УДК 531.38, 517

Изоэнергетические многообразия и области возможности движения твердого тела в двойном поле сил

Д. Б. Зотьев
Волгоградский технический университет
400131, Россия, Волгоград, ул. Ленина, 28
E-mail: zotev@inbox.ru

М. П. Харламов
Волгоградская академия государственной службы
400131, Россия, Волгоград, ул. Гагарина, 8
E-mail: mharlamov@vags.ru

Получено 6 июня 2005 г.

Движение твердого тела с неподвижной точкой в двойном постоянном силовом поле описывается гамильтоновой системой с тремя степенями свободы. В общем случае группы симметрий отсутствуют. Указаны критические точки гамильтониана и соответствующие критические значения энергии. С помощью теории Морса определен гладкий тип пятимерных регулярных изоэнергетических уровней и их проекций на конфигурационное пространство, диффеоморфное трехмерному проективному пространству. Изучены аналоги классических областей возможности движения — проекции изоэнергетических многообразий на одну из сфер Пуассона.

Ключевые слова: твердое тело, двойное постоянное силовое поле, изоэнергетические многообразия, сферы Пуассона.

D. B. Zotev, M. P. Kharlamov

Iso-energetic manifolds and motion possibility regions of rigid body in double force field

The motion of a rigid body about a fixed point in a double constant force field is governed by a Hamiltonian system with three degrees of freedom. We consider the general case when there are no one-dimensional symmetry groups. We point out the critical points of the Hamilton function and corresponding critical values of energy. Using the Morse theory, we have found the smooth type of non-degenerate five-dimensional iso-energetic levels and find their projections onto the configuration space, diffeomorphic to a three-dimensional projective space. The analogs of classical motion possibility regions, the projections of iso-energetic manifolds onto one of the Poisson spheres, are studied.

Keywords: rigid body, double constant force fields, iso-energetic manifolds, Poisson spheres.
Mathematical Subject Classifications: 70E17, 70G40.

1. Введение

Рассмотрим задачу о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки в поле сил с потенциалом

$$W = -a\,\mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha} - b\,\mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\beta}, \tag{1.1}$$

где a, b — положительные физические константы, единичные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ неподвижны в теле, единичные векторы $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ неподвижны в инерциальном пространстве. Для определенности будем считать, что $a \geqslant b$. Потенциалы вида (1.1) введены в [1]; там же указаны соответствующие физические модели.

Без ограничения общности можно полагать, что $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ взаимно ортогональны [3]. Как показано в [9], для заданного потенциала W как функции ориентации тела пара $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ также может быть выбрана ортогональной.

Конфигурационное пространство задачи

$$C^3 = \{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathbf{R}^6 : \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha} = 1,\ \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta} = 1,\ \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0\}$$

канонически диффеоморфно $\mathbf{R}P^3$. Пространство касательного расслоения TC^3 отождествляется с многообразием $P^6 = \{(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) : \boldsymbol{\omega} \in \mathbf{R}^3,\ (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in C^3\}$. Здесь $\boldsymbol{\omega}$ — вектор мгновенной угловой скорости тела.

Обозначим через $\mathbf{I}$ тензор инерции тела в неподвижной точке. В подвижном базисе он постоянен и положительно определен. Движение тела описывается гамильтоновой системой на P^6 с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} + W(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}). \tag{1.2}$$

Пусть

$$a > b > 0. \tag{1.3}$$

Тогда известен только один случай интегрируемости [4]. При $b = 0$ он обращается в классический случай С.В. Ковалевской, а при $b = a$ имеем случай Х. Яхья [10]. Обе предельных задачи имеют $SO(2)$-симметрию и сводятся к системам с двумя степенями свободы.

Здесь рассматривается несимметричная задача (1.3) без ограничений на тензор инерции и на положение в теле ортонормированной пары $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Общих исследований фазовой топологии такой задачи не проводилось. Методы топологического анализа, основанные на инвариантах Фоменко–Цишанга [2], предполагают полную интегрируемость и две степени свободы. Общая теория бифуркаций торов Лиувилля произвольных размерностей [6] также относится к интегрируемым системам.

В данной работе гладкий тип неособых изоэнергетических поверхностей $Q^5_h = H^{-1}(h) \subset P^6$ в общем случае (1.3) устанавливается с применением идей С. Смейла [5].

2. Критические точки гамильтониана

Гладкий тип многообразий Q^5_h меняется, когда h пересекает критическое значение функции (1.2). Пусть c — критическая точка H. Тогда она соответствует положению равновесия тела. В частности, в такой точке $\boldsymbol{\omega} = 0$. Рассмотрим проекцию

$$\tau : P^6 \to C^3, \quad \tau(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}).$$

Образ $\tau(c)$ является критической точкой потенциала W.

Теорема 1. *Энергия $H : P^6 \to \mathbf{R}$ является функцией Морса и имеет ровно четыре критических точки c_λ $(\lambda = 0, 1, 2, 3)$:*

$$\begin{array}{lllll}
c_0: & \boldsymbol{\omega} = 0, & \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{e}_1, & \boldsymbol{\beta} = \mathbf{e}_2; & h_0 = H(c_0) = -a - b; \\
c_1: & \boldsymbol{\omega} = 0, & \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{e}_1, & \boldsymbol{\beta} = -\mathbf{e}_2; & h_1 = H(c_1) = -a + b; \\
c_2: & \boldsymbol{\omega} = 0, & \boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{e}_1, & \boldsymbol{\beta} = \mathbf{e}_2; & h_2 = H(c_2) = a - b; \\
c_3: & \boldsymbol{\omega} = 0, & \boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{e}_1, & \boldsymbol{\beta} = -\mathbf{e}_2; & h_3 = H(c_3) = a + b.
\end{array}$$

Индекс Морса точки c_λ равен λ. Положение равновесия c_0 устойчиво, остальные три — неустойчивы.

Доказательство.

В положении равновесия тела момент внешних сил равен нулю

$$a\,\mathbf{e}_1 \times \boldsymbol{\alpha} + b\,\mathbf{e}_2 \times \boldsymbol{\beta} = 0.$$

Так как $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$, $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta}$ и $a \neq b$, отсюда следует, что $\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{e}_1 = 0$ и $\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{e}_2 = 0$.

Первое слагаемое в правой части (1.2) есть положительно определенная форма от $\boldsymbol{\omega}$, поэтому индекс Морса функции H в точке c_λ совпадает с индексом Морса потенциала (1.1) в точке $\tau(c_\lambda)$. Последний легко вычисляется. Невырожденное равновесие в натуральной механической системе устойчиво только в том случае, когда индекс Морса соответствующей критической точки равен нулю.

3. Типы изоэнергетических многообразий

Напомним некоторые сведения из [5], [11].

Пусть $\sigma : E \to M$ — векторное расслоение над многообразием M (возможно, с краем ∂M), и $<,>_x$ — риманова метрика на этом расслоении, то есть гладкое отображение $x \mapsto <,>_x$, которое сопоставляет каждой точке $x \in M$ скалярное произведение в слое $\sigma^{-1}(x)$. Пространство $E_1 = \{v \in E : \|v\| = 1\}$ называется расслоением единичных сфер расслоения E. Для каждой точки $x \in \partial M$ отождествим весь слой $\sigma^{-1}(x) \cap E_1$ в одну точку. Полученное таким образом пространство $s(E)$ называется приведенным расслоением сфер расслоения E. Для заданного E расслоение $s(E)$ снабжается структурой гладкого многообразия путем построения гладкой функции $f : M \to \mathbf{R}$, положительной на $\operatorname{int} M$, равной нулю на ∂M и не имеющей критических точек на ∂M. Тогда $s(E) \cong \{v \in E : \|v\|^2 = f(\sigma(v))\}$. Гладкий тип $s(E)$ не зависит от выбора такой функции f.

Для тривиального расслоения $M \times \mathbf{R}^{k+1} \to M$ многообразие $s(M \times \mathbf{R}^{k+1})$ обозначается через $s_k(M)$.

Как обычно, обозначим

$$D^k = \{x \in \mathbf{R}^k : \|x\| \leqslant 1\}, \quad S^k = \{x \in \mathbf{R}^{k+1} : \|x\| = 1\}.$$

Следующие свойства установлены в [11].

Лемма 1. *(i) Если $\partial M = \varnothing$, то $s_k(M) = M \times S^k$.*
(ii) $s_k(D^m) = S^{k+m}$.
(iii) Если $\partial M_1 = \varnothing$, то $s_k(M_1 \times M_2) = M_1 \times s_k(M_2)$.

Рассмотрим натуральную механическую систему $(M, <,>, W)$ [5]. Здесь риманово многообразие $(M, <,>)$ есть конфигурационное пространство, а $W : M \to \mathbf{R}$ — потенциал. Гамильтониан

$$H(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 + W(p_M(v)), \quad v \in TM.$$

Здесь $p_M : TM \to M$ — проекция касательного расслоения.

Соответственно этому, изоэнергетическое многообразие (уровень постоянной энергии) определяется как $Q_h = \{v \in TM : \|v\|^2 + 2W(p_M(v)) = 2h\}$. Таким образом, для регулярных значений энергии гладкое многообразие Q_h есть приведенное расслоение сфер расслоения

$$p_M : p_M^{-1}(U_h) \to U_h, \quad U_h = \{x \in M : W(x) \leqslant h\}.$$

Множество $U_h \subset M$ называется областью возможности движения для заданной энергии h.

Для твердого тела в двойном поле имеем

$$M = \mathbf{R}P^3 = C^3,\ TM = \mathbf{R}P^3 \times \mathbf{R}^3 = P^6.$$

Риманова метрика на M индуцирована кинетической энергией в (1.2), потенциал W определен формулой (1.1). Тогда $Q_h^5 = s_2(U_h^3)$, где область возможности движения

$$U_h^3 = \{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in C^3 :\ W(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \leqslant h\}. \tag{3.1}$$

Мы используем верхний индекс для Q_h^5, U_h^3, чтобы подчеркнуть *типичную* размерность. Если h — регулярное значение, то Q_h^5 — гладкое пятимерное подмногообразие в $\mathbf{R}P^3 \times \mathbf{R}^3$, U_h^3 — гладкое трехмерное подмногообразие в $\mathbf{R}P^3$, возможно, с непустым краем ∂U_h^3, который, в свою очередь, является гладким двумерным подмногообразием в $\mathbf{R}P^3$ без края.

Лемма 2. *Пусть $p : M \to N$ — локально-тривиальное расслоение со слоем D^k над гладким многообразием N размерности n без края. Тогда $s_{n+k-1}(M)$ есть тотальное пространство локально-тривиального расслоения над N со слоем S^{n+2k-1}. Если p тривиально, то $s_{n+k-1}(M) = N \times S^{n+2k-1}$.*

Доказательство следует из леммы 1.

Рассмотрим гладкое вложение $\mathbf{R}P^2 \subset \mathbf{R}P^3$ и обозначим через V^3 трубчатую окрестность $\mathbf{R}P^2$ в $\mathbf{R}P^3$ с гладкой границей. По определению, V^3 является тотальным пространством локально-тривиального расслоения над $\mathbf{R}P^2$ со слоем D^1. Очевидно, многообразие V^3 ориентируемо.

Лемма 3. *Существует ровно два топологически неэквивалентных локально-тривиальных расслоения над $\mathbf{R}P^2$ со слоем D^1. Одно из них (прямое произведение) неориентируемо. Второе гомеоморфно V^3.*

Доказательство.

Локально-тривиальные расслоения над $\mathbf{R}P^2$ со слоем D^1 классифицируются группой гомологий $H_1(\mathbf{R}P^2) = \mathbf{Z}_2$ [7]. Поскольку тотальное пространство $\mathbf{R}P^2 \times D^1$ тривиального расслоения неориентируемо, то второй класс содержит определенное выше пространство V^3.

Вырежем открытый диск $\operatorname{int} D^n$ из $\mathbf{R}P^n$. Результат обозначим через $\mathbf{R}P_0^n$. Это пространство гомотопически эквивалентно $\mathbf{R}P^{n-1}$.

Лемма 4. $\mathbf{R}P_0^3$ *гомеоморфно* V^3.

Доказательство.

Введем однородные координаты $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ на $\mathbf{R}P^3$. Пусть $\mathbf{R}P^2 = \{x_4 = 0\}$ и $D^3 = \{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)/x_4^2 \leqslant \varepsilon^2\}$ – диск с центром в точке $(0 : 0 : 0 : 1)$. Проекция $\mathbf{R}P^3 \setminus \operatorname{int} D^3$ на $\mathbf{R}P^2$ вдоль оси x_4 есть локально-тривиальное расслоение над $\mathbf{R}P^2$ со слоем D^1, а его тотальное пространство есть гладкое трехмерное подмногообразие в $\mathbf{R}P^3$ с краем. Это многообразие, очевидно, ориентируемо. Доказательство завершается применением леммы 3.

Лемма 5. *Существует ровно два топологически неэквивалентных локально-тривиальных расслоения над* $\mathbf{R}P^2$ *со слоем* S^3. *Одно из них (прямое произведение) неориентируемо. Второе гомеоморфно* $s_2(V^3)$.

Доказательство.

Любое локально-тривиальное S^3-расслоение ассоциировано с четырехмерным векторным расслоением. Это отношение сохраняет эквивалентность расслоений. Классы эквивалентности k-мерных векторных расслоений над многообразием M $(m = \dim M)$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с гомотопическими классами непрерывных отображений M в многообразие Грассмана $G(2m+1, k)$ [7].

В нашем случае $m = 2$, $k = 4$, $G(5, 4) = \mathbf{R}P^4$. Поэтому S^3-расслоения над $\mathbf{R}P^2$ классифицируются множеством $\pi(\mathbf{R}P^2, \mathbf{R}P^4)$. Но $G(5, 4) = G(5, 1)$, поэтому то же самое множество классифицирует одномерные векторные расслоения над $\mathbf{R}P^2$. Эти расслоения, в свою очередь, ассоциированы с расслоениями со слоем D^1. Следовательно, $\pi(\mathbf{R}P^2, \mathbf{R}P^4) = \mathbf{Z}_2$. Прямое произведение $\mathbf{R}P^2 \times S^3$ неориентируемо. Пространство $s_2(V^3)$, согласно леммам 2, 3 есть ориентируемое тотальное пространство расслоения над $\mathbf{R}P^2$ со слоем S^3. Лемма доказана.

Замечание 1. *Можно непосредственно показать, что* $\pi(\mathbf{R}P^2, \mathbf{R}P^4) = \mathbf{Z}_2$. *Всякое непрерывное отображение* $\mathbf{R}P^2 \to \mathbf{R}P^4$ *гомотопно гладкому. По теореме Сарда последнее не может быть отображением на* $\mathbf{R}P^4$. *Следовательно,*

$$\pi(\mathbf{R}P^2, \mathbf{R}P^4) = \pi(\mathbf{R}P^2, \mathbf{R}P_0^4) = \pi(\mathbf{R}P^2, \mathbf{R}P^3).$$

По этой же причине $\pi(\mathbf{R}P^2, \mathbf{R}P^3) = \pi(\mathbf{R}P^2, \mathbf{R}P^2)$. *Вырезая малый диск* $\operatorname{int} D^2$ *из* $\mathbf{R}P^2$, *можно построить вложение*

$$\pi(\mathbf{R}P^2, \mathbf{R}P^2) \to \pi(\mathbf{R}P_0^2, \mathbf{R}P^2) = \pi_1(\mathbf{R}P^2) = \mathbf{Z}_2.$$

В то же время постоянное отображение и тождественное отображение $\mathbf{R}P^2$ *в себя не гомотопны друг другу. Следовательно, это вложение является биекцией.*

Используем обозначение $A \tilde{\times} B$ для тотального пространства нетривиального расслоения над A со слоем B. Тогда $V^3 = \mathbf{R}P^2 \tilde{\times} D^1$, $s_2(V^3) = \mathbf{R}P^2 \tilde{\times} S^3$. Согласно леммам 3, 5, топологический тип этих косых произведений определен однозначно, что оправдывает введенное обозначение.

Теорема 2. *В задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки в поле сил с потенциалом* (1.1) *многообразия* U_h^3 *и* Q_h^5 *для регулярных значений энергии* h *имеют следующие типы:*

(i) если $h < -a - b$, *то* $U_h^3 = \varnothing$, $Q_h^5 = \varnothing$;

(ii) если $-a - b < h < -a + b$, *то* $U_h^3 = D^3$, $Q_h^5 = S^5$;

(iii) если $-a + b < h < a - b$, *то* $U_h^3 = S^1 \times D^2$, $Q_h^5 = S^1 \times S^4$;

(iv) если $a - b < h < a + b$, то $U_h^3 = \mathbf{R}P^2 \tilde{\times} D^1$, $Q_h^5 = \mathbf{R}P^2 \tilde{\times} S^3$;
(v) если $h > a + b$, то $U_h^3 = \mathbf{R}P^3$, $Q_h^5 = \mathbf{R}P^3 \times S^2$.

Доказательство.

Случаи (i) и (v) очевидны. Для доказательства остальных утверждений относительно U_h^3 воспользуемся теорией Морса и теоремой 1.

Пересекая значение h_0 от случая (i) к случаю (ii), приклеиваем D^3 к пустому множеству.

Пересекая h_1, приклеиваем ручку $D^2 \times D^1$ к D^3 вдоль вложения $D^2 \times \partial D^1 = 2D^2$ в $\partial D^3 = S^2$. В результате для случая (iii) имеем $U_h^3 = S^1 \times D^2$.

Пересечем h_3, уменьшая h от случая (v). Тогда U_h^3 в случае (iv) получается вырезанием диска из $\mathbf{R}P^3$. По леммам 3, 4 результатом будет $\mathbf{R}P^2 \tilde{\times} D^1$.

Топологическую структуру Q_h^5 находим, применяя леммы 2, 5 к локально-тривиальным расслоениям $D^0 \times D^3 \to D^0$, $S^1 \times D^2 \to S^1$, $\mathbf{R}P^2 \tilde{\times} D^1 \to \mathbf{R}P^2$, $\mathbf{R}P^3 \times D^0 \to \mathbf{R}P^3$.

Отметим, что в классической задаче о движении твердого тела в поле силы тяжести ($b = 0$) случаи (ii) и (iv) исчезают. Гамильтониан не является при этом функцией Морса на P^6. Его критические точки заполняют две окружности, каждая из которых отвечает своему критическому значению (наибольшему и наименьшему значениям потенциала силы тяжести).

4. Области возможности движения

В классических задачах динамики твердого тела в поле силы тяжести ($b = 0$) роль фазового пространства играет многообразие $P^5 = \{(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathbf{R}^6 : \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha} = 1\}$, а в качестве конфигурационного пространства рассматривается сфера Пуассона

$$C^2 = \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}^3 : \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha} = 1\}. \tag{4.1}$$

Рассмотрим проекцию

$$\rho : C^3 \to C^2, \quad \rho(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha} \tag{4.2}$$

и композицию

$$\rho \circ \tau|_{Q_h^5} : Q_h^5 \to C^2. \tag{4.3}$$

Образ отображения (4.3) (область возможности движения векторной переменной $\boldsymbol{\alpha}$) обозначим через U_h^2. Введем множество δU_h^2 критических значений отображения (4.3). Оно называется обобщенной границей области U_h^2 [8]. Бифуркации обобщенной границы по параметру h определяют и перестройки самих областей U_h^2.

В критической точке c отображения (4.3) всегда $\boldsymbol{\omega} = 0$. Поэтому $\tau(c) \in \partial U_h^3$, а δU_h^2 есть множество критических значений отображения

$$\rho_h = \rho|_{\partial U_h^3} : \partial U_h^3 \to C^2 \tag{4.4}$$

(для регулярных значений энергии ∂U_h^3 — гладкое двумерное подмногообразие в C^3).

Лемма 6. *Критические точки отображения ρ_h определяются в C^3 условиями:*
(а) $W(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = h$;
(б) смешанное произведение

$$(\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0. \tag{4.5}$$

Доказательство.

Условие (a) есть уравнение ∂U_h^3. Отображение (4.4) совпадает с ограничением проекции $C^2 \times \mathbf{R}^3(\boldsymbol{\beta}) \to C^2$ на гладкое подмногообразие в $C^2 \times \mathbf{R}^3(\boldsymbol{\beta})$, заданное системой уравнений

$$a\,\mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha} + b\,\mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\beta} = -h, \quad \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0, \quad \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta} = 1. \tag{4.6}$$

В критической точке ранг этой системы по $\boldsymbol{\beta}$ должен быть меньше трех, что эквивалентно свойству (б).

Если допустить, что одна из точек $\boldsymbol{\alpha} = \pm\mathbf{e}_1$ принадлежит δU_h^2, то из условий (4.5), (4.6) сразу же следует, что $\boldsymbol{\beta} = \pm\mathbf{e}_2$ (комбинации знаков любые), а значит, h — одно из критических значений энергии. В остальных случаях считаем $\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{e}_1 \neq 0$. Тогда можно ввести угол $\chi \in [0, 2\pi)$ так, что

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{|\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{e}_1|}[(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{e}_1)\cos\chi + (\boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{e}_1))\sin\chi]. \tag{4.7}$$

Выберем триэдр $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ ($\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$) в качестве подвижной системы отсчета:

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \mathbf{e}_i.$$

Подставляя (4.7) в (4.5), (4.6), получим множество δU_h^2 в пространстве $\mathbf{R}^3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ как пересечение единичной сферы и гиперболического цилиндра

$$[\sqrt{a^2 - b^2}\alpha_1 + \frac{ah}{\sqrt{a^2 - b^2}}]^2 - b^2\alpha_3^2 = \frac{b^2h^2}{a^2 - b^2} \tag{4.8}$$

(при $h = 0$ он вырождается в пару плоскостей, пересекающихся по оси $O\alpha_2$).

Обозначим на сфере (4.1) точку $\alpha_1 = 1$ через N, а точку $\alpha_1 = -1$ через Z, и назовем эти точки, соответственно, северным и южным полюсами. Простую замкнутую кривую, не содержащую полюсов и нестягиваемую в множестве $C^2 \backslash \{N, Z\}$, назовем экватором.

Пусть Γ_N и Γ_Z — пересечения множества δU_h^2 соответственно с северным и южным замкнутыми полупространствами, ограниченными плоскостью $\alpha_1 = -ah/(a^2 - b^2)$. Следующие свойства этих множеств вытекают непосредственно из (4.8).

Лемма 7. *Пусть h — регулярное значение энергии. Тогда*

i) при $-a - b < h < a - b$ множество Γ_Z является экватором, в остальных случаях $\Gamma_Z = \varnothing$;

ii) при $-a + b < h < a + b$ множество Γ_N является экватором, в остальных случаях $\Gamma_N = \varnothing$;

iii) если оба множества Γ_N и Γ_Z не пусты, то Γ_N лежит строго севернее Γ_Z, за исключением случая $h = 0$, когда они пересекаются по двум точкам $\alpha_2 = \pm 1$.

Точка области U_h^2 определяет возможную ориентацию тела лишь с точностью до поворота вокруг неподвижной в пространстве оси $O\boldsymbol{\alpha}$. Множество допустимых ориентаций при заданном значении энергии и заданном $\boldsymbol{\alpha} \in C^2$ есть $\rho^{-1}(\boldsymbol{\alpha}) \cap U_h^3$. Для краткости называем это множество прообразом $\boldsymbol{\alpha}$. В то же время, отображение (4.2) есть локально-тривиальное расслоение со слоем окружность, то есть

$$\rho^{-1}(\boldsymbol{\alpha}) \cong S^1. \tag{4.9}$$

Точка этой окружности определяется, в соответствии с (4.7), значением угла χ. Неравенство, определяющее $\rho^{-1}(\boldsymbol{\alpha}) \cap U_h^3$, получим, подставляя (4.7) в (3.1):

$$\cos(\chi - \chi_0) \geqslant -\frac{h + a\alpha_1}{b\sqrt{1-\alpha_2^2}}, \tag{4.10}$$

где

$$\cos\chi_0 = \frac{\alpha_3}{\sqrt{(1-\alpha_1^2)(1-\alpha_2^2)}}, \ \sin\chi_0 = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\sqrt{(1-\alpha_1^2)(1-\alpha_2^2)}}.$$

Отметим, что уравнение (4.8) определяет множество точек сферы C^2, в которых модуль правой части (4.10) равен единице.

Исследование неравенства (4.10) приводит к полному описанию областей возможности движения на сфере C^2 и множеств $\rho^{-1}(\boldsymbol{\alpha}) \cap U_h^3$. Вид последних указываем в терминах подмножеств окружности (4.9).

Теорема 3. *Вид области U_h^2 и характер расслоения U_h^3 над U_h^2 определяются следующим образом.*

i) Если $-a - b < h < -a + b$, то U_h^2 является сегментом сферы, содержащим северный полюс и ограниченным экватором Γ_Z. Прообразом внутренней точки сегмента является дуга окружности, стягивающаяся в точку над Γ_Z.

ii) Если $-a + b < h < a - b$, $h \neq 0$, то U_h^2 является сегментом сферы, содержащим северный полюс, ограниченным экватором Γ_Z и содержащим в себе экватор Γ_N. Последний разрезает U_h^2 на диск D^2 с границей Γ_N и кольцо $D^1 \times S^1$ с границей $\Gamma_N \cup \Gamma_Z$. Прообразом точки диска является окружность, внутренней точки кольца — дуга окружности, стягивающаяся в точку над Γ_Z.

iii) Если $h = 0$, то экваторы Γ_N и Γ_Z, смыкаясь в точках сферы на оси $O\alpha_2$, делят U_h^2 на три сферических сектора. В одном из них, содержащем северный полюс, прообразом точки является окружность, в двух других — дуга окружности, стягивающаяся в точку над Γ_Z.

iv) Если $a - b < h < a + b$, то $U_h^2 = C^2$. Экватор Γ_N делит сферу на два сегмента. Прообразом точки северного сегмента является окружность, южного — дуга окружности.

v) Если $h > a + b$, то $U_h^2 = C^2$. Прообразом каждой точки является окружность.

Из теоремы 3 следует и описание топологических типов U_h^3 (а значит, и меняющихся одновременно с ними типов Q_h^5), полученное ранее с использованием теории Морса.

Список литературы

[1] О. И. Богоявленский. *Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики* // Изв. АН СССР, Сер. матем., 1984, т. 48, № 5, с. 883–938.

[2] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко. *Интегрируемые гамильтоновы системы. Топология. Геометрия. Классификация* // Ижевск: РХД, 1999, т. 1, 2.

[3] А. В. Борисов, И. А. Мамаев. *Динамика твердого тела* // Ижевск: РХД, 2001, 384 с.

[4] А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тян-Шанский. *Лаксово представление со спектральным параметром для волчка Ковалевской и его обобщений* // Функц. анализ и его приложения, 1988, т. 22, № 2, с. 87–88.

[5] С. Смейл. *Топология и механика* // Успехи математических наук, 1972, т. 27, № 2 (164), с. 77–134.

[6] А. Т. Фоменко. *Симплектическая геометрия. Методы и приложения* // М.: Изд-во МГУ, 1988, 413 с.

[7] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. *Курс гомотопической топологии* // М.: Наука, 1989, 528 с.

[8] М. П. Харламов. *Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела* // Л.: Изд-во ЛГУ, 1988, 200 с.

[9] М. П. Харламов. *Критическое множество и бифуркационная диаграмма задачи о движении волчка Ковалевской в двойном поле* // Механика твердого тела, 2004, вып. 34, с. 47–58.

[10] Х.-М. Яхья. *Новые интегрируемые случаи движения гиростата* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1., 1987, № 4, с. 88–90.

[11] R. Abraham, J. Marsden. *Foundations of mechanics* // Benjamin, 1978, 806 p.