

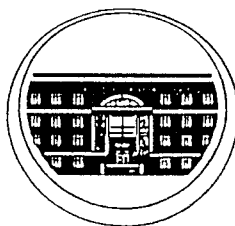
ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

ТОМ 17

№ 1

2011



ЕКАТЕРИНБУРГ

УДК 517.977

ПРОСТРАНСТВО $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ С МЕТРИКОЙ ХАУСДОРФА — БЕБУТОВА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ¹

Е. А. Панасенко, Л. И. Родина, Е. Л. Тонков

Статья посвящена изучению пространства непустых замкнутых выпуклых (но не обязательно компактных) множеств в $\mathbb{R}^n$, динамической системы сдвигов и теорем существования решений дифференциальных включений. Такое пространство мы снабжаем метрикой Хаусдорфа — Бебутова, и тогда оно становится полным. Необходимость такого рассмотрения связана с рядом задач оптимального управления асимптотическими характеристиками управляемой системы. Например, задача $\dot{x} = A(t, u)x$, $(u, x) \in \mathbb{R}^{m+n}$, $\lambda_n(u(\cdot)) \rightarrow \min$, где $\lambda_n(u(\cdot))$ — старший показатель А.М. Ляпунова системы $\dot{x} = A(t, u)x$, приводит к дифференциальному включению с некомпактной правой частью.

Ключевые слова: метрика Хаусдорфа — Бебутова, управляемые системы, дифференциальные включения, динамическая система сдвигов.

E. A. Panasenکو, L. I. Rodina, E. L. Tonkov. The space $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ with the Hausdorff–Bebutov metric and differential inclusions.

The paper is devoted to studying the space of nonempty closed convex (but not necessarily compact) sets in $\mathbb{R}^n$, a dynamical system of translations, and existence theorems for differential inclusions. This space is made complete by equipping it with the Hausdorff–Bebutov metric. The investigation of these issues is important for certain problems of optimal control of asymptotic characteristics of the controlled system. For example, the problem $\dot{x} = A(t, u)x$, $(u, x) \in \mathbb{R}^{m+n}$, $\lambda_n(u(\cdot)) \rightarrow \min$, where $\lambda_n(u(\cdot))$ is the maximal Lyapunov exponent of the system $\dot{x} = A(t, u)x$, leads to a differential inclusion with a noncompact right-hand side.

Keywords: Hausdorff–Bebutov metric, control systems, differential inclusions, dynamical system of translations.

Введение

В этой статье рассматривается дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \quad (0.1)$$

правая часть которого имеет выпуклые замкнутые (но не обязательно компактные) образы при фиксированных (t, x) . В случае, когда правая часть включения (0.1) имеет компактные образы, обычно применяется пространство $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$ с метрикой dist или полуотклонениями (т. е. полуметриками) Хаусдорфа (см., например, [1]), что позволяет ввести в рассмотрение содержательные определения полунепрерывности сверху и снизу функции $(t, x) \rightarrow F(t, x)$ со значениями в $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$. Для дифференциальных включений вида (0.1), ориентированных на применение к управляемым системам, требование компактности образов F может оказаться обременительным.

Конечно, поступая формально, мы можем сохранить метрику Хаусдорфа dist и в пространстве $\text{clos}(\mathbb{R}^n)$ непустых замкнутых (но не обязательно ограниченных) множеств. Но в этом случае мы вынуждены оперировать с множествами, которые могут находиться на бесконечном расстоянии друг от друга. Например, если $F(t, x)$ — полуось с началом в точке O , то расстояние dist между множествами $F(t, x)$ и $F(t_0, x_0)$ будет равно либо нулю, либо бесконечности,

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 09-01-97503), программы “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект 2.1.1/9359), ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (2009–2013), госконтракт № П688 и программы исследований Президиума РАН “Математическая теория управления”.

и поэтому такие фундаментальные понятия, как непрерывность или полунепрерывность сверху или снизу в точке (t_0, x_0) в метрике Хаусдорфа теряют содержательный смысл. Поэтому приходится в пространстве $\text{clos}(\mathbb{R}^n)$ либо отказываться от метрики и вводить “правильную” топологию, либо строить “правильную” метрику. Здесь, продолжая исследования статьи [2], мы подробно изучаем пространство $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ с метрикой Хаусдорфа — Бебутова, состоящее из непустых выпуклых замкнутых множеств в $\mathbb{R}^n$. Отметим также, что в этой статье пространства $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$, $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ мы рассматриваем как отдельные объекты: пространство $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$ снабжается метрикой Хаусдорфа dist , а пространство $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ — метрикой Хаусдорфа — Бебутова Dist (и тогда метрика Хаусдорфа dist должна рассматриваться как *внутренняя* метрика по отношению к метрике Хаусдорфа — Бебутова Dist , а пространство $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$ не рассматривается как подпространство в $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$).

Отметим еще, что мы рассматриваем дифференциальное включение $\dot{x} \in F(h^t\sigma, x)$, правая часть которого принимает значения в $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ и параметризована с помощью топологической динамической системы (Σ, h^t) . Такая параметризация удобна в различных задачах, связанных с асимптотическим поведением решений управляемых систем, если рассматриваемое свойство предполагается выполненным равномерно относительно начального момента времени t_0 . Например, если $D_{t_0}(\vartheta)$ — множество управляемости системы

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u \in U(t), \quad (0.2)$$

на отрезке времени $[t_0, t_0 + \vartheta]$, то локальная управляемость системы (0.2), равномерная относительно момента времени t_0 , означает существование независящих от t_0 констант $\vartheta > 0$, $\varepsilon > 0$ таких, что включение $O_\varepsilon \subseteq D_{t_0}(\vartheta)$ имеет место для всех t_0 , а это приводит к динамической системе сдвигов (Σ, h^t) и семейству дифференциальных включений $\dot{x} \in F(h^t\sigma, x)$, построенному с помощью системы (0.2).

1. Пространство $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$

Пусть $\mathbb{R}^n$ — стандартное евклидово пространство² размерности n со скалярным произведением $\langle x, y \rangle$ и нормой $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$; $O_r(x_0) \doteq \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x_0| \leq r\}$ — замкнутый шар радиуса r с центром в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$; расстояние между замкнутыми множествами A и B в $\mathbb{R}^n$ обозначим $\varrho(A, B) \doteq \inf_{a \in A, b \in B} |a - b|$, если $A = \{a\}$, то $\varrho(a, B) \doteq \min_{b \in B} |a - b|$. Далее, если $A \subset \mathbb{R}^n$, то замыкание множества A относительно пространства $\mathbb{R}^n$ будем обозначать $\text{cl } A$ или $\bar{A}$, а границу множества A — $\text{fr } A$.

Пространство непустых *выпуклых компактных* подмножеств в $\mathbb{R}^n$ обозначим $\text{compv}(\mathbb{R}^n)$. Определим в $\text{compv}(\mathbb{R}^n)$ метрику Хаусдорфа

$$\text{dist}(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}, \quad (1.1)$$

где $d(A, B) \doteq \max_{a \in A} \varrho(a, B)$ и $d(B, A) \doteq \max_{b \in B} \varrho(b, A)$ — *полуотклонения* множества A от множества B и множества B от множества A соответственно. Пространство, состоящее из *выпуклых замкнутых* (необязательно ограниченных) подмножеств, будем обозначать $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$.

Отметим теперь, что если множества A и B являются элементами пространства $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, то расстояние (1.1) между ними может быть бесконечным. В таком случае метрика (1.1) допускает расширенное толкование и называется *бесконечной* метрикой.

Имеется простая связь между бесконечными и конечными метриками, а именно, метрическое пространство, в котором возможны бесконечные расстояния, канонически разбивается на подпространства с конечными расстояниями, которые отстоят друг от друга на бесконечное расстояние [1]. Для наших целей, заключающихся в исследовании управляемых процессов,

²Т. е. евклидово пространство с фиксированным ортонормированным базисом [3].

метрика в $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ с бесконечными значениями неудобна (и мало содержательна), и поэтому мы введем конечную метрику, которую называем [2] метрикой Хаусдорфа — Бебутова.

1.1. Полуотклонения и метрика Хаусдорфа. Пусть $F \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ и f_0 — точка множества F , ближайшая к нулю пространства $\mathbb{R}^n$, тогда $|f_0| = \min_{f \in F} |f|$. Если, кроме того, задано множество $G \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ и $g_0 \in G$, где $|g_0| = \min_{g \in G} |g|$, то введем в рассмотрение компактные при каждом $r \in [0, \infty)$ множества

$$F_r = F \cap O_r(f_0), \quad G_r = G \cap O_r(g_0),$$

полуотклонения $d(F_r, G_r)$, $d(G_r, F_r)$, где

$$d(F_r, G_r) = \max_{f \in F_r} \varrho(f, G_r), \quad d(G_r, F_r) = \max_{g \in G_r} \varrho(g, F_r),$$

и метрику Хаусдорфа

$$\text{dist}(F_r, G_r) \doteq \max \{d(F_r, G_r), d(G_r, F_r)\}. \quad (1.2)$$

Имеют место неравенства

$$d(F_r, G_r) \leq d(F_r, Q_r) + d(Q_r, G_r), \quad d(G_r, F_r) \leq d(G_r, Q_r) + d(Q_r, F_r),$$

легко доказываемые с помощью неравенства треугольника

$$|f - g| \leq |f - q| + |q - g|, \quad f \in F_r, \quad g \in G_r, \quad q \in Q_r.$$

Напомним также, что неравенство $d(F_r, G_r) \leq \varepsilon$ равносильно включению $F_r \subseteq G_r + O_\varepsilon(0)$.

1.2. Полуотклонения и метрика Хаусдорфа — Бебутова. Пусть $F, G \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, введем в рассмотрение два полуотклонения (две полуметрики)

$$D(F, G) = \sup_{r>0} \min \{d(F_r, G_r), 1/r\}, \quad D(G, F) = \sup_{r>0} \min \{d(G_r, F_r), 1/r\} \quad (1.3)$$

и расстояние

$$\text{Dist}(F, G) = \max \{D(F, G), D(G, F)\}, \quad (1.4)$$

которое мы назовем метрикой Хаусдорфа — Бебутова. Из равенства (1.4) следует, что $\text{Dist}(F, G)$ задается равенством

$$\text{Dist}(F, G) = \sup_{r>0} \min \{\text{dist}(F_r, G_r), 1/r\},$$

где $\text{dist}(F_r, G_r)$ — метрика Хаусдорфа (1.2). Следовательно, неравенство $\text{Dist}(F, G) \leq \varepsilon$ эквивалентно неравенству $\text{dist}(F_r, G_r) \leq \varepsilon$, выполненному при всех положительных r , удовлетворяющих неравенству $r \leq 1/\varepsilon$. Аналогично, неравенство $D(F, G) \leq \varepsilon$ эквивалентно неравенству $d(F_r, G_r) \leq \varepsilon$, выполненному при всех $r \leq 1/\varepsilon$.

Лемма 1. Для любых $F, G, Q \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ имеют место следующие свойства:

(1) $0 \leq D(F, G) < \infty$, и равенство $D(F, G) = 0$ выполнено в том и только в том случае, если $F \subseteq G$ и $f_0 = g_0$, где $|f_0| = \min_{f \in F} |f|$, $|g_0| = \min_{g \in G} |g|$.

(2) Имеют место неравенства треугольника

$$D(F, G) \leq D(F, Q) + D(Q, G), \quad D(G, F) \leq D(G, Q) + D(Q, F). \quad (1.5)$$

(3) $0 \leq \text{Dist}(F, G) = \text{Dist}(G, F) < \infty$, и равенство нулю $\text{Dist}(F, G) = 0$ выполнено в том и только в том случае, если $F = G$.

(4) Имеет место неравенство треугольника

$$\text{Dist}(F, G) \leq \text{Dist}(F, Q) + \text{Dist}(Q, G). \quad (1.6)$$

Доказательство. Из определения $D(F, G)$ непосредственно следует (см. (1.3)), что равенство $D(F, G) = 0$ выполнено в том и только том случае, если $d(F_r, G_r) = 0$ при всех $r \geq 0$. Следовательно, при всех $r \geq 0$ выполнено включение

$$F_r \doteq F \cap O_r(f_0) \subseteq G_r \doteq G \cap O_r(g_0).$$

Поэтому выполнены равенство $f_0 = g_0$ и включение $F \subseteq G$.

Докажем первое неравенство в (1.5). Обозначим $f = r^{-1}$, $a = d(F_r, G_r)$, $b = d(F_r, Q_r)$, $c = d(Q_r, G_r)$, зафиксируем $r > 0$ и покажем, что из неравенства треугольника $a \leq b + c$ следует неравенство

$$\min\{a, f\} \leq \min\{b, f\} + \min\{c, f\}. \quad (1.7)$$

Рассмотрим возможные случаи. Предположим сначала, что $a \leq f$. Тогда, если $b \leq f$ и $c \leq f$, то несложно видеть, что неравенство (1.7) выполнено. Далее, если $f \leq b$ и $c \leq f$, то из неравенства $a \leq f$ следует неравенство $a < f + c$, и тем самым выполнено соотношение (1.7). Аналогично, если выполнены неравенства $b \leq f$ и $f \leq c$, то имеет место $a < b + f$ и, следовательно, (1.7). Несложно проверяется также, что из неравенств $f \leq b$ и $f \leq c$ следует неравенство (1.7).

Пусть далее выполнено неравенство $f \leq a$. Тогда, если $b \leq f$ и $c \leq f$, то из неравенства треугольника $a \leq b + c$ получаем оценки $f \leq a \leq b + c$ и, следовательно, неравенство (1.7). Если $f \leq b$ и $c \leq f$ или $b \leq f$ и $f \leq c$, то имеет место соотношение $f \leq f + c$ или $f \leq b + f$ соответственно, и, значит, неравенство (1.7) выполнено. При $f \leq b$, $f \leq c$ очевидно, что неравенство (1.7) также имеет место.

Таким образом, неравенство (1.7) выполнено при всех $r > 0$. Следовательно, имеет место соотношение $\sup_{r>0} \min\{a, f\} \leq \sup_{r>0} [\min\{b, f\} + \min\{c, f\}]$, которое в силу очевидного неравенства $\sup_{r>0} [\alpha(r) + \beta(r)] \leq \sup_{r>0} \alpha(r) + \sup_{r>0} \beta(r)$ эквивалентно соотношению

$$\sup_{r>0} \min\{a, f\} \leq \sup_{r>0} \min\{b, f\} + \sup_{r>0} \min\{c, f\}.$$

Доказательство неравенства (1.6) практически не отличается от доказательства неравенств (1.5). Другие утверждения леммы в доказательствах не нуждаются. $\square$

2. Основные свойства пространства $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$

Покажем, что пространство $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, снабженное метрикой Хаусдорфа — Бебутова, является полным пространством с топологией сходимости, равномерной на компактах.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что последовательность $\{F^i\}_{i=1}^\infty$, где $F^i \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, сходится к множеству $F \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ в метрике Хаусдорфа — Бебутова, если для любого $\varepsilon > 0$, всех положительных r , не превосходящих $1/\varepsilon$, и всех достаточно больших индексов i имеют место неравенства $\text{dist}(F_r^i, F_r) \leq \varepsilon$. Такую сходимость будем называть также сходимостью, равномерной на компактах в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1. Пусть последовательность $\{F^i\}_{i=0}^\infty$ такова, что $F^i \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, $i \in \mathbb{N}$. Тогда равенство $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{Dist}(F^i, F) = 0$ обеспечивает равномерную на компактах в $\mathbb{R}^n$ сходимость последовательности $\{F^i\}_{i=0}^\infty$ к множеству $F \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{Dist}(F^i, F) = 0$ эквивалентно совокупности неравенств $\text{Dist}(F^i, F) \leq \varepsilon_i$, $\varepsilon_i \rightarrow 0$. Далее, мы уже отмечали, что неравенство $\text{Dist}(F^i, F) \leq \varepsilon_i$ эквивалентно двум неравенствам $D(F^i, F) \leq \varepsilon_i$, $D(F, F^i) \leq \varepsilon_i$, которые эквивалентны двум неравенствам $d(F_r^i, F_r) \leq \varepsilon_i$, $d(F_r, F_r^i) \leq \varepsilon_i$, выполненным при всех $r \leq 1/\varepsilon_i$ (здесь d — полуотклонения Хаусдорфа). В свою очередь неравенства $d(F_r^i, F_r) \leq \varepsilon_i$, $d(F_r, F_r^i) \leq \varepsilon_i$ эквивалентны двум включениям $F_r^i \subseteq F_r + O_{\varepsilon_i}(0)$, $F_r \subseteq F_r^i + O_{\varepsilon_i}(0)$, выполненным при всех $r \leq 1/\varepsilon_i$ и означающим в силу определения 1 сходимость, равномерную на компактах в $\mathbb{R}^n$. $\square$

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что последовательность $\{F^i\}_{i=1}^\infty$, где $F^i \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, имеет *равномерный на компактах предел сверху* $F^* \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, если для любых $\varepsilon > 0$ и $r \in (0, 1/\varepsilon]$ и каждого достаточно большого индекса i имеют место два включения

$$f_0^i \in f_0^* + O_\varepsilon(0) \quad \text{и} \quad F_r^i \subseteq F_r^* + O_\varepsilon(0).$$

В свою очередь мы говорим, что последовательность $\{F^i\}_{i=1}^\infty$, где $F^i \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, имеет *равномерный на компактах предел снизу* $F_* \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, если для любых $\varepsilon > 0$, $r \in (0, 1/\varepsilon]$ и каждого достаточно большого i имеют место два включения

$$f_{*0} \in f_0^i + O_\varepsilon(0) \quad \text{и} \quad F_{*r} \subseteq F_r^i + O_\varepsilon(0).$$

Лемма 2. Пусть последовательность $\{F^i\}_{i=1}^\infty$ такова, что $F^i \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$. Тогда равенство

$$\lim_{i \rightarrow \infty} D(F^i, F^*) = 0,$$

где $F^* \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, обеспечивает равномерный на компактах предел сверху, а равенство

$$\lim_{i \rightarrow \infty} D(F_*, F^i) = 0,$$

где $F_* \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, обеспечивает равномерный на компактах предел снизу последовательности $\{F^i\}_{i=1}^\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о практически не отличается от доказательства теоремы 1. Действительно, равенство $\lim_{i \rightarrow \infty} D(F^i, F^*) = 0$ эквивалентно семейству неравенств $D(F^i, F^*) \leq \varepsilon_i$, $\varepsilon_i \rightarrow 0$. В силу определения полуотклонения D (см. (1.3)) это неравенство эквивалентно при каждом i неравенству $d(F_r^i, F_r^*) \leq \varepsilon_i$, выполненному при $r \leq 1/\varepsilon_i$ (здесь d — полуотклонение Хаусдорфа). Следовательно,

$$F_r^i \subseteq F_r^* + O_{\varepsilon_i}(0), \quad f_0 \in f_0^* + O_{\varepsilon_i}(0),$$

что означает сходимость, равномерную на компактах в $\mathbb{R}^n$. Второе утверждение доказывается аналогично. $\square$

З а м е ч а н и е 1. Наряду с пространством $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, снабженным метрикой Хаусдорфа — Бебутова Dist , рассмотрим подпространство в $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из непустых *выпуклых компактных* подмножеств в $\mathbb{R}^n$. Это подпространство мы снабдим метрикой Хаусдорфа dist и будем его обозначать $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$. В таком случае метрика dist называется *внутренней* (см. [1]) по отношению к метрике Хаусдорфа — Бебутова Dist в пространстве $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$. Как хорошо известно [4, с. 148], подпространство $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$ является *полным* метрическим пространством. Отметим еще, что в силу теоремы 1, спускаясь в $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ к подпространству $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$, мы можем, не оговаривая это особо, поменять метрику Хаусдорфа — Бебутова на метрику Хаусдорфа. Строгая формулировка этих рассуждений содержится в следующей лемме.

Лемма 3. Пусть последовательность $\{F^i\}_{i=1}^\infty$ такова, что $F^i \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, множество F^i компактно при каждом i и для некоторого $r > 0$ множества F^i содержатся в шаре O_r при всех индексах i . Тогда, если для любого целого положительного m имеет место равенство

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \text{Dist}(F^i, F^{i+m}) = 0, \quad (2.1)$$

то выполнено равенство

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \text{dist}(F^i, F^{i+m}) = 0. \quad (2.2)$$

Справедливо и такое утверждение: если имеет место равенство (2.2) и для каждого индекса i множество F^i выпукло и компактно в $\mathbb{R}^n$, то имеет место равенство (2.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равенства (2.1) следуют неравенства $\text{Dist}(F^i, F^{i+m}) \leq \varepsilon_i$, где $\varepsilon_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, из которых в силу определения

$$\text{Dist}(F^i, F^{i+m}) \doteq \sup_{r>0} \min\{\text{dist}(F_r^i, F_r^{i+m}), 1/r\}$$

следуют соотношения $\min\{\text{dist}(F_r^i, F_r^{i+m}), 1/r\} \leq \varepsilon_i$, выполненные для всех $r > 0$. Отметим теперь, что в силу компактности множеств F^i и равномерной ограниченности последовательности $\{F^i\}_{i=1}^\infty$ найдется такое число $r_0 \geq 0$, что для всех $r \geq r_0$ будут выполнены равенства $F_r^{i+m} = F^{i+m}$ и $F_r^i = F^i$. Следовательно, для всех $r \geq r_0$ и любых достаточно больших индексах i выполнены и неравенства $\min\{\text{dist}(F^i, F^{i+m}), 1/r\} \leq \varepsilon_i$.

Выберем теперь числовую последовательность $\{r_i\}_{i=1}^\infty$ такую, что при всех достаточно больших индексах i выполнены неравенства $r_i \leq 1/\varepsilon_i$. Тогда из предыдущих рассуждений получаем неравенства $\text{dist}(F^i, F^{i+m}) \leq \varepsilon_i$. Мы показали, что имеет место равенство (2.2).

Пусть теперь выполнено (2.2). Тогда в силу полноты пространства $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$ из равенства (2.2) следует, что существует компактное выпуклое множество F , являющееся пределом (в смысле метрики dist) последовательности $\{F^i\}_{i=1}^\infty$. Следовательно, равенство (2.2) эквивалентно равенству $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{dist}(F^i, F) = 0$. Обозначим через f_0 ближайшую к нулю пространства $\mathbb{R}^n$ точку множества F . В силу выпуклости множества F имеем

$$|f_0^i - f_0| \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad |f_0^i - f_0^{i+m}| \leq |f_0^i - f_0| + |f_0 - f_0^{i+m}| \rightarrow 0.$$

Поэтому шары $O_r(f_0^i)$ и $O_r(f_0^{i+m})$ при больших индексах i мало отличаются друг от друга, а это означает, что выполнено неравенство

$$\text{dist}(O_r(f_0^i), O_r(f_0^{i+m})) \leq \varepsilon_i. \quad (2.3)$$

Покажем, что при больших i и всех $r > 0$ множества F_r^i и F_r^{i+m} тоже мало отличаются друг от друга, точнее, если выполнено неравенство (2.3) и неравенство $\text{dist}(F^i, F^{i+m}) \leq \varepsilon_i$, то для множеств F_r^i и F_r^{i+m} при больших i и всех $r > 0$ справедливо неравенство

$$\text{dist}(F_r^i, F_r^{i+m}) < \sqrt{2} \varepsilon_i. \quad (2.4)$$

Отметим, что при $r \geq r_0$ выполнены равенства $F_r^{i+m} = F^{i+m}$ и $F_r^i = F^i$, поэтому неравенство (2.4) следует из неравенства $\text{dist}(F^i, F^{i+m}) \leq \varepsilon_i$. Пусть множества F_r^i и F^i не совпадают (случай, когда F_r^{i+m} и F^{i+m} не совпадают, рассматривается аналогично). Тогда граница множества F^i пересекается со сферой $S_r(f_0^i)$ радиуса r с центром в точке f_0^i ; следовательно, граница $\text{fr}(F^i + O_{\varepsilon_i}(0))$ множества $F^i + O_{\varepsilon_i}(0)$ пересекается со сферой $S_{r+\varepsilon_i}(f_0^i)$. Обозначим буквой a одну из точек, получившихся в пересечении множеств $\text{fr}(F^i + O_{\varepsilon_i}(0))$ и $S_{r+\varepsilon_i}(f_0^i)$. Поскольку множества F^i и $O_r(f_0^i)$ выпуклые, то существуют единственная точка $b \in F^i$, ближайшая к точке a , и единственная точка $d \in O_r(f_0^i)$, ближайшая к точке a , причем $|a - b| = |a - d| = \varepsilon_i$. Построим плоскость (размерности 2), проходящую через точки a, b, d , и обозначим буквой c

точку пересечения данной плоскости с множеством $\text{fr } F^i \cap S_r(f_0^i)$, ближайшую к точке a . Таким образом, мы построили плоский четырехугольник с вершинами в точках a, b, c, d .

Поскольку множество $O_r(f_0^i)$ строго выпукло, то $\angle adc$ тупой. Из выпуклости множества F^i следует, что $\angle abc$ может быть либо прямым, либо тупым, а также то, что $\angle bcd$ тупой. Следовательно, оставшийся угол $\angle bad$ данного четырехугольника острый. Поскольку $\angle bcd$ тупой, то точка c находится внутри полукруга, построенного на диаметре bd ; поскольку $\angle bad$ острый, то расстояние $|b - d| < \sqrt{2}\varepsilon_i$, и несложно посчитать, что $|a - c| < \sqrt{2}\varepsilon_i$. Из последнего неравенства, неравенств (2.3) и $\text{dist}(F^i, F^{i+m}) \leq \varepsilon_i$ следует включение $F_r^{i+m} \subset F_r^i + O_{\sqrt{2}\varepsilon_i}(0)$. Аналогично можно показать, что имеет место включение $F_r^i \subset F_r^{i+m} + O_{\sqrt{2}\varepsilon_i}(0)$, тогда два последних включения равносильны неравенству (2.4).

Таким образом, мы показали, что при всех $r > 0$ и всех достаточно больших индексах i выполнено неравенство (2.4), из которого следуют неравенство $\text{Dist}(F^i, F^{i+m}) < \sqrt{2}\varepsilon_i$ и равенство $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{Dist}(F^i, F^{i+m}) = 0$. $\square$

В нижеследующей теореме доказывается, что пространство $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, как и пространства $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$ и $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$, тоже полное.

Теорема 2. *Пространство $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ является полным в метрике Хаусдорфа — Бебутова, определенной равенствами (1.3), (1.4).*

Доказательство. Прежде всего отметим, что полнота пространства $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ означает, что каждая последовательность Коши сходится в этом пространстве. Напомним, что последовательность $\{F^i\}_{i=0}^\infty$ элементов F^i пространства $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, снабженного метрикой Хаусдорфа — Бебутова Dist , называется последовательностью Коши, если имеет место равенство

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} \text{Dist}(F^i, F^j) = 0. \quad (2.5)$$

Пусть $\{F^i\}_{i=1}^\infty$ — последовательность элементов F^i пространства $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая равенству (2.5). Покажем тогда, что последовательность $\{F^i\}_{i=1}^\infty$ имеет предел $F \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$. Действительно, это равенство означает в силу определения метрики Dist , что для любого $\varepsilon > 0$ и любых достаточно больших индексов i, j выполнены неравенства

$$\text{Dist}(F^i, F^j) = \sup_{r>0} \min\{\text{dist}(F_r^i, F_r^j), 1/r\} \leq \varepsilon.$$

Следовательно, $\min\{\text{dist}(F_r^i, F_r^j), 1/r\} = \text{dist}(F_r^i, F_r^j) \leq \varepsilon$ для всех $r \in [0, 1/\varepsilon]$. Это означает, что для всякого целого положительного k , любых достаточно больших индексов i, j и всех положительных $r \leq k$ выполнены неравенства

$$\text{dist}(F_r^i, F_r^j) \leq 1/k. \quad (2.6)$$

Вспомним теперь, что неравенства (2.6) при любых фиксированных i, j в свою очередь эквивалентны двум неравенствам

$$d(F_r^i, F_r^j) \leq 1/k, \quad d(F_r^j, F_r^i) \leq 1/k,$$

которые равносильны вложениям

$$F_r^i \subseteq F_r^j + O_\varepsilon(0), \quad F_r^j \subseteq F_r^i + O_\varepsilon(0), \quad r \leq k, \quad \varepsilon = 1/k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Положим $r = m \leq k$, $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon = 1/k$, где $k = 1, 2, \dots$. Тогда при каждом целом положительном m множество F_m^i компактно и выпукло, и из двух неравенств $d(F_m^i, F_m^j) \leq \varepsilon$, $d(F_m^j, F_m^i) \leq \varepsilon$ следует, что последовательность $\{F_m^i\}_{i=0}^\infty$ является последовательностью Коши относительно метрики Хаусдорфа dist .

В силу [4, с. 148] при каждом целом $m \leq k$ существует компактное выпуклое множество F_m такое, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{dist}(F_m^i, F_m) = 0$. Кроме того, при всех целых $m \geq 1$ имеет место вложение $F_m \subseteq F_{m+1}$, причем либо найдется такое число m_0 , что равенство $F_m = F_{m+1}$ выполнено для всех $m \geq m_0$ (тогда определим множество $F \doteq \bigcup_{m=0}^{m_0} F_m$), либо такого m_0 не существует (тогда положим $F \doteq \bigcup_{m=0}^{\infty} F_m$). Во втором случае в силу специфики F_m равенство $\text{dist}(F_m, F_{m+1}) = 1$ выполнено при всех целых m . Отметим также, что множество F_m имеет вид $F_m = F \cap O_m(f_0)$, где f_0 — точка множества F , ближайшая к нулю пространства $\mathbb{R}^n$.

Множество $F \doteq \bigcup_{m=0}^{m_0} F_m$ замкнуто как объединение конечного числа замкнутых множеств.

Покажем, что множество $F = \bigcup_{m=0}^{\infty} F_m$ также замкнуто как множество, состоящее из объединения замкнутых вложенных множеств F_m , отстоящих друг от друга на расстоянии, не меньшем единицы. Предположим, что это неверно, тогда существует сходящаяся последовательность точек $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$, $p_i \in F$, такая, что $p_i \rightarrow p$ и $p \notin F$. Обозначим через m_1 наименьшее целое число, ограничивающее последовательность $\{|p_i|\}_{i=1}^{\infty}$, тогда все точки последовательности $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ содержатся в множестве $F_{m_1} = F \cap O_{m_1}(f_0)$, а точка p этому множеству не принадлежит. Получили противоречие с тем, что множество F_{m_1} замкнуто. Множество F также является выпуклым как объединение расширяющегося семейства выпуклых множеств, см. [4, с. 8].

Множество F состоит из таких и только таких точек f , что для любого $\varepsilon > 0$ замкнутый шар $O_\varepsilon(f)$ имеет непустое пересечение с множеством F^i при всех достаточно больших индексах i и, следовательно, в силу построения множества F для последовательности $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$ предел $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{Dist}(F^i, F)$ равен нулю. Таким образом, полнота пространства $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ доказана. $\square$

3. Топологические динамические системы

3.1. Общие понятия. В этом разделе мы напоминаем некоторые сведения из теории топологических динамических систем, необходимые для дальнейшего.

Пусть задана топологическая динамическая система (Σ, h^t) . В нашем случае это означает, что Σ — полное метрическое (с метрикой ρ_Σ) пространство и при каждом t задана однопараметрическая группа h^t преобразований пространства Σ в себя (т. е. при всех $t, s \in \mathbb{R}$ выполнено равенство $h^{t+s} = h^t \circ h^s$), удовлетворяющая начальному условию $h^t \sigma|_{t=0} = \sigma$ и непрерывная по совокупности переменных (t, σ) на множестве $\mathbb{R} \times \Sigma$, см., например, [5, гл. 5; 6, с. 204–227; 7].

Напомним, что пространство Σ называется *фазовым пространством* динамической системы (Σ, h^t) , функция $t \rightarrow h^t \sigma$ — *движением* точки σ , функция $h^t: \Sigma \rightarrow \Sigma$ — *потоком* на фазовом пространстве Σ , а

$$\text{orb}(\sigma) \doteq \{h^t \sigma: t \in \mathbb{R}\} \quad \text{и} \quad \text{orb}_+(\sigma) \doteq \{h^t \sigma: t \geq 0\}$$

— *траекторией* и *положительной полутраекторией* точки σ . Напомним еще, что пространство Σ называется *локально компактным*, если для любой точки $\sigma_0 \in \Sigma$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что замкнутое множество $O_\varepsilon(\sigma_0) \doteq \{\sigma \in \Sigma: \rho_\Sigma(\sigma, \sigma_0) \leq \varepsilon\}$ компактно в Σ .

3.2. Динамическая система сдвигов. Заслуживающими особого внимания объектами в нашей статье являются управляемая система, дифференциальное включение и так называемая *динамическая система сдвигов* [5, гл. 6]. Динамическая система сдвигов возникает естественным образом в тех случаях, когда мы изучаем асимптотические свойства решений нестационарного дифференциального включения, равномерные относительно начального момента времени [2; 8; 9]. Обсудим процесс построения динамической системы сдвигов по заданному дифференциальному включению по возможности подробно.

Пусть заданы две функции $G: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ и $N: \mathbb{R} \rightarrow \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ и задача

$$\dot{x} \in G(t, x), \quad x \in N(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

о существовании решений дифференциального включения, не выходящих при всех t из заданного множества $N(t)$. Введем в рассмотрение функцию

$$(t, x) \rightarrow \mathcal{S}(t, x) \doteq (G(t, x), N(t)) \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n) \times \text{clcv}(\mathbb{R}^n).$$

Тогда $\text{Dist}(\mathcal{S}^1(t, x), \mathcal{S}^2(t, x)) \doteq \sup_{r>0} \min \{ \text{dist}(G_r^1(t, x), G_r^2(t, x)) + \text{dist}(N_r^1(t), N_r^2(t)), 1/r \}$ и

$$|\mathcal{S}(t, x)| \doteq \text{Dist}(\mathcal{S}(t, x), \{0\}) \leq \frac{\sqrt{|f_0(t, x)|^2 + 4} + |f_0(t, x)|}{2},$$

где $f_0(t, x)$ — точка множества $\mathcal{S}(t, x)$, ближайшая к нулю пространства $\mathbb{R}^{2n}$. Построим теперь множество функций $\Sigma \doteq \text{cl}\{(t, x) \rightarrow \mathcal{S}_\tau(t, x): \tau \in \mathbb{R}\}$, где $\mathcal{S}_\tau(t, x) = \mathcal{S}(t + \tau, x)$, а замыкание cl берется по метрике, которую мы будем называть метрикой Бебутова [10]:

$$\rho_\Sigma(\mathcal{S}^1, \mathcal{S}^2) = \sup_{a>0} \min \left\{ \max_{|t|+|x| \leq a} \text{Dist}(\mathcal{S}^1(t, x), \mathcal{S}^2(t, x)), \frac{1}{a} \right\}, \quad (3.1)$$

где $\mathcal{S}^i = (G^i, N^i) \in \Sigma$. Наша задача состоит в том, чтобы доказать, что при определенных условиях пространство Σ компактно и на пространстве Σ действует однопараметрическая группа преобразований h^τ пространства Σ в себя, удовлетворяющая всем аксиомам динамической системы. Введем в рассмотрение следующее условие.

У с л о в и е 1. Функция $t \rightarrow f_0(t, x)$, где $f_0(t, x) \doteq \{f_0 \in \mathcal{S}(t, x) : |f_0| = \min_{f \in \mathcal{S}(t, x)} |f| \}$, ограничена на $\mathbb{R}$ при каждом $x \in \mathbb{R}^n$ и равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$ равномерно относительно x на компактах в $\mathbb{R}^n$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ и каждого компакта K найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, что неравенство $|f_0(t + \tau, x) - f_0(t, x)| \leq \varepsilon$ выполнено при $\tau \in [-\delta, \delta]$, $t \in \mathbb{R}$ и $x \in K$.

Лемма 4. Предположим, что выполнено условие 1. Тогда пространство Σ компактно. Сходимость последовательности $\{\mathcal{S}^i\}_{i=1}^\infty$, $\mathcal{S}^i \in \Sigma$, к точке $\widehat{\mathcal{S}} \in \Sigma$ эквивалентна сходимости, равномерной на компактах в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Это означает следующее: для любого $\varepsilon > 0$ и всех точек $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию $|t| + |x| \leq a$, где $a \leq 1/\varepsilon$, найдется такой индекс $i_0 = i_0(\varepsilon)$, что для каждого $i \geq i_0$ выполнено неравенство

$$\text{Dist}(\mathcal{S}^i(t, x), \widehat{\mathcal{S}}(t, x)) \leq \varepsilon. \quad (3.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что сходимость последовательности $\{\mathcal{S}^i\}_{i=1}^\infty$ к точке $\widehat{\mathcal{S}} \in \Sigma$ в метрике Бебутова ρ_Σ эквивалентна сходимости, равномерной на компактах. Предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $i_0 = i_0(\varepsilon)$, что $\rho_\Sigma(\mathcal{S}^i, \widehat{\mathcal{S}}) \leq \varepsilon$ при всех $i \geq i_0$. Тогда для всех $a > 0$ и всех $i \geq i_0$ выполнено неравенство

$$\min \left\{ \max_{|t|+|x| \leq a} \text{Dist}(\mathcal{S}^i(t, x), \widehat{\mathcal{S}}(t, x)), \frac{1}{a} \right\} \leq \varepsilon.$$

Следовательно, для всех $|t| + |x| \leq a$ таких, что $a \leq 1/\varepsilon$, неравенство (3.2) выполнено для каждого $i \geq i_0$. Верно и обратное: если для всех $|t| + |x| \leq a$, $a \leq 1/\varepsilon$, неравенство (3.2) выполнено для каждого $i \geq i_0$, то $\rho_\Sigma(\mathcal{S}^i, \widehat{\mathcal{S}}) \leq \varepsilon$ при всех $i \geq i_0$.

Докажем, что пространство Σ компактно. Пусть последовательность $\{\mathcal{S}^i\}_{i=1}^\infty$ такова, что $\mathcal{S}^i \in \Sigma$. Тогда для каждого $\varepsilon_i > 0$, $\varepsilon_i \rightarrow 0$, найдется момент времени $\tau_i \in \mathbb{R}$ такой, что $\rho_\Sigma(\mathcal{S}^i, \mathcal{S}_{\tau_i}) \leq \varepsilon_i$. Равномерная непрерывность функции $t \rightarrow f_0(t, x)$ (на числовой прямой равномерно относительно x на компактах в $\mathbb{R}^n$) означает равномерную непрерывность функции

$t \rightarrow S(t, x)$ (на числовой прямой равномерно относительно x на компактах в $\mathbb{R}^n$), т.е. для любого $\varepsilon > 0$ и каждого компакта K в $\mathbb{R}^n$ найдется такая константа $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, что неравенство

$$\text{Dist}(S_{\tau_i}(t, x), S_{\tau_i+s}(t, x)) \leq \varepsilon$$

выполнено при каждом $s \in [-\delta, \delta]$, всех $t \in \mathbb{R}$ и $x \in K$. Отметим, что последнее неравенство равносильно неравенству $\text{Dist}(S_{\tau_i}(t, x), S_{\tau_i}(t + s, x)) \leq \varepsilon$, из которого следует равностепенная непрерывность последовательности $\{S_{\tau_i}(t, x)\}_{i=1}^{\infty}$ по t (также равномерно относительно x на компактах в $\mathbb{R}^n$). Далее, так как функция $t \rightarrow |S(t, x)|$ ограничена на $\mathbb{R}$ при каждом $x \in \mathbb{R}^n$ (в силу условия 1), то последовательность $\{S_{\tau_i}\}$ также равномерно ограничена. Тогда из нее можно выделить подпоследовательность $\{\hat{S}_{\tau_i}\}$, сходящуюся равномерно на компактах к некоторой функции $\hat{S} \in \Sigma$. Обозначим через $\{\hat{S}^i\}$ подпоследовательность $\{S^i\}$ такую, что $\rho_{\Sigma}(\hat{S}^i, \hat{S}_{\tau_i}) \leq \varepsilon_i$. Тогда $\rho_{\Sigma}(\hat{S}^i, \hat{S}) \rightarrow 0$, т.е. из любой последовательности $\{S^i\}$, $S^i \in \Sigma$, можно выделить подпоследовательность $\{\hat{S}^i\}$, сходящуюся к функции $\hat{S} \in \Sigma$. $\square$

Переобозначим элементы пространства Σ буквами $\sigma \in \Sigma$ (таким образом, $\sigma \in \Sigma$ в том и только в том случае, если $\sigma = \hat{S}$, где $\hat{S} = \lim_{i \rightarrow \infty} S_{\tau_i}$) и введем в рассмотрение однопараметрическую группу $h^{\tau}: \Sigma \rightarrow \Sigma$, определенную равенством $h^{\tau}\sigma = \sigma_{\tau}$.

Лемма 5. *Функция $(\tau, \sigma) \rightarrow h^{\tau}\sigma$ непрерывна по совокупности переменных (τ, σ) на множестве $\mathbb{R} \times \Sigma$ равномерно относительно τ на любом отрезке времени. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ и каждого $T > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon, T) > 0$, что для всех $\sigma, \hat{\sigma} \in \Sigma$ таких, что $\rho_{\Sigma}(\sigma, \hat{\sigma}) \leq \delta$, и всех $\tau \in [-T, T]$ имеет место неравенство $\max_{|\tau| \leq T} \rho_{\Sigma}(h^{\tau}\sigma, h^{\tau}\hat{\sigma}) \leq \varepsilon$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть заданы последовательности $\{t_i\}$ и $\{\sigma^i\}$, $\sigma^i \in \Sigma$, такие, что $t_i \rightarrow t_0$ и $\rho_{\Sigma}(\sigma^i, \hat{\sigma}) \rightarrow 0$. Надо доказать, что $\rho_{\Sigma}(h^{t_i}\sigma^i, h^{t_0}\hat{\sigma}) \rightarrow 0$. В силу леммы 4 из равенства $\lim_{i \rightarrow \infty} \rho_{\Sigma}(\sigma^i, \hat{\sigma}) = 0$ следует, что последовательность $\{\sigma^i\}$, где $\sigma^i = S^i(t, x)$, сходится к $\hat{\sigma} = \hat{S}(t, x)$ равномерно на каждом компакте в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Следовательно, для $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in \mathbb{R}$ найдется такой номер i_1 , что для любых $i \geq i_1$, для всех $(s, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ таких, что $|s| + |x| \leq a$ и $a \leq 2/\varepsilon$, выполнено неравенство $\text{Dist}(S^i(s + t_0, x), \hat{S}(s + t_0, x)) \leq \varepsilon/2$. В силу равномерной непрерывности функции $t \rightarrow S(t, x)$ на прямой $\mathbb{R}$ равномерно относительно x на компактах в $\mathbb{R}^n$ для любого $\varepsilon > 0$ и компакта $K = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq a\}$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, что неравенство

$$\text{Dist}(S_t(s, x), S_{t_0}(s, x)) \leq \varepsilon/2$$

выполнено при всех $|t - t_0| \leq \delta$, всех $s \in \mathbb{R}$, $|x| \leq a$. Выберем такое i_2 , что $|t_i - t_0| \leq \delta$ при $i \geq i_2$. Пусть $i_0 = \max\{i_1, i_2\}$, тогда для всех $i \geq i_0$ и всех $(s, x) \in \mathbb{R} \times \Sigma$ таких, что $|s| + |x| \leq a$, $a \leq 1/\varepsilon$, справедливы неравенства

$$\text{Dist}(S_{t_i}^i(s, x), \hat{S}_{t_0}(s, x)) \leq \text{Dist}(S_{t_i}^i(s, x), S_{t_0}^i(s, x)) + \text{Dist}(S_{t_0}^i(s, x), \hat{S}_{t_0}(s, x)) \leq \varepsilon,$$

следовательно, если $t^i \rightarrow t_0$ и $\rho_{\Sigma}(\sigma^i, \hat{\sigma}) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, то $\lim_{i \rightarrow \infty} \rho_{\Sigma}(h^{t_i}\sigma^i, h^{t_0}\hat{\sigma}) = 0$.

Покажем, что движение $\tau \rightarrow h^{\tau}\sigma$ непрерывно зависит от начальной точки. Предположим, что это неверно, тогда найдутся число $\alpha > 0$, последовательность $\{\sigma_i\}_{i=1}^{\infty}$ элементов пространства Σ , $\lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_i = \sigma$, и соответствующая числовая последовательность $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$, $|t_i| \leq T$, такая, что $\rho_{\Sigma}(h^{t_i}\sigma, h^{t_i}\sigma_i) > \alpha > 0$. По теореме Вейерштрасса из последовательности $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность (которую снова обозначим $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$), $\lim_{n \rightarrow \infty} t_i = t_0$, $|t_0| \leq T$. По свойствам метрического пространства имеем

$$\rho_{\Sigma}(h^{t_i}\sigma, h^{t_i}\sigma_i) \leq \rho_{\Sigma}(h^{t_i}\sigma, h^{t_0}\sigma) + \rho_{\Sigma}(h^{t_0}\sigma, h^{t_i}\sigma_i).$$

Из непрерывности функции $(t, \sigma) \rightarrow h^t \sigma$ следует, что расстояния в правой части последнего неравенства при достаточно больших индексах i можно сделать меньше константы $\alpha/2$, и мы приходим к противоречию: $\alpha < \alpha$. $\square$

В силу лемм 4 и 5 пара (Σ, h^t) образует топологическую динамическую систему, которая называется динамической системой сдвигов. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. Пусть выполнено условие 1. Тогда пара (Σ, h^t) , образованная семейством дифференциальных включений

$$\dot{x} \in \widehat{G}(t, x), \quad x(t) \in \widehat{N}(t), \quad (3.3)$$

и группой $h^\tau \widehat{S} \doteq \widehat{S}_\tau$, где $\widehat{S}(t, x) \doteq (\widehat{G}(t, x), \widehat{N}(t))$, образует динамическую систему сдвигов. $\square$

3.3. Полезная параметризация семейства дифференциальных включений. Рассмотренная в теореме 3 динамическая система сдвигов может быть параметризована следующим образом. Пусть задана удовлетворяющая условию 1 функция

$$(\tau, x) \rightarrow S(\tau, x) \doteq (G(\tau, x), N(\tau)) \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n) \times \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$$

переменных $(\tau, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, по которой, как и раньше, строится множество функций

$$\Sigma \doteq \text{cl}\{(\tau, x) \rightarrow S_t(\tau, x) : t \in \mathbb{R}\}, \quad \text{где} \quad S_t(\tau, x) = S(\tau + t, x),$$

а замыкание cl берется по метрике (3.1). Пусть $\sigma = \widehat{S} \doteq (\widehat{G}, \widehat{N})$, где $\widehat{S}(\tau, x) \doteq (\widehat{G}(\tau, x), \widehat{N}(\tau))$, $h^t : \Sigma \rightarrow \Sigma$, $h^t \sigma \doteq h^t \widehat{S} = \widehat{S}_t$. Введем в рассмотрение две функции

$$F : \Sigma \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{clcv}(\mathbb{R}^n) \quad \text{и} \quad M : \Sigma \rightarrow \text{clcv}(\mathbb{R}^n),$$

определенные равенствами $F(\sigma, x) \doteq \widehat{G}(0, x)$, $M(\sigma) \doteq \widehat{N}(0)$. Тогда

$$F(h^t \sigma, x) = \widehat{G}(t, x), \quad M(h^t \sigma) = \widehat{N}(t),$$

и поэтому семейство включений (3.3) можно записать в виде

$$\dot{x} \in F(h^t \sigma, x), \quad x(t) \in M(h^t \sigma), \quad \sigma \in \Sigma. \quad (3.4)$$

Записав семейство включений в виде (3.4), мы можем теперь забыть, что динамическая система (Σ, h^t) предполагалась динамической системой сдвигов, и, не меняя записи (3.4), можем рассматривать семейство включений (3.4), параметризованных с помощью произвольной топологической динамической системы.

4. Управляемые системы и дифференциальные включения

Рассмотрим простой пример, иллюстрирующий применение пространства $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ с метрикой Хаусдорфа — Бебутова при исследовании одной задачи оптимизации, приводящей к дифференциальным включениям с некомпактными образами.

Пример 1. Рассмотрим билинейную управляемую систему

$$\dot{x} = (A_0(t) + u_1 A_1(t) + \dots + u_m A_m(t))x, \quad (4.1)$$

где $A_k(t)$ — липшицевы, ограниченные на $\mathbb{R}$ функции $t \rightarrow A_k(t)$ со значениями в пространстве $M(n)$ квадратных матриц порядка n с нормой, согласованной с евклидовой нормой пространства $\mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}_+^m \doteq \{u = (u_1 \dots u_m) \in \mathbb{R}^m : u_i \geq 0\}$ — управляющий вектор. По определению управление $t \rightarrow u(t)$ допустимо, если функция $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^m$ непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}_+$.

Наряду с системой (4.1) будем рассматривать дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x)$$

с правой частью

$$F(t, x) \doteq \{(A_0(t) + u_1 A_1(t) + \dots + u_m A_m(t))x : u \in \mathbb{R}_+^m\}.$$

Ясно, что F как функция переменной x линейна, и при любых (t, x) множество $F(t, x)$ образует *выпуклый замкнутый конус* с центром в точке $A_0(t)x$. Будем предполагать далее, что выполнено следующее *неравенство*: $\max_{\ell_1, \ell_2 \in F(t, x)} \angle(\ell_1, \ell_2) \leq \pi$, где $\ell_i(t, x)$ — *лучи конуса* $F(t, x)$.

Покажем, что функция $(t, x) \rightarrow F(t, x)$ *равномерно непрерывна на множествах* $\mathbb{R} \times K$, где K — произвольный компакт в $\mathbb{R}^n$. Надо показать, что если заданы $\varepsilon > 0$ и компакт $K \subset \mathbb{R}^n$, то найдется такое $\delta \doteq \delta(\varepsilon, K) > 0$, что из неравенства $|t_1 - t_2| + |x_1 - x_2| \leq \delta$, где $(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in \mathbb{R} \times K$, следует неравенство $\text{Dist}(F(t_1, x_1), F(t_2, x_2)) \leq \varepsilon$.

Рассмотрим сначала луч $\ell(t, x) \doteq \{\lambda A_1(t)x : \lambda \geq 0\}$. В силу предположения найдется (при заданном компакте $K \subset \mathbb{R}^n$) такая константа $b_1 = b_1(K)$, что для точек $x_i \in K$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} |A_1(t_1)x_1 - A_1(t_2)x_2| &\leq |x_1||A_1(t_1) - A_1(t_2)| + |A_1(t_2)||x_1 - x_2| \leq c_1|A_1(t_1) - A_1(t_2)| \\ &+ a_1|x_1 - x_2| \leq c_1 l_1 |t_1 - t_2| + a_1|x_1 - x_2| \leq b_1(|t_1 - t_2| + |x_1 - x_2|), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $c_1 = \max_{x \in K} |x|$, l_1 — константа Липшица функции $A_1(t)$, $a_1 = \sup_{t \in \mathbb{R}} |A_1(t)|$, $b_1 = \max\{c_1 l_1, a_1\}$.

Поэтому найдется такая константа $\varkappa = \varkappa(K) \geq b_1$, что $\angle(\ell^1, \ell^2) \leq \varkappa \sqrt{|t_1 - t_2|^2 + |x_1 - x_2|^2}$, где $\ell^i = \ell(t_i, x_i)$. Далее, с учетом примера 1 работы [2, с. 187] имеем: $\text{Dist}(\ell^1, \ell^2) = \sqrt{\sin \angle(\ell^1, \ell^2)}$. Таким образом, для заданных $\varepsilon > 0$ и $K \subset \mathbb{R}^n$ можно построить такое $\delta > 0$, что из неравенства $|t_1 - t_2| + |x_1 - x_2| \leq \delta$ будет следовать неравенство $\text{Dist}(\ell(t_1, x_1), \ell(t_2, x_2)) \leq \varepsilon$.

Если $\ell(t, x) \doteq \{A_0(t)x + \lambda A_1(t)x : \lambda \geq 0\}$, то несложно понять, что для каждого $r > 0$ и любой пары точек (t_i, x_i) выполнено неравенство

$$\text{dist}(\ell_r^1, \ell_r^2) \leq |A_0(t_1)x_1 - A_0(t_2)x_2| + r|A_1(t_1)x_1 - A_1(t_2)x_2|,$$

где $\ell_r^i = \ell(t_i, x_i) \cap O(f_0(t_i, x_i))$. Поэтому, рассуждая как и при доказательстве (4.2), получим неравенство $\text{dist}(\ell_r^1, \ell_r^2) \leq (b_0 + b_1 r)(|t_1 - t_2| + |x_1 - x_2|)$, где константы b_i зависят от компакта K . Из сказанного следует, что $\text{Dist}(\ell(t_1, x_1), \ell(t_2, x_2)) \leq c(|t_1 - t_2| + |x_1 - x_2|)$, где $c = c(K) < \infty$.

Если $\ell(t, x) \doteq \{A_0(t)x + \lambda_1 A_1(t)x + \dots + \lambda_m A_m(t)x : \lambda_i \geq 0, i = 0 \dots m\}$, то из приведенных рассуждений по-прежнему следует неравенство

$$\text{Dist}(\ell(t_1, x_1), \ell(t_2, x_2)) \leq c(|t_1 - t_2| + |x_1 - x_2|).$$

Пусть теперь заданы последовательность систем

$$\dot{x} = (A_0^k(t) + u_1 A_1^k(t) + \dots + u_m A_m^k(t))x,$$

$k = 1 \dots \infty$, и соответствующая ей последовательность $F^k(t, x)$ дифференциальных включений

$$\dot{x} \in F^k(t, x),$$

где $F^k(t, x) \doteq \{(A_0^k(t) + u_1 A_1^k(t) + \dots + u_m A_m^k(t))x : u \in \mathbb{R}_+^m\}$. Выясним условия, при которых для любого $\varepsilon > 0$ и всякого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ найдется такой номер $k_0 = k_0(\varepsilon, K)$, что для каждого $k \geq k_0$ и всех $(t, x) \in \mathbb{R} \times K$ выполнено неравенство $\text{Dist}(F^k(t, x), F(t, x)) \leq \varepsilon$.

Пусть последовательности матриц $\{A_i^k(t)\}_{k=1}^\infty$ состоят из равномерно непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций $t \rightarrow A_i^k(t)$ и $\sup_{t \in \mathbb{R}} |A_i^k(t) - A_i(t)| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, $i = 0 \dots m$. Тогда для заданных $\varepsilon > 0$, $r > 0$, компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ и каждого множества

$$\ell_{ir}^k(t, x) \doteq \{(A_0^k(t) + \lambda A_i^k(t))x : 0 \leq \lambda \leq r\}$$

найдется такой индекс $k_0 = k_0(\varepsilon, r, K)$, что неравенство $\text{dist}(\ell_{ir}^k(t, x), \ell_{ir}(t, x)) \leq \varepsilon$ выполнено при всех $i = 1 \dots m$, $(t, x) \in \mathbb{R} \times K$, $k \geq k_0$. Здесь $\ell_{ir}(t, x) \doteq \{(A_0(t) + \lambda A_i(t))x : 0 \leq \lambda \leq r\}$. Из этих неравенств при всех $r > 0$ в силу определения метрики Хаусдорфа следует неравенство $\text{dist}(F_r^k(t, x), F_r(t, x)) \leq \varepsilon$. Следовательно, $\text{Dist}(F^k(t, x), F(t, x)) \leq \varepsilon$.

Введем в рассмотрение показатель Боля

$$\Lambda_0(A, u(\cdot)) \doteq \overline{\lim}_{t-s \rightarrow \infty} \frac{\ln |X(t, s; u(\cdot))|}{t-s}$$

системы (4.1), где $X(t, s; u(\cdot))$ — матрица Коши при допустимом управлении

$$t \rightarrow u(t) = (u_1(t) \dots u_m(t)).$$

Рассмотрим функционал

$$J(A, u(\cdot)) \doteq \Lambda_0(A, u(\cdot)) + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |u^2(t)| dt$$

и задачу минимизации функционала $J(A, u(\cdot))$ по всем допустимым $u(\cdot)$. Предположим, что $J(A) \doteq \min_{u(\cdot)} J(A, u(\cdot)) > -\infty$.

Интересно выяснить условия, при которых $\lim_{k \rightarrow \infty} J(A^k) \leq J(A)$. Здесь $J(A^k)$ — нижняя грань функционала $J(A^k, u(\cdot))$ k -й системы (см. (4)). Оказывается (это требует дополнительного доказательства), что из равенства $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{Dist}(F^k(t, x), F(t, x)) = 0$ следует требуемое неравенство $\lim_{k \rightarrow \infty} J(A^k) \leq J(A)$.

4.1. Подготовительные сведения. Пусть задана топологическая динамическая система (Σ, h^t) , относительно фазового пространства которой мы будем предполагать, что фазовое пространство Σ локально компактно (т.е. для любой точки σ_0 пространства Σ пересечение шара $O_a(\sigma_0) \doteq \{\sigma \in \Sigma : \rho_\Sigma(\sigma, \sigma_0) \leq a\}$ с пространством Σ компактно). Будем рассматривать задачу

$$\dot{x} \in F(h^t \sigma, x), \quad x(t) \in M(h^t \sigma), \quad (4.3)$$

относительно которой предполагается, что функция $(\sigma, x) \rightarrow F(\sigma, x)$, задающая дифференциальное включение $\dot{x} \in F(h^t \sigma, x)$, определена при всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ и принимает значения в пространстве $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, а функция $\sigma \rightarrow M(\sigma)$, задающая фазовые ограничения задачи (4.3), принимает значения в пространстве $\text{clos}(\mathbb{R}^n)$ непустых замкнутых подмножеств в $\mathbb{R}^n$ и для каждого шара $O_r(0)$ достаточно большого радиуса r непрерывна в каждой точке $\sigma \in \Sigma$.

При исследовании вопросов существования решений задачи (4.3) будем пользоваться определениями полунепрерывности сверху и снизу в терминах полуотклонений D и непрерывности в терминах метрики Dist Хаусдорфа — Бебутова.

О п р е д е л е н и е 3. Функцию $F(\sigma, x)$ переменных $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ со значениями в пространстве $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ будем называть *полунепрерывной сверху в точке (σ_0, x_0)* в том и только в том случае, если для всякого положительного r выполнено следующее свойство: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех точек (σ, x) , удовлетворяющих неравенству

$$\rho_\Sigma(\sigma, \sigma_0) + |x - x_0| \leq \delta, \quad (4.4)$$

полуотклонение Хаусдорфа $d(F_r(\sigma, x), F_r(\sigma_0, x_0))$ не превосходит ε , где (см. разд. 1)

$$F_r(\sigma, x) \doteq F(\sigma, x) \cap O_r(f_0(\sigma, x)), \quad f_0(\sigma, x) \doteq \left\{ f_0 \in F(\sigma, x) : |f_0| = \min_{f \in F(\sigma, x)} |f| \right\},$$

а полуотклонение $d(F, G)$ определяется равенством $d(F, G) = \max_{f \in F} \varrho(f, G)$. Далее, функцию $F: \Sigma \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ будем называть *полунепрерывной снизу в точке* (σ_0, x_0) в том и только в том случае, если для всякого $r > 0$ выполнено следующее свойство: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех точек (σ, x) , удовлетворяющих неравенству (4.4), полуотклонение $d(F_r(\sigma_0, x_0), F_r(\sigma, x))$ не превосходит ε . Далее, если функция $F(\sigma, x)$ одновременно полунепрерывна сверху и снизу в точке (σ_0, x_0) , то она называется *непрерывной в точке* (σ_0, x_0) . Обычным образом понимается полунепрерывность сверху, снизу и непрерывность на произвольном множестве $G \subset \Sigma \times \mathbb{R}^n$.

З а м е ч а н и е 2. Отметим еще раз, что в пространстве $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$ мы сохраняем метрику $\text{dist}(F, G)$ и полуотклонения $d(F, G)$, $d(G, F)$ Хаусдорфа. Такая метрика является *внутренней* (см. [1]) относительно метрики $\text{Dist}(F, G)$ пространства $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$. Поэтому пространство $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$ не может рассматриваться как подпространство в $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$. Далее, следует заметить, что в силу определения 3 из непрерывности, полунепрерывности снизу или полунепрерывности сверху в смысле метрики Хаусдорфа — Бебутова произвольной функции $(\sigma, x) \rightarrow F(\sigma, x)$ с компактными значениями в $\mathbb{R}^n$ следуют непрерывность, полунепрерывность снизу или полунепрерывность сверху в смысле метрики и полуотклонений Хаусдорфа в $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$.

О п р е д е л е н и е 4. Пусть задана топологическая динамическая система (Σ, h^t) . Напомним, что функция $\sigma \rightarrow M(\sigma)$ со значениями в $\text{clos}(\mathbb{R}^n)$ называется *слабо инвариантной* относительно решений включения $\dot{x} \in F(h^t\sigma, x)$, если для любой точки $(\sigma, x_0) \in \Sigma \times M(\sigma)$ существуют интервал $[0, \varepsilon)$ и по крайней мере одно решение $x(t) = x(t, \sigma, x_0)$ задачи Коши

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad x(0) = x_0, \quad (4.5)$$

такие, что для всех $t \in [0, \varepsilon)$ выполнено включение $x(t) \in M(h^t\sigma)$.

О п р е д е л е н и е 5. Пусть множество M содержится в пространстве $\text{clos}(\mathbb{R}^n)$ и $x \in M$. Тогда *опорным конусом* (конусом Bouligand, см., например, [11, с. 25]) к множеству M в точке x называется выпуклый конус $T_x M$, определенный равенством

$$T_x M = \left\{ p \in \mathbb{R}^n : \liminf_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\varrho(x + \varepsilon p, M)}{\varepsilon} = 0 \right\}.$$

Отметим, что вектор p принадлежит конусу $T_x M$ в том и только в том случае, если существуют две последовательности $\{\varepsilon_i\}$, $\{p_i\}$ такие, что $\varepsilon_i > 0$, $\varepsilon_i \rightarrow 0$, $p_i \rightarrow p$ и $x + \varepsilon_i p_i \in M$.

О п р е д е л е н и е 6. Напомним (см. [12, с. 20]), что векторное поле, порожденное задачей (4.3), обладает свойством *слабой полноты*, если для любой начальной точки (σ, x_0) множества $\Sigma \times M(\sigma)$ существует по крайней мере одно решение $x(t)$ задачи Коши (4.5), определенное при всех $t \in \mathbb{R}_+ \doteq [0, \infty)$ и удовлетворяющее при всех $t \in \mathbb{R}_+$ включению $x(t) \in M(h^t\sigma)$.

4.2. Теоремы существования решений задачи (4.3). Приведем для примера два аналога известных теорем существования [11, гл. 3; 13, гл. 2, § 1; 14, гл. 2, § 6, 7] решения задачи Коши для дифференциального включения $\dot{x} \in F(t, x)$ с фазовыми ограничениями M .

У с л о в и е 2. Функции

$$(\sigma, x) \rightarrow F(\sigma, x) \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n), \quad \sigma \rightarrow M(\sigma) \in \text{clos}(\mathbb{R}^n),$$

задающие краевую задачу (4.3), являются *согласованными*, т.е. функция $\sigma \rightarrow M(\sigma)$ непрерывна и выполнено условие

$$Q(\sigma, x) \doteq F(\sigma, x) \cap T_x M(\sigma) \neq \emptyset \quad \text{для всех } (\sigma, x) \in \Sigma \times M(\sigma). \quad (4.6)$$

Теорема 4. Пусть выполнено условие 2 и функция $(\sigma, x) \rightarrow F(\sigma, x) \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывна сверху. Тогда для каждой точки (σ, x_0) , $x_0 \in M(\sigma)$, найдется такой интервал (t_*, t^*) числовой прямой, что решение задачи Коши (4.5) существует при всех $t \in (t_*, t^*)$ и при всех $t \in [0, t^*)$ удовлетворяет включению $x(t) \in M(h^t \sigma)$.

Доказательство. Из условия 2, как можно заметить, следует, что найдется константа $r > 0$, обеспечивающая условие

$$Q_r(\sigma, x) \doteq F_r(\sigma, x) \cap T_x M(\sigma) \neq \emptyset \quad \text{для всех} \quad (\sigma, x) \in \Sigma \times M(\sigma),$$

где $F_r(\sigma, x) \doteq F(\sigma, x) \cap O_r(f_0(\sigma, x))$, $f_0(\sigma, x)$ — ближайшая к нулю точка множества $F(\sigma, x)$. В остальном доказательство теоремы следует рассуждениям монографии [11, с. 93]. $\square$

Теорема 5. Пусть существует такое $\varepsilon > 0$, что для любой точки $(\sigma, x_0) \in \Sigma \times M(\sigma)$ найдется по крайней мере одно решение $x(t)$ задачи Коши (4.5), определенное при всех $t \in [0, \varepsilon]$ и удовлетворяющее включению $x(t) \in M(h^t \sigma)$, $0 \leq t \leq \varepsilon$. Тогда векторное поле, порожденное задачей (4.3), обладает свойством слабой полноты.

Доказательство. Пусть $(\sigma, x_0) \in \Sigma \times M(\sigma)$, $\varepsilon > 0$ и $x(t) = x(t, \sigma, x_0)$ — решение задачи (4.5), удовлетворяющее при всех $t \in I_0 \doteq [0, \varepsilon]$ включению $x(t) \in M(h^t \sigma)$. Положим $\sigma_1 = h^\varepsilon \sigma$, $x_1 = x(\varepsilon, \sigma, x_0)$ и для точки $(\sigma_1, x_1) \in \Sigma \times M(\sigma)$ рассмотрим решение $\hat{x}(t) = \hat{x}(t, \sigma_1, x_1)$ задачи (4.5), удовлетворяющее при всех $t \in I_0 \doteq [0, \varepsilon]$ включению $\hat{x}(t) \in M(h^t \sigma_1)$. В силу условий теоремы такое решение существует. Непосредственно проверяется, что функция $t \rightarrow x_1(t)$, определенная на отрезке $[\varepsilon, 2\varepsilon]$ равенством $x_1(t) = \hat{x}(t - \varepsilon, \sigma_1, x_1)$, продолжает решение $x(t)$ задачи (4.5) на отрезок $[0, 2\varepsilon]$. Такое построение можно продолжить. $\square$

Теорема 6. Предположим, что выполнено условие 2, функция $(\sigma, x) \rightarrow Q(\sigma, x) \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, определенная равенством (4.6), полунепрерывна сверху и найдутся непрерывные функции $a: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+$ и $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такие, что неравенство $|Q(\sigma, x)| \leq a(\sigma)g(|x|)$ выполнено для всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times M(\sigma)$. Если $\int_{z_0}^{\infty} \frac{dz}{g(z)} = \infty$ для любого $z_0 \geq 0$, то векторное поле, порожденное задачей (4.3), обладает свойством слабой полноты.

Доказательство этой теоремы во многом повторяет рассуждения [14, с. 101].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. Курс метрической геометрии. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004. 511 с.
2. Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Распространение теорем Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского об устойчивости на управляемые динамические системы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 185–201.
3. Аносов Д.В. Лекции по линейной алгебре. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 1999. 105 с.
4. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985. 335 с.
5. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1949. 550 с.
6. Динамические системы-1 / Аносов Д.В [и др.] // Итоги науки и техники. Сер. “Современные проблемы математики. Фундаментальные направления”. Т. 1. М.: Изд-во ВИНТИ АН СССР, 1985. 244 с.
7. Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М.: “Факториал”, 1999. 767 с.
8. Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Тр. Математического ин-та им. В.А. Стеклова. 2008. Т. 262. С. 202–221.

9. Родина Л.И., Тонков Е.Л. Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 2. С. 265–288.
10. Бебутов М.В. О динамических системах в пространстве непрерывных функций // Бюллетень мех.-мат. фак. МГУ. 1941. № 5. С. 1–52.
11. Aubin J.-P. Viability theory. Boston: Birkhäuser, 1991. 543 p.
12. Аграчев А.Ф., Сачков А.Л. Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005. 391 с.
13. Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. Математического ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1985. Т. 169. С. 194–252.
14. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 223 с.

Панасенко Елена Александровна

Поступила 31.07.2010

канд. физ.-мат. наук, доцент

Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина

e-mail: panlena_t@mail.ru

Родина Людмила Ивановна

канд. физ.-мат. наук

доцент

Удмуртский государственный университет

e-mail: box0589@udmnet.ru

Тонков Евгений Леонидович

д-р физ.-мат. наук

зав. каф.

Удмуртский государственный университет

e-mail: eltonkov@udm.ru