

Бифуркации интегральных многообразий в задаче о движении тяжелого гиростата

И. Н. Гашененко

Институт прикладной математики и механики НАН Украины
83114, Украина, Донецк, ул. Розы Люксембург, 74
E-mail: gashenenko@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 4 июля 2005 г.

Изучается топологическая структура совместных поверхностей уровней первых интегралов в задаче о движении тяжелого гиростата вокруг неподвижной точки. Рассмотрен частный случай, когда гиростатический момент направлен вдоль оси, проходящей через центр тяжести гиростата. При таком предположении осями равномерных вращений тела могут быть только образующие конуса Штауде. Исследованы критические точки эффективного потенциала, классифицированы бифуркационные диаграммы на плоскости констант первых интегралов, указан топологический тип неособых интегральных многообразий.

Ключевые слова: гиростат, интегральные многообразия, бифуркационное множество, равномерные вращения.

I. N. Gashenenko

Bifurcations of the integral manifolds in the problem on motion of a heavy gyrostat

We study the topological structure of a common level surfaces of the first integrals in the problem on motion of a heavy gyrostat about a fixed point. We consider the special case when the gyrostatic momentum is collinear with the center-of-mass vector. With this supposition the axes of steady rotations can be directed only along generatrices of the Staude cone. We investigate the critical points of the effective potential, classify the bifurcation diagrams on the plane of constants of the first integrals and give a complete description of the topology of nonsingular integral manifolds of this problem.

Keywords: gyrostat, integral manifolds, bifurcation set, steady rotations.

Mathematical Subject Classifications: 70E17, 70H33, 34C30, 70K50.

1. Введение

Твердое тело с полостями, заполненными идеальной несжимаемой жидкостью, находящейся в безвихревом движении, и тело-носитель, в котором закреплена ось вращения геометрически и динамически симметричного ротора, являются наиболее известными, но не единственными примерами механической системы, называемой гиростатом. Введенное английскими механиками понятие гиростата неоднократно обобщалось и уточнялось. Физически различные конструкции гиростатов обсуждались в работах У. Томсона (лорда Кельвина), Э.Дж. Рауса, Н.Е. Жуковского, Т. Леви-Чивита и У. Амальди, К. Магнуса, П.В. Харламова и др. Фундаментальная работа Н.Е.Жуковского [8], опубликованная в 1885 г., сыграла важную роль в формировании представлений об основных характеристиках движущегося гиростата. Задача о движении тяжелого гиростата вокруг неподвижной точки в поле силы тяжести является достаточно простым обобщением классической задачи Эйлера. Почти все известные результаты динамики твердого тела исследователям удавалось распространить на обобщенную постановку, но, как правило, при этом вводились некоторые дополнительные ограничения на параметры несомых тел. Специфические свойства движения тяжелого гиростата по-прежнему остаются малоизученными.

Движение гиростата вокруг неподвижной точки описывается дифференциальными уравнениями

$$A\dot{\omega} = (A\omega + \lambda) \times \omega + \mathbf{r} \times \gamma, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega, \quad (1.1)$$

где $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ — тензор инерции гиростата, ω — угловая скорость тела-носителя в подвижных осях, γ — орт вертикали, λ — постоянный гиростатический момент, \mathbf{r} — вектор, направленный из неподвижной точки к центру масс гиростата. Уравнения (1.1) допускают три первых интеграла

$$H \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \langle A\omega, \omega \rangle - \langle \mathbf{r}, \gamma \rangle = h, \quad G \stackrel{\text{def}}{=} \langle A\omega + \lambda, \gamma \rangle = g, \quad I \stackrel{\text{def}}{=} \langle \gamma, \gamma \rangle = 1. \quad (1.2)$$

Далее в этой работе будем изучать гиростаты специального вида, характеризуемые частным условием

$$\lambda = \varkappa \mathbf{r}, \quad \varkappa \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Это условие означает, что гиростатический момент λ направлен вдоль оси, проходящей через центр тяжести гиростата. Заметим, что уравнения движения (1.1) при условии (1.3) допускают обобщения некоторых классических решений динамики твердого тела с неподвижной точкой [6]. В частности, аналог интегрируемого случая Лагранжа известен для уравнений (1.1), (1.3). Периодические решения В.А. Стеклова, Н. Ковалевского и Дж. Гриоли также были обобщены на рассматриваемый класс механических систем.

Без ограничения общности положим $\varkappa > 0$. Так как уравнения (1.1) инвариантны относительно линейного преобразования $(\omega, \varkappa, t) \rightarrow (-\omega, -\varkappa, -t)$, то случай $\varkappa < 0$ траекторно эквивалентен рассматриваемому случаю $\varkappa > 0$. Перенумеруем главные оси инерции так, чтобы выполнялись следующие неравенства

$$A_1 \geq A_2 \geq A_3 > 0, \quad r_1 \geq 0, \quad r_2 \geq 0, \quad r_3 \geq 0. \quad (1.4)$$

Семь свободных параметров (A_i, r_i, \varkappa) , которые характеризуют распределение масс гиростата и стационарные внутренние движения несомых тел, входят в уравнения (1.1), но стандартным введением безразмерных переменных можно понизить число конструктивных параметров до пяти.

Траектории динамической системы (1.1) проще изучать не во всем фазовом пространстве $\mathbb{R}^3(\omega) \times \mathbb{R}^3(\gamma)$, а на фиксированных изоинтегральных поверхностях — гладких компактных

подмногообразиях фазового пространства, которые инвариантны относительно фазового потока, имеют существенно меньшую размерность и простую топологическую структуру. Общая программа топологического изучения интегральных многообразий механических систем с симметрией была намечена С. Смейлом в работе [16]. В соответствии с этой программой изучение траекторной структуры исходной механической системы сводится, во-первых, к описанию бифуркационных диаграмм и топологии совместных поверхностей уровней первых интегралов, во-вторых, к исследованию поведения приведенной динамической системы на каждой связной компоненте каждого отдельного интегрального многообразия. Метод Смейла нашел применение в классических и современных задачах механики [23, 9, 17, 25, 24, 22], основные результаты и возможные направления их развития обсуждаются в монографиях [2, 12, 3]. Актуальные задачи динамики твердого тела, многие из которых изложены в [12, 4], открывают новые перспективы для приложения топологических методов. Основной целью данной работы является изучение топологии типичных интегральных многообразий, возникающих в задаче о движении вокруг неподвижной точки тяжелого гиригоста, распределение масс которого подчинено условию (1.3).

Итак, в исследовании и классификации фазовых траекторий динамической системы (1.1) значительный интерес представляют трехмерные компактные *интегральные многообразия*

$$\mathcal{Q}_{h,g}^3 = \{H = h, G = g, I = 1\} \subset \mathbb{R}^3(\omega) \times \mathbb{R}^3(\gamma),$$

которые, в соответствии с общей теорией [16], стандартным образом надстраиваются над *областями возможности движения*

$$\mathcal{U}_{h,g} = \{U_g(\gamma) \leq h\} \subset S^2.$$

Эти области являются многообразиями уровней заданной на сфере Пуассона

$$S^2 = \{|\gamma| = 1\} \subset \mathbb{R}^3(\gamma)$$

функции Морса

$$U_g(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(g - \langle \lambda, \gamma \rangle)^2}{2\langle A\gamma, \gamma \rangle} - \langle \mathbf{r}, \gamma \rangle,$$

называемой *эффективным потенциалом* [19, § 3.3]. Топология многообразий $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ и их перестройки при изменении значения энергии h полностью определяются эффективным потенциалом $U_g(\gamma)$.

Слой над произвольной точкой $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in S^2$ гомеоморфен либо окружности (если $\gamma \in \mathcal{U}_{h,g} \setminus \partial\mathcal{U}_{h,g}$), либо точке (если $\gamma \in \partial\mathcal{U}_{h,g}$), либо пуст (если $\gamma \notin \mathcal{U}_{h,g}$). Следовательно, топология $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ может быть описана следующим образом. Если проекция $\mathcal{U}_{h,g}$ совпадает со всей сферой Пуассона, то $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ представляет собой S^1 -расслоение над сферой, топологически эквивалентное расслоению единичных касательных векторов. Если $\mathcal{U}_{h,g}$ не совпадает со всей сферой, то есть имеет дырки, то $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ можно получить из прямого произведения $\mathcal{U}_{h,g} \times S^1$, если над каждой граничной точкой проекции $\mathcal{U}_{h,g}$ слой S^1 сжать в точку S^0 . Таким образом, справедливы следующие утверждения [3]:

Теорема 1.

- Если h меньше минимального значения функции $U_g(\gamma)$, то $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ — пусто.
- Если h больше максимального значения функции $U_g(\gamma)$, то $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ гомеоморфно проективному пространству $\mathbb{R}P^3$.



- Если h не является критическим значением функции $U_g(\gamma)$, то $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ является гладким трехмерным ориентируемым многообразием. В этом случае множество $\mathcal{U}_{h,g}$ на сфере Пуассона есть объединение $D_{i_1}^2 \cup \dots \cup D_{i_m}^2$ непересекающихся двумерных подмногообразий с краем, где D_k^2 — 2-диск с k дырками, а многообразие $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ гомеоморфно несвязному объединению $N_{i_1}^3 \cup \dots \cup N_{i_m}^3$ трехмерных многообразий, где $N_0^3 \stackrel{\text{def}}{=} S^3$ — трехмерная сфера, а N_k^3 (при $k \geq 1$) — это связная сумма k экземпляров $S^1 \times S^2$.

Образом множества критических точек эффективного потенциала является бифуркационная диаграмма Σ в плоскости $\mathbb{R}^2(h, g)$. Критические точки гладкой функции $U_g(\gamma)$, как известно, находятся во взаимно однозначном соответствии с равномерными вращениями тяжелого гиростата вокруг вертикали. Следовательно, проведенные в работах [26, 18, 7, 1, 10] исследования равномерных вращений являются теоретическим фундаментом для дальнейшего применения топологических методов к рассматриваемой задаче механики.

В этой работе проанализированы и описаны равномерные вращения тяжелого гиростата, подчиненного условиям (1.3), (1.4). Классические результаты О. Штауде [26], которые можно интерпретировать как нахождение геометрического места критических точек функции $U_g(\gamma)$ для всех допустимых значений g , распространены на задачу о гиростате. С этой целью найдены возможные положения осей равномерных вращений гиростата в подвижном базисе и показано, что эти оси являются образующими конуса второго порядка. Затем определены допустимые дуги сферической кривой, полученной пересечением конуса с единичной сферой. Далее, с помощью найденных критических точек эффективного потенциала $U_g(\gamma)$ построены бифуркационные диаграммы: плоскость $\mathbb{R}^2(h, g)$ шестью кривыми разделена на несколько (не менее десяти) связных подобластей, для каждой из которых указан топологический тип многообразия $\mathcal{Q}_{h,g}^3$. В этой части работы (пп. 1–3) исследована только общая качественная структура бифуркационного множества и указана методика классификации многообразий $\mathcal{Q}_{h,g}^3$, без претензий на всю полноту исследования.

Детальное описание всех возможных типов интегральных многообразий задачи о движении гиростата целесообразно начать с рассмотрения различных частных случаев, так как даже для более простых уравнений Эйлера–Пуассона неособые многообразия $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ и их перестройки полностью изучены и классифицированы лишь при некоторых ограничениях на параметры (например, когда центр масс твердого тела принадлежит главной оси [9] или находится в одной из главных плоскостей инерции [5]). Обобщению результатов С.Б. Каток [9] посвящена вторая часть этой работы (пп. 4–6): классифицировано трехпараметрическое семейство бифуркационных диаграмм и полностью изучена топология неособых многообразий $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ в случае, когда центр масс несимметричного гиростата находится на главной оси инерции. В частности, показано, что даже при малой величине гиростатического момента (1.3) имеется не менее 55 качественно различных типов невырожденных бифуркационных диаграмм $\Sigma \subset \mathbb{R}^2(h, g)$.

2. Конус Штауде

Если угловая скорость постоянна по отношению к телу-носителю ($\boldsymbol{\omega} = \text{const}$), то она постоянна и в пространстве: гиростат равномерно вращается вокруг неподвижной оси, вдоль которой направлен вектор $\boldsymbol{\omega}$. Из первого уравнения (1.1) и условия (1.3) следует отмеченное в работе [7] равенство

$$\langle A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r} \rangle = 0, \quad (2.1)$$



которое показывает, что три неизменных в теле вектора $A\omega, \omega, \mathbf{r}$ лежат в одной плоскости. При фиксированных значениях параметров A_i, r_i уравнение (2.1) определяет конус Штауде [26], неизменно связанный с телом. Этот конус второго порядка задан в подвижном базисе и является геометрическим местом осей равномерных вращений. В общем случае, когда условие (1.3) не выполняется, оси равномерных вращений принадлежат сложной конической поверхности четвертого порядка. Уравнение этой поверхности было получено П.В. Харламовым [18] и исследовано А.М. Ковалевым [10]. Изучению свойств конуса равномерных вращений тяжелого гиригоста и выделению на нем областей устойчивости посвящены также работы [1, 11].

С помощью первых интегралов (1.2) можно показать, что единичный вектор γ сохраняет свое направление не только в пространстве, но и в подвижном базисе. Следовательно, осью равномерного вращения тела в пространстве может служить только вертикаль

$$\omega = \pm |\omega| \gamma. \tag{2.2}$$

Подставим (2.2) в равенство (2.1). Уравнение

$$(A_2 - A_3)\gamma_2\gamma_3r_1 + (A_3 - A_1)\gamma_3\gamma_1r_2 + (A_1 - A_2)\gamma_1\gamma_2r_3 = 0 \tag{2.3}$$

определяет на единичной сфере Пуассона линию пересечения конуса осей равномерных вращений с этой сферой. Осями равномерных вращений могут быть лишь те из образующих конуса Штауде, для которых векторное уравнение

$$(A\gamma \times \gamma)|\omega|^2 \pm (\lambda \times \gamma)|\omega| + \mathbf{r} \times \gamma = 0, \tag{2.4}$$

полученное подстановкой (2.2) в первое уравнение (1.1), позволяет определить действительную величину $|\omega|$. Все такие образующие конуса (2.1), а также соответствующие им точки сферической кривой (2.3) О. Штауде называл *допустимыми* [26]. Из уравнения (2.4) следует, что

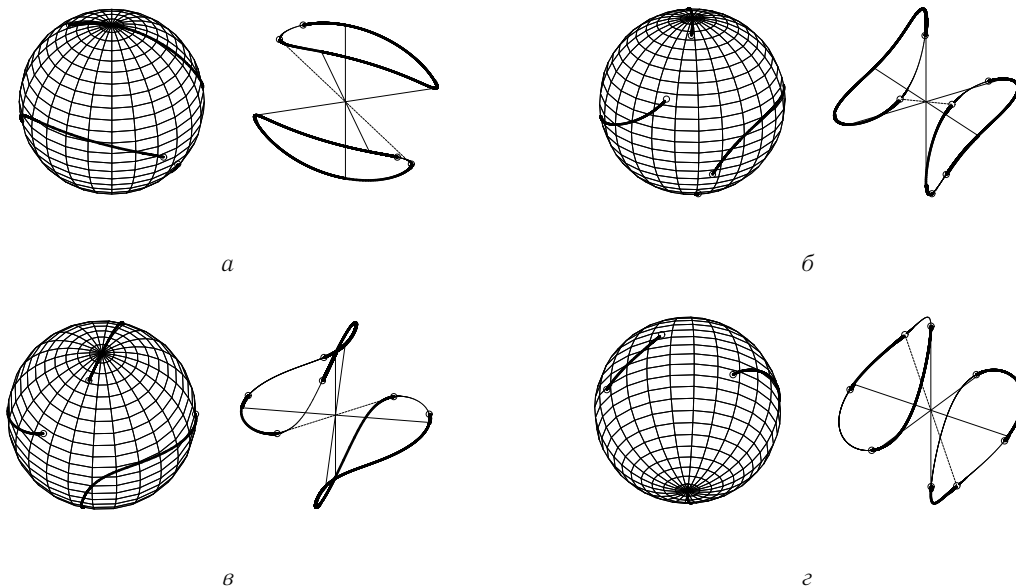


Рис. 1. Допустимые дуги кривой Штауде на сфере $S^2 = \{|\gamma| = 1\}$.

допустимые точки сферической кривой удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} (r_2\gamma_3 - r_3\gamma_2) [\varkappa^2(r_2\gamma_3 - r_3\gamma_2) + 4(A_3 - A_2)\gamma_2\gamma_3] &\geq 0, \\ (r_3\gamma_1 - r_1\gamma_3) [\varkappa^2(r_3\gamma_1 - r_1\gamma_3) + 4(A_1 - A_3)\gamma_3\gamma_1] &\geq 0, \\ (r_1\gamma_2 - r_2\gamma_1) [\varkappa^2(r_1\gamma_2 - r_2\gamma_1) + 4(A_2 - A_1)\gamma_1\gamma_2] &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Для параметров, удовлетворяющих условиям (1.3), (1.4) и неравенствам

$$(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)(A_3 - A_1) \neq 0, \quad r_1 r_2 r_3 \neq 0, \quad (2.6)$$

все возможные варианты расположения допустимых дуг кривой Штауде на единичной сфере изображены на рис. 1, $a - \varepsilon$; в правой части каждого рисунка для наглядности показаны вся сферическая кривая (2.3), главные оси инерции и пунктиром отмечена ось, несущая центр масс гиростата. Граничные точки допустимых дуг соответствуют кратным корням уравнений (2.4) и, в частности, точки $\gamma = \pm \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ всегда являются граничными. Как следует из этих рисунков, одна или две дуги могут принадлежать каждой полости конуса Штауде, то есть число допустимых дуг зависит от параметров гиростата. Рис. 1, a соответствует достаточно большим значениям \varkappa , рис. 1, ε — малым значениям \varkappa . В тех случаях, когда центр тяжести тела находится в одной из главных плоскостей инерции или на одной из главных осей инерции, или когда эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения, конус (2.1) либо вырождается в пару пересекающихся плоскостей, либо перестает существовать.

Допустимые дуги на рис. 1 пересекают три главные оси инерции. Следовательно, гиростат может равномерно вращаться вокруг трех главных осей инерции, в отличие от твердого тела, которое может вращаться только вокруг главной оси, проходящей через центр масс. Вращение вокруг каждой из образующих конуса (2.1) возможно, как правило, с несколькими значениями угловой скорости. При неограниченном возрастании $|\boldsymbol{\omega}|$ пространственные кривые, соответствующие множеству равномерных вращений на конусе (2.1), приближаются к асимптотическим линиям. В $\mathbb{R}^3(\boldsymbol{\omega})$ асимптотами являются прямые

$$\begin{aligned} l_1 &= \{ \boldsymbol{\omega} : \omega_2 = r_2 \varkappa (A_1 - A_2)^{-1}, \omega_3 = r_3 \varkappa (A_1 - A_3)^{-1} \}, \\ l_2 &= \{ \boldsymbol{\omega} : \omega_1 = r_1 \varkappa (A_2 - A_1)^{-1}, \omega_3 = r_3 \varkappa (A_2 - A_3)^{-1} \}, \\ l_3 &= \{ \boldsymbol{\omega} : \omega_1 = r_1 \varkappa (A_3 - A_1)^{-1}, \omega_2 = r_2 \varkappa (A_3 - A_2)^{-1} \}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Дальнейшее исследование равномерных вращений проведем с помощью новых переменных.

3. Параметризация равномерных вращений

Воспользуемся параметризацией вращений, успешно применяемой в задачах динамики твердого тела (см., например, работы [11, 14]). Соответствующие равномерным вращениям компоненты векторов $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\omega}$ определим следующими формулами

$$\gamma_i = \frac{(\mu \varkappa + 1)r_i}{(\sigma - A_i)\mu^2}, \quad \omega_i = \mu \gamma_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.1)$$

при этом зависимость $\mu(\sigma)$ величины угловой скорости вращения от параметра σ зададим уравнением

$$\mu^4 - (\mu \varkappa + 1)^2 S_0 = 0, \quad \text{где } S_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^3 \frac{r_i^2}{(A_i - \sigma)^2}. \quad (3.2)$$

Параметр σ , изменяясь в интервале $(-\infty, \infty)$, взаимно однозначно пробегает все образующие оси конуса Штауде, за исключением оси, несущей центр масс гиригата. Уравнение (3.2) определяет на плоскости $\mathbb{R}^2(\sigma, \mu)$ гладкую кривую, которая преобразованием (3.1) отображается на допустимые дуги сферической кривой (2.3).

Замена переменных (3.1) позволяет записать (2.5) в виде следующих неравенств

$$\begin{aligned} \frac{r_2^2 r_3^2 (A_3 - A_2)^2 (\mu\kappa + 1)^2 (\mu\kappa + 2)^2}{\mu^6 (\sigma - A_2)^2 (\sigma - A_3)^2} &\geq 0, \\ \frac{r_3^2 r_1^2 (A_1 - A_3)^2 (\mu\kappa + 1)^2 (\mu\kappa + 2)^2}{\mu^6 (\sigma - A_3)^2 (\sigma - A_1)^2} &\geq 0, \\ \frac{r_1^2 r_2^2 (A_2 - A_1)^2 (\mu\kappa + 1)^2 (\mu\kappa + 2)^2}{\mu^6 (\sigma - A_1)^2 (\sigma - A_2)^2} &\geq 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

С их помощью можно показать, что значения $\mu = -2\kappa^{-1}$ и $\mu = \pm\infty$ всегда соответствуют граничным точкам допустимых дуг кривой Штауде.

Дискриминант уравнения (3.2) относительно переменной μ имеет вид

$$d \stackrel{\text{def}}{=} 16S_0^3 (\kappa^4 S_0 - 16).$$

Для фиксированных значений σ , удовлетворяющих неравенству $S_0 < 16\kappa^{-4}$, уравнение (3.2) имеет два действительных корня:

$$-\infty < \frac{2}{\kappa} (1 - \sqrt{2}) < \mu_2 < 0 < \mu_1 < \frac{2}{\kappa} (1 + \sqrt{2}) < \infty. \tag{3.4}$$

При $\sigma \rightarrow \pm\infty$ оба корня $\mu_{1,2}$ стремятся к нулю.

Если значение $\sigma \neq A_i$ соответствует неравенству $S_0 > 16\kappa^{-4}$, то уравнение (3.2) имеет четыре действительных корня:

$$-\infty < \mu_4 < -\frac{2}{\kappa} < \mu_3 < -\frac{1}{\kappa} < \mu_2 < \frac{2}{\kappa} (1 - \sqrt{2}) < 0 < \frac{2}{\kappa} (1 + \sqrt{2}) < \mu_1 < \infty. \tag{3.5}$$

Для $\sigma = A_i$ действительные корни имеют вид $\mu_{1,4} = \pm\infty$, $\mu_{2,3} = -\kappa^{-1}$. Следствием этого является характерное свойство рассматриваемой задачи, которое впервые было отмечено в работе [7]: если гиригата равномерно вращается вокруг главной оси инерции, то $|\omega| = \kappa^{-1}$. Плоская кривая, заданная уравнением (3.2), имеет самопересечения в точках $(\sigma, \mu) = (A_i, -\kappa^{-1})$, угловые коэффициенты касательных в этих точках равны $d\mu/d\sigma = \pm\kappa^{-3} r_i^{-1}$.

При нулевом значении дискриминанта d уравнение (3.2) допускает кратный корень:

$$\mu_4 = \mu_3 = -\frac{2}{\kappa} < \mu_2 = \frac{2}{\kappa} (1 - \sqrt{2}) < 0 < \mu_1 = \frac{2}{\kappa} (1 + \sqrt{2}). \tag{3.6}$$

Зафиксируем значение $\mu \neq -\kappa^{-1}$. Тогда (3.2), рассматриваемое как уравнение относительно σ , имеет не менее двух, но не более шести действительных корней: по одному корню в интервалах $(-\infty, A_3)$, (A_1, ∞) ; в интервалах (A_3, A_2) , (A_2, A_1) оно имеет либо два, либо ни одного корня.

Найдем параметр μ из уравнения (3.2) и подставим его в соотношения (3.1). Тогда параметрические зависимости компонент векторов γ , ω , соответствующих равномерным вращениям тела-носителя, имеют следующий вид

$$\gamma_i = \begin{cases} r_i (\sigma - A_i)^{-1} S_0^{-1/2}, & \text{если } S_0 < 16\kappa^{-4}, \\ \pm r_i (\sigma - A_i)^{-1} S_0^{-1/2}, & \text{если } S_0 \geq 16\kappa^{-4}; \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\omega_i = \begin{cases} r_i (\sigma - A_i)^{-1} (\varkappa/2 \pm \sqrt{\varkappa^2/4 + S_0^{-1/2}}), & \text{если } S_0 < 16\varkappa^{-4}, \\ r_i (\sigma - A_i)^{-1} (\varkappa/2 \pm \sqrt{\varkappa^2/4 \pm S_0^{-1/2}}), & \text{если } S_0 \geq 16\varkappa^{-4}. \end{cases} \quad (3.8)$$

Зададим параметры гиростата A_i, r_i, \varkappa . Если выполнены условия (2.6) (т.е. эллипсоид инерции гиростата для его неподвижной точки является трехосным и центр масс занимает “общее положение”), то все возможные расположения кривых на плоскости $\mathbb{R}^2(\sigma, \mu)$ показаны на рис. 2. Горизонтальные прямые на этом рисунке соответствуют значениям

$$-\frac{2}{\varkappa}, \quad -\frac{1}{\varkappa}, \quad \frac{2}{\varkappa}(1 - \sqrt{2}), \quad 0, \quad \frac{2}{\varkappa}(1 + \sqrt{2}),$$

которые разделяют μ_i в (3.4),(3.5). Кривые на рис. 1, 2 получены для одних и тех же значений параметров гиростата.

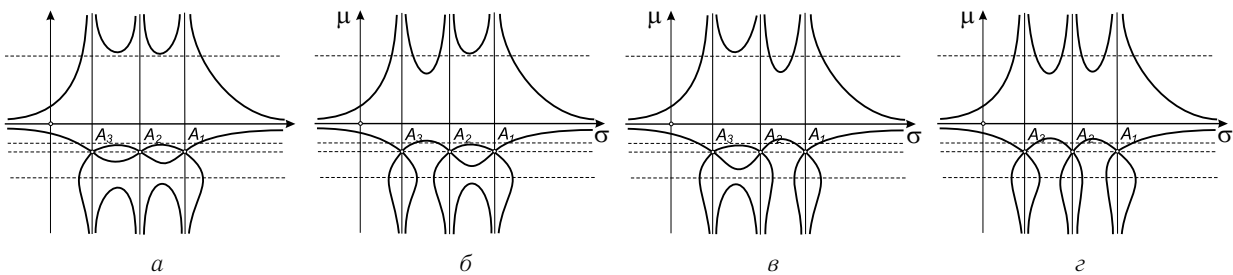


Рис. 2. Кривые на плоскости $\mathbb{R}^2(\sigma, \mu)$. Случай $\lambda = \varkappa$.

Разделяющие значения параметров A_i, r_i, \varkappa , при которых происходит изменение типа кривой $\mu(\sigma)$, найдем из условий совместности решений двух уравнений

$$S_0 - 16\varkappa^{-4} = 0, \quad S_0' \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^3 \frac{2r_i^2}{(\sigma - A_i)^3} = 0. \quad (3.9)$$

При малых значениях \varkappa приближенные значения параметров, соответствующие решениям системы (3.9), удовлетворяют уравнению

$$\varkappa^4 \left[\frac{r_1^2 + r_2^2}{(A_1 - A_2)^2} + \frac{r_2^2 + r_3^2}{(A_2 - A_3)^2} + \frac{r_3^2 + r_1^2}{(A_3 - A_1)^2} \right] = \frac{16}{3}. \quad (3.10)$$

Дифференцированием уравнения (3.2) найдем выражение

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = \frac{(\mu\varkappa + 1)\mu S_0'}{2(\mu\varkappa + 2)S_0},$$

которое позволяет исследовать направления касательных в точках кривой $\mu(\sigma)$.

Если условие (1.3) не выполняется, то кривая $\mu(\sigma)$ может иметь гораздо более сложный вид. Исследованию общего случая посвящена работа [11], в которой авторам удалось изучить основные свойства этой кривой. Полная классификация возможных видов кривой $\mu(\sigma)$ пока, к сожалению, отсутствует.

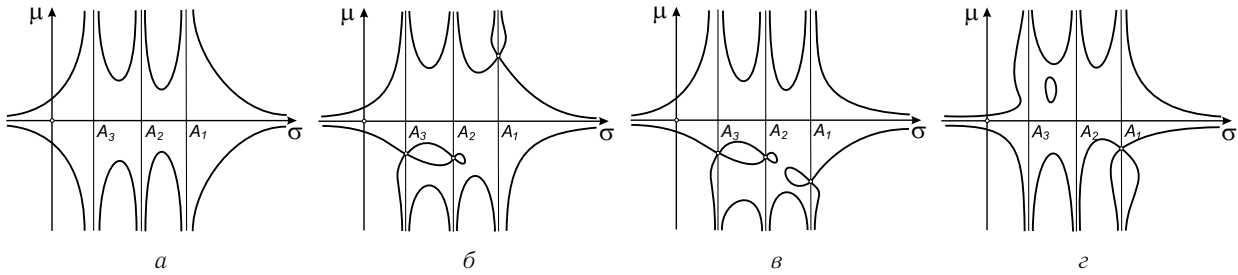


Рис. 3. Кривые на плоскости $\mathbb{R}^2(\sigma, \mu)$. Общий случай.

Примеры расположения ветвей этой плоской кривой показаны на рис. 3. Простейший вид $\mu(\sigma)$ изображен на рис. 3, а. Если параметры твердого тела удовлетворяют неравенствам (2.6) и гиригостатический момент отсутствует ($\lambda = 0$), то возможен только этот вариант. При некоторых ограничениях на параметры такой вид кривой $\mu(\sigma)$ возможен и для гиригостата ($\lambda \neq 0$), подробнее см. в [11]. Рис. 3, б соответствует следующим значениям: $A = (1.3, 1, 0.85)$, $\mathbf{r} = (\sqrt{0.2}, \sqrt{0.3}, \sqrt{0.5})$, $\lambda = (-0.13, 0.35, 0.5)$. Рис. 3, в получен для значений $A = (2, 1.8, 1.7)$, $\mathbf{r} = (\sqrt{0.3}, \sqrt{0.5}, \sqrt{0.2})$, $\lambda = (0.27, 0.58, 0.4)$. Рис. 3, з соответствует тем же значениям параметров A_i, r_i и $\lambda = (0.14, -0.34, -0.27)$. Показанная на последнем рисунке замкнутая выпуклая линия (овал) существенно усложняет изучение общего случая. В $\mathbb{R}^3(\omega)$ этой кривой соответствует изолированная (не пересекающая оси инерции) часть сложной конической поверхности четвертого порядка. На плоскости $\mathbb{R}^2(h, g)$ этому же овалу соответствует замкнутая компонента множества Σ , которую почти невозможно обнаружить экспериментальным путем, так как она существует при жестких параметрических ограничениях и не уходит на бесконечность, как другие ветви бифуркационной диаграммы.

Таким образом, при условии (1.3) зависимость $\mu(\sigma)$, заданная уравнением (3.2), является достаточно простой по сравнению с общим случаем. Приведенные результаты позволяют получить всю необходимую информацию о структуре допустимых дуг сферической кривой (2.3) и об образующих конуса Штауде. Параметры σ, μ можно эффективно использовать для более детального изучения множества критических точек функции $U_g(\gamma)$ и построения бифуркационных диаграмм $\Sigma \subset \mathbb{R}^2(h, g)$.

4. Бифуркационные диаграммы

Подставим компоненты постоянных векторов γ, ω , заданные формулами (3.1), в интегралы H, G . После элементарных преобразований найдем параметрические уравнения бифуркационных кривых на плоскости $\mathbb{R}^2(h, g)$:

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{1}{2}\sigma\mu^2 + \frac{(\mu\kappa + 1)(\mu\kappa + 3)}{2\mu^2}U_0, \\
 g &= \sigma\mu + \frac{(\mu\kappa + 1)}{\mu^3}U_0, \quad \text{где } U_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^3 \frac{r_i^2}{(A_i - \sigma)}.
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

В этих соотношениях $\sigma \in (-\infty, A_3) \cup (A_3, A_2) \cup (A_2, A_1) \cup (A_1, \infty)$, а зависимость $\mu(\sigma)$ по-прежнему определена уравнением (3.2). Непосредственным дифференцированием уравнений (4.1) найдем равенство

$$2\mu^2 \left(\frac{dg}{d\sigma}\mu - \frac{dh}{d\sigma} \right) = \mu^4 - (\mu\kappa + 1)^2 S_0,$$

из которого, учитывая (3.2), получим соотношение

$$\frac{dh}{dg} = \mu. \tag{4.2}$$

Таким образом, значение μ определяет направление наклона касательной в соответствующей точке бифуркационной кривой. В частности, из (4.2), (3.2) следует, что на любой бифуркационной диаграмме существуют не менее двух, но не более шести различных точек с равными угловыми коэффициентами касательных в этих точках.

Нулевое значение угловой скорости соответствует точкам

$$P_0 = (|\mathbf{r}|, -\varkappa|\mathbf{r}|), \quad P_1 = (-|\mathbf{r}|, \varkappa|\mathbf{r}|)$$

бифуркационных кривых (4.1). Проведем прямую

$$l_0 = \{h, g : h\varkappa + g = 0\} \subset \mathbb{R}^2(h, g)$$

через точки P_0, P_1 . Условие пересечения прямой l_0 с кривыми (4.1) приводит к простому равенству $(\mu\varkappa + 2)\mu = 0$. Таким образом, прямая l_0 пересекает бифуркационную диаграмму только в тех точках, где $\mu = 0$ или $\mu = -2\varkappa^{-1}$. Соответствующее условиям (3.9) ветвление кривых (4.1) также происходит на прямой l_0 .

Если значения $r_i \neq 0$, то любая точка $(\sigma, \mu) = (A_i, -\varkappa^{-1})$ самопересечения кривой (3.2) подстановкой в уравнения (4.1) преобразуется в две различные точки бифуркационной диаграммы. Координаты этих точек таковы: $(h, g) = (\frac{1}{2}A_i\varkappa^{-2} \mp r_i, -A_i\varkappa^{-1} \pm \varkappa r_i)$. Типичные бифурка-

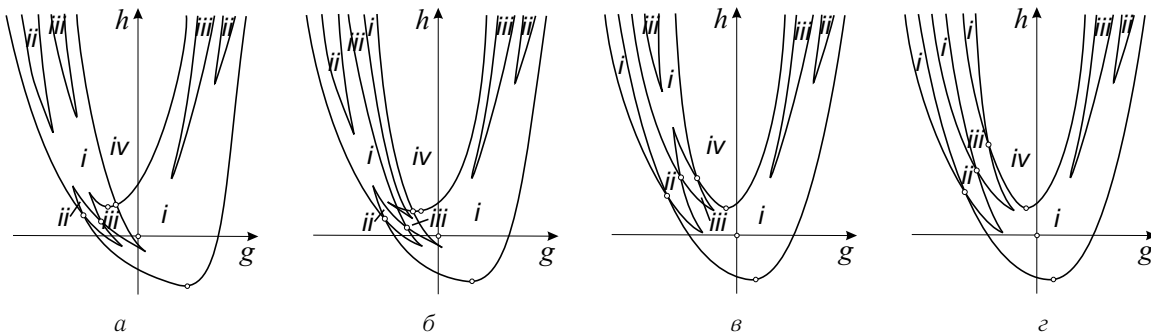


Рис. 4. Бифуркационные диаграммы на плоскости $\mathbb{R}^2(h, g)$.

ционные диаграммы на плоскости $\mathbb{R}^2(h, g)$ показаны схематично на рис. 4: а) $\varkappa = 1.5$, б) $\varkappa = 1.1$, з) $\varkappa = 0.5$, эти диаграммы построены для значений параметров $A = (2, 1.5, 1)$, $\mathbf{r} = (\sqrt{0.5}, \sqrt{0.3}, \sqrt{0.2})$; в) $\varkappa = 0.5$, диаграмма построена для значений $A = (2, 1.8, 1.7)$, $\mathbf{r} = (\sqrt{0.3}, \sqrt{0.5}, \sqrt{0.2})$. Диаграммы на рис. 4 соответствуют кривым на рис. 2 и допустимым дугам сферических кривых, изображенным на рис. 1.

Равномерные вращения гиростата по инерции, их устойчивость и бифуркации изучены достаточно подробно (см. работу [15], где также имеются ссылки на исследования других авторов). Впрочем, эта тематика не теряет своей актуальности [21]. При $|\boldsymbol{\lambda}|/|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ кривые на рис. 4, а приближаются к бифуркационной диаграмме гиростата, движущегося по инерции (см. рис. 5 в работе [25]). В этом предельном случае диаграмма симметрична относительно прямой $g = 0$, точки P_0, P_1 имеют координаты $(0, \pm|\boldsymbol{\lambda}|) \in \mathbb{R}^2(h, g)$, две симметричные ветви пересекаются в точке $(\langle A^{-1}\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \rangle / 2, 0) \in \mathbb{R}^2(h, g)$. С другой стороны, диаграмма на рис. 4, з существует лишь

при малых значениях параметра \varkappa , при $\varkappa \rightarrow 0$ отмеченные точки пересечения ветвей уходят на бесконечность. Предельная диаграмма соответствует твердому телу без внутренних движений несомых тел ($\lambda = 0$).

Бифуркационные кривые (4.1) делят плоскость $\mathbb{R}^2(h, g)$ на подобласти с различными типами неособых многообразий $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ (см. рис. 4). Анализ особых точек эффективного потенциала $U_g(\gamma)$ на сфере Пуассона позволяет описать топологию $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ по стандартной схеме. Основные типы $\mathcal{Q}_{h,g}^3$, как и для $\lambda = 0$, гомеоморфны следующим трехмерным компактным ориентируемым многообразиям: *i*) S^3 , *ii*) $S^3 \cup S^3$, *iii*) $S^1 \times S^2$, *iv*) $\mathbb{R}P^3$.

Особые точки плоских кривых (4.1) найдем из условий $dh/d\sigma = dg/d\sigma = 0$. Дополнительное уравнение

$$2(\mu\varkappa + 2)^2 S_0^2 + [(\mu\varkappa + 1)^2 \sigma S_0 - (2\mu\varkappa + 3)U_0] S_0' = 0,$$

рассматриваемое совместно с (3.2), (4.1), позволяет изучить особые точки бифуркационных кривых и найти значения параметров гиригата, при которых меняется структура бифуркационных диаграмм.

5. Центр масс принадлежит главной оси инерции

Пусть вектор \mathbf{r} коллинеарен вектору гиригастического момента λ и, кроме того, направлен вдоль одной из главных осей инерции. Вместо неравенств (1.4) в этом случае положим

$$A_1 > 0, \quad A_2 > A_3 > 0, \quad r_1 > 0, \quad r_2 = r_3 = 0. \tag{5.1}$$

При условиях (1.3), (5.1) равномерным вращениям несимметричного гиригата вокруг вертикали соответствуют четыре семейства стационарных решений уравнений (1.1), зависящие от параметра $\tau \in \mathbb{R}$:

- 1) $\gamma_1 = 1, \quad \omega_1 = \tau, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = \omega_2 = \omega_3 = 0;$
- 2) $\gamma_1 = -1, \quad \omega_1 = \tau, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = \omega_2 = \omega_3 = 0;$
- 3) $\gamma_1 = \frac{(\tau\varkappa + 1)r_1}{(A_2 - A_1)\tau^2}, \quad \gamma_2^2 = 1 - \frac{(\tau\varkappa + 1)^2 r_1^2}{(A_2 - A_1)^2 \tau^4}, \quad \gamma_3 = 0, \quad \omega_i = \tau\gamma_i;$
- 4) $\gamma_1 = \frac{(\tau\varkappa + 1)r_1}{(A_3 - A_1)\tau^2}, \quad \gamma_3^2 = 1 - \frac{(\tau\varkappa + 1)^2 r_1^2}{(A_3 - A_1)^2 \tau^4}, \quad \gamma_2 = 0, \quad \omega_i = \tau\gamma_i.$

Подставим стационарные решения 1)–4) в интегралы (1.2). Бифуркационное множество состоит из дуг четырех плоских кривых, описываемых следующими уравнениями:

$$h = \frac{(g \pm \varkappa r_1)^2}{2A_1} \pm r_1, \tag{5.2}$$

$$h = \frac{1}{2}A_2\tau^2 + \frac{(\tau\varkappa + 1)(\tau\varkappa + 3)}{2\tau^2}\sigma_2, \quad g = A_2\tau + \frac{(\tau\varkappa + 1)}{\tau^3}\sigma_2, \quad \tau \in \Gamma_2, \tag{5.3}$$

$$h = \frac{1}{2}A_3\tau^2 + \frac{(\tau\varkappa + 1)(\tau\varkappa + 3)}{2\tau^2}\sigma_3, \quad g = A_3\tau + \frac{(\tau\varkappa + 1)}{\tau^3}\sigma_3, \quad \tau \in \Gamma_3, \tag{5.4}$$

где

$$\sigma_i = r_1^2(A_1 - A_i)^{-1}, \quad \Gamma_i = \{\tau : \tau^4 - (\tau\varkappa + 1)^2 r_1^{-2} \sigma_i^2 \geq 0\} \subset \mathbb{R}, \quad i = 2, 3.$$



Уравнения (5.2) описывают на плоскости $\mathbb{R}^2(h, g)$ две параболы, пересекающиеся в точке

$$P_2 = \left(\frac{A_1}{2\kappa^2} + \frac{\kappa^2 r_1^2}{2A_1}, -\frac{A_1}{\kappa} \right). \quad (5.5)$$

Эти две параболы целиком принадлежат бифуркационному множеству Σ .

Исследуем кривую, заданную уравнением (5.3). Число связных компонент множества $\Gamma_2 \subset \mathbb{R}$ изменяется на дискриминантной кривой

$$\kappa^4 r_1^2 - 16(A_1 - A_2)^2 = 0, \quad (5.6)$$

заданной в пространстве конструктивных параметров гиростата. В зависимости от значений параметров множество Γ_2 может состоять из двух (при $\kappa^4 r_1^2 < 16(A_1 - A_2)^2$) или трех (при $\kappa^4 r_1^2 > 16(A_1 - A_2)^2$) сегментов действительной оси. В особых точках (точках возврата) бифуркационной кривой (5.3) переменная $\tau \in \Gamma_2$ удовлетворяет дополнительному уравнению

$$A_2 \tau^4 - (2\tau\kappa + 3)\sigma_2 = 0. \quad (5.7)$$

Число корней уравнения (5.7), находящихся внутри различных связных компонент множества Γ_2 , зависит от выбранных значений параметров гиростата. Разделяющие значения этих параметров являются решениями уравнений

$$A_2 r_1^2 \kappa^4 \pm 2(4A_2 - A_1)(A_2 - A_1)r_1 \kappa^2 + (A_2 - A_1)(4A_2 - 3A_1)^2 = 0. \quad (5.8)$$

Кроме того, на бифуркационных диаграммах существуют точки ветвления, в которых дуги кривой (5.3) "присоединяются" к параболам (5.2). В этом случае переменная τ принадлежит границе множества Γ_2 . При фиксированных параметрах диаграмма может содержать либо две, либо четыре точки ветвления рассматриваемого вида. Их координаты (h, g) найдем из системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (A_1 - A_2)g^2 + (A_1 - 2A_2)\varepsilon r_1 \kappa g - A_2 r_1^2 \kappa^2 - \varepsilon r_1 A_1^2 = 0, \\ 2(h - \varepsilon r_1)A_1 - (g + \varepsilon \kappa r_1)^2 = 0, \quad \text{где } \varepsilon = \pm 1. \end{cases} \quad (5.9)$$

Подстановкой (5.5) в уравнения (5.9) получим условия, при выполнении которых точки ветвления бифуркационных кривых совпадают с точкой пересечения парабол (5.2):

$$A_2 r_1^2 \kappa^4 \pm 2(A_2 - A_1)A_1 r_1 \kappa^2 + (A_2 - A_1)A_1^2 = 0. \quad (5.10)$$

Из физических ограничений на параметры гиростата находим, что уравнения (5.10) имеют допустимые решения лишь при выполнении неравенства $A_1 > A_2$.

Если $A_1 > A_2$, то кривая (5.3) может пересекать параболы (5.2). В точках пересечения значения параметра τ удовлетворяют уравнениям

$$(A_2 - A_1)A_2 \tau^4 \pm 2(A_2 - A_1)r_1 \tau^2 + r_1^2 = 0. \quad (5.11)$$

При $A_1 \neq A_2 > A_3$ получаемые из теоремы Рауса достаточные условия устойчивости движений 3) по отношению к переменным ω_i, γ_i имеют вид

$$\tau^4 - (\tau\kappa + 1)^2 r_1^{-2} \sigma_2^2 > 0, \quad (A_1 - A_2)[A_2 \tau^4 - (2\tau\kappa + 3)\sigma_2] < 0. \quad (5.12)$$

Дуги кривой (5.3), удовлетворяющие неравенствам (5.12), всегда соответствуют минимумам функции $U_g(\gamma)$.

Бифуркационная кривая, заданная уравнением (5.4), имеет аналогичную структуру. Соответствующие формулы могут быть получены из (5.6)–(5.11) заменой индекса 2 на 3.

Все перечисленные свойства кривых (5.2)–(5.4) позволяют классифицировать бифуркационные диаграммы и полностью исследовать (по предложенной в работах [16, 9] методике) топологию интегральных многообразий гиригата, параметры которого удовлетворяют условиям (1.3), (5.1). Кроме того, полученные результаты позволяют делать выводы об устойчивости некоторых классов равномерных вращений тяжелого гиригата вокруг вертикали.

6. Классификация бифуркационных диаграмм

Введем новые параметры гиригата по следующим формулам:

$$\alpha = A_2/A_1, \quad \beta = A_3/A_1, \quad \tilde{\varkappa} = \varkappa\sqrt{r_1/A_1}.$$

Уравнения (5.2)–(5.4) задают трехпараметрическое семейство бифуркационных диаграмм $\Sigma \subset \mathbb{R}^2(h, g)$. Допустимые значения величин $\alpha, \beta, \tilde{\varkappa}$, от которых зависит топологическая структура бифуркационной диаграммы, принадлежат некоторой области D в пространстве параметров гиригата:

$$(\alpha, \beta, \tilde{\varkappa}) \in D \subset D^0, \quad \text{где } D^0 = \{\alpha, \beta, \tilde{\varkappa} : \alpha > 0, \beta > 0, \tilde{\varkappa} > 0\}.$$

Например, если гиригата состоит из одних твердых тел, то моменты инерции такого гиригата удовлетворяют известным неравенствам треугольника. Следовательно, в этом случае

$$D = \{\alpha, \beta, \tilde{\varkappa} : \alpha + \beta > 1, \alpha + 1 > \beta > 0, \beta + 1 > \alpha > 0, \tilde{\varkappa} > 0\}. \tag{6.1}$$

С другой стороны, если тело-носитель имеет полости, заполненные идеальной несжимаемой жидкостью, то в общем случае моменты инерции такого гиригата могут и не удовлетворять неравенствам треугольника. Это интересное свойство впервые было отмечено Е.И. Харламовой [20]. Она рассмотрела один из примеров Н.Е. Жуковского [8], когда твердое тело имеет эллипсоидальную полость с жидким заполнением, и показала, что моменты инерции системы «тело-жидкость» удовлетворяют неравенству $A_1 + A_2 < A_3$, если отношение массы тела к массе жидкости достаточно мало. В этом случае область D допустимых значений параметров $\alpha, \beta, \tilde{\varkappa}$ отлична от (6.1).

Зафиксируем значение $\tilde{\varkappa}$. Обозначим через $D_{\tilde{\varkappa}}$ сечение множества D плоскостью $\tilde{\varkappa} = \text{const}$. В каждом таком сечении $D_{\tilde{\varkappa}} \subset \mathbb{R}^2(\alpha, \beta)$ существуют двумерные области, соответствующие различным типам бифуркационных диаграмм. В случае $\tilde{\varkappa} = 0$ аналогичные области на плоскости $\mathbb{R}^2(\alpha, \beta)$ были построены С.Б. Каток [9]. С помощью уравнений (5.6), (5.8), (5.10) найдем полупрямые, разделяющие $D_{\tilde{\varkappa}} \subset \mathbb{R}^2(\alpha, \beta)$:

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \{\alpha, \beta : \alpha = 1 + \frac{\tilde{\varkappa}^2}{4}, \beta > 0\}, \quad \ell_2 = \{\alpha, \beta : \alpha = 1 - \frac{\tilde{\varkappa}^2}{4} > 0, \beta > 0\}, \\ \ell_3 &= \{\alpha, \beta : \alpha = \frac{1 + 2\tilde{\varkappa}^2}{(1 + \tilde{\varkappa}^2)^2}, \beta > 0\}, \quad \ell_4 = \{\alpha, \beta : \alpha = \frac{1 - 2\tilde{\varkappa}^2}{(1 - \tilde{\varkappa}^2)^2} > 0, \beta > 0\}, \\ \ell_5 &= \{\alpha, \beta : \alpha = \alpha_*, f_1(\alpha_*) = 0, \beta > 0\}, \quad \ell_{6-8} = \{\alpha, \beta : \alpha = \alpha^*, f_2(\alpha^*) = 0, \beta > 0\}, \\ \ell_9 &= \{\alpha, \beta : \alpha = 1, \beta > 0\}, \quad \ell_{10} = \{\alpha, \beta : \alpha = \beta > 0\}, \end{aligned}$$



где обозначены

$$f_1 = 16\alpha^3 - 8(5 - \tilde{\varkappa}^2)\alpha^2 + (\tilde{\varkappa}^4 - 10\tilde{\varkappa}^2 + 33)\alpha + 2\tilde{\varkappa}^2 - 9,$$

$$f_2 = 16\alpha^3 - 8(5 + \tilde{\varkappa}^2)\alpha^2 + (\tilde{\varkappa}^4 + 10\tilde{\varkappa}^2 + 33)\alpha - 2\tilde{\varkappa}^2 - 9.$$

Симметричные полупрямые $\bar{\ell}_1, \dots, \bar{\ell}_{10}$ построим для бифуркационной кривой, заданной уравнением (5.4):

$$\bar{\ell}_1 = \{\alpha, \beta : \beta = 1 + \frac{\tilde{\varkappa}^2}{4}, \alpha > 0\}, \quad \bar{\ell}_2 = \{\alpha, \beta : \beta = 1 - \frac{\tilde{\varkappa}^2}{4} > 0, \alpha > 0\},$$

$$\bar{\ell}_3 = \{\alpha, \beta : \beta = \frac{1 + 2\tilde{\varkappa}^2}{(1 + \tilde{\varkappa}^2)^2}, \alpha > 0\}, \quad \bar{\ell}_4 = \{\alpha, \beta : \beta = \frac{1 - 2\tilde{\varkappa}^2}{(1 - \tilde{\varkappa}^2)^2} > 0, \alpha > 0\},$$

$$\bar{\ell}_5 = \{\alpha, \beta : \beta = \beta_*, f_1(\beta_*) = 0, \alpha > 0\}, \quad \bar{\ell}_{6-8} = \{\alpha, \beta : \beta = \beta^*, f_2(\beta^*) = 0, \alpha > 0\},$$

$$\bar{\ell}_9 = \{\alpha, \beta : \beta = 1, \alpha > 0\}, \quad \bar{\ell}_{10} = \ell_{10} = \{\alpha, \beta : \alpha = \beta > 0\}.$$

Таблица 1. Разделяющие значения параметра $\tilde{\varkappa}$

i	k_i	$k_i \approx$	условия для $\ell_i, \bar{\ell}_i$
1	$1 - 1/\sqrt{2}$	0.2928932	$\ell_2 = \ell_8, \bar{\ell}_2 = \bar{\ell}_8$
2	$(10\sqrt{5} - 22)^{1/2}/2$	0.3002831	$\ell_7 = \ell_8, \bar{\ell}_7 = \bar{\ell}_8$
3	$\sqrt{2} - 1$	0.4142136	$\ell_2 = \ell_4, \bar{\ell}_2 = \bar{\ell}_4$
4	$(-1 + \sqrt{2})^{1/2}$	0.6435943	$\ell_4 = \ell_6, \bar{\ell}_4 = \bar{\ell}_6$
5	$1/\sqrt{2}$	0.7071068	$\ell_4 = \bar{\ell}_4 = \emptyset$
6	1	1.0	$\ell_2 = \ell_3, \bar{\ell}_2 = \bar{\ell}_3$
7	$(1 + \sqrt{2})^{1/2}$	1.5537740	$\ell_3 = \ell_5, \bar{\ell}_3 = \bar{\ell}_5$
8	$1 + 1/\sqrt{2}$	1.7071068	$\ell_2 = \ell_6, \bar{\ell}_2 = \bar{\ell}_6$
9	$12^{1/4}$	1.8612097	$\ell_5 = \ell_6, \bar{\ell}_5 = \bar{\ell}_6$
10	2	2.0	$\ell_2 = \bar{\ell}_2 = \emptyset$
11	$3/\sqrt{2}$	2.1213203	$\ell_5 = \bar{\ell}_5 = \emptyset$

Топологические перестройки диаграмм Σ происходят именно тогда, когда

$$(\alpha, \beta) \in L_{\tilde{\varkappa}} \subset \mathbb{R}^2(\alpha, \beta), \quad \text{где } L_{\tilde{\varkappa}} = \cup_{i=1}^{10} (\ell_i \cup \bar{\ell}_i).$$

В частности, на полупрямых ℓ_{1-2} меняется число гладких дуг кривой (5.3), принадлежащих Σ ; на ℓ_{3-4} изменяется взаимное расположение ветвей плоских кривых, описываемых уравнениями (5.2),(5.3); на ℓ_{5-8} изменяется число точек возврата кривой (5.3). Число и расположение полупрямых $\ell_i, \bar{\ell}_i$ на плоскости $\mathbb{R}^2(\alpha, \beta)$ зависят от зафиксированного значения параметра $\tilde{\varkappa}$. С изменением $\tilde{\varkappa}$ рисунок, изображающий разбиение плоскости $\mathbb{R}^2(\alpha, \beta)$ на области с различными типами диаграмм Σ , будет непрерывно деформироваться до тех пор, пока $\tilde{\varkappa}$ не достигнет некоторого критического значения k_i . Критические значения k_i параметра $\tilde{\varkappa}$ и возможные перестройки множества $L_{\tilde{\varkappa}} \subset \mathbb{R}^2(\alpha, \beta)$ показаны в табл. 1. Соответствие между регулярными значениями параметра $\tilde{\varkappa}$ и типами бифуркационных диаграмм на рис. 5 указано в табл. 2. Для каждого интервала (k_i, k_{i+1}) составлена в порядке возрастания параметра $\alpha_0 \in (0, \infty)$ последовательность разделяющих полупрямых $\ell_j(\alpha_0)$ из множества $L_{\tilde{\varkappa}}$. Для любой связной компоненты из $D_{\tilde{\varkappa}} \setminus L_{\tilde{\varkappa}}$ сохраняется число компонент Γ_2 , число точек ветвления кривой (5.3) и взаимное расположение кривых (5.2),(5.3), принадлежащих бифуркационному множеству. Замена ℓ_j на $\bar{\ell}_j$ в табл. 2 позволяет аналогичным образом классифицировать кривые (5.2),(5.4).

Пусть $(\alpha, \beta, \tilde{\varkappa}) \in D$, тогда произвольной фиксированной точке $(\alpha, \beta) \in D_{\tilde{\varkappa}} \setminus L_{\tilde{\varkappa}}$ соответствует бифуркационная диаграмма Σ , полученная совмещением двух типов диаграмм, изображенных на рис. 5. С учетом симметрии множества Σ относительно преобразования $(\alpha, \beta) \rightarrow (\beta, \alpha)$ можно непосредственно из табл. 2 получить 100 невырожденных диаграмм различной топологической структуры: для любого малого значения $\tilde{\varkappa} \in (0, k_1)$ существуют 55 основных типов диаграмм, все они сохраняются при ограничениях (6.1); для любого большого значения $\tilde{\varkappa} \in (k_{11}, \infty)$ существуют 15 основных типов диаграмм и только 9 из них сохраняются при ограничениях (6.1). В итоговой табл. 3 использованы следующие обозначения: a_i — расположение кривых (5.2),(5.3) соответствует рис. 5 с номером i ; b_j — расположение кривых (5.2),(5.4) показано на рис. 5 с номером j ; знак “+” соответствует существованию диаграммы $\Sigma = a_i \cup b_j$ для $(\alpha, \beta, \tilde{\varkappa}) \in D$; знак “±” соответствует существованию $\Sigma = a_i \cup b_j$ только для $(\alpha, \beta, \tilde{\varkappa}) \in D^0 \setminus D$; невозможность совмещения диаграмм a_i, b_j отмечена знаком “-”; пустые клетки соответствуют диаграммам из симметричной части D^0 , где $\beta > \alpha$.

Таблица 2. Классификация бифуркационных кривых

$\tilde{\varkappa} \in$	критические уровни	диаграммы a_i на рис. 5									
$(0, k_1)$	$\{\ell_6, \ell_7, \ell_2, \ell_8, \ell_4, \ell_3, \ell_5, \ell_9, \ell_1\}$	3	5	2	9	11	16	10	8	7	1
(k_1, k_2)	$\{\ell_6, \ell_7, \ell_8, \ell_2, \ell_4, \ell_3, \ell_5, \ell_9, \ell_1\}$	3	5	2	5	11	16	10	8	7	1
(k_2, k_3)	$\{\ell_6, \ell_2, \ell_4, \ell_3, \ell_5, \ell_9, \ell_1\}$	3	5	11	16	10	8	7	1		
(k_3, k_4)	$\{\ell_6, \ell_4, \ell_2, \ell_3, \ell_5, \ell_9, \ell_1\}$	3	5	6	16	10	8	7	1		
(k_4, k_5)	$\{\ell_4, \ell_6, \ell_2, \ell_3, \ell_5, \ell_9, \ell_1\}$	3	4	6	16	10	8	7	1		
(k_5, k_6)	$\{\ell_6, \ell_2, \ell_3, \ell_5, \ell_9, \ell_1\}$	4	6	16	10	8	7	1			
(k_6, k_7)	$\{\ell_6, \ell_2, \ell_3, \ell_5, \ell_9, \ell_1\}$	4	6	14	10	8	7	1			
(k_7, k_8)	$\{\ell_6, \ell_2, \ell_5, \ell_3, \ell_9, \ell_1\}$	4	6	14	12	8	7	1			
(k_8, k_9)	$\{\ell_2, \ell_6, \ell_5, \ell_3, \ell_9, \ell_1\}$	4	15	14	12	8	7	1			
(k_9, k_{10})	$\{\ell_2, \ell_5, \ell_6, \ell_3, \ell_9, \ell_1\}$	4	15	13	12	8	7	1			
(k_{10}, k_{11})	$\{\ell_5, \ell_6, \ell_3, \ell_9, \ell_1\}$	15	13	12	8	7	1				
(k_{11}, ∞)	$\{\ell_6, \ell_3, \ell_9, \ell_1\}$	13	12	8	7	1					

В этой классификации не были учтены возможные пересечения кривых (5.3), (5.4), которые также влияют на топологию бифуркационного множества. Например, кривые (5.3), (5.4) пересекаются в том случае, когда на диаграмме существуют точки возврата и разность $A_2 - A_3$ достаточно мала. Соответствующие параметрические ограничения были выписаны и проанализированы. Не будем приводить здесь эти громоздкие выражения. Заметим, что для твердого тела ($\tilde{\varkappa} = 0$) существуют семь(!) типов невырожденных бифуркационных диаграмм [9] и только четыре диаграммы возможны в том случае, когда центр масс тела находится вблизи главной оси инерции [13].

7. Интегральные многообразия $\mathcal{Q}_{h,g}^3$

Бифуркационная диаграмма Σ разбивает плоскость $\mathbb{R}^2(h, g)$ на открытые двумерные области. Некоторые из этих областей ограничены, другие — уходят на бесконечность. Внутри каждой области топологическая структура многообразий $\mathcal{U}_{h,g}, \mathcal{Q}_{h,g}^3$ остается неизменной.

Следуя Я.В. Татаринovu [17], введем род многообразий $\mathcal{U}_{h,g}, \mathcal{Q}_{h,g}^3$: если $\mathcal{U}_{h,g}$ можно получить из сферы удалением l дисков D^2 , то будем считать, что связные многообразия $\mathcal{U}_{h,g}, \mathcal{Q}_{h,g}^3$ имеют



Таблица 3. Бифуркационные диаграммы $\Sigma = a_i \cup b_j$ для случая $\alpha > \beta$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}
b_1	+															
b_2	+	+		-	+	-	+	+	+	+	+	-	-	-	-	+
b_3	+	+	+	\pm	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	+
b_4	+	-		\pm	-	+	+	+	-	+	-	\pm	\pm	+	\pm	+
b_5	+	+		-	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	+
b_6	+	-				+	+	+	-	+	-	\pm	-	+	-	+
b_7	+						+									
b_8	+						+	+								
b_9	+			-		-	+	+	+	+	+	-	-	-	-	+
b_{10}	+						+	+		+		-	-		-	
b_{11}	+			-		-	+	+		+	+	-	-	-	-	+
b_{12}	\pm	-	-		-		+	+	-	-	-	\pm				-
b_{13}	\pm	-	-		-	-	+	+	-	-	-	\pm	\pm	-		-
b_{14}	+	-	-		-		+	+	-	+	-	\pm	-	+		-
b_{15}	\pm	-	-		-	-	+	+	-	-	-	\pm	\pm	\pm	\pm	-
b_{16}	+						+	+		+		-	-	-	-	+

род l . Если интегральное многообразие несвязно, то присвоим ему многозначный род $l_1 l_2 \dots$, где l_i — род его отдельной связной компоненты. В пределах одной связной области из $\mathbb{R}^2(h, g) \setminus \Sigma$ многозначный род $l_1 l_2 \dots$ постоянен. С изменением параметров α, β, \tilde{x} многозначный род многообразий $\mathcal{U}_{h,g}, \mathcal{Q}_{h,g}^3$ сохраняется в процессе трансформации бифуркационной диаграммы до тех пор, пока соответствующая область не стянется в кривую или точку.

С помощью критических точек эффективного потенциала иногда удается исследовать устойчивость равномерных вращений. Если функция $U_g(\gamma)$ имеет минимум, то равномерное вращение в этой точке устойчиво; если функция $U_g(\gamma)$ имеет седло, то равномерное вращение в этой точке неустойчиво; для точки, где $U_g(\gamma)$ имеет максимум, непосредственных выводов об устойчивости сделать нельзя. Гладкие кривые, соответствующие минимумам, максимумам и седлам эффективного потенциала, могут быть выделены достаточно просто на любой бифуркационной диаграмме. При этом следует иметь в виду, что на каждом фиксированном уровне интеграла G разность числа минимаксных и числа седловых точек приведенного потенциала $U_g(\gamma)$ равна эйлеровой характеристике сферы (то есть двум). Не менее важным является следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть распределение масс несимметричного гиростата удовлетворяет условиям $\mathbf{r} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{\lambda} = \varkappa \mathbf{r}$, тогда при любом фиксированном значении интеграла G эффективный потенциал $U_g(\gamma)$ имеет не менее двух, но не более n критических точек на сфере Пуассона, где

- $n = 6$, если $A_2 > A_3 > A_1$;
- $n = 12$, если $A_2 > A_1 > A_3$ или $A_2 + A_3 \geq A_1 > A_2 > A_3$;
- $n = 18$, если $A_1 > A_2 + A_3 > A_2 > A_3$.

Две диаграммы из таблицы 3 представлены на рис. 6. Для связных областей из $\mathbb{R}^2(h, g) \setminus \Sigma$ топология интегральных многообразий соответствует табл. 4. На рис. 6, б можно так провести

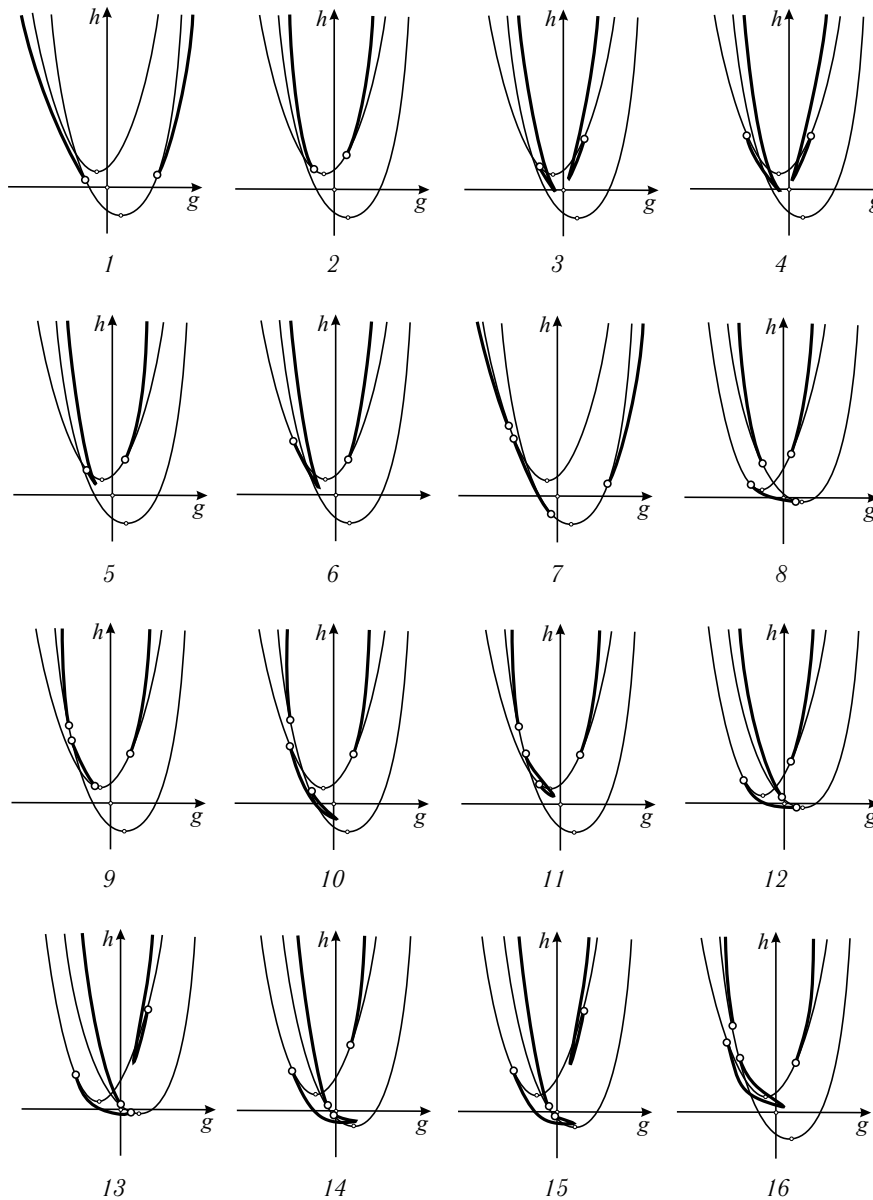


Рис. 5. Бифуркационные кривые (5.2),(5.3) на плоскости $\mathbb{R}^2(h, g)$.

вертикальную прямую $g = \text{const}$, чтобы она пересекла связные области из $\mathbb{R}^2(h, g) \setminus \Sigma$ в следующей последовательности $\{ii, i, v, i, v, i, iv\}$. В этом случае 12 критических точек функции $U_g(\gamma)$ существует на сфере Пуассона: два минимума, пять максимумов и пять седел. Слоение на сфере Пуассона, определяемое функцией Морса $U_g(\gamma)$, показано на рис. 7, а. Молекула Фоменко [3], описывающая топологию этого слоения, изображена на рис. 7, б. В каждой такой молекуле атомы соответствуют окрестностям критических слоев: на рис. 7, б минимаксные критические значения функции отмечены атомами А, седловые критические значения функции обозначены топологически неэквивалентными атомами В, D_1 . Заметим, что в классической задаче о движении несимметричного тела вокруг неподвижной точки не было обнаружено ни одного случая, когда эффективный потенциал на сфере Пуассона имел бы более десяти критических точек.

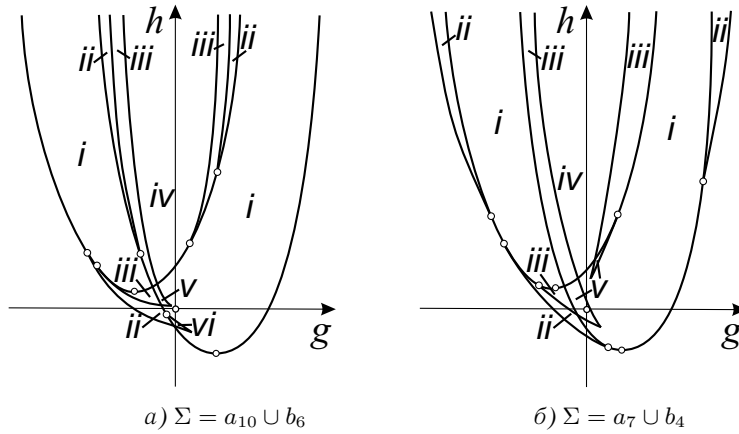


Рис. 6. Бифуркационные диаграммы. Случай $r_2 = r_3 = 0$.

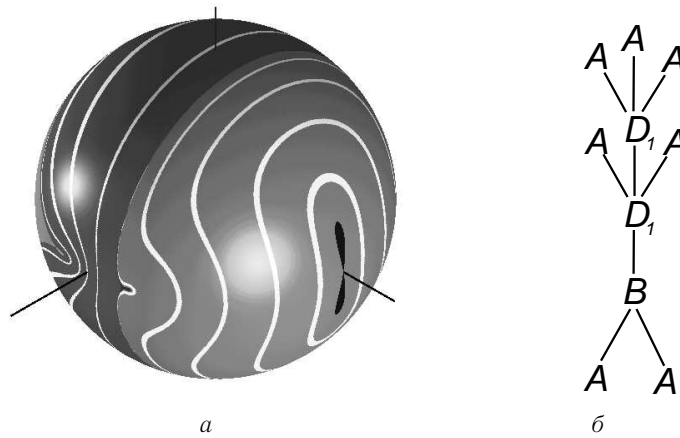


Рис. 7. Линии уровня функции $U_g(\gamma)$ на сфере Пуассона.

В случае, когда распределение масс вращающегося гиригата удовлетворяет условиям (1.3), (5.1), существуют все типы неособых многообразий $\mathcal{Q}_{h,g}^3, \mathcal{U}_{h,g}$, перечисленные в таблице 4. Неособых интегральных многообразий $\mathcal{Q}_{h,g}^3$ более сложной топологической структуры в рассматриваемой задаче нет. Из результатов [5] следует утверждение: если центр масс гиригата расположен в главной плоскости инерции, то интегральные многообразия рода $l = 4$ существуют, по крайней мере, при малых значениях $|\lambda|$. Предельный случай $\tilde{\kappa} \rightarrow \infty$ соответствует движению гиригата по инерции. Бифуркационное множество и топология интегральных многообразий для этой задачи были изучены в работах [19, 25].

Таблица 4. Неособые интегральные многообразия и их проекции на сферу

$(h, g) \in$	i	ii	iii	iv	v	vi	vii
l	1	11	2	0	3	111	12
$\mathcal{U}_{h,g}$	D^2	$D^2 \cup D^2$	$D^1 \times S^1$	S^2	D_2^2	$D^2 \cup D^2 \cup D^2$	$D^2 \cup (D^1 \times S^1)$
$\mathcal{Q}_{h,g}^3$	S^3	$S^3 \cup S^3$	$S^1 \times S^2$	$\mathbb{R}P^3$	N_2^3	$S^3 \cup S^3 \cup S^3$	$S^3 \cup (S^1 \times S^2)$

Список литературы

- [1] Анчев А. *О перманентных вращениях тяжелого гиростата, имеющего неподвижную точку* // ПММ, 1967, т. 31, вып. 1, с. 49–58.
- [2] Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Математические аспекты классической и небесной механики* // М.: ВИНТИ, 1985, т. 3, 304 с.
- [3] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация* // Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1999, т. 2, 448 с.
- [4] Борисов А.В., Мамаев И.С. *Динамика твердого тела* // Ижевск: НИЦ РХД, 2001, 384 с.
- [5] Гашененко И.Н. *Интегральные многообразия в задаче о движении тяжелого твердого тела* // Механика твердого тела. Донецк: Изд-во ИПММ НАНУ, 2003, вып. 33, с. 20–32.
- [6] Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. *Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние* // Киев: Наукова думка, 1978, 296 с.
- [7] Дрофа В.Н. *О перманентных осях движения тяжелого гиростата около неподвижной точки* // ПММ, 1961, т. 25, вып. 5, с. 941–945.
- [8] Жуковский Н. Е. *О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью* // Собр. соч., М.—Л.: ОГИЗ, 1949, Т. 2, с. 152–309.
- [9] Каток С. Б. *Бифуркационные множества и интегральные многообразия в задаче о движении тяжелого твердого тела* // УМН, 1972, т. 27, вып. 2, с. 126–132.
- [10] Ковалев А.М. *О стационарных решениях дифференциальных уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку* // Математическая физика. Киев: Наукова думка, 1968, вып. 5, с. 87–102.
- [11] Ковалев А.М., Киселев А.М. *О конусе осей равномерного вращения гиростата* // Механика твердого тела. Киев: Наукова думка, 1972, вып. 4, с. 36–45.
- [12] Козлов В.В. *Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике* // Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1995, 432 с.
- [13] Кузьмина Р.П. *О бифуркационном множестве в задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой* // Изв. АН СССР, Механика твердого тела, 1982, №1, с. 3–10.
- [14] Рубановский В.Н. *О бифуркации и устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой* // Теоретична и приложна механика. София, 1974, т. 5, № 4, с. 55–70.
- [15] Рубановский В.Н. *О бифуркации и устойчивости стационарных движений в некоторых задачах динамики твердого тела* // ПММ, 1974, т. 38, вып. 4, с. 616–627.
- [16] Смейл С. *Топология и механика* // УМН, 1972, т. 27, вып. 2, с. 77–121. In English: Smale S. *Topology and mechanics I, II* // Invent. Math., 1970, V. 10, №4, p. 305–331; 1970, V. 11, №1, p. 45–64.
- [17] Татаринов Я. В. *Портреты классических интегралов задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Математика и механика, 1974, №6, с. 99–105.
- [18] Харламов П.В. *О равномерных вращениях тела, имеющего неподвижную точку* // ПММ, 1965, т. 29, вып. 2, с. 373–375.
- [19] Харламов М.П. *Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела* // Л.: ЛГУ, 1988, 200 с.

- [20] Харламова Е.И. *Один частный случай интегрируемости уравнения Эйлера–Пуассона* // ДАН СССР, 1959, т. 125, № 5, с. 996–997.
- [21] Elipe A., Arribas M., Riaguas A. *Complete analysis of bifurcations in the axial gyrostat problem* // J. Phys. A: Math. Gen., 1997, V. 30, p. 587–601.
- [22] Gashenenko I.N., Richter P.H. *Enveloping surfaces and admissible velocities of heavy rigid bodies* // Int. J. Bifurcation and Chaos, 2004, V. 14, №8, p. 2525–2553.
- [23] Iacob A. *Invariant manifolds in motion of a rigid body about a fixed point* // Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 1971, V. 16, №10, p. 1497–1521.
- [24] McCord C.K., Meyer K.R., Wang Q. *The integral manifolds of the three body problem* // Memoirs of the AMS, 1998, V. 132, №628, 91 p.
- [25] Oshemkov A.A. *Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations* // Advances in Sov. Math., 1991, V. 6, p. 67–146.
- [26] Staude O. *Über permanente Rotationsachsen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt* // J. Reine und Angew. Math., 1894, Bd. 113, H. 4, S. 318–334.