &- i\|x^-\|^2 + i\|x^+\|^2 - i(x^-, x^+) + i(x^+, x^-) = \\ &= (Ax^0, x^0) + 2\mathfrak{Re}\big((x^0, -ix^- + ix^+) + i(x^+, x^-)\big) + i\big(\|x^+\|^2 - \|x^-\|^2\big).\end{aligned}$$

Первые два слагаемых вещественны (напомним, что $(Ax^0, x^0) = (x^0, Ax^0) = \overline{(Ax^0, x^0)}$), третье чисто мнимое. Этим формула фон Неймана доказана.

Обозначим

$$\mathfrak{E}^0 \doteq \{x \in \mathcal{D}(A^*) : \ \mathfrak{Im}(A^*x, x) = 0\},$$

$$\mathfrak{E}^+ \doteq \{x \in \mathcal{D}(A^*) : \ \mathfrak{Im}(A^*x, x) > 0\},$$

$$\mathfrak{E}^- \doteq \{x \in \mathcal{D}(A^*) : \ \mathfrak{Im}(A^*x, x) < 0\}.$$

Следствие 5.3. *Пусть $x \in \mathcal{D}(A^*)$. Тогда*

$$x \in \mathfrak{E}^+ \quad \Big(x \in \mathfrak{E}^-, \quad x \in \mathfrak{E}^0\Big),$$

если

$$\|x^+\|^2 - \|x^-\|^2 > 0 \quad \Big(\|x^+\|^2 - \|x^-\|^2 < 0, \quad \|x^+\|^2 - \|x^-\|^2 = 0\Big).$$

Теорема 5.6. *Имеют место включения*

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathfrak{E}^0, \qquad \mathfrak{N}_i \subset \mathfrak{E}^- \cup \{0\}, \qquad \mathfrak{N}_{-i} \subset \mathfrak{E}^+ \cup \{0\}.$$

Доказательство. Если $x \in \mathcal{D}(A)$, то $x^- = x^+ = 0$, т. е. $\|x^+\|^2 - \|x^-\|^2 = 0$; если $x \in \mathfrak{N}_i$, $x \neq 0$, то $x^0 = x^+ = 0$, т. е. $\|x^+\|^2 - \|x^-\|^2 = -\|x^-\|^2 < 0$; если $x \in \mathfrak{N}_{-i}$, $x \neq 0$, то $x^0 = x^- = 0$, т. е. $\|x^+\|^2 - \|x^-\|^2 = \|x^+\|^2 > 0$.

Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — линейные многообразия в $\mathcal{H}$. Число n называется размерностью $\mathcal{Y}$ по модулю $\mathcal{X}$ (пишем $dim_{\mathcal{X}}\,\mathcal{Y} = n$), если в $\mathcal{Y}$ имеется ровно n векторов $x_1, x_2, ..., x_n$ таких. что

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \in \mathcal{X} \Longrightarrow \alpha_k = 0, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

Очевидно, если $\mathcal{Y} = \mathcal{X} \dotplus \mathcal{Z}$ ($\mathcal{Z}$ — линейное многообразие в $\mathcal{H}$), то $dim_{\mathcal{X}}\,\mathcal{Y} = dim\,\mathcal{Y} - dim\,\mathcal{Z}$. Таким образом, из равенства (5.10) следует, что

$$dim_{\mathcal{D}(A)}\,\mathcal{D}(^*) = dim\,\mathfrak{N}_{\overline{\lambda}} \dotplus dim\,\mathfrak{N}_{\lambda}. \tag{5.16}$$

Из равенства (5.16) видно, что сумма $dim\,\mathfrak{N}_{\overline{\lambda}} \dotplus dim\,\mathfrak{N}_{\lambda}$ не зависит от λ, так как левая часть (5.16) от λ не зависит.

Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathcal{H}$, $\mathcal{Y}$ — максимальное подпространство в $\mathfrak{S} \cup \{0\}$. Скажем, что $\mathfrak{S}$ *определяет размерность* n *по модулю* $\mathcal{X}$, если $dim_{\mathcal{X}}\,\mathcal{Y} = n$.

Теорема 5.7. *Множество* $\mathfrak{E}^+$ $\big(\mathfrak{E}^-\big)$ *определяет размерность* $dim\,\mathfrak{N}_{-i}$ $\big(dim\,\mathfrak{N}_i\big)$ *по модулю* $\mathcal{D}(A)$.

Доказательство. В силу теоремы 5.6 эта размерность $\geqslant m \doteq dim\,\mathfrak{N}_{-i}$. Если $m = +\infty$, то доказательства не требуется. Пусть $m < +\infty$. Предположим противное тому, что нужно доказать, а именно: в множестве $\mathfrak{E}^+$ есть $m+1$ линейно независимых векторов $x_1, x_2, ..., x_{m+1}$ таких, что любая их ненулевая линейная комбинация содержится в $\mathfrak{E}^+ \backslash \mathcal{D}(A)$. Так как $\mathfrak{E}^+ \subset \mathcal{D}(A^*)$, то

$$x_k = x_k^0 + x_k^- + x_k^+, \;\; x_k^0 \in \mathcal{D}(A), \;\; x_k^- \in \mathfrak{N}_i, \;\; x_k^+ \in \mathfrak{N}_{-i}, \;\; k = 1, 2, ..., m+1;$$

из определения m следует, что $x_1^+, x_2^+, ..., x_{m+1}^+$ линейно зависимы. Значит, существует ненулевая линейная комбинация

$$\sum_{k=1}^{m+1} c_k x_k^+ = 0, \qquad \sum_{k=1}^{m+1} |c_k| > 0.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{m+1} c_k x_k = x^0 + x^-, \qquad x^0 = \sum_{k=1}^{m+1} c_k x_k^0 \in \mathcal{D}(A), \qquad x^- = \sum_{k=1}^{m+1} c_k x_k^- \in \mathfrak{N}_i.$$

Последние равенства невозможны, так как $x^0 + x^-$ принадлежит либо $\mathfrak{E}^0$, либо $\mathfrak{E}^-$, в то время как по предположению $\sum\limits_{k=1}^{m+1} c_k x_k \in \mathfrak{E}^+$.

Этим теореме доказана для множества $\mathfrak{E}^+$; для $\mathfrak{E}^-$ рассуждения аналогичны.

Следствие 5.4. *Пусть $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$; тогда дефектные подпространства $\mathfrak{N}_{-i}$ и $\mathfrak{N}_i$ операторов A и $B = \alpha A + \beta \mathbf{1}$ имеют соответственно одинаковую размерность.*

Доказательство. Утверждение следствия непосредственно вытекает из теоремы, так как $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$ и множества $\mathfrak{E}^+$ и $\mathfrak{E}^-$ для обоих операторов совпадают.

Следствие 5.5. *Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathfrak{Im}\lambda > 0$*

$$dim\, \mathfrak{N}_{\overline{\lambda}} = dim\, \mathfrak{N}_{-i}, \qquad dim\, \mathfrak{N}_{\lambda} = dim\, \mathfrak{N}_i.$$

Доказательство. Пусть $\lambda = \alpha + \beta\, i$, $\beta > 0$, $\mathfrak{N}'_i$, $\mathfrak{N}'_{-i}$ — дефектные подпространства оператора $B = \frac{1}{\beta} A - \frac{\alpha}{\beta} \mathbf{1}$. Тогда с помощью теоремы 5.1 устанавливаем, что

$$x \in \mathfrak{N}'_i \Longleftrightarrow B^* x = -i\, x \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{\beta} A^* - \frac{\alpha}{\beta} \mathbf{1} \right) x =$$
$$= -i\, x \Longleftrightarrow A^* x = \overline{\lambda}\, x \Longleftrightarrow x \in \mathfrak{N}_{\lambda};$$

следовательно, $\mathfrak{N}'_i = \mathfrak{N}_{\lambda}$; точно так же доказываетсмя, что $\mathfrak{N}'_{-i} = \mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}$. Утверждение вытекает теперь из предыдущего следствия.

Пара чисел (m, n), $\quad m \doteq dim\, \mathfrak{N}_i,\ n \doteq dim\, \mathfrak{N}_{-i}$ называется *индексом дефекта* симметрического оператора A, а сами числа m и n — его *дефектными числами.*

В силу следствия 5.5 следствие 5.2 может быть переформулировано так: *замкнутый симметрический оператор является самосопряженным тогда и только тогда. когда его индекс дефекта равен* $(0, 0)$.

5.5. Описание замкнутых симметрических расширений. Каждое замкнутое расширение симметрического оператора является также расширением замыкания данного оператора, поэтому можно считать исходный оператор уже замкнутым.

Пусть A — замкнутый симметрический оператор с плотной областью определения, $\hat{A}$ — его замкнутое симметрическое расширение. Обозначим через V и $\hat{V}$ преобразования Кэли операторов A и $\hat{A}$ соответственно; тогда

$$V \subset \hat{V}, \qquad \mathcal{D}(V) \subset \mathcal{D}(\hat{V}), \qquad \mathcal{R}(V) \subset \mathcal{R}(\hat{V}).$$

Положим

$$\mathfrak{P} \doteq \mathcal{D}(\hat{V}) \ominus \mathcal{D}(V), \qquad \mathfrak{Q} \doteq \mathcal{R}(\hat{V}) \ominus \mathcal{R}(V);$$

напомним, это означает, что $\mathcal{D}(\hat{V}) = \mathfrak{P} \oplus \mathcal{D}(V), \quad \mathcal{R}(\hat{V}) = \mathfrak{Q} \oplus \mathcal{R}(V)$, так что $\mathfrak{P} \perp \mathcal{D}(V), \quad \mathfrak{Q} \perp \mathcal{R}(V)$ и поэтому $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}, \quad \mathfrak{Q} \subset \mathfrak{N}_{\lambda}$.

Теорема 5.8. *Всякое замкнутое симметрическое расширение $\hat{A}$ замкнутого симметрического оператора A определяется некоторым изометрическим оператором U,*

$$\mathcal{D}(U) = \mathfrak{P} \subset \mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}, \quad \mathcal{R}(U) = \mathfrak{Q} \subset \mathfrak{N}_{\lambda};$$

при этом

$$\mathcal{D}(\hat{A}) = \{x' :\ x' = x + z - Uz\},\ \ x \in \mathcal{D}(A),\ \ z \in \mathfrak{P}, \quad \hat{A}x' = Ax + \lambda z - \overline{\lambda} Uz. \tag{5.17}$$

Для всякого такого оператора U равенства (5.17) определяют некоторое замкнутое симметрическое расширение $\hat{A}$ оператора A. Дефектными подпространствами оператора $\hat{A}$ являются

$$\hat{\mathfrak{N}}_{\overline{\lambda}} = \mathfrak{N}_{\overline{\lambda}} \ominus \mathfrak{P}, \quad \hat{\mathfrak{N}}_{\lambda} = \mathfrak{N}_{\lambda} \ominus \mathfrak{Q}$$

Доказательство. Определим оператор U равенством

$$Ux = \hat{V}x \quad \text{для} \quad x \in \mathfrak{P}. \tag{5.18}$$

Преобразование Кэли $\hat{V}$ изометрически отображает $\mathcal{D}(V)$ на $\mathcal{R}(V)$ и $\mathcal{D}(\hat{V})$ на $\mathcal{R}(\hat{V})$, поэтому $\hat{V}$ изометрически отображает $\mathfrak{P}$ на $\mathfrak{Q}$. Согласно определению (5.10) это означает, что U — изометрический оператор с $\mathcal{D}(U) = \mathfrak{P}$ и $\mathcal{R}(U) = \mathfrak{Q}$.

Обратно, пусть задан изометрический оператор U с $\mathcal{D}(U) = \mathfrak{P} \subset \mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}$ и $\mathcal{R}(U) = \mathfrak{Q} \subset \mathfrak{N}_{\lambda}$. Для $y \in \mathcal{D}(V)$, $z \in \mathfrak{P}$ положим

$$\hat{V}(y+z) \doteq Vy + Uz;$$

в итоге получим изометрический оператор $\hat{V}$, который является расширением оператора V, следовательно, преобразованием Кэли некоторого замкнутого симметрического расширения оператора A. Опишем это расширение с помощью оператора U.

В силу утверждения 3) теоремы 5.2 $\mathcal{D}(\hat{A})$ состоит из векторов

$$x' = (y+z) - \hat{V}(y+z) = (y+z) - (Vy + Uz) = (y - Vy) + (z - Uz)$$

$\big(y \in \mathcal{D}(V), \quad z \in \mathfrak{P}\big)$. Векторы $x = y - Vy, \quad y \in \mathcal{D}(V)$ пробегают $\mathcal{D}(A)$. Следовательно $\mathcal{D}(\hat{A})$ определяется (5.17). Так как $\hat{A} \subset A^*, \quad z \in \mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}$, $Uz \in \mathfrak{N}_{\lambda}$, то $\hat{A}$ имеет представление согласно (5.17).

Вид дефектных пространств следует из самого определения оператора $\hat{A}$.

В силу следствия 5.2 (см. также его переформулировку) расширение $\hat{A}$ тогда и только тогда является самомопряженным оператором, когда $\mathfrak{P} = \mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}$, $\mathfrak{Q} = \mathfrak{N}_{\lambda}$. Для существования такого оператора U необходимо и достаточно, чтобы

$$dim\, \mathfrak{N}_{\overline{\lambda}} = dim\, \mathfrak{N}_{\lambda}.$$

Таким образом справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.9. *Расширение $\hat{A}$ тогда и только тогда является самосопряженным, когда $\mathcal{D}(U) = \mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}$, $\mathcal{R}(U) = \mathfrak{N}_{\lambda}$.*

Оператор A имеет самосопряженные расширения тогда и только тогда, когда его индекс дефекта имеет вид (n, n).

Опишем симметрические расширения в том случае, когда оба дефектных подпространства $\mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}$ и $\mathfrak{N}_{\lambda}$ конечномерны. Для того. чтобы существовало самосопряженное расширение оператора A, оба эти подпространства должны иметь одинаковую размерность. Пусть $dim\,\mathfrak{N}_{\overline{\lambda}} = dim\,\mathfrak{N}_{\lambda} = n$ и $e_1, e_2, ..., e_n$ — ортонормированный базис в $\mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}$, $e'_1, e'_2, ..., e'_n$ — ортонормированный базис в $\mathfrak{N}_{\lambda}$. Пусть, далее $z \in \mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}$, т. е. $z = \sum\limits_{k=1}^{n} \zeta_k e_k$; изометрический оператор U с $\mathcal{D}(U) = \mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}$ и $\mathcal{R}(U) = \mathfrak{N}_{\lambda}$ задается с помощью ортогональной матрицы $(u_{jk})_{j,k=1}^{n}$ равенством

$$Uz = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} u_{jk} \zeta_k \right) e'_j.$$

Поэтому

$$\mathcal{D}(\hat{A}) = \{\hat{x} : \ \hat{x} = x + \sum_{k=1}^{n} \zeta_k e_k - \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} u_{jk} \zeta_k \right) e'_j, \quad x \in \mathcal{D}(A)\}, \quad (5.19)$$

и

$$\hat{A}\hat{x} = Ax + \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n} \zeta_k e_k - \overline{\lambda} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} u_{jk} \zeta_k \right) e'_j. \quad (5.20)$$

Если

$$dim\,\mathfrak{N}_{\overline{\lambda}} \neq \{0\}, \qquad dim\,\mathfrak{N}_{\lambda} \neq \{0\},$$

то по теореме 5.8 оператор A допускает нетривиальное расширение $\hat{A}$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.10. 1. *Замкнутый симметрический оператор максимален тогда и только тогда, когда его индекс дефекта есть* $(0, n)$ *или* $(n, 0)$.

2. *Расширение* $\hat{A}$ *максимально тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{P} = \mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}$ *или* $\mathfrak{Q} = \mathfrak{N}_{\lambda}$.

3. *Если дефектные подпространства* $\mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}$ *и* $\mathfrak{N}_{\lambda}$ *конечномерны и имеют одинаковую размерность, то всякое максимальное расширение является самосопряженным.*

5.6. Спектры самосопряженных расширений. Число λ называется *точкой регулярного типа* оператора A, если существует такое

положительное число $k = k(\lambda)$, что для всех $x \in \mathcal{D}(A)$ выполняется неравенство

$$\|(A - \lambda\mathbf{1})x\| \geqslant k\|x\|. \tag{5.21}$$

Как известно, неравенство (5.21) означает, что обратный оператор $(A-\lambda\mathbf{1})^{-1}$ существует и ограничен, но его область определения может не совпадать со всем пространством $\mathcal{H}$. Множество $p(A)$ всех точек регулярного типа оператора A называется его *полем регулярности.* Всякая регулярная точка оператора A является, очевидно, его точкой регулярного типа, т. е. $\rho(A) \subset p(A)$, а собственные значения оператора A не являются его точками регулярного типа: $p(A) \cap \sigma_p(A) = \varnothing$.

Теорема 5.11. *Для любого линейного оператора $p(A)$ — открытое множество.*

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in p(A)$, $|\lambda - \lambda_0| < \delta < \frac{1}{2}k(\lambda_0)$ и $x \in \mathcal{D}(A)$. Тогда

$$\|(A - \lambda\mathbf{1})x\| \geqslant \|(A - \lambda_0\mathbf{1})x\| - |\lambda - \lambda_0| \cdot \|x\| > \big(k(\lambda_0) - \delta\big)\|x\| > \frac{1}{2}k(\lambda_0);$$

это означает, что все точки δ-окрестности точки λ_0 принадлежат $p(A)$, т. е. $p(A)$ — открытое множество.

Теорема 5.12. *Если A — симметрический оператор, то $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset p(A)$.*

Доказательство. Пусть $\lambda = \alpha + i\,\beta$, $\beta \neq 0$, $B \doteq A - \alpha\,\mathbf{1}$; оператор B — симметрический, $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A)$; при

$$\|(A - \lambda\mathbf{1})x\|^2 = \|Bx - i\,\beta\,x\|^2 = (Bx - i\,\beta\,x, Bx - i\,\beta\,x) =$$
$$= (Bx, Bx) + i\,\beta\big((Bx, x) - (x, Bx)\big) + \beta^2(x, x) = \|Bx\|^2 + \beta^2\|x\|^2 \geqslant \beta^2\|x\|^2.$$

Из доказанной теоремы следует, что поле регулярности симметрического оператора может содержать кроме регулярных точек и точки его спектра. Множество $ker\,\sigma(A) \doteq \sigma(A) \setminus p(A)$ называется *ядром спектра* оператора A. Как только что было отмечено, ядро спектра есть часть спектра, вообще говоря, со всем спектром не совпадающая.

Ядро спектра содержит все собственные значения оператора : $\sigma_p(A) \subset ker\sigma(A)$. Пусть λ — собственной значение симметрического оператора A, $\mathcal{X}_\lambda$ — соответствующее ему собственное подпространство, $\mathcal{Y}_\lambda \doteq \mathcal{X}_\lambda^\perp$. Обозначим через A_λ сужение оператора A на $\mathcal{Y}_\lambda$. Если

λ не является собственным значением, то полагаем $A_\lambda = A$. Согласно такому определению оператора A_λ оператор $(A_\lambda - \lambda\mathbf{1})^{-1}$ существует. Множество тех λ, при которых этот оператор является неограниченным, принадлежит ядру спектра оператора A. Назовем множество таких λ непрерывной частью ядра спектра. Таким образом, всякая точка $\ker\,\sigma(A)$ принадлежит либо его точечной части, либо его непрерывной части, либо им обеим.

Если $\hat{A}$ — симметрическое расширение симметрического оператора A, то $ker\,\sigma(A) \subset ker\,\sigma(\hat{A})$; при этом каждая из частей (точечная и непрерывная) $ker\,\sigma(\hat{A})$ содержит соответствующую часть $ker\,\sigma(A)$.

Рассмотрим случай конечных дефектных чисел оператора A. Равенства (5.19) и (5.20) убеждают нас в том, что в рассматриваемом случае

$$dim_{\,(A_\lambda - \lambda\mathbf{1})\mathcal{D}(A_\lambda)}(\hat{A}_\lambda - \lambda\mathbf{1})\mathcal{D}(\hat{A}_\lambda) < +\infty;$$

следовательно, операторы

$$(\hat{A}_\lambda - \lambda\mathbf{1})^{-1} \quad \text{и} \quad (A_\lambda - \lambda\mathbf{1})^{-1}$$

ограничены или неограничены одновременно. Это означает, что *при симметрическом расширении симметрического оператора A с конечными дефектными числами непрерывная часть $ker\,\sigma(A)$ не изменяется.* В частности, справедлива

Теорема 5.13. *Все самосопряженные расширения замкнутого симметрического оператора с конечными дефектными числами имеют одну и ту же непрерывную часть спектра.*

Теорема 5.14. *При расширении замкнутого симметрического оператора с конечным идексом дефекта (m, m) до самосопряженного оператора кратность каждого его собственного значения может увеличиться не более, чем на m; в частности новые собственные значения могут иметь кратность не более m.*

Доказательство. Пусть A — замкнутый симметрический оператор с конечным индексом дефекта (m, m), $\hat{A}$ — его самосопряженное расширение, λ — собственное значение оператора A кратности p. Обозначим через $p+q$ его кратность как собственного значения оператора $\hat{A}$; предположим, что $q > m$.

Пусть $x_1, x_2, ..., x_p, x_{p+1}, ..., x_{p+q}$ — собственные векторы оператора $\hat{A}$ такие, что $x_k \in \mathcal{D}(A)$ при $k = 1, 2, ..., p$. Так как $dim_{\mathcal{D}(A)} \mathcal{D}(\hat{A}) = m$, а $q > m$, то найдется

$$x \doteq \sum_{k=1}^{q} \alpha_k x_{p+k} \in \mathcal{D}(A), \qquad \sum_{k=1}^{q} |\alpha_k| > 0;$$

это значит, что x — собственный вектор оператора A, соответствующий λ и линейно независимый с $x_1, x_2, ..., x_p$; следовательно, кратность λ как собственного значения оператора A больше p; это противоречие с условием доказывает теорему.

Пусть теперь λ — произвольное (быть может и вещественное) число. По прежнему полагаем
$\mathfrak{N}_\lambda = \big(\mathcal{R}(A - \lambda \mathbf{1})\big)^\perp$ и называем $\mathfrak{N}_\lambda$ дефектным подпространством симметрического оператора A, а $n_\lambda \doteq dim\, \mathfrak{N}_\lambda$ дефектным числом оператора A.

Приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема 5.15. *Вдоль связной компоненты поля регулярности $p(A)$ дефектное число n_λ симметрического оператора A не изменяется.*

Так как верхняя и нижняя полуплоскости принадлежат $p(A)$, то из этой теоремы как частный случай получаем снова следствие 5.5. Кроме того из этой теоремы вытекает еще два следствия.

Следствие 5.6. *Пусть A — симметрический оператор. Если вещественное число $\lambda_0 \in p(A)$, то индекс дефекта оператора A равен $(n_{\lambda_0},\ n_{\lambda_0})$.*

Доказательство. Обе полуплоскости вместе с некоторой окрестностью точки λ_0 образуют одну связную компоненту $p(A)$, следовательно, дефектное число не изменяется.

Следствие 5.7. *Пусть A — замкнутый симметрический оператор с индексом дефекта (m, m). Если для некоторого вещественного λ_0 $\quad n_{\lambda_0} < m$, то λ_0 — точка спектра любого самосопряженного*

расширения $\hat{A}$ оператора A. Если, кроме того, λ_0 не является собственным значением оператора A, то λ_0 принадлежит непрерывной части ядра спектра самосопряженного расширения $\hat{A}$.

Доказательство. Вещественное $\lambda_0 \in ker\sigma(A) \subset ker\,\sigma(\hat{A})$ (в противном случае по теореме 5.15 было бы $n_{\lambda_0} = m$); Если при этом λ_0 не является собственным значением оператора A, то оно принадлежит непрерывной части ядра спектра этого оператора, а значит непрерывной части ядра спектра оператора $\hat{A}$.

Теорема 5.16. *Пусть A — замкнутый симметрический оператор с конечным индексом дефекта (m, m). Если вещественное $\lambda \in p(A)$, то существует самосопряженное расширение $\hat{A}$ оператора A, для которого λ есть собственное значение кратности m.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}_\lambda$ — собственное подпространство оператора A^*, соответствующее собственному значению λ. Согласно следствию 5.6 $\dim \mathfrak{N}_\lambda = m$. Полагаем

$$\mathcal{D}(\hat{A}) \doteq \mathcal{D}(A) \dotplus \mathfrak{N}_\lambda, \qquad \hat{A}x \doteq A^*x \quad \text{для} \quad x \in \mathcal{D}(\hat{A}).$$

Тогда $\hat{A}$ — симметрический оператор; при этом $dim_{\,\mathcal{D}(A)}\,\mathcal{D}(\hat{A}) = m$, поэтому $\hat{A}$ — самосопряженный оператор, для которого $\mathfrak{N}_\lambda$ — собственное подпространство, соответствующее собственному значению λ и кратность последнего равна m.

Теорема 5.17. *Пусть A — замкнутый симметрический оператор с конечным индексом дефекта (m, m). Если вещественное $\lambda \notin \sigma_p(A)$, то $dim\,ker(A^* - \lambda\mathbf{1}) \leqslant m$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}_\lambda$ и $\hat{A}$ — те же, что и в доказательстве предыдущей теоремы. Тогда $\hat{A}$ — симметрическое расширение оператора A, поэтому $dim_{\,\mathcal{D}(A)}\,\mathcal{D}(\hat{A}) \leqslant m$.

Теорема 5.18. *Пусть A — замкнутый симметрический оператор с индексом дефекта (m, m). Если сопряженный оператор A^* имеет вещественное собственное значение, то существует самосопряженное расширение $\hat{A}$ оператора A, для которого λ также является собственным значением.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}_\lambda$ — собственное подпространство оператора A^*, соответствующее собственному значению λ. Определим оператор B равенствами

$$\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A) \dot{+} \mathfrak{N}_\lambda, \qquad B(x_1 + x_2) = Ax_1 + \lambda x_2, \quad x_1 \in \mathcal{D}(A),\ x_2 \in \mathfrak{N}_\lambda.$$

Тогда B — симметрический оператор с равными дефектными числами; его самосопряженное расширение будет также расширением оператора A, для которого λ — собственное значение.

5.7. Расширения полуограниченного оператора. Симметрический оператор A называется *полуограниченным снизу* (*сверху*), если существует такое число $m \quad \big(M\big)$, что для любого $x \in \mathcal{D}(A)$ выполняется неравенство

$$(Ax, x) \geqslant m\|x\|^2 \qquad \big((Ax, x) \leqslant M\|x\|^2\big). \tag{5.22}$$

Положительный оператор полуограничен снизу (полагаем в (5.22) $m = 0$).

Изучение полуограниченного снизу (сверху) оператора можно свести к изучению положительного оператора; для этого достаточно перейти от оператора A к оператору $B = A - m \cdot \mathbf{1} \quad \big(B = M \cdot \mathbf{1} - A\big)$.

Пусть A — положительный симметрический оператор, $x \in \mathcal{D}(A)$ и $\lambda < 0$. Тогда

$$\|(A - \lambda\mathbf{1})x\|^2 = \|Ax\|^2 - 2\lambda(Ax, x) + \lambda^2\|x\|^2 \geqslant \|x\|^2.$$

Следовательно, $(-\infty, 0) \subset p(A)$, и согласно следствию 5.6 оператор A имеет равные дефектные числа. Это справедливо и для полуограниченного оператора.

Теорема 5.19. *Пусть A — положительный замкнутый симметрический оператор с конечным индексом дефекта (m, m). Тогда отрицательная часть спектра любого его самосопряженного расширения может состоять лишь из конечного числа отрицательных собственных значений, сумма кратностей которых не превосходит m.*

Доказательство. Пусть $\hat{A}$ — самосопряженное расширение оператора A, а $P(\cdot)$ — его спектральная функция. Обозначим через $\mathfrak{N}$ подпространство, на которое проектирует оператор $P(0-)$. На $\mathfrak{N}$ спектр

продолжения $\hat{A}$ отрицателен, а на $\mathfrak{N}^{\perp}$ — неотрицателен. По этой причине достаточно доказать, что $dim\,\mathfrak{N} \leqslant m$.

Предположим противное: пусть

$$dim\,\mathfrak{N} > m; \tag{5.23}$$

так как $dim_{\,\mathcal{D}(A)}\,\mathcal{D}(\hat{A}) = m$, то из (5.23) следует, что найдется такой $x \in \mathfrak{N},\ x \neq 0$, что $x \in \mathcal{D}(A)$. Это противоречит положительности оператора A, так как оператор $\hat{A}$ на подпространстве $\mathfrak{N}$ отрицателен.

Следствие 5.8. *Пусть A – замкнутый симметрический оператор с конечным индексом дефекта (m, m) и выполнено одно из условий* (5.22). *Тогда часть спектра самосопряженного расширения оператора A, расположенная левее m (правее M) может состоять лишь из конечного числа собственных значений, суммарная кратность которых не превосходит m.*

Доказательство. Достаточно применить теорему 5.19 к оператору $A - m\mathbf{1} \quad \big(M\mathbf{1} - \mathbf{A}\big)$.

6. Обыкновенные дифференциальные операторы

6.1. Тождество Лагранжа и формула Грина. Здесь мы проиллюстрируем некоторые из приведенных выше рассмотрений на примере краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, дадим описание сопряженного оператора к оператору, соответствующему некоторой краевой задаче, в виде оператора, также соответствующего некоторой другой краевой задаче (которую будем называть *сопряженной краевой задачей*). Для этой цели нам понадобятся некоторые вспомогательные понятия и утверждения

Пусть $[a, b] \subset J,\ J$ — открытый интервал в $\mathbb{R},\ x \in C^{(n)}[a, b]$. Рассмотрим линейное дифференциальное выражение n-го порядка

$$Lx \doteq \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} x^{(k)} \tag{6.1}$$

и соответствующее ему однородное дифференциальное уравнение

$$Lx = 0, \quad t \in [a, b] \tag{6.2}$$

в предположении, что

$$p_{n-k} \in C^{(k)}[a, b],\ k = 0, 1, \ldots, n,\ p_0(t) > 0,\ t \in [a, b]. \tag{6.3}$$

Применим обобщенную формулу интегрирования по частям (см. [26, с. 130])

$$\int uv^{(m+1)} dt = uv^{(m)} - u'v^{(m-1)} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^m u^{(m)} v + (-1)^{m+1} \int u^{(m+1)} v\, dt$$

при $u = p_{n-k} y$, $v = x$, $m = k - 1$. Это даст нам следующий результат:

$$\int y\, Lx\, dt = \int p_n\, y\, x\, dt + \sum_{k=1}^{n} \big(p_{n-k}\, y\big) x^{(k)}\, dt = \int p_n\, y\, x\, dt +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \big(p_{n-k} y\big)^{(j)}\, x^{(k-j-1)} + (-1)^k \int \big(p_{n-k} y\big)^{(k)}\, x\, dt \right) =$$
$$= \int \left(p_n\, y\, x + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \big(p_{n-k} y\big)^{(k)}\, x \right) dt +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \big(p_{n-k} y\big)^{(j)}\, x^{(k-j-1)} \right);$$

Положим

$$L^+ y \doteq \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \big(p_{n-k} y\big)^{(k)},$$
$$\Psi(x,\, y) \doteq \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \big(p_{n-k} y\big)^{(j)}\, x^{(k-j-1)} \right);$$

здесь $\Psi(x,\, y)$ — билинейная форма относительно функций

$$x, x', \ldots x^{(n-1)}, \tag{6.4}$$

$$y, y', \dots y^{(n-1)}, \tag{6.5}$$

с матрицей Λ, элементы побочной диагонали которой равны $(-1)^{k-1}p_0$, $k = 1, 2, \dots, n$ (k — номер столбца), элементы, находящиеся ниже побочной диагонали равны нулю, так что $\det \Lambda \neq 0$. Выражение

$$L^+y \quad \Big(\text{уравнение } L^+y = 0\Big) \tag{6.6}$$

называется *формально сопряженным* к Lx *в смысле Лагранжа* дифференциальным выражением (уравнением). В итоге имеем

$$\int y\, Lx\, dt = \int x\, L^+y\, dt + \Psi(x,\, y),$$

или

$$\int y\, Lx\, dt - \int x\, L^+y\, dt = \Psi(x,\, y).$$

Продифференцировав полученное тождество, придем к следующему *тождеству Лагранжа*

$$yLx - xL^+y = \frac{d}{dt}\Psi(x,\, y). \tag{6.7}$$

Непосредственным счетом нетрудно убедиться в том, что

$$\big(L^+x\big)^+ = Lx \quad (x \in C^{(n)}[a, b]). \tag{6.8}$$

Если y — решение *формаольно сопряженного уравнения* (6.6) $L^+y = 0$, то из тождества (6.1) получаем: $yLx = \frac{d}{dt}\Psi(x,\, y)$, т. е. y — *множитель* выражения Lx. Можно показать также обратное: любой множитель выражения Lx является решением сопряженного уравнения. (Напомним: умножение выражения Lx на множитель превращает это выражение в точную производную некоторой функции, см.[24, с. 205].)

Если проинтегрировать тождество (6.7) в пределах от a до b, то получим следующую *формулу Грина*

$$\int\limits_a^b \big(y(t)(Lx)(t) - x(t)(L^+y)(t)\big)\, dt = \Psi(x,\, y)|_a^b, \tag{6.9}$$

правая часть которой представляет собой билинейную форму относительно переменных

$$x(a), x'(a), \dots x^{(n-1)}(a), \quad x(b), x'(b), \dots x^{(n-1)}(b), \tag{6.10}$$

$$y(a), y'(a), \dots y^{(n-1)}(a), \quad y(b), y'(b), \dots y^{(n-1)}(b), \tag{6.11}$$

с матрицей $V \doteq \begin{pmatrix} -\Lambda(a) & 0 \\ 0 & \Lambda(b) \end{pmatrix}$. Например, при $n = 2$

$$Lx \doteq x'' + p(t)x' + q(t)x, \quad L^+y \doteq y'' - \big(p(t)y\big)' + q(t)y$$

($p_0(t) \equiv 1$, $p_1(t) \equiv p(t)$, $p_2(t) \equiv q(t)$); тождество Лагранжа будет выглядеть так:

$$yLx - xL^+y = \frac{d}{dt}\Big(p(t)y(t)(t)x(t) + y(t)x'(t) - y'(t)x(t)\Big).$$

а формула Грина принимает вид

$$\int\limits_a^b \big(y(t)(Lx)(t) - x(t)(L^+y)(t)\big)\,dt = p(b)y(b)x(b) + y(b)x'(b) - y'(b)x(b) -$$
$$- p(a)y(a)x(a) - y(a)x'(a) + y'(a)x(a) \tag{6.12}$$

Если известна фундаментальная система решений (ФСР) $\{u_k\}_{k=1}^n$ однородного уравнения (6.2), то ФСР $\{v_k\}_{k=1}n$ уравнения (6.6) находится без квадратур, а именно (см. [24, с. 210])

$$v_k = (-1)^{n-k}\frac{W[u_1, \dots, u_{k-1}, u_k, \dots, u_n]}{W[u_1, \dots, u_n]}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Если оказывается, что $L^+y = Ly$ ($y \in C^{(n)}[a, b]$, выполнены условия (6.3)), то дифференциальное выражение (6.1) называется *формально самосопряженным в смысле Лагранжа*. Так как мы рассматриваем дифференциальные выражения с вещественными коэффициентами, то непосредственно из определений видим, что формально самосопряженными могут быть лишь дифференциальные выражения

четного ($n = 2m$) порядка. При этом формально самосопряженное выражение должно иметь вид (см. также [17, с. 19]).

$$(Lx)(t) = \big(p_0(t)x^{(m)}\big)^{(m)} + \big(p_2(t)x^{(m-1)}\big)^{(m-1)} + \ldots + p_{2m}x \qquad (6.13)$$

Так, например, при $n = 2$ $Lx = \big(px'\big)' + qx$. При $n = 2$ любое дифференциальное выражение $p_0x'' + p_1x' + p_2x$ приводится к такому виду умножением на множитель $\mu(t) \doteq \frac{1}{p_0(t)} e^{\int\limits_a^t \frac{p_1(s)}{p_0(s)}\,ds}$ (см. [24, с. 241]).

Пусть X (Y) — $2n$-вектор-столбец, координаты которого — переменные (6.10) ((6.11)). Удобны будут также вполне понятные представления $X = (X_a^\top, X_b^\top)^\top$, $Y = (Y_a^\top, Y_b^\top)^\top$, которые в дальнейшем применяются и для других функций. В этих обозначениях билинейная форма в правой части формулы Грина (6.9) запишется так:

$$\Psi(x,\, y)|_a^b = X_b^\top \Lambda(b) Y_b - X_a^\top \Lambda(A) Y_a = X^\top V Y. \qquad (6.14)$$

В дальнейшем понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 6.1. *Для любых $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ существует n раз непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$ функция y такая, что*

$$y^{(i-1)}(a) = \xi_i,\ y^{(i-1)}(b) = \eta_i,\ i = 1, 2, \ldots, n \quad (\textit{или} \quad Y_a = \xi,\ Y_b = \eta).$$

Доказательство. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^n$ — фиксированная фундаментальная система решений уравнения 6.2, $E = \big(e_k^{(i-1)}\big)_{i,k=1}^n$, $\Gamma = (e_i, e_k) \doteq$ $= \int\limits_a^b e_i(t)e_k(t)\,dt$, — матрица Грама, $\det\Gamma \neq 0$, $detE(t) \neq 0$ ($t \in [a, b]$). Положим

$$c \doteq -\Gamma^{-1}E(b)\Lambda(b)\eta,\ g(t) \doteq \sum_{k=1}^n c_k e_k(t)$$

и определим функцию z как решение задачи Коши

$$(L^+z)(t) = g(t)\ (t \in [a, b]), \quad z^{(i)}(a) = 0,\ i = 0, 1, \ldots, n{-}1(\text{ или } Z_a = 0).$$

Из определения g видим, что $(e_k, g) = -\Big(E_k(b)\Big)^\top \Lambda(b)\eta$ (E_k — k-я строка матрицы E), а из формулы Грина (6.9) с учетом представления (6.14) и начальных условий —

$$(e_k, g) = (e_k, L^+z) = \Big(E_k(b)\Big)^\top \Lambda(b) Z_b.$$

Сравнивая два представления для (e_k, g), приходим к равенству

$$E^\top(b)\Lambda(b)(\eta - Z_b) = 0.$$

Ввиду невырожденности матрицы $E^\top(b)\Lambda(b)$ это означает, что $Z_b = \eta$. Таким образом, построена n раз непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$ функция z, обладающая свойствами

$$z^{(i-1)}(a) = 0,\ z^{(i-1)}(b) = \eta_i\ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Точно так же строится n раз непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$ функция w, обладающая свойствами

$$w^{(i-1)}(a) = \xi_k,\ w^{(i-1)}(b) = 0\ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Функция $y = z + w$ — требуемая.

6.2. Сопряженный оператор. Линейное дифференциальные выражения Lx (см. (6.1)) и L^+y определяют некоторые линейные операторы, действующие в вещественном гильбертовом пространстве $\mathcal{H} \doteq = \mathbb{L}_2[a, b]$. Точнее, пусть

$$\mathcal{D}(\mathbf{L}) \doteq \{x \in \mathcal{H} : x\ n \text{ раз непрерывно дифференцируема}\},$$

полагаем $\mathbf{L}x = Lx$; пусть далее

$$\mathcal{D}(\mathbf{L}^+) \doteq \{y \in \mathcal{H} : y\ n \text{ раз непрерывно дифференцируема}\},$$

полагаем $\mathbf{L}^+y = L^+y$. Обозначим через $\mathbf{L_0}$ $(\mathbf{L_0^+})$ сужение оператора $\mathbf{L}$ $(\mathbf{L}^+)$ на множество

$$\mathcal{D}(\mathbf{L_0}) \doteq \{x \in \mathcal{D}(\mathbf{L}) : x(a) = \ldots = x^{(n-1)}(a) = x(b) = \ldots = x^{(n-1)}(b) = 0\}$$

$$\left(\mathcal{D}(\mathbf{L_0^+}) \doteq \{y \in \mathcal{D}(\mathbf{L}^+) : y(a) = \ldots = y^{(n-1)}(a) = y(b) = \ldots = y^{(n-1)}(b) = 0\}\right)$$

Операторы $\mathbf{L}$, $\mathbf{L}^+$, $\mathbf{L_0}$, $\mathbf{L_0^+}$ плотно определены (см. [13, с. 73]) и поэтому согласно п.4.2 обладают сопряженными операторами.

Приведем вначале два вспомогательных утверждения.

Лемма 6.2. *Пусть g — непрерывная функция, $g \perp \mathcal{N}(\mathbf{L})$ (напомним, это означает, что $(x, g) = 0$ для любого решения x уравнения $Lx = 0$). Тогда найдется функция $y \in \mathcal{D}(\mathbf{L_0})$ такая, что $\mathbf{L_0^+}y = g$.*

Доказательство. Сначала найдем решение задачи Коши

$$(L^+y)(t) = g(t), \quad y^{(i)}(a) = 0,\ i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{6.15}$$

Далее, по формуле Грина,

$$0 = (x, g) = \big(x,\, \mathbf{L}^+y\big) \overset{(6.9)}{=} \big(\mathbf{L}x,\, y\big) - \Psi(x,\, y)(b) + \Psi(x,\, y)(a);$$

с учетом начальных условий в (6.15) и принадлежности $x \in \mathcal{N}(\mathbf{L})$ получаем, что $\Psi(x,\, y)(b) = 0$ для всех $x \in \mathcal{N}(\mathbf{L})$. В силу невырожденности формы $\Psi(x,\, y)(b)$ отсюда следует, что $y^{(i)}(b) = 0,\ i = 0, 1, \ldots, n-1$, т. е. $y \in \mathcal{D}\big(\mathbf{L}_{\mathbf{0}}^+\big)$ и $\mathbf{L}_{\mathbf{0}}^+y = g$.

Лемма 6.3. *Пусть $x_0 \in \mathcal{H}$ и $\big(x_0,\, \mathbf{L}_{\mathbf{0}}^+y\big) = 0$ для любого $y \in \mathcal{D}\big(\mathbf{L}_{\mathbf{0}}^+\big)$. Тогда $x_0 \in \mathcal{N}(\mathbf{L})$ (т. е $Lx = 0$).*

Доказательство. Предположим, что $x_0 \notin \mathcal{N}(\mathbf{L})$. (напомним: так как размерность $\mathcal{N}(\mathbf{L})$ равна n, то $\mathcal{N}(\mathbf{L})$ — подпространство в $\mathcal{H}$). Тогда по теореме об аннуляторе (см. [14, с. 53]) и в силу теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве (см. [14, с. 62]) найдется функция $g \in \mathcal{H}$ такая, что

$$(x, g) = 0 \text{ для любого } x \in \mathcal{N}(\mathbf{L}), \quad (x_0, g) = 1. \tag{6.16}$$

Так как $\mathcal{N}(\mathbf{L})^\perp$ — подпространство (см. [13, с. 85]), то найдется последовательность $\{g_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{N}(\mathbf{L})^\perp$ непрерывных функций, сходящаяся в средне квадратическом к g и удовлетворяющая соотношениям (6.16). Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что сама g — непрерывная функция. По лемме 6.2 найдется такая функция $y \in \mathcal{D}\big(\mathbf{L_0}\big)$, что $\mathbf{L}_{\mathbf{0}}^+y = g$. В итоге получаем $\big(x_0,\, \mathbf{L}_{\mathbf{0}}^+y\big) = (x_0, g) = 1$, что противоречит условию настоящей леммы. Следовательно, $x_0 \in \mathcal{N}(\mathbf{L})$.

Теорема 6.1. *Если выполнены условия (6.3), то*

$$\mathbf{L}^* = \mathbf{L}_{\mathbf{0}}^+,\ \big(\mathbf{L}_{\mathbf{0}}^+\big)^* = \mathbf{L},$$

Доказательство. Пусть $x \in \mathcal{D}\big(\mathbf{L},\ y \in \mathcal{D}\big(\mathbf{L}_{\mathbf{0}}^+\big)\big)$. Тогда из формулы Грина (6.9) имеем

$$(\mathbf{L}x,\, y) = \big(x,\, \mathbf{L}_{\mathbf{0}}^+\big),\ (\mathbf{L}^+x,\, y) = \big(x,\, \mathbf{L_0}y\big).$$

В силу сказанного в п. 4.2 это означает, что $\mathbf{L_0^+} \subset \mathbf{L}^*$, $\mathbf{L_0} \subset \big(\mathbf{L}^+\big)^*$.

В силу симметрии можно ограничиться доказательством первого противоположного включения. Пусть $x \in \Big(\mathcal{D}\big(\mathbf{L_0^+}\big)\Big)^*$. По определению сопряженного оператора (см. п. ??) найдется функция $f \in \mathcal{H}$ такая, что для любой функции $y \in \mathcal{D}\big(\mathbf{L_0^+}\big)$ имеет место равенство $(x, \mathbf{L_0^+}) = (f, y)$. Не ограничивая общности (см. доказательство леммы 6.3), можно считать, что f непрерывна. Возьмем в качестве x_0 любое решение уравнения $Lx_0 = f$. Согласно формуле Грина (6.9)

$$(x_0, \mathbf{L_0^+} y) = (\mathbf{L_0} x_0, y) = (f, y).$$

Таким образом, получаем равенство $(x - x_0, \mathbf{L_0^+} y) = 0$ для любой $y \in \mathcal{D}\big(\mathbf{L_0^+}\big)$. По лемме 6.3 $x - x_0 \in \mathcal{N}(\mathbf{L} \subset \mathcal{D}(\mathbf{L})$, а значит и $x = (x - x_0) + x_0 \in \mathcal{D}(\mathbf{L})$. Этим доказано включение $\big(\mathbf{L_0^+}\big)^* \subset \mathbf{L}$.

Следствие 6.1. *При условиях теоремы 6.1* $\mathbf{L}^{**} = \mathbf{L}$, $\big(\mathbf{L_0^+}\big)^{**} = \mathbf{L_0^+}$.

Следствие 6.2. *При условиях теоремы 6.1 операторы* $\mathbf{L}$, $\mathbf{L_0^+}$ *замкнуты.*

6.3. Сопряженная краевая задача. Пусть $l_i x$, — линейно независимые линейные формы, зависящие от переменных (6.10):

$$l_i x \doteq \sum_{k=1}^{n} \big(\alpha_{ik} x^{k-1}(a) + \beta_{ik} x^{k-1}(b)\big), \quad i = 1, 2, \ldots, n \ (x \in C_{[}^{n-1} a, b]). \tag{6.17}$$

Рассмотрим *полуоднородную* краевую задачу с дифференциальным выражением (6.1)

$$(Lx)(t) = f(t) \ (t \in [a, b]), \quad l_i x = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.18}$$

Краевая задача (6.18) определяет некоторый линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. А именно, обозначим через $\mathbf{L_l}$ сужение $\mathbf{L}$ на множество

$$\mathcal{D}\big(\mathbf{L_l}\big) \doteq \{x \in \mathcal{D}(\mathbf{L}) : l_i x = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n\};$$

оператор $\mathbf{L_l}$ также плотно определен и действует в пространстве $\mathcal{H}$. Согласно п. ?? оператор $\mathbf{L_l}$ обладает сопряженным оператором

$\mathbf{L}_{\mathbf{l}}^* \doteq (\mathbf{L}_{\mathbf{l}})^*$. Наша ближайшая задача состоит в том, чтобы найти для этого оператора описание также в виде некоторой краевой задачи, которую мы и будем называть *сопряженной краевой задачей*.

Пусть линейные формы

$$l_i x,\ i = n+1, n+2, \ldots, 2n,$$

определенные на $n-1$ раз непрерывно дифференцируемых функциях, зависящие от переменных (6.10) и имеющие вид (6.17) при $i = n+1, \ldots, 2n$ таковы, что система $\{l_i x\}_1^{2n}$ линейно независима. Это эквивалентно тому, что $2n \times 2n$-матрица

$$A \doteq (\alpha_{ik},\, \beta_{ik}),\ i = 1, 2, \ldots, 2n;\ k = 1, 2, \ldots, n$$

невырожденная. Введем также линейные формы

$$l_i^+ y,\ i = 1, 2, \ldots, 2n,$$

вида (6.17), определенные на $n-1$ раз непрерывно дифференцируемых функциях, зависящие от переменных (6.11) и такие, что система $\{l_i^+\}_{i=1}^{2n}$ линейно независима, а билинейная форма (6.14) может быть представлена в виде

$$\Psi(x,\, y)|_a^b = l_1 x \cdot l_{2n}^+ y + l_2 x \cdot l_{2n-1}^+ y + \ldots + l_n x \cdot l_{n+1}^+ y + \\ + l_{n+1} x \cdot l_n^+ y + \ldots + l_{2n} x \cdot l_1^+ y.$$

Покажем, что такие формы существуют. Введем $2n \times 2n$-матрицу $A^+ \doteq \left(A^\top\right)^{-1} V S_{2n}$, где $S_{2n} = (\delta_{i,n-k+1})_{i,k=1}^{2n}$ (это матрица, переставляющая строки сомножителя в обратном порядке), S_{2n}^2 — единичная $2n \times 2n$-матрица. Тогда из (6.14) получаем $\Psi(x,\, y)|_a^b = X^\top A^\top (A^+) S_{2n} Y$ и $l_i y$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n)$ представляют собой координаты вектора $A^+ S_{2n} Y$.

С учетом указанного представления формула Грина (6.9) запишется в виде следующей *формулы краевых форм* (см. [15, с. 312])

$$\int\limits_a^b \big(y(t)(Lx)(t) - x(t)(L^+ y)(t)\big)\, dt = \sum_{i=1}^{2n} l_i x \cdot l_{2n-i+1}^+ y, \tag{6.19}$$

которая является основой для построения сопряженных краевых условий в случае, когда исходные краевые условия сосредоточены только в двух точках a и b.

Наряду с краевой задачей (6.18) рассмотрим краевую задачу

$$(L^+y)(t) = g(t)\ (t \in [a,b]), \quad l_i^+ y = 0,\ i = 1,2,\dots,n, \tag{6.20}$$

и определим линейный оператор $\mathbf{L}^+_{\mathbf{l}^+}$ как сужение оператора $\mathbf{L}^+$ на множество

$$\mathcal{D}\big(\mathbf{L}^+_{\mathbf{l}^+}\big) \doteq \{y \in \mathcal{D}(\mathbf{L}^+) : l_i^+ y = 0,\ i = 1,2,\dots,n\}.$$

Оператор $\mathbf{L}^+_{\mathbf{l}^+}$ также плотно определен и поэтому обладает сопряженным оператором. Из определений и теоремы 6.1 следуют включения

$$\mathbf{L}^+_{\mathbf{0}} \subset \big(\mathbf{L}_{\mathbf{l}}\big)^* \subset, \quad \mathbf{L}_{\mathbf{0}} \subset \big(\mathbf{L}^+_{\mathbf{l}^+}\big)^* \subset \mathbf{L}. \tag{6.21}$$

Лемма 6.4. *Для любого $\alpha \in \mathbb{R}^{2n}$ существует n раз непрерывно дифференцируемая на $[a,b]$ функция x, такая, что*

$$l_i x = \alpha_i,\ i = 1,2,\dots,2n.$$

Доказательство. Согласно лемме 6.1, примененной к выражению Lx, найдется n раз непрерывно дифференцируемая на $[a,b]$ функция x, такая, что $X = A^{-1}\alpha$ $\big(X = (X_a^\top, X_b^\top)^\top\big)$, см. обозначения перед леммой 6.1 $\big)$. Эта функция обладает нужными свойствами, так как $(l_1 x, \dots, l_2 n)^\top = AX = \alpha$.

Следствие 6.3. *Для любого $\beta \in \mathbb{R}^n$ существует n раз непрерывно дифференцируемая на $[a,b]$ функция x, такая, что*

$$l_i x = 0,\ i = 1,2,\dots,n, \quad l_i x = \beta_{i-n},\ i = n+1, n+, 2, \dots, 2n.$$

Доказательство. Полагаем в лемме 6.4 $\alpha^\top = (0, \beta)$.

Теорема 6.2. *Если выполнены условия (6.3), то*

$$\mathbf{L}^*_{\mathbf{l}} = \mathbf{L}^+_{\mathbf{l}^+},\ \big(\mathbf{L}^+_{\mathbf{l}^+}\big)^* = \mathbf{L}_{\mathbf{l}},$$

и значит, согласно сказанному выше, краевая задача (6.20) *является сопряженной к краевой задаче* (6.18) *и наоборот, краевая задача* (6.18) *является сопряженной к краевой задаче* (6.20).

Доказательство. Пусть $x \in \mathcal{D}\big(\mathbf{L_l},\ y \in \mathcal{D}(\mathbf{L}^+_{\mathbf{l}^+})$. Тогда из формулы краевых форм (6.19) следует $\big(\mathbf{L_l}x,\, y\big) = \big(x,\, \mathbf{L}^+_{\mathbf{l}^+}\big)$, что означает включение $\mathbf{L}^+_{\mathbf{l}^+} \subset (\mathbf{L_l})^*$.

Докажем противоположное включение. Пусть $y \in D\big((\mathbf{L_l})^*\big)$. Тогда в силу включений (6.21) $y \in \mathcal{D}\big(\mathbf{L}^+\big)$. Для произвольного $\beta \in \mathbb{R}^n$ определим функцию x согласно следствию 6.3. Из включений (6.21) и формулы краевых форм (6.19) получаем

$$\big(x,\, (\mathbf{L_l})^*\big) = \big(x,\, \mathbf{L}^+ y\big) = \big(\mathbf{L_l}x,\, y\big) - \beta^\top S_n l^+ y \quad \big(l^+ = (l_1^+, l_2^+, \ldots, l_n^+)^\top.$$

Так как первое скалярное произведение равно третьему, то отсюда получаем, что $\beta^\top S_n l^+ y = 0$. Ввиду произвольности $\beta \in \mathbb{R}^n$ последнее равенство означает $l^+ y = 0$, т. е. $y \in \mathcal{D}\big(\mathbf{L}^+_{\mathbf{l}^+}\big)$. Этим противоположное включение доказано. Следовательно, $\mathbf{L}^*_{\mathbf{l}} = \mathbf{L}^+_{\mathbf{l}^+}$.

Второе равенство доказывается точно так же.

Заметим, что сопряженные однородные краевые условия (т. е. краевые условия в сопряженной задаче (6.20)) определяются с точностью до эквивалентных. Более формально, краевые условия

$$\widetilde{l}_i y = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

называются эквивалентными краевым условиям

$$\widehat{l}_i y = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

если

$$\{y : \widetilde{l}_i y = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n\} = \{y : \widehat{l}_i y = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

(функции y $n-1$ раз непрерывно дифференцируемы). Таким образом, краевые условия в задаче (6.20) могут быть заменены эквивалентными, при этом сопряженный оператор не изменится.

Следствие 6.4. *При условиях теоремы 6.2 операторы* $\mathbf{L_l}$, $\mathbf{L}^+_{\mathbf{l}^*}$ *замкнуты.*

Обозначим через $\mathbf{L_a}$ $\left(\mathbf{L}^+_{\mathbf{b}}\right)$ сужение оператора $\mathbf{L}$ $\left(\mathbf{L}^+\right)$ на множество

$$\mathcal{D}\big(\mathbf{L_a}\big) \doteq \{x \in \mathcal{D}\big(\mathbf{L}\big) : x(a) = \ldots = x^{(n-1)}(a) = 0\}$$

$$\Big(\mathcal{D}\big(\mathbf{L}_{\mathbf{b}}^{+}\big) \doteq \{y \in \mathcal{D}\big(\mathbf{L}^{+}\big) : y(b) = \ldots = y^{(n-1)}(b) = 0\}\Big)$$

Следствие 6.5. *При условиях теоремы 6.2 операторы* $\mathbf{L}_{\mathbf{a}}$, $\mathbf{L}_{\mathbf{b}}^{+}$ *замкнуты и*

$$\mathbf{L}_{\mathbf{a}}^{*} = \mathbf{L}_{\mathbf{b}}^{+},\ \big(\mathbf{L}_{\mathbf{b}}^{+}\big)^{*} = \mathbf{L}_{\mathbf{a}}.$$

Таким образом, сопряженной к задаче Коши

$$(Lx)(t) = f(t)\ (t \in [a,b]),\ \ x^{(k)}(a) = 0,\ k = 1, 2, \ldots, n$$

является задача Коши

$$(L^{+}y)(t) = g(t)\ (t \in [a,b]),\ \ y^{(k)}(b) = 0,\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Рассмотрим ряд примеров. Пусть сначала $n = 2$ ($p_0(t) \equiv 1$, $p_1(t) \equiv p(t)$, $p_2(t) \equiv q(t)$).

1. Для периодических краевых условий формула краевых форм (6.19) примет вид $\big(p(b) = p(a)\big)$

$$\int\limits_a^b \big(y(t)(Lx)(t) - x(t)(L^{+}y)(t)\big)\,dt =$$
$$= \Big(x(b) - x(a)\Big)\Big(p(a)y(b) - y'(a)\Big) + \Big(x'(b) - x'(a)\Big)y(b) +$$
$$+ \Big(p(a)x(a) + x'(a)\Big)\Big(y(b) - y(a)\Big) - x(b)\Big(y'(b) - y'(a)\Big), \quad (6.22)$$

Отсюда видим, что периодические краевые условия являются самосопряженными: исходная краевая задача

$$(Lx)(t) = f(t),\ t \in [a,b], \quad x(b) - x(a) = 0, \quad x'(b) - x'(a) = 0,$$

сопряженная

$$(L^{+}y)(t) = g(t),\ t \in [a,b], \quad y(b) - y(a) = 0, \quad y'(b) - y'(a) = 0.$$

Найдем сопряженные краевые условия для некоторых других двухточечных задач.

2. Пусть

$$(Lx)(t) = f(t),\ t \in [a,b], \quad x(a) = 0, \quad x(b) = 0.$$

Запишем формулу краевых форм (6.19) в виде

$$\int\limits_a^b \big(y(t)(Lx)(t) - x(t)(L^+y)(t)\big)\,dt = x(a)\Big(y'(a) - p(a)y(a)\Big) +$$

$$+ x(b)\Big(p(b)y(b) - y'(b)\Big) - x'(a)y(a) + x'(b)y(b); \quad (6.23)$$

следовательно, сопряженная краевая задача

$$(L^+y)(t) = g(t),\ t \in [a,b], \quad y(a) = 0, \quad y(b) = 0.$$

3. Пусть

$$(Lx)(t) = f(t),\ t \in [a,b], \quad x(a) = 0, \quad x'(b) = 0.$$

Теперь запишем формулу краевых форм (6.19) в виде

$$\int\limits_a^b \big(y(t)(Lx)(t) - x(t)(L^+y)(t)\big)\,dt = x(a)\Big(y'(a) - p(a)y(a)\Big) +$$

$$+ x'(b)y(b) + x(b)\Big(p(b)y(b) - y'(b)\Big) - x'(a)y(a); \quad (6.24)$$

значит, сопряженная краевая задача

$$(L^+y)(t) = g,\ t \in [a,b], \quad y(a) = 0, \quad p(b)y(b) - y'(b) = 0.$$

4. Наконец, пусть

$$(Lx)(t) = f(t),\ t \in [a,b], \quad x'(a) = 0, \quad x'(b) = 0.$$

Формула краевых форм принимает вид

$$\int\limits_a^b \big(y(t)(Lx)(t) - x(t)(L^+y)(t)\big)\,dt = -x'(a)y(a) + x'(b)y(b) +$$

$$+ x(b)\Big(p(b)y(b) - y'(b)\Big) + x(a)\Big(y'(a) - p(a)y(a)\Big), \quad (6.25)$$

сопряженная краевая задача:

$$(L^+y)(t) = g(t),\ t \in [a,b], \quad y'(a) - p(a)y(a) = 0, \quad y'(b) - p(b)y(b) = 0.$$

5. Примеры 2–4 представляют собой частный случай следующей краевой задачи (Штурма–Лиувилля):

$$(Lx)(t) = f(t),\ t \in [a,b], \quad l_1 x \doteq \alpha_{11}x(a) + \alpha_{12}x'(a) = 0,$$
$$l_2 x \doteq \beta_{21}x(b) + \beta_{22}x'(b) = 0, \quad \Delta \doteq \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

(см. (6.17)–(6.18)).

Продемонстрируем предложенную выше методику построения сопряженных краевых условий на примере этой задачи. Матрицу A можно выбрать так:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{21} & \beta_{22} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

легко непосредственно вычислить, что $\det A = -\Delta \neq 0$. Несложные выкладки приводят к следующему результату:
$(-\Delta)A^+ = (-\Delta)\big(A^\top\big)^{-1} V S_{2n} =$

$$= \begin{pmatrix} -p(a)\alpha_{12}\beta_{22} + \alpha_{11}\beta_{22} & \alpha_{12}\beta_{22} & -p(b)\alpha_{12}\beta_{22} + \alpha_{12}\beta_{21} & \alpha_{12}\beta_{22} \\ -p(a)\alpha_{12}\beta_{21} + \alpha_{11}\beta_{21} & \alpha_{12}\beta_{21} & -p(b)\alpha_{11}\beta_{22} + \alpha_{11}\beta_{21} & \alpha_{11}\beta_{22} \\ p(a)\alpha_{12} - \alpha_{11} & -\alpha_{12} & p(b)\alpha_{12} - \alpha_{11} & -\alpha_{12} \\ p(a)\beta_{22} - \beta_{21} & -\beta_{22} & p(b)\beta_{22} - \beta_{21} & -\beta_{22} \end{pmatrix}.$$

Это означает, что сопряженные краевые условия будут выглядеть так:

$$l_1^+ y = \big(-p(a)\alpha_{12}\beta_{22} + \alpha_{11}\beta_{22}\big)y(a) + \alpha_{12}\beta_{22}y'(a) + \\ + \big(-p(b)\alpha_{12}\beta_{22} + \alpha_{12}\beta_{21}\big)y(b) + \alpha_{12}\beta_{22}y'(b) = 0,$$

$$l_2^+ y = \big(-p(a)\alpha_{12}\beta_{21} + \alpha_{11}\beta_{21}\big)y(a) + \alpha_{12}\beta_{21}y'(a) + \\ + \big(-p(b)\alpha_{11}\beta_{22} + \alpha_{11}\beta_{21}\big)y(b) + \alpha_{11}\beta_{22}y'(b) = 0.$$

Перейдем к более простым, эквивалентным этим, краевым условиям. А именно, положим

$$\widetilde{l}_1^+ y \doteq \frac{\alpha_{11}}{\Delta}\, l_1^+ y - \frac{\alpha_{12}}{\Delta}\, l_2^+ y, \qquad \widetilde{l}_2^+ y \doteq -\frac{\beta_{21}}{\Delta}\, l_1^+ y + \frac{\beta_{22}}{\Delta}\, l_2^+ y$$

(определитель этого преобразования равен $\frac{1}{\Delta} \neq 0$). Тогда

$$\widetilde{l}_1^+ y = \widetilde{\alpha}_{11} y(a) + \widetilde{\alpha}_{12} y'(a), \quad \widetilde{l}_2^+ y = \widetilde{\beta}_{21} y(b) + \widetilde{\beta}_{22} y'(b),$$

где

$$\widetilde{\alpha}_{11} = \alpha_{11} - p(a)\alpha_{12},\ \widetilde{\alpha}_{12} = \alpha_{12},\ \widetilde{\beta}_{21} = \beta_{21} - p(b)\beta_{22},\ \widetilde{\beta}_{22} = \beta_{22}.$$

Следовательно, сопряженной к исходной задаче будет также краевая задача Штурма–Лиувилля

$$(L^+ y)(t) = g(t),\ t \in [a,b],\ \widetilde{\alpha}_{11} y(a) + \widetilde{\alpha}_{12} y'(a) = 0,\ \widetilde{\beta}_{21} y(b) + \widetilde{\beta}_{22} y'(b) = 0.$$

6. Пусть теперь n произвольно. Рассмотрим двухточечную краевую задачу Валле Пуссена (интерполяционную краевую задачу)

$$(Lx)(t) = f(t),\ t \in [a,b], \quad x^{(i)}(a) = 0,\ i = 0,1,\ldots,n-k-1,$$
$$x^{(i)}(b) = 0,\ i = 0,1,\ldots,k-1,\ 1 < k < n \quad (6.26)$$

(так называемая задача $(n-k,k)$, см., например, [10], [12]; см. также [9]), предпологая, что выполнены условия (6.3). В наших обозначениях $l_i x = x^{(i)}(a),\ i = 0,1,\ldots,n-k-1,\ l_i x = x^{(i-n+k-1)}(b),\ i = n-k+1,\ldots,n$. Непосредственно из формулы Грина (6.9) видим, что следует положить $l_i^+ y = y^{(i)}(a),\ i = 0,1,\ldots,k-1,\ l_i^+ y = y^{(i-k+1)}(b),\ i = k+1,\ldots,n$. Остальные линейные формы определятся соответствующей формулой краевых форм; на вид сопряженных краевых условий они не влияют. Таким образом, задачей сопряженной краевой задаче (6.26) является краевая задача

$$(L^+ y)(t) = g(t),\ t \in [a,b], \quad y^{(i)}(a) = 0,\ i = 0,1,\ldots,k-1,$$
$$y^{(i)}(b) = 0,\ i = 0,1,\ldots,n-k+1, \quad (6.27)$$

т. е. задача $(k, n-k)$. При этом задача (6.26) является самосопряженной, если $n = 2m$, $k = m$, Lx определяется равенством (6.13).

7. Квазидифференциальные операторы

7.1. Предварительные замечания. В предыдущем параграфе для описания оператора, сопряженного к дифференциальному, мы

потребовали, чтобы коэффициенты этого оператора были достаточно гладкими (см.(6.3)). В реальных условиях это требование является обременительным. Желательно, чтобы описание оператора, сопряженного к оператору, описывающему некоторую краевую задачу, оставалось столь же простым и при менее ограничительных по сравнению с (6.3) условиях. Если эти условия не выполняются, то формально сопряженное в смысле Лагранжа выражение (6.6) уже не является обыкновенным дифференциальным. Оно становится *квазидифференциальным.* По этой причине удобно уже с самого начала рассматривать вместо обыкновенных дифференциальных выражений квазидифференциальные.

Обращаем внимание читателя на тот факт, что в предыдущем параграфе рассматривались лишь *двухточечные* краевые условия, т. е. условия, в которые входят значения решения и его производных лишь в точках a и b. При этом оказалось, что сопряженные краевые условия в общем случае зависят от коэффициентов исходного дифференциального выражения (6.1). Кроме того, непосредственно с помощью классической формулы Грина (6.9) нельзя получить описание оператора, сопряженного к оператору, соответствующему *многоточечной* (т. е. с краевыми условиями, сосредоточеными более, чем в двух точках) краевой задаче. Эти обстоятельства также побуждают нас перейти от обыкновенных дифференциальных выражений к квазидифференциальным. Ниже мы увидим, что квазидифференциальное выражение при очень широких предположениях о его коэффициентах обладает формально сопряженным в смысле Лагранжа квазидифференциальным выражением. Мы получим также аналог *формулы краевых форм*, позволяющий строить сопряженные краевые условия к многоточечным краевым условиям. При этом сопряженные краевые условия не будут зависеть от коэффициентов исходного квазидифференциального выражения.

И еще одно замечание. Мы не будем предполагать, что наши операторы, соответствующие краевым задачам, действуют в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_2[a,b]$. Вместо этого будем рассматривать операторы, действующие из вещественного банахова пространства $\mathbb{L}_q[a,b]$ в веще-

ственное банахово пространство $\mathbb{L}_p[a,b],\ p>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (разумеется, случай $p=q=2$ не исключается). Здесь важно, что операторы действуют из одного рефлексивного банахова пространства в сопряженное ему рефлексивное банахово пространство. При этом сопряженный оператор будет действовать точно так же. Более того, возможны так действующие симметрические и самосопряженные операторы.

Ниже мы мотивируем необходимость такого более широкого подхода. При таком подходе «скалярное» произведение оказывается «внешним». А именно, полагаем

$$\langle x,y\rangle_p \doteq \int\limits_a^b x(t)y(t)\,dt \quad (\langle y,x\rangle_q=\langle x,y\rangle_p,\ x\in\mathbb{L}_p[a,b],\ y\in\mathbb{L}_q[a,b])$$

(при $p=q=2$ это произведение оказывается обычным «внутренним» произведением).

7.2. Квазидифференциальные выражения. Пусть $I\subseteq\mathbb{R}$ — открытый интервал, $\mathfrak{A}_n(I)$ — множество нижних треугольных матриц $\mathcal{P}=(p_{ik})_0^n,\ p_{ik}:I\to\mathbb{R}$, таких, что p_{00} и p_{nn} измеримы, почти всюду (п.в.) конечны и п.в. отличны от нуля, а $1/p_{ii}\,(i=1,2,\dots,n{-}1)$, $p_{ik}/p_{ii}\,(i=1,2,\dots,n,\ k=0,1,\dots,i{-}1)$ локально суммируемы в I. Если $\mathcal{P}\in\mathfrak{A}_n(I)$, то будем говорить также, что матрица $\mathcal{P}$ или ее элементы удовлетворяют условиям $\mathfrak{A}_n(I)$.

Все соотношения между измеримыми функциями будем предполагать выполняющимися п.в.; если произведение $f(\cdot)\cdot g(\cdot)$ $(f,g:I\to\mathbb{R})$ непрерывно в окрестности $t_0\in I$, а в t_0 один из сомножителей (или оба) не определен, но существует предел $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)g(t)=C$, то полагаем $(f\cdot g)(t_0)=C$ и считаем функцию $(fg)(\cdot)$ непрерывной в точке t_0.

Пусть $\mathcal{P}\in\mathfrak{A}_n(I)$. Определим квазипроизводные ${}^k_{\mathcal{P}}x\,(k=0,1,\dots,n)$ функции $x:I\to\mathbb{R}$ равенствами

$$\begin{gathered} {}^0x \doteq {}^0_{\mathcal{P}}x \doteq p_{00}x, \\ {}^kx \doteq {}^k_{\mathcal{P}}x \doteq p_{kk}\frac{d}{dt}\big({}^{k-1}_{\mathcal{P}}x\big)+\sum_{\nu=0}^{k-1} p_{kk}\big({}^{\nu}_{\mathcal{P}}x\big) \qquad (k=1,2,\dots,n). \end{gathered} \tag{7.1}$$

Квазидифференциальным выражением (КдВ) n-го порядка назы-

вается выражение

$$(Lx)(t) \doteq ({}^{n}_{\mathcal{P}}x)(t), \quad t \in I. \tag{7.2}$$

Матрица $\mathcal{P}$ называется порождающей для выражения (7.2). Наряду с выражением (7.2) рассмотрим также квазидифференциальное уравнение (КдУ)

$$(Lx)(t) = f(t), \quad t \in I \ (f : I \to \mathbb{R}). \tag{7.3}$$

Решением уравнения (7.3) называется всякая функция $x : I \to \mathbb{R}$, имеющая локально абсолютно непрерывные квазипроизводные ${}^{k}_{\mathcal{P}}x$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ и п.в. в I удовлетворяющая уравнению (7.3).

Теорема 7.1. Если $\mathcal{P} \in \mathfrak{A}_n(I)$ и функция $f(\cdot)/p_{nn}(\cdot)$ локально суммируема в I, то существует единственное решение уравнения (7.3), удовлетворяющее начальным условиям

$$({}^{k}_{\mathcal{P}}x)(a) = \gamma_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1, \ a \in I, \quad \gamma_k \in \mathbb{R}). \tag{7.4}$$

Доказательство. Задача Коши (7.3), (7.4) эквивалентна задаче

$$\dot{z} = A(t)z + \widehat{f}(t), \quad z(a) = \gamma, \tag{7.5}$$

где $z = {}_{\mathcal{P}}x \doteq \left({}^{0}_{\mathcal{P}}x, \ \ldots, \ {}^{n-1}_{\mathcal{P}}x\right)^{\top}$, $\widehat{f} = (0, \ldots, 0, f/p_{nn})^{\top}$,

$$A = \begin{pmatrix} -\dfrac{p_{10}}{p_{11}} & \dfrac{1}{p_{11}} & 0 & \ldots & 0 \\ -\dfrac{p_{20}}{p_{22}} & -\dfrac{p_{21}}{p_{22}} & \dfrac{1}{p_{22}} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\dfrac{p_{n-1,0}}{p_{n-1,n-1}} & -\dfrac{p_{n-1,1}}{p_{n-1,n-1}} & -\dfrac{p_{n-1,2}}{p_{n-1,n-1}} & \ldots & \dfrac{1}{p_{n-1,n-1}} \\ -\dfrac{p_{n0}}{p_{nn}} & -\dfrac{p_{n1}}{p_{nn}} & -\dfrac{p_{n2}}{p_{nn}} & \ldots & -\dfrac{p_{n-1,n}}{p_{nn}} \end{pmatrix},$$

$\gamma = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1})^{\top}$, $\top$ — знак транспонирования. При условиях теоремы матрица A и вектор $\widehat{f}$ удовлетворяют условиям Каратеодори. Следовательно,задача (7.5), а с ней и задача (7.2),(7.4) имеет единственное решение, компоненты которого — квазипроизводные ${}^{k}_{\mathcal{P}}x$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$— локально абсолютно непрерывны.

Рассмотрим ряд примеров.

1. Обыкновенное дифференциальное выражение (ОДВ) (6.1) получается из КдВ (7.2), если $p_{kk} = 1$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, $p_{nk} = p_{n-k}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, $p_{ik} = 0$ $(i = 1, \ldots, k-1)$; в этом случае квазипроизводные до порядка $n-1$ включительно совпадают с обыкновенными производными, а производная порядка n есть просто Lx. Таким образом, если подматрица $\mathcal{P}_0 = (p_{ik})_0^{n-1}$ матрицы $\mathcal{P}$ есть единичная матрица, то выражение (7.2) есть ОДВ.

2. Выражение $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \big(p_{n-k} y\big)^{(k)}$ (см. (6.6)), формально сопряженное с (6.1) получается из (7.2) при $p_{00} = p_0$, $p_{kk} = 1$ $(k = 1, \ldots, n)$, $p_{i0} = (-1)^i p_i / p_0$ $(i = 1, \ldots, n)$, $p_{ik} = 0$ $(i = 1, \ldots, n,\ 1 < k < i)$. Аналогично можно записать в виде КдВ формально самосопряженное в смысле Лагранжа выражение (6.13).

3. В ряде работ (см. , например, [29; 30–32]) рассматривается выражение $\sum_{k=0}^{n} p_k L_k x$, $(L_0 x = \rho x,\ L_k x = \rho_k \dfrac{d}{dt} L_{k-1} x\ (k = 1, \ldots, n))$, которое также содержится в (7.2). Здесь $p_{kk} = \rho_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, $p_{nk} = p_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, $p_{nn} = \rho_n p_n$, $p_{ik} = 0$ $(i = 1, \ldots, n-1,\ k < i)$.

4. В статье [32] изучается система уравнений первого порядка

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{i+1} \alpha_{ik} x_k \quad (i = 1, \ldots, n-1), \ \ \frac{dx_n}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk} x_k,$$

$(\alpha_{i,i+1}(t) > 0)$, которую можно записать в виде уравнения (7.3) (без дополнительных предположений о гладкости коэффициентов), если положить $p_{00} = p_{nn} = 1$, $p_{kk} = 1/\alpha_{k,k+1}$ $(k = 1, \ldots, n-1)$, $p_{ik} = -\alpha_{i,k+1}/\alpha_{i,i+1}$ $(i = 1, \ldots, n-1,\ 0 \leqslant k < i)$, $p_{nk} = \alpha_{n,k+1}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Выше, при доказательстве теоремы 7.1, было показано, что и наоборот, квазидифференциальное уравнение (7.3) может быть записано в виде системы указанного типа.

5. В статье [7] рассматривается квазидифференциальное уравнение более частного вида, также обладающее формально сопряженным в смысле Лагранжа уравнением при весьма широких предположениях о коэффициентах.

Пусть вектор-функции $p, q : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ таковы, что скалярные

функции $\frac{p_k}{p_0}$, $\frac{q_k}{q_0}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ локально суммируемы в I. Определим квазипроизводные $x^{[k]_p}$ следующим образом:

$$x^{[0]_q} \doteq q_0 x, \quad x^{[k]_q} = q_k x - \left(x^{[k-1]_q}\right)' \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{7.6}$$

и рассмотрим выражение

$$Q_p^q x \doteq \sum_{k=1}^{n} (-1)^k p_{n-k} x^{[k]_q}. \tag{7.7}$$

Тогда обыкновенное дифференциальное выражение (6.1) запишется в виде $Lx \equiv Q_{(p_0, p_1, \ldots, p_n)}^{(1,0,\ldots,0)} x$, а его формально сопряженное в смысле Лагранжа выражение (6.6) — в виде $L^+ y \equiv Q_{(1,0,\ldots,0)}^{(p_0, p_1, \ldots, p_n)} y$, а в общем случае формально сопряженным в смысле Лагранжа к выражению (7.7) будет выражение $Q_q^p y$.

Квазипроизводные (7.6) и выражение (7.7) получаются из общих определений при $\mathcal{P} =$

$$\begin{pmatrix} q_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\frac{q_1}{q_0} & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{q_2}{q_0} & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (-1)^{n-1}\frac{q_{n-1}}{q_0} & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ (-1)^n \frac{q_n}{q_0} + (-1)^n \frac{p_n}{p_0} & (-1)^{n-1}\frac{p_{n-1}}{p_0} & (-1)^{n-2}\frac{p_{n-2}}{p_0} & \ldots & -\frac{p_1}{p_0} & 1 \end{pmatrix}$$

По-видимому, одной из первых (если не первой!) работ, в которых систематически изучаются КдУ вида (7.3), является работа Д. Шина (Шин Ден Юна) [27].

7.3. Фрагменты общей теории КдУ (7.3). Пусть $\mathcal{P} \in \mathfrak{A}_n(I)$. Обозначим через $\mathfrak{X}_{\mathcal{P}}$ множество функций $x : I \to \mathbb{R}$, обладающих непрерывными кусочно абсолютно непрерывными на I квазипроизводными ${}_{\mathcal{P}}^{k}x$ $(k = 0, 1. \ldots, n-1)$, а функция ${}_{\mathcal{P}}^{n}x/p_{nn}$ локально суммируема. В силу теоремы 7.1 линейное пространство $\mathfrak{X}_{\mathcal{P}}$ изоморфно $\mathbb{R} \times \mathbb{L}_{loc}(I)$, где $\mathbb{L}_{loc}$ — линейное пространство локально суммируемых на I функций. Таким образом, для каждой $\mathcal{P} \in \mathfrak{A}_n(I)$ $\mathfrak{X}_{\mathcal{P}}$ содержит достаточно большой запас функций.

Нижеследующий пример показывает, что сами элементы $\mathfrak{X}_{\mathcal{P}}$ могут быть очень «плохими» функциями, лишь бы их квазипроизводные обладали нужной гладкостью. . Пусть $n = 2$, $I = \mathbb{R}$, $a \in I$, δ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ — рационально независимые иррациональные числа, $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, ...\}$ — множество рациональных чисел, $\alpha(t) \doteq \sum\limits_{r_k < t} (1/2^k)$ (здесь сумма распространяется на те k, для которых $r_k < t$), $p_{00}(t) \doteq 1/\alpha(t), p_{11}(t) \doteq 1/\alpha(t-\delta_1), p_{10}(t) \doteq \alpha(t-\delta_2), p_{22}(t) \doteq 1/\alpha(t-\delta_3)$, $p_{21}(t) \doteq \alpha(t-\delta_1)\alpha(t-\delta_2)/\alpha(t-\delta_3)$, $p_{20}(t) \equiv 0$. Очевидно, $\mathcal{P} \in \mathfrak{A}_2(I)$. Здесь элементы $\mathfrak{X}_{\mathcal{P}}$ разрывны во всех рациональных точках, квазипроизводные ${}^0_{\mathcal{P}}x$ и ${}^1_{\mathcal{P}}x$ абсолютно непрерывны; функции $({}^0_{\mathcal{P}}x)'$ разрывны в точках множества $(\mathbb{Q}+\delta_1) \cup (\mathbb{Q}+\delta_2)$. Решение задачи (7.2),(7.4) с данной порождающей матрицей $\mathcal{P}$, $\gamma_0 = \gamma_1 = 0$ и

$$f(t) = \frac{\alpha(t-\delta_4)}{\alpha(t-\delta_3)} \int_a^t \frac{\alpha(s-\delta_1)}{\alpha(s-\delta_2)} ds$$

имеет вид

$$x(t) = \alpha(t) \exp(-\int_a^t \alpha(\tau-\delta_1)\alpha(\tau-\delta_2) d\tau) \int_a^t f(s)\alpha(s-\delta_1) ds.$$

Здесь функция $({}^1_{\mathcal{P}}x)'$ разрывна в точках множества $(\mathbb{Q}+\delta_3) \cup (\mathbb{Q}+\delta_4)$.

Из теоремы 7.1 следует, что однородное уравнение

$$Lx = 0 \quad (t \in I) \tag{7.8}$$

имеет фундаментальную систему решений

$$\{x_k\}_1^n, \quad x_k \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

для которой определитель (аналог вронскиана)

$$W_{\mathcal{P}} \doteq \det({}^{i-1}_{\mathcal{P}}x_k)_1^n$$

не обращается в нуль ни в одной точке из I. Частное решение неоднородного уравнения (7.2) может быть найдено квазидифференциальным аналогом метода вариации произвольных постоянных, который приводит к представлению

$$x_*(t) = \int_a^t C_{\mathcal{P}}(t, s) \left(f(s)/p_{nn}(s)\right) ds \quad (t \in I), \tag{7.9}$$

где $x_*(\cdot)$ — решение уравнения (7.2), удовлетворяющее начальным условиям (7.4) при $\gamma_k = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$,

$$C_{\mathcal{P}}(t,\, s) = \begin{vmatrix} ({}^0_{\mathcal{P}}x_1)(s) & \ldots & ({}^0_{\mathcal{P}}x_n)(s) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ ({}^{n-2}_{\mathcal{P}}x_1)(s) & \ldots & ({}^{n-2}_{\mathcal{P}}x_n)(s) \\ x_1(t) & \ldots & x_n(t) \end{vmatrix} \Big/ W_{\mathcal{P}}(s)$$

— функция Коши уравнения (7.8). Непосредственной проверкой с учетом определений (7.1) убеждаемся в том, что $C_{\mathcal{P}}(\cdot,\, s)$ удовлетворяет однородному уравнению (7.8) при всех $s \in I$. Кроме того, легко видеть, что

$$({}^k_{\mathcal{P}}C_{\mathcal{P}})(t,\, s)\big|_{t=s} = 0 \ (k = 0, 1, \ldots, n-2), \ \ ({}^{n-1}_{\mathcal{P}}C_{\mathcal{P}})(t,\, s)\big|_{t=s} = 1. \quad (7.10)$$

Из теоремы 7.1 следует, что, как и в случае ОДУ, уравнение (7.8) и начальные условия (7.10) однозначно определяют функцию Коши.

Общее решение уравнения (7.2) дается обычной формулой

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k + x_*,$$

где c_i — произвольные постоянные, а x_* определяется формулой Коши (7.9).

Так как $x_k \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то определитель $W_{\mathcal{P}}$ локально абсолютно непрерывен. Если его продифференцировать и учесть определения (7.1), то окажется, что он удовлетворяет уравнению

$$dW_{\mathcal{P}}/dt = -\sum_{k=0}^{n-1} (p_{k+1,\,k}(t)/p_{k+1,\,k+1}(t))\, W_{\mathcal{P}},$$

из которого получаем следующий аналог формулы Остроградского–Лиувилля:

$$W_{\mathcal{P}}(t) = W_{\mathcal{P}}(a) \exp \int_a^t \left(-\sum_{k=0}^{n-1} (p_{k+1,\,k}(\tau)/p_{k+1,\,k+1}(\tau)) \right) d\tau.$$

Если зафиксировать первые n строк матрицы $\mathcal{P}$, то уравнение (7.8) однозначно восстанавливается по фундаментальной системе его решений по формуле

$$Lx = \frac{p_{nn}}{W_{\mathcal{P}}} \begin{vmatrix} {}^{0}_{\mathcal{P}}x_1 & \dots & {}^{0}_{\mathcal{P}}x_n & {}^{0}_{\mathcal{P}}x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}^{n-1}_{\mathcal{P}}x_1 & \dots & {}^{n-1}_{\mathcal{P}}x_n & {}^{n-1}_{\mathcal{P}}x \\ ({}^{n-1}_{\mathcal{P}}x_1)' & \dots & ({}^{n-1}_{\mathcal{P}}x_n)' & ({}^{n-1}_{\mathcal{P}}x)' \end{vmatrix} = 0.$$

7.4. Формально сопряженное выражение (уравнение). Пусть $\mathcal{P} \in \mathfrak{A}(I)$. Положим $\mathcal{R} \doteq \mathcal{P}^+ = (r_{ik})_0^n$,

$$r_{ik} = (-1)^{i+k} \frac{p_{n-k,\,n-i}\, p_{n-i,\,n-i}}{p_{n-k,\,n-k}} \quad (i = 0, 1, \dots, n,\ k = 0, 1, \dots, i); \tag{7.11}$$

$\mathcal{R}$ — нижняя треугольная матрица. Очевидно, что $\mathcal{R}^+ = (\mathcal{P}^+)^+ = \mathcal{P}$ и $\mathcal{R} \in \mathfrak{A}_n(I)$. Поэтому можно говорить о квазипроизводных ${}^{k}_{\mathcal{R}}y$ ($k = 0, 1, \dots, n$) и рассматривать выражение (уравнение)

$$(L^+y)(t) \doteq (-1)^n ({}^{n}_{\mathcal{R}}y)(t) \qquad \Big((L^+y)(t) = g(t)\Big) \tag{7.12}$$

которое называется формально сопряженным (сопряженным в смысле Лагранжа) выражению (7.2)$\Big($ уравнению (7.3)$\Big)$, так как имеет место тождество Лагранжа

$$yLx - xL^+y = d[x,\, y]/dt, \tag{7.13}$$

$$[x,\, y] \doteq \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k}\, ({}^{k-1}_{\mathcal{P}}x)\, ({}^{n-k}_{\mathcal{R}}y) = ({}_{\mathcal{P}}x)^T\, H({}_{\mathcal{R}}y), \tag{7.14}$$

$H = ((-1)^{i-1}\, \delta_{i,\,n-k+1})_1^n$. Для доказательства тождества (7.13) достаточно продифференцировать билинейную форму (7.14) и учесть определения (7.1) и (7.11). Проинтегрировав тождество (7.13), получим следующую формулу Грина:

$$\int_a^b (y(t)(Lx)(t) - x(t)(L^+y)(t))\, dt = (\beta_{\mathcal{P}}x)^T \mathfrak{N}(\beta_{\mathcal{R}}y), \tag{7.15}$$

где $\beta_{\mathcal{P}}x = (({}_{\mathcal{P}}x)^T(a),\, ({}_{\mathcal{P}}x)^T(b))^T$, $\mathfrak{N} = \mathrm{diag}(-H,\, H)$ ($[a,\, b] \subset I$, $x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}$, $y \in \mathfrak{X}_{\mathcal{R}}$).

Как и в случае ОДУ можно доказать (см. [10, с.13]), что если $\{u_k\}_{k=1}^n$ — ФСР однородного уравнения (7.8), то функциии

$$v_i = \frac{1}{p_{nn}} \cdot \frac{1}{W_{\mathcal{P}}} \cdot \frac{\partial W_{\mathcal{P}}}{\partial(\overset{n-1}{\mathcal{P}} u_i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

образуют ФСР однородного сопряженного уравнения

$$L^+ y = 0, \tag{7.16}$$

причем (ср. [24, 27])

$$\overset{k}{\mathcal{R}} v_i = \frac{(-1)^k}{W_{\mathcal{P}}} \cdot \frac{\partial W_{\mathcal{P}}}{\partial(\overset{n-k-1}{\mathcal{P}} u_i)} \quad (t \in I,\ k = 0, 1, \ldots, n-1,\ i = 1, 2, \ldots, n).$$

В дальнейшем будем считать, что для любой $\mathcal{P} \in \mathfrak{A}_n(I)$ выполняются неравенства $p_{ii}(t) > 0$ п.в на I, $i = 0, 1, \ldots, n$. Из (7.11) следует, что тогда и для $\mathcal{R} = \mathcal{P}^+$ выполняются такие же неравенства. Кроме того, нам будет удобно «погружать» множество $\mathfrak{X}_{\mathcal{P}}$ $\Big(\mathfrak{X}_{\mathcal{R}}\Big)$ в пространство $\mathbb{L}_q[a, b]$ при некотором q, $1 < q < +\infty$ $\Big(\mathbb{L}_p[a, b]$ при $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\Big)$. Для этого нужно дополнительно потребовать, чтобы $\dfrac{\overset{n}{\mathcal{P}} x}{p_{nn}} \in \mathbb{L}_q[a, b]$; из (7.11) будет следовать , что тогда и $\dfrac{\overset{n}{\mathcal{R}} y}{r_{nn}} \in \mathbb{L}_p[a, b]$. При этом окажется, что $\mathfrak{X}_{\mathcal{P}}$ $\Big(\mathfrak{X}_{\mathcal{R}}\Big)$ плотно в $\mathbb{L}_q[a, b]$ $\Big(\mathbb{L}_p[a, b]\Big)$.

Линейные КдВ Lx (см. (7.2)) и $L^+ y$ (см. (7.12))определяют некоторые линейные операторы, действующие из $\mathbb{L}_q[a, b]$ в $\mathbb{L}_p[a, b]$. А именно, $\mathcal{D}\big(\mathbf{L}\big) = \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}$, $\mathcal{D}\big(\mathbf{L}^+\big) = \mathfrak{X}_{\mathcal{R}}$, $\mathbf{L}x = Lx$, $\mathbf{L}^+ y = L^+ y$ $(x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}},\ y \in \mathfrak{X}_{\mathcal{R}})$.

Следующий пример показывает, что не обязательно $q = p = 2$. Пусть $n = 2$, $[a, b] = [0, 1]$, $\mathcal{P} \doteq diag\left(\sqrt[3]{t},\ \sqrt[3]{t},\ \sqrt[3]{t}\right)$ (здесь $\mathcal{R} = \mathcal{P}$), $x(t) = \sqrt{t} - \sqrt[3]{t}$, $x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}} \subset \mathbb{L}_q[0, 1] \subset \mathbb{L}_2[0, 1]$ $(2 < q < 3,\ 1 < p < 2)$. При этом $(Lx)(t) = \frac{5}{36\sqrt{t}}$, $\mathbf{L}x \notin \mathbb{L}_2[0, 1]$.

С помощью «внешнего» произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ формулу Грина (7.15) можно записать в виде:

$$\langle y, \mathbf{L}x \rangle_q - \langle x, \mathbf{L}^+ y \rangle_p = (\beta_{\mathcal{P}} x)^T \mathfrak{N} (\beta_{\mathcal{R}} y) \quad (x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}},\ y \in \mathfrak{X}_{\mathcal{R}}). \tag{7.17}$$

Что касается двухточечных квазидифференциальных краевых задач, то отметим, что утверждения п.п. 6.1–6.3 остаются в силе, если только произвести очевидные изменения (учесть новые определения операторов $\mathbf{L}$, $\mathbf{L}^+$ и связанных с ними, заменить пространство

$\mathcal{H} = \mathbb{L}_2[a,b]$ смотря по обстоятельствам на $\mathbb{L}_q[a,b]$ или $\mathbb{L}_p[a,b]$, скалярное произведение — на внешнее, обыкновенные производные — на квазипроизводные, Y_a (Y_b) — на ${}_{\mathcal{P}}y(a)$ или ${}_{\mathcal{R}}y(a)$ $\Big({}_{\mathcal{P}}y(b)$ или ${}_{\mathcal{R}}y(b)\Big)$ и т. д.) В дальнейшем, имея ввиду квазидифференциальные краевые задачи, мы будем ссылаться на эти утверждения, а также на примеры, приведенные в п. 6.3, без дополнительных разъяснений.

7.5. Общая многоточечная краевая задача. В случае, если хотя бы одно краевое условие сосредоточено в некоторой внутренней точке $c \in [a,b]$, то рассуждения, проведенные в предыдущем параграфе, уже не проходят. Сопряженная к такой краевой задаче уже не будет классической в том смысле, что сопряженной уравнение не будет удовлетворяться на всем $[a,b]$, а лишь на промежутках, между точками сосредоточения краевых условий; вместе со значениями решения в точках a и b, в ее краевые условия войдут односторонние пределы некоторых квазипроизводных в точке c.

Сначала рассмотрим наиболее общие классические многоточечные квазидифференциальные краевые условия. Пусть

$$lx \doteq \sum_{k=0}^{\nu+1} M_k\big({}_{\mathcal{P}}x\big)(a_k) = 0 \tag{7.18}$$

$(a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{\nu+1} = b, \quad [a,b] \doteq I \subset J)$, где $\nu \geqslant 1$ — число внутренних точек, в которых сосредоточены краевые условия, $n \times n$-матрицы M_k таковы, что ранг $n \times (\nu+2)n$-матрицы $M = (M_0 \ldots M_{\nu+1})$ равен n. Обозначим $\Delta \doteq \{a_1, \ldots, a_{\nu+1}\}$ — множество внутренних точек, в которых сосредоточены краевые условия, $\gamma_{\mathcal{P}} : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}^{n(\nu+2)}$,

$$\gamma_{\mathcal{P}} x \doteq \Big(\big({}_{p}Px\big)^{\top}(a_0), \big({}_{\mathcal{P}}x\big)^{\top}(a_1), \ldots, \big(\mathcal{P}x\big)^{\top}(a_{\nu+1})\Big)^{\top};$$

таким образом, $lx = M(\gamma_{\mathcal{P}} x)$; пусть $\mathfrak{X}_{\mathcal{P},\gamma} \doteq \{x : x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}, \gamma_{\mathcal{P}} x = 0\}$, $\mathfrak{X}_{\mathcal{P},\beta} \doteq \{x : x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}, \beta x = 0\}$, $\quad \mathfrak{X}_{\mathcal{P},l} \doteq \{x : x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}, lx = 0\}$.

Лемма 7.1. *Множества $\mathfrak{X}_{\mathcal{P},\beta}$, $\mathfrak{X}_{\mathcal{P},\gamma}$, $\mathfrak{X}_{\mathcal{P},l}$ плотны в $\mathbb{L}_q[a,b]$.*

Доказательство. В силу включений $\mathfrak{X}_{\mathcal{P},\gamma} \subset \mathfrak{X}_{\mathcal{P},\beta}\big(\subset \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}\big)$, $\mathfrak{X}_{\mathcal{P},\gamma} \subset \mathfrak{X}_{\mathcal{P},l}\big(\subset \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}\big)$ достаточно доказать лишь плотность множества $\mathfrak{X}_{\mathcal{P},\gamma}$.

Пусть $y \in \mathbb{L}_q[a,b]$. По лемме 6.2 для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $x_i \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}$ такие, что $\big({}_{\mathcal{P}}x\big)(a_i) = 0,\ \big({}_{\mathcal{P}}x\big)(a_{i+1}) = 0,$

$$\int\limits_{a_i}^{a_{i+1}} |x_i(t) - y(t)|^q\, dt < \frac{\varepsilon^q}{\nu+1} \quad (i = 0, 1, \ldots, \nu).$$

Положим $x(t) \doteq x_i(t)$ для $t \in i_i \doteq [a_i, a_{i+1}),\ i = 0, 1, \ldots, \nu-1,\ x(t) \doteq x_\nu(t)$ для $t \in I_\nu \doteq [a_\nu, b],\ f(t) \doteq^n_{\mathcal{P}} x_i(t)$ для $t \in I_i$ $(i = 0, 1, \ldots, \nu)$. Очевидно, $x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P},l}$ и $\|x - y\|_{\mathbb{L}_q[a,b]} < \varepsilon$.

Лемма 7.2. *Для любых $\delta_i \in \mathbb{R}^n$ $(i = 0, 1, \ldots, \nu+1)$ существует функция $x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}$ такая, что*

$$\big({}_{\mathcal{P}}x\big)(a_i) = \delta_i, \quad i = 0, 1, \ldots, \nu+1. \tag{7.19}$$

Доказательство. Достаточно применить лемму 6.2 на каждом из множеств $cl I_i,\ i = 0, 1, \ldots, \nu$.

Введем линейное пространство $\mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R}}$ функций y, имеющих кусочно абсолютно непрерывные квазипроизводные ${}^k_{\mathcal{R}}y$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, которые допускают конечные разрывы в точках $a_i \in \Delta$ и таких, что $\dfrac{{}^n_{\mathcal{R}}y}{r_{nn}} \in \mathbb{L}_p[a,b]$. Так как $\mathfrak{X}_{\mathcal{R}} \subset \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R}}$, то $\mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R}}$ плотно в $\mathbb{L}_q[a,b]$.

Введем также ряд новых обозначений.

$$\big(\sigma^i_{\mathcal{R}}y\big)(t) \doteq \big({}^i_{\mathcal{R}}y\big)(t+) - \big({}^i_{\mathcal{R}}y\big)(t-)\ (i = 0, 1, \ldots, n-1);$$
$$\sigma_{\mathcal{R}}y \doteq \big(\sigma^0_{\mathcal{R}}y,\, \sigma^1_{\mathcal{R}}y, \ldots, \sigma^{n-1}_{\mathcal{R}}y\big)^{\top};$$
$$\delta_{\mathcal{R}}y \doteq \Big(\big({}_{\mathcal{R}}y\big)(a),\, \big(\sigma_{\mathcal{R}}y\big)(a_1), \ldots, \big(\sigma_{\mathcal{R}}y\big)(a_\nu), \big({}_{\mathcal{R}}y\big)(b)\Big)^{\top};$$
$$\mathfrak{M} \doteq diag\,(-H, \ldots, -H, H) - (\nu+2)n \times (\nu+2)n\text{-}$$

блочно-диагональная матрица; $\mathbf{L}^{+,\,\boldsymbol{\Delta}}$ — расширение оператора $\mathbf{L}^+$ на $\mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R}}$ по формуле

$$\big(\mathbf{L}^{+,\,\boldsymbol{\Delta}}y\big)(t) \doteq \big(\mathbf{L}^+y\big)(t),\ t \in cl\, I_i\ (i = 0, 1, \ldots, \nu),$$

которые позволяют переписать формулу Грина (7.17) в новом виде:

$$\langle y, \mathbf{L}x\rangle_q - \langle x, \mathbf{L}^{+,\,\boldsymbol{\Delta}}y\rangle_p = \big(\gamma_{\mathcal{P}}x\big)^T \mathfrak{M}\big(\delta_{\mathcal{R}}y\big) \quad \big(x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}},\ y \in \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R}}\big). \tag{7.20}$$

Если же $x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P},\gamma}$, $y \in \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R}}$, то отсюда следует

$$\langle y, \mathbf{L}_\gamma x\rangle_q = \langle x, \mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}} y\rangle_p, \tag{7.21}$$

где $\mathbf{L}_\gamma$ — сужение оператора $\mathbf{L}$ на $\mathfrak{X}_{\mathcal{P},\gamma}$.

Лемма 7.3. *Для любых $\eta_i \in \mathbb{R}^n$ $(i = 0, 1, \ldots, \nu+1)$ существует функция $x \in \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R}}$ такая, что*

$$\delta_{\mathcal{R}} y = \eta = \left(\eta_0^\top, \eta_1^\top, \ldots, \eta_{\nu+1}^\top\right)^\top. \tag{7.22}$$

Доказательство. Последовательно решаем задачи Коши для уравнения $(L^+y)(t) = g(t)$: $\left({}_{\mathcal{R}}y_0\right)(a) = \eta_0$ $(t \in cl\, I_0)$, $\left({}_{\mathcal{R}}y_i\right)(a_i) = \left({}_{\mathcal{R}}y_{i-1}\right)(a_i) + \eta_i$ $(t \in cl\, I_i,\ i = 1, 2, \ldots, \nu-1)$. Для нахождения y_ν воспользуемся утверждением типа леммы 6.1; начальные условия будут иметь вид $\left({}_{\mathcal{R}}y_\nu\right)(a_\nu) = \left({}_{\mathcal{R}}y_{\nu-1}\right)(a_\nu) + \eta_\nu$, $\left({}_{\mathcal{R}}y_\nu\right)(b) = \eta + \nu + 1$. Функция $y(t) = y_i(t)$ $(t \in I_i,\ i = 0, 1, \ldots, \nu)$ — требуемая.

Теорема 7.2.

$$\left(\mathbf{L}_\gamma\right)^* = \mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}, \quad \left(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}\right)^* = \mathbf{L}_\gamma.$$

Доказательство. Включение $\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}} \subset \left(\mathbf{L}_\gamma\right)^*$ следует из (7.21). Пусть $g \in \mathcal{D}\Big(\left(\mathbf{L}_\gamma\right)^*\Big)$ Положим $h \doteq \left(\mathbf{L}_\gamma\right)^* g\, (\in \mathbb{L}_p[a,b])$ и пусть y — произвольное решение уравнения $\left(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}} y\right)(t) = h(t)$ $\left(y \in \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R}}\right)$. Сравнивая два выражения для $\langle x, h\rangle_q$, приходим к выводу, что $\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}(y-g) = 0$, откуда следует. что $g \in \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R}} = \mathcal{D}\Big(\left(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}\right)$. Значит, $\left(\mathbf{L}_\gamma\right)^* \subset \mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}$, т. е на самом деле здесь имеет место равенство.

Из формулы (7.21) следует, что $\mathbf{L}_\gamma \subset \left(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}\right)^*$. Пусть $x \in \mathcal{D}\Big(\left(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}\right)^*\Big)$. Так как $\mathbf{L}^+_\beta \subset \mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}$, то $\left(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}\right)^* \subset \left(\mathbf{L}^+_\beta\right)^*$. В силу теоремы 6.1 правая часть этого включения есть оператор $\mathbf{L}$ $\left(\mathbf{L}^+_\beta\right.$ — аналог оператора $\left.\mathbf{L}^+_{\mathbf{0}}\right)$. Значит, $x \in \mathcal{D}(\mathbf{L})$. Отсюда и из определения оператора $\left(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}}\right)^*$ следует

$$\langle \mathbf{L}x, y\rangle_p = \langle \left(\mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}} x, y\right)\rangle_p = \langle x, \mathbf{L}^+ y\rangle_q \quad \left(y \in \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R}}\right), \tag{7.23}$$

а из формулы (7.20) —

$$\langle \mathbf{L}x, y\rangle_p = \langle x, \mathbf{L}^{+,\boldsymbol{\Delta}} y\rangle_q + \left(\gamma_{\mathcal{P}} x\right)^\top \mathfrak{M}\left(\delta_{\mathcal{R}} y\right).$$

Сравнивая два последних равенства получаем $\big(\gamma_{\mathcal{P}}x\big)^\top\mathfrak{M}\big(\delta_{\mathcal{R}}y\big) = 0$. Отсюда и из леммы 7.3 в силу произвольности $y \in \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R}}$ следует, что $\gamma_{\mathcal{P}}x = 0$, т. е. $x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P},\gamma} = \mathcal{D}\big(\mathbf{L}_\gamma\big)$. Значит, $\big(\mathbf{L}^{+,\,\boldsymbol{\Delta}}\big)^* \subset \mathbf{L}_\gamma$. Это вместе с ранее установленным противоположным включением завершает доказательство теоремы.

Следствие 7.1. *Операторы* $\mathbf{L}_\gamma$, $\mathbf{L}^{+,\,\boldsymbol{\Delta}}$ *замкнуты.*

7.6. Сопряженная краевая задача. Для построения задачи, сопряженной к краевой задаче (7.3), (7.18) понадобится ряд новых обозначений. Пусть $\widehat{M}$ — такая $(\nu+1)n \times (\nu+2)n$-матрица, что ранг $(\nu+2)n \times (\nu+2)n$-матрицы $\widetilde{M} \doteq \big(M^\top, \widehat{M}^\top\big)^\top$ равен $(\nu+2)n$ (тогда $lx = \big(\gamma_{\mathcal{P}}\big)x)$; полагаем $\widetilde{l}x \doteq \widetilde{M}\big(\gamma_{\mathcal{P}}x\big)$, $\widehat{l}x \doteq \widehat{M}\big(\gamma_{\mathcal{P}}x\big)$;

$$\widetilde{M}^+ \doteq S_{(\nu+2)n}\big(\widetilde{M}^{-1}\big)^\top\mathfrak{M}, \tag{7.24}$$

M^+ $\Big(\widehat{M}^+\Big)$ — подматрица, состоящая из первых $(\nu+1)n$ $\Big($ последних n строк $\Big)$ матрицы $\widetilde{M}^+$; таким образом, $\widetilde{M}^+ = \Big(\big(M^+\big)^\top, \big(\widehat{M}^+\big)^\top\Big)^\top$; полагаем

$$l^+y \doteq M^+\big(\delta_{\mathcal{R}}y\big), \quad \widetilde{l}^+y \doteq \widetilde{M}^+\big(\delta_{\mathcal{R}}y\big), \quad \widehat{l}^+ \doteq \widehat{M}^+\big(\delta_{\mathcal{R}}y\big).$$

Эти обозначения позволяют переписать формулу Грина (7.20) в виде следующей *формулы краевых форм:*

$$\begin{aligned}\langle y, \mathbf{L}x\rangle_q - \langle x, \mathbf{L}^{+,\,\boldsymbol{\Delta}}y\rangle_p &= (\widetilde{l}x)^\top S_{(\nu+2)n}(\widetilde{l}^+y) = \\ &= (lx)^\top S_n(\widehat{l}^+y) + (\widehat{l}x)^\top S_{(\nu+1)n}(l^+y) \quad \big(x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}},\ y \in \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R}}\big).\end{aligned} \tag{7.25}$$

Отсюда для всех $x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P},\,l}$ $y \in \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R},\,l^+}$

$$\langle \mathbf{L}x, y\rangle_p = \langle x, \mathbf{L}^{+,\,\boldsymbol{\Delta}}y\rangle_q. \tag{7.26}$$

Точно так же, как лемма 6.1 с помощью леммы 7.2 доказывается следующее утверждение.

Лемма 7.4. *Для любого* $\widetilde{\delta} \in \mathbb{R}^{(\nu+2)n}$ *существует функция* $x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}$ *такая, что* $\widetilde{l}x = \widetilde{\delta}$

Из леммы 7.3 при $\eta = \big(\widetilde{M}^+\big)^{-1}\delta$ следует

Лемма 7.5. *Для любого* $\delta \in \mathbb{R}^{(\nu+2)n}$ *существует функция* $y \in \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R}}$ *такая, что* $\widetilde{l}^{+}y = \delta$

Теорема 7.3.

$$\big(\mathbf{L}_{\mathbf{l}}\big)^{*} = \mathbf{L}^{+,\,\boldsymbol{\Delta}}_{\mathbf{l}^{+}}, \quad \big(\mathbf{L}^{+,\,\boldsymbol{\Delta}}_{\mathbf{l}^{+}}\big)^{*} = \mathbf{L}_{\mathbf{l}}.$$

Доказательство. Из равенства (7.26) следует, что $\mathbf{L}^{+,\,\boldsymbol{\Delta}}_{\mathbf{l}^{+}} \subset \big(\mathbf{L}_{\mathbf{l}}\big)^{*}$. Пусть $y \in \mathcal{D}\Big(\big(\mathbf{L}_{\mathbf{l}}\big)^{*}\Big)$. Так как $\mathbf{L}_{\gamma} \subset \mathbf{L}_{\mathbf{l}}$, то $\big(\mathbf{L}_{\mathbf{l}}\big)^{+} \subset \big(\mathbf{L}_{\gamma}\big)^{*} = \mathbf{L}^{+,\,\boldsymbol{\Delta}}$. Для $\delta = 0$ ($\delta \in \mathbb{R}^{n}$) и произвольного $\widehat{\delta} \in \mathbb{R}^{(\nu+1)}$ определим x согласно лемме 7.4 $\Big(\widetilde{\delta} = \big(\delta^{\top}, \widehat{\delta}^{\top}\big)^{\top}\Big)$. Тогда из формулы краевых форм (7.25) получаем

$$\langle x,\, \big(\mathbf{L}_{\gamma}\big)^{*}y\rangle_{q} = \langle x,\, \mathbf{L}^{+,\,\boldsymbol{\Delta}}y\rangle_{q} = \langle \mathbf{L}_{\mathbf{l}},\, y\rangle_{p} - \widehat{\delta}^{\top}_{(\nu+1)n}\big(l^{+}y\big).$$

Отсюда и из определения $\big(\mathbf{L}_{\mathbf{l}}\big)^{*}$ ввиду произвольности $\widehat{\delta}$ следует, что $l^{+}u = 0$, т. е. $y \in \mathfrak{X}_{\mathcal{R},\,l^{+}} = \mathcal{D}\big(\mathbf{L}^{+,\,\boldsymbol{\Delta}}_{\mathbf{l}^{+}}\big)$, $\big(\mathbf{L}_{\mathbf{l}}\big)^{*} \subset \mathbf{L}^{+,\,\boldsymbol{\Delta}}_{\mathbf{l}^{+}}$. Таким образом, первое равенство доказано.

Из равенства (7.26) видим, что $\mathbf{L}_{\mathbf{l}} \subset \big(\mathbf{L}^{+,\,\boldsymbol{\Delta}}_{\mathbf{l}^{+}}\big)^{*}$. Осталось доказать противоположное включение. Пусть $x \in \mathcal{D}\Big(\big(\mathbf{L}^{+,\,\boldsymbol{\Delta}}_{\mathbf{l}^{+}}\big)^{*}\Big)$. Имеет место цепочка импликаций:

$$\big(y \in \mathfrak{X}_{\mathcal{R},\,\gamma}\big) \Longrightarrow \big(\delta_{\mathcal{R}}y = 0\big) \Longrightarrow \big(l^{+}y = 0\big) \Longrightarrow \big(\mathfrak{X}_{\mathcal{R},\,\gamma} \subset \mathfrak{X}_{\mathcal{R},\,l*+}\big) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \big(\mathbf{L}^{+}_{\gamma} \subset \mathbf{L}^{+,\,\boldsymbol{\Delta}}_{\mathbf{l}^{+}}\big) \Longrightarrow \Big(\big(\mathbf{L}^{+,\,\boldsymbol{\Delta}}_{\mathbf{l}^{+}}\big)^{*} \subset \mathbf{L}\Big) \Longrightarrow \big(x \in \mathcal{D}(\mathbf{L})\big).$$

Заменив во второй части доказательства теоремы 7.2 ссылки на (7.20) и лемму 7.3 ссылками на (7.25) и лемму 7.5 соответственно,

$$\mathbf{L}_{\gamma}, \quad \mathfrak{X}_{\mathcal{P},\,\gamma}, \quad \gamma_{\mathcal{P}}x, \quad \mathbf{L}^{+,\,\boldsymbol{\Delta}}, \quad \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R}}, \quad \mathfrak{M}, \quad \delta_{\mathcal{R}}y$$

на

$$\mathbf{L}_{\mathbf{l}}, \quad \mathfrak{X}_{\mathcal{P},\,l}, \quad lx, \quad \mathbf{L}^{+,\,\boldsymbol{\Delta}}_{\mathbf{l}^{+}}, \quad \mathfrak{X}^{\Delta}_{\mathcal{R},\,l^{+}}, \quad S_{n}, \quad \widehat{l}^{+}y$$

соответственно, получим, что $\big(\mathbf{L}^{+,\,\boldsymbol{\Delta}}_{\mathbf{l}^{+}}\big)^{*} \subset \mathbf{L}_{\mathbf{l}}$; этим теорема полностью доказана.

Следствие 7.2. *Операторы* $\mathbf{L}_{\mathbf{l}}$ *и* $\mathbf{L}^{+,\,\boldsymbol{\Delta}}_{\mathbf{l}^{+}}$ *замкнуты.*

Теорема 7.3 означает, сопряженной к задаче (7.3), (7.18) будет краевая задача

$$\big(\mathbf{L}^{+,\,\boldsymbol{\Delta}}y\big)(t) = g(t) \quad (g \in \mathbb{L}_{p}[a,b],\ t \in I), \quad l^{+}y = 0. \tag{7.27}$$

7.7. Краевая задача, сопряженная к классической задаче Валле Пуссена . В качестве иллюстрации построений предыдущих пунктов рассмотрим многоточечные краевые условия Валле Пуссена (ср. (6.26)).

Скажем, что функция $x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}$ имеет в точке t_0 $\mathcal{P}$-нуль кратности k, $k \leqslant n-1$, если $\binom{i}{\mathcal{P}}x)(t_0) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, k-1$, $\binom{k}{\mathcal{P}}x)(t_0) \neq 0$; число нулей $\mathcal{P}$-нулей этой функции на промежутке J (в точке t_0) будем обозначать $\phi_{\mathcal{P}}(x, J)$ $\big(\phi_{\mathcal{P}}(x, t_0)\big)$. В этих обозначениях классические однородные краевые условия Валле Пуссена для уравнения (7.3) примут вид

$$\phi_{\mathcal{P}}(x, a_i) \geqslant \mu_i \quad \left(\mu_i > 0,\ i = 0, 1, \ldots, \nu+1,\ \sum_{ß=0}^{\nu+1} \mu_i = n\right) \tag{7.28}$$

Здесь строки матрицы M представляют собой попарно ортогональные векторы (одна компонента равна 1, остальные равны 0). В качестве матрицы $\widehat{M}$ возьмем матрицу такого же вида, дополняющую M до $\widetilde{M}$. Тогда матрица $\widetilde{M}$ будет ортогональной, $\big(\widetilde{M}^{-1}\big)^{\top} = \widetilde{M}$; в каждой строке матрицы $\widetilde{M}^{+}$ один элемент будет равен 1, остальные — 0. В итоге получим, что сопряженные к (7.28) краевые условия примут вид:

$$\phi_{\mathcal{R}}(y, a_i) \geqslant n - \mu_i, \quad i = 0,\ i = \nu+1, \tag{7.29}$$

$$\big(\sigma_{\mathcal{R}}^{k-1} y\big)(a_i) = 0, \quad k = 1, \ldots, n-\mu_i,\ i = 1, \ldots, \nu. \tag{7.30}$$

Отсюда видно, что решения уравнения

$$\big(\mathbf{L}^{+,\,\boldsymbol{\Delta}} y\big)(t) = g(t) \quad (t \in I,\ g \in \mathbb{L}_p[a, b]), \tag{7.31}$$

удовлетворяющие однородным сопряженным краевым условиям (7.30), фактически имеют в точках a_i непрерывные квазипроизводные до порядка $n - \mu_i - 1$ включительно ($i = 1, \ldots, \nu$). В связи с этим введем следующие определения и обозначения.

Скажем, что x ($x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}^{\Delta}$) имеет в точке a_i $\mathcal{P}$-дефект δ ($0 \leqslant \delta < n$) и запишем $\big(def_{\mathcal{P}} x\big)(a_i) = \delta$, если ${}^{n-\delta}pPx$ имеет разрыв в точке a_i, а все младшие квазипроизводные непрерывны в этой точке.

Пусть $\rho \doteq (\rho_1, \ldots, \rho_\nu)$, $\quad 0 \leqslant \rho_i \leqslant n$. Обозначим

$$\mathfrak{X}_{\mathcal{P}}^{\Delta,\,\rho} \doteq \{x : x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}^{\Delta},\ \big(def_{\mathcal{P}} x\big)(a_i) \leqslant \rho_i,\ i = 1, \ldots, \nu\}.$$

Элементы этого множеста будем называть $(\mathcal{P}, \Delta, \rho)$-сплайнами (по аналогии с L-сплайнами из [3]). Очевидно,

$$\mathfrak{X}_{\mathcal{P}} = \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}^{\Delta,\,\overline{0}} \subset \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}^{\Delta,\,\rho} \subset \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}^{\Delta,\,\delta} \subset \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}^{\Delta,\,\overline{n}} = \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}^{\Delta}$$

$\big(\rho_i \leqslant \delta_i,\ \delta \doteq (\delta_1, \ldots, \delta_\nu),\ \overline{0} \doteq (0, \ldots, 0),\ \overline{n} \doteq (n, \ldots, n)\big)$.

Из включения $\mathfrak{X}_{\mathcal{P},\,\gamma}^{\Delta} \subset \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}^{\Delta}$ Следует, что $\mathfrak{X}_{\mathcal{P}}^{\Delta,\,\rho}$ плотно в $\mathbb{L}_q[a, b]$.

Пусть $\mathbf{L}^{+,\,\boldsymbol{\Delta},\,\mu}$ — сужение оператора $\mathbf{L}^{+,\,\boldsymbol{\Delta}}$ на $\mathfrak{X}_{\mathcal{R}}^{\Delta,\,\mu}$ ($\mu \doteq \big(\mu_1, \ldots, \nu\big)$ см. (7.29))

Согласно теореме 7.3 краевой задачей, сопряженной к задаче Валле Пуссена (7.3), (7.28), является краевая задача для уравнения

$$\big(\mathbf{L}^{+,\,\boldsymbol{\Delta},\,\mu}\big)(t) = g(t) \quad (t \in I,\ g \in \mathbb{L}_p[a, b],\ \text{ср. с (7.31)}) \tag{7.32}$$

с краевыми условиями (7.29). Краевые условия заданы только в точках $a = a_0$ и $b = a_{\nu+1}$, число их равно $2n - \mu_0 - \mu_{\nu+1} > n$.

7.8. Обобщенные многоточечные краевые задачи. Из сказанного выше видим, что краевые задачи, сопряженные к многоточечным краевым задачам уже не являются классическими. В них исходное уравнение удовлетворяется не на всем исходном промежутке I, а лишь на частичных промежутках I_i $(i = 0, 1, \ldots, \nu)$. Задачи такого рода будем называть *обобщенными* краевыми задачами. Такие задачи могут возникнуть не только в связи с описанием сопряженных операторов. Так называемые *импульсные* краевые задачи (см. [1; 2]; см. также [18–21]) являются зачами указанного типа. Сюда относятся также краевые задачи для так называемых уравнений переменной структуры (см. [28]).

Рассмотрим как исходную произвольную многоточечную задачу на множестве $(\mathcal{P},\ \Delta,\ \rho)$-сплайнов. Введем обозначения

$$\big(\alpha_{\mathcal{P}}^{k} x\big)(t) \doteq \Big(\big({}^{0}_{\mathcal{P}} x\big)(t), \ldots, \big({}^{n-k-1}_{\mathcal{P}} x\big)(t),\ \big(\sigma_{\mathcal{P}}^{n-k} x\big)(t), \ldots, \big(\sigma_{\mathcal{P}}^{n-1} x\big)(t)\Big)^{\top}$$

$(1 \leqslant k \leqslant n-1)$;

$$\theta_{\mathcal{P}}^{\rho} x \doteq \Big(\big({}_{\mathcal{P}} x\big)^{\top}(a_0), \big(\alpha_{\mathcal{P}}^{\rho_1} x\big)^{\top}(a_1), \ldots, \big(\alpha_{\mathcal{P}}^{\rho_\nu} x\big)^{\top}(a_\nu),\ \big({}_{\mathcal{P}} x\big)^{\top}(a_{\nu+1})\Big)^{\top};$$

$\mathbf{L}^{\boldsymbol{\Delta},\,\rho}$ — расширение оператора $\mathbf{L}$ на класс $\mathfrak{X}_{\mathcal{P}}^{\Delta,\,\rho}$ по формуле

$$\big(\mathbf{L}^{\boldsymbol{\Delta},\,\rho} x\big)(t) \doteq \big(\mathbf{L} x\big)(t), \quad t \in cl\, I_i \quad (i = 0, 1, \ldots, \nu).$$

Краевая задача, о которой только что шла речь имеет вид:

$$\big(\mathbf{L}^{\mathbf{\Delta},\,\rho}x\big)(t) = f(t) \quad (t \in I,\ f \in \mathbb{L}_p[a,b]), \tag{7.33}$$

$$lx \doteq M\theta^{\rho}_{\mathcal{P}}x = 0, \tag{7.34}$$

где M — заданная $n \times (\nu+2)n$-матрица ранга n.

С помощью введенных обозначений еще раз перепишем формулу Грина (7.20). Теперь придадим ей вид:

$$\langle \mathbf{L}^{\mathbf{\Delta},\,\rho}x,\, y\rangle_p - \langle x,\, \mathbf{L}^{+,\,\mathbf{\Delta},\,\rho'}y\rangle_q = \big(\theta^{\rho}_{\mathcal{P}}x\big)^{\top}\mathfrak{M}\big(\theta^{\rho'}_{\mathcal{R}}y\big) \tag{7.35}$$

$$\big(x \in \mathfrak{X}^{\Delta,\,\rho}_{\mathcal{P}},\ y \in \mathfrak{X}^{\Delta,\,\rho'}_{\mathcal{R}},\ \rho' \doteq (\rho'_1,\ldots,\rho'_\nu),\ \rho'_i = n - rho_i\big).$$

Рассмотрим вспомогательную задачу, которую естественно назвать обобщенной задачей Коши для уравнения (7.33). «Начальные» условия в этой задаче имеют вид:

$$\big({}_{\mathcal{P}}x\big)(a) = \xi_0,\ \big({}^{k}_{\mathcal{P}}x\big)(a_i+) = \xi_{ik},\ k = n-\rho_i,\ldots,n-1,\ i = 1,\ldots,\nu. \tag{7.36}$$

Лемма 7.6. *Существует единственный* $(\mathcal{P},\,\Delta,\,\rho)$*-сплайн, удовлетворяющий задаче* (7.33), (7.36).

Доказательство. Последовательно решаем задачи Коши:

$$\big({}^{n}_{\mathcal{P}}x_0\big)(t) = f(t)\ (t \in cl\, I_0),\ \big({}_{\mathcal{P}}x_0\big)(a) = \xi_0; \quad \big({}^{n}_{\mathcal{P}}x_i\big)(t) = f(t)\ (t \in cl\, I_i),$$
$$\big({}^{k}_{\mathcal{P}}x_i\big)(a_i) = \big({}^{k}_{\mathcal{P}}x_{i-1}\big)(a_i)\ (k = 0,1,\ldots,n-\rho_i-1),\ \big({}^{k}_{\mathcal{P}}x_i\big)(a_i) = \xi_{ik}$$
$$(k = n-\rho_i,\ldots,n-1,\ i = 1,\ldots,\nu).$$

На каждом шаге решение существует и единственно. Положим

$$x(t) \doteq x_i(t) \quad (t \in I_i,\ i = 1,\ldots,\nu).$$

Очевидно, $x \in \mathfrak{X}^{\Delta,\,\rho}_{\mathcal{P}}$ и является решением задачи (7.33), (7.36).

Пусть $\widetilde{x}$ — еще одно такое решение. Тогда

$$z \doteq \widetilde{x} - x \in \mathfrak{X}_{\mathcal{P}}, \quad \big({}^{n}_{\mathcal{P}}z\big) = 0\ \big({}_{\mathcal{P}}z\big)(a) = 0.$$

Значит $z(t) \equiv 0$, т. е. $\widetilde{x} = x$.

Следствие 7.3.

$$dim\,\mathcal{N}\big(\mathbf{L}^{\mathbf{\Delta},\,\rho}\big) = n + \sum_{i=1}^{\nu}\rho_i, \quad dim\,\mathcal{N}\big(\mathbf{L}^{+,\,\mathbf{\Delta},\,\rho'}\big) = n(\nu+1) - \sum_{i=1}^{\nu}\rho_i$$

Определим матрицы $\widehat{M}$, $\widetilde{M}$, $\widetilde{M}^+$ так же, как в п. 7.6. и положим

$$\widetilde{l}x \doteq \widetilde{M}\left(\theta^{\rho}_{\mathcal{P}}x\right), \quad \widetilde{l}^+y \doteq \widetilde{M}^+\left(\theta^{\rho}_{\mathcal{R}}y\right). \tag{7.37}$$

Пусть опять, как в п. 7.6, последние $(\nu+1)n$ компонет $\widetilde{l}$ образуют вектор-функционал $\widehat{l}$, первые $(\nu+1)n$ компонет $\widetilde{l}^+$ образуют вектор-функционал l^+, а последние n — вектор-функционал $\widehat{l}^+$; пусть $\mathbf{L}^{\mathbf{\Delta},\,\rho}_{\mathbf{l}}$ и $\mathbf{L}^{+,\,\mathbf{\Delta},\,\rho'}_{\mathbf{l}^+}$ сужения $\mathbf{L}^{\mathbf{\Delta},\,\rho}$ и $\mathbf{L}^{+,\,\mathbf{\Delta},\,\rho}$ соответственно на

$$\mathfrak{X}^{\Delta,\,\rho}_{\mathcal{P}.\,l} =\doteq \left\{x \in \mathfrak{X}^{\Delta,\,\rho}_{\mathcal{P}} : lx = 0\right\}, \text{ и } \mathfrak{X}^{\Delta,\,\rho'}_{\mathcal{R}.\,l^+} =\doteq \left\{y \in \mathfrak{X}^{\Delta,\,\rho'}_{\mathcal{R}} : l^+y = 0\right\}.$$

Из формулы (7.35) получаем очередную формулу краевых форм (ср. (7.25)):

$$\langle \mathbf{L}^{\mathbf{\Delta},\,\rho}x,\, y\rangle_p - \langle x,\, \mathbf{L}^{+,\,\mathbf{\Delta},\,\rho'}y\rangle_q = \big(\widetilde{l}x\big)^{\top}S_{(\nu+2)n}\big(\widetilde{l}^+y\big) = \big(lx\big)^{\top}S_n\big(\widehat{l}^+y\big) + \\ + \big(\widehat{l}x\big)^{\top}S_{(\nu+1)n}\big(l^+y\big) \quad \big(x \in \mathfrak{X}^{\Delta,\,\rho}_{\mathcal{P}},\ y \in \mathfrak{X}^{\Delta,\,\rho'}_{\mathcal{R}}\big), \tag{7.38}$$

которая позволяет доказать аналоги лемм 7.4 и 7.5 и следующую теорему.

Теорема 7.4.

$$\big(\mathbf{L}^{\mathbf{\Delta},\,\rho}_{\mathbf{l}}\big)^* = \mathbf{L}^{+,\,\mathbf{\Delta},\,\rho'}_{\mathbf{l}^+}, \quad \big(\mathbf{L}^{+,\,\mathbf{\Delta},\,\rho'}_{\mathbf{l}^+}\big)^* = \mathbf{L}^{\mathbf{\Delta},\,\rho}_{\mathbf{l}}.$$

Доказательство следует доказательству теоремы 7.3.

Следствие 7.4. *Операторы* $\mathbf{L}^{\mathbf{\Delta},\,\rho}_{\mathbf{l}}$ *и* $\mathbf{L}^{+,\,\mathbf{\Delta},\,\rho'}_{\mathbf{l}^+}$ *замкнуты.*

Таким образом, краевой задачей, сопряженной задаче (7.33), (7.34) является задача

$$\big(\mathbf{L}^{+,\,\mathbf{\Delta},\,\rho'}_{\mathbf{l}^+}y\big)(t) = g(t) \quad (t \in I,\ g \in \mathbb{L}_p[a.b]), \quad l^+y = 0. \tag{7.39}$$

7.9. Обобщенная задача Валле Пуссена (ОЗВП). Сопряженная краевая задача (7.39) имеет в точности такой же вид, что и исходная задача (7.33), (7.34) ($\mathcal{P}$ заменяется на $\mathcal{R}$, ρ — на ρ', M — на M^+). Таким образом, класс многоточечных задач вида (7.33), (7.34) при

$$\mathcal{P} \in \mathfrak{A}_n(I), \quad f \in \mathbb{L}_p[a.b], \quad 0 \leqslant 0 \leqslant \rho_i \leqslant n$$

обладает свойством: вместе с каждой краевой задачей он содержит также ее сопряженную. Будем называть такие классы *замкнутыми относительно перехода к сопряженной задаче* или просто *замкнутыми.* Только в замкнутых классах можно говорить о самосопряженных краевых задачах (описывающих самосопряженные операторы).

Приведем примеры замкнутых классов краевых задач.

$\mathcal{A}$. Класс двухточечных задач Валле Пуссена (краевые условия имеют вид:

$$\varphi_{\mathcal{P}}(x,a) \geqslant k, \quad \varphi_{\mathcal{P}}(x,b) \geqslant n-k \quad (k=1,\dots,n-1)).$$

$\mathcal{B}$. Класс распадающихся двухточечных задач (краевые условия таковы:

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_{ij}\big({}^{j}_{\mathcal{P}}x\big)(a) = 0 \quad (i=1,\dots,k),$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_{ij}\big({}^{j}_{\mathcal{P}}x\big)(b) = 0 \quad (i=1,\dots,n-k,\ k=1,\dots,n-1)).$$

$\mathcal{C}$. Класс произвольных двухточечных задач вида

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\alpha_{ik}\big({}^{k-1}_{\mathcal{P}}x\big)(a) + \beta_{ik}\big({}^{k-1}_{\mathcal{P}}x\big)(b)\Big) = 0 \quad (i=1,\dots,n).$$

$\mathcal{D}$. Класс обобщенных многоточечных задач (7.33), (7.34).

Выше, в п.п. 7.5–7.7 было показано, что краевые условия (7.18) и (7.28) не определяют замкнутых классов. Еще один замкнутый класс образует определяемая ниже обобщенная задача Валле Пуссена (ОЗВП).

Так будем называть краевую задачу

$$\big(\mathbf{L}^{\mathbf{\Delta},\rho}x\big)(t) = f(t) \quad (t \in I,\ f \in \mathbb{L}_p[a.b])), \tag{7.33}$$

$$\varphi_{\mathcal{P}}(x, a_i) \geqslant \mu_i, \quad i = 0, 1, \ldots, \nu + 1, \tag{7.40}$$

$$\sum_{i=0}^{\nu+1} \mu_i = n + \sum_{i=1}^{\nu} \rho_i \tag{7.41}$$

$$\big(0 < \mu_0, \mu_{\nu+1} < n;\ \mu_i, \rho_i \geqslant 0,\ 0 < \mu_i + \rho_i \leqslant n,\ i = 1, \ldots, \nu\big).$$

Классическая задача Валле Пуссена (7.3), (7.28) получается из (7.33), (7.40) при $\rho_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, \nu)$. Задача (7.31), (7.29), сопряженная к классической, — тоже задача вида (7.33), (7.40) ; в этом случае вместо $\mathcal{P}$ надо взять $\mathcal{R}$, ρ заменить на $\mu \doteq (\mu_1, \ldots, \mu_\nu)$, вместо μ_0 и $\mu_{\nu+1}$ взять $n - \mu_0$ и $n - \mu_{\nu+1}$, вместо μ_i — 0 $(i = 1, \ldots, \nu)$; условие (7.41) при этом также выполняется. «Неклассическая» задача Валле Пуссена, рассмотренная Ю.В. Покорным в [18; 19] (для обыкновенного дифференциального уравнения), получается из (7.33), (7.40) при $\mu_0 + \mu_{\nu+1} = n$. $\mu_i = \rho_i = 1$ $(i = 1, \ldots, \nu)$ (и соответствующем $\mathcal{P}$). В общей постановке задача (7.33), (7.40) впервые введена в работе [8] и изучалась в работе [9].

Так как краевые условия (7.40) — частный случай условий (7.34), то сопряженные краевые условия определяются построениями п. 7.8. А именно, формально они примут вид:

$$\varphi_{\mathcal{P}}(y, a_i) \geqslant \rho_i,\ i = 0, 1, \ldots, \nu, \nu+1 \quad \big(\rho_0 = n - \mu_0,\ \rho_{\nu+1} = n - \mu_{\nu+1}\big), \tag{7.42}$$

$$\big(\sigma_{\mathcal{R}}^{k-1} y\big)(a_i) = 0,\ k = \rho_i, \ldots, n - \mu_i,\ i = 1, \ldots, \nu.$$

Последнее равенство означает, что фактически

$$\big(def_{\mathcal{R}} y\big)(a_i) \leqslant \mu_i \quad \big(\leqslant \rho' \doteq n - \rho_i\big),$$

т.е. $y \in \mathfrak{X}_{\mathcal{R}}^{+,\Delta,\mu} \quad \Big(\subset \mathfrak{X}_{\mathcal{R}}^{+,\Delta,\rho'}\Big)$. Таким образом, задачей сопряженной задаче (7.33), (7.40), является краевая задача для уравнения

$$\big(\mathbf{L}^{+,\mathbf{\Delta},\mu} y\big)(t) = g(t) \quad (t \in I,\ g \in \mathbb{L}_p[a.b])) \tag{7.43}$$

при краевых условиях (7.42). Учитывая определения ρ_0 и $\rho_{\nu+1}$ можем переписать равенство (7.41) в виде

$$\sum_{i=0}^{\nu+1} \rho_i = n + \sum_{i=1}^{\nu} \mu_i.$$

Следовательно, задача (7.43), (7.42) есть ОЗВП, и класс ОЗВП действительно замкнут.

Задача (7.33), (7.40) будет самосопряженной, если n четное,

$$\mathcal{R} = \mathcal{P}, \quad \mu_0 = \mu_{\nu+1} = \frac{n}{2}, \quad \mu_i = \rho_i \quad (i = 1, \ldots, \nu).$$

Если исходное уравнение $Lx = f$ — обыкновенное дифференциальное, то краевая задача (7.43), (7.42) все же квазидифференциальная. Однако, если коэффициенты исходного уравнения достаточно гладкие (см. (6.3)), то задача (7.43), (7.42) может быть переписана как ОЗВП для обыкновенного дифференциального уравнения.

Список литературы

1. *Азбелев Н. В.* О некоторых тенденциях в обобщениях дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. —1985. — Т. 21, № 8. — С. 1291–1304.
2. *Анохин А. В.* О линейных импульсных системах для функционально-дифференциальных уравнений // Доклады АН СССР — 1986 — Т. 286, № 5 — С. 1037–1040.
3. *Варга Р.* Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. — М.: Мир, 1974. – 126 с.
4. *Данфорд Н, Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. — М. : Иностр. лит., 1962. – 895 с.
5. *Данфорд Н, Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Спектральная теория. — М. : Иностр. лит., 1966. – 1063 с.
6. *Дьедонне Ж.* Основы современного анализа. — М.: Мир, 1964. – 430 с.
7. *Дерр В. Я.* Неосцилляция решений квазидифференциального уравнения // Нелинейные колебания и теория управления. УдГУ, Ижевск, 1982. — Вып. 4. — С. 52–61.
8. *Дерр В. Я.* Квазидифференциальные уравнения: сопряженные краевые задачи / Удм. гос. ун-т.; Иж. мех. ин-т. — Ижевск, 1984. 40 с. Деп. в ВИНИТИ, 11.05.84, № 2994–84.
9. *Дерр В. Я.* К обобщенной задаче Валле Пуссена // Дифференц. уравнения. —1987. — Т. 23, № 11. — С. 1861–1872.
10. *Дерр В. Я.* Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения // Изв. Института математики и информатики. УдГУ. Ижевск, 1999. — Вып. 1 (16). — С. 3–105.
11. *Дерр В. Я.* Теория функций действительной переменной: лекции и упражнения. — М.: Высш. шк., 2008, 384 с.
12. *Дерр В. Я.* Неосцилляция решений линейных дифференциальных уравнений // Вестн. Удм. ун-та. сер. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2009. — Вып. 1. — С. 56-99.
13. *Дерр В. Я.* Функциональный анализ. I, Пространства: лекции и упражнения. — Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 2009. – 220 с.
14. *Дерр В. Я.* Функциональный анализ. II, Линейные операторы: лекции и упражнения. — Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 2009. – 300 с.
15. *Коддингтон Э. Ф., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Иностр. лит. , 1958. – 474 с.
16. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функцонального анализа . – М.: Наука, 1951. – 360 с.
17. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. –М.: Наука, 1969. – 526 с.

18. *Покорный Ю. В.* О неклассической задаче Валле Пуссена // Дифференц. уравнения. —1978. — Т. 14, № 6. — С. 1018–1027.
19. *Покорный Ю. В.* О переопределенной задаче Валле Пуссена // Дифференц. уравнения. —1979. — Т. 15, № 4. — С. 761.
20. *Покорный Ю. В., Лазарев К. П.* Некоторые осцилляционные теоремы для многоточечных задач // Дифференц. уравнения. —1987. — Т. 23, № 4. — С. 658–670.
21. *Покорный Ю. В., Бахтина Ж. И., Зверева М. Б., Шабров С. А* Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах. — М.: Физматлит, 2009. — 192 с.
22. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975. – 443 с.
23. *Садовничий В. А.* Теория операторов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. – 368 с.
24. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1959. – 468 с.
25. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980. – 495 с.
26. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Лань, 1996. Т. 2. — 800 с.
27. *Шин Д.* О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка // Матем. сб. — 1940. Т. 7 (49). С. 479–532.
28. *Das P. C., Prasad U. S.* Adjoints and selfadjointness for a differential operator with varying structure. // Proc. of Royal Soc. of Edinburg. — 1982 Vol.93A. — P.15–24.
29. Elias U. The extremal solutions of the equation $Ly + p(x)y = 0$ // J. of Math. anal. and appl. — 1975. — № 55. — P. 253–265.
30. Kusano T., Naito M. Oscillation criteria of general linear ordinary differential equations // Pacific J. of Math. — 1981. — Vol. 92, № 2. — P. 345–358.
31. Nehari Z. Disconjugate linear differential operators //Trans. Amer. J. Math. Soc. — 1969. — Vol. 129. — P. 500–516.
32. Trench W. F. Canonical forms and principal sistems for general disconjugate equations // Trans. Amer. J. Math. Soc. — 1974. — Vol. 189. — P. 319–327.

Учебное издание

Василий Яковлевич Дерр

Теория линейных операторов в гильбертовых пространствах

Учебное пособие

Авторская редакция

Подписано в печать 09.11.10. Формат $60 \times 84\frac{1}{16}$ Печать офсетная.
Усл. п. л. 6,16 Уч. изд. л. 4,3 Тираж 30 экз. Заказ № 1799

Издательство «Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская д. 1, корп. 4
тел./факс: +7(3412) 500-295, e-mail: editorial@udsu.ru