УДК 531.3

Разделение переменных на негиперэллиптической кривой*

В. Г. Марихин
ИТФ им. Л.Д. Ландау РАН
119334, Россия, Москва, ул. Косыгина, 2
E-mail: mvg@itp.ac.ru

В.В. Соколов
ИТФ им. Л.Д. Ландау РАН
119334, Россия, Москва, ул. Косыгина, 2
E-mail: vsokolov@landau.ac.ru

Получено 24 июля 2005 г.

Построена 8-параметрическая пара коммутирующих гамильтонианов с двумя степенями свободы, квадратичных по моментам, коэффициенты которых — некоторые функции координат. Волчки Шоттки–Манакова и Клебша являются частными случаями этой модели. Найдена функция действия как интеграл на негиперэллиптической кривой рода 4.

Ключевые слова: функция действия, разделение переменных, накрытие эллиптической кривой.

V. G. Marikhin, V. V. Sokolov
Separation of variables on non-hiperelliptic curve

A 8-parametric pair of commuting Hamiltonians of two degrees of freedom, quadratic in moments and coefficients depending only on coordinates is constructed. The Schottky-Manakov and the Clebsch spinning tops are particular cases of this model. The action function as an integral on a non-hyperelliptic curve of genus 4 is found.

Keywords: Action function, separation of variables, covering of an elliptic curve.
Mathematical Subject Classifications: 37N15, 37K20, 14K20.

*Работа частично поддержана грантами РФФИ 05-01-00189 и NSh 1716.2003.1.

1. Введение

В статье рассматриваются несколько моделей, допускающих разделение переменных на следующей алгебраической кривой рода 4:

$$\Phi(\xi, Y) = s_6 Y^6 + l(\xi) Y^4 + k(\xi) Y^2 - S(\xi) = 0, \tag{1.1}$$

где

$$s_6 = \frac{\delta^6}{6!} S^{VI}(\xi), \quad k(\xi) = \frac{\delta^2}{10} S''(\xi) + 4(\alpha\xi^2 + e_2\xi + e_1), \quad l(\xi) = \frac{\delta^4}{4!} S^{IV}(\xi) - \frac{\delta^2}{2} k''(\xi). \tag{1.2}$$

Здесь α, δ, e_1, e_2 — параметры, S — произвольный многочлен шестой степени. Если $\delta = 0$, то кривая является гиперэллиптической рода 3.

Класс кривых (1.1) с $\delta \neq 0$ может быть описан следующим образом. Пусть $P(\eta, \xi) = 0$ — произвольная кубика. В общем случае, как известно, эта кривая имеет род 1, т.е. является эллиптической. Тогда кривая (1.1) является накрытием над кубикой, заданным формулой $\eta = \xi^2 - \delta^2 Y^2$. При этом, корни S задают точки ветвления этого накрытия.

В разделах 2,3 мы рассматриваем гамильтониан

$$H = ap_1^2 + cp_2^2 + dp_1 + ep_2 + f, \tag{1.3}$$

где

$$a = -\frac{4s_2 S(s_1)}{s_1 - s_2}, \qquad c = \frac{4s_1 S(s_2)}{s_1 - s_2}, \qquad d = -s_1 \frac{J}{s_1 - s_2}, \qquad e = -s_2 \frac{J}{s_1 - s_2},$$

$$f = \frac{\delta^2}{40} \frac{s_2 S''(s_1) - s_1 S''(s_2)}{s_1 - s_2} - \frac{\delta^2}{4} \frac{s_2 S'(s_1) + s_1 S'(s_2)}{(s_1 - s_2)^2} + \frac{3\delta^2}{4} \frac{s_2 S(s_1) - s_1 S(s_2)}{(s_1 - s_2)^3} + \alpha s_1 s_2, \tag{1.4}$$

и

$$J = 2\delta \frac{\sqrt{S(s_1)}\sqrt{S(s_2)}}{s_1 - s_2}.$$

Легко проверить, что H коммутирует с функцией

$$K = Ap_1^2 + Cp_2^2 + Dp_1 + Ep_2 + F, \tag{1.5}$$

где

$$A = \frac{4S(s_1)}{s_1 - s_2}, \qquad C = -\frac{4S(s_2)}{s_1 - s_2}, \qquad D = \frac{J}{s_1 - s_2}, \qquad E = \frac{J}{s_1 - s_2},$$

$$F = \frac{\delta^2}{40} \frac{S''(s_2) - S''(s_1)}{s_1 - s_2} + \frac{\delta^2}{4} \frac{S'(s_1) + S'(s_2)}{(s_1 - s_2)^2} + \frac{3\delta^2}{4} \frac{S(s_2) - S(s_1)}{(s_1 - s_2)^3} - \alpha(s_1 + s_2), \tag{1.6}$$

относительно стандартной скобки Пуассона $\{p_\alpha, s_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}$. Если $\delta = 0$, то линейные по моментам члены в гамильтонианах H и K пропадают и они принадлежат классу Штеккелевых гамильтонианов. В этом случае s_1, s_2 — переменные разделения. Соответствующее преобразование Абеля на гиперэллиптической кривой 3 имеет вид

$$\frac{ds_1}{\sqrt{T(s_1)}} + \frac{ds_2}{\sqrt{T(s_2)}} = dt, \qquad \frac{s_1 ds_1}{\sqrt{T(s_1)}} + \frac{s_2 ds_2}{\sqrt{T(s_2)}} = 0.$$

Здесь

$$T(s) = 16\,S(s)\,(\alpha s^2 + e_2 s + e_1),$$

а постоянные e_1 и e_2 — значения интегралов H и K, соответственно.

Основным результатом статьи является явная формула для действия в случае $\delta \neq 0$, зависящая от двух параметров. Мы находим ее напрямую из уравнения Гамильтона-Якоби. Дифференцируя функцию действия по параметрам, мы находим соответствующие абелевы дифференциалы ω_i. В результате, мы получаем стандартные формулы Абеля $\sum\limits_{k=1}^{2} \omega_l(\xi_k) = \delta_{k,l}\,dt, \quad l = 1, 2, 3.$ Поскольку наша модель двумерна, имеется одна связь между нашими переменными разделения ξ_i. А именно, оказывается, что проекции переменных ξ_i на эллиптическую базу накрытия лежат на одной прямой.

Хотя функция действия не является полностью разделенной и в ней присутствует дополнительный член, отражающий наличие связи, на уровне абелевых дифференциалов мы имеем полное разделение переменных. По нашему мнению, именно это является правильным обобщением стандартного разделения переменных на случай негиперэллиптических кривых.

Наш подход никак не использует схему построения разделения переменных, связанную с существованием представления Лакса [22, 20, 24]. Более того, для общей модели (1.3) представление Лакса неизвестно.

В разделах 4-5 мы находим функцию действия для волчка Клебша и $so(4)$-волчка Шоттки—Манакова (см. [23, 10, 19, 4, 25, 3, 12, 8, 7, 5, 17, 6] и ссылки в этих работах) Для этих моделей мы указываем переменные s_1, s_2, в которых волчки и их интегралы движения становятся частным случаем пары (1.3), (1.5). Многочлен S в этих случаях имеет степень 3 и 4, а соответствующая алгебраическая кривая — род 3.

Для волчков Клебша и Шоттки—Манакова представление Лакса хорошо известно. В частности, для волчка Клебша характеристическая кривая для 3×3-оператора Лакса, найденного А. Переломовым [6], совпадает с нашей. Однако, насколько нам известно, до нашей работы разделение переменных и функция действия, связанные с этой кривой, не были известны. Тоже относится и к оператору Манакова [4] и его характеристической кривой.

Переход от s_1, s_2 к исходным физическим переменным волчков нетривиален. В частности, имеются проблемы, связанные с тем, что формулы перехода являются комплексными. Эти вопросы должны быть отдельно изучены для каждой из моделей.

Частный случай $S = \mathrm{const}$ также представляет интерес. Соответствующая неоднородная система гидродинамического типа (2.7) совпадает с уравнением Гиббонса—Царева [15]. Наши общие формулы приводят к семейству эллиптических решений для этого уравнения (см. раздел 7).

2. Уравнения движения

Уравнения Гамильтона, соответствующие (1.3) и (1.5), имеют вид

$$\frac{ds_1}{dt} = 2ap_1 + d, \qquad \frac{ds_2}{dt} = 2cp_2 + e. \tag{2.1}$$

и

$$\frac{ds_1}{d\tau} = 2Ap_1 + D, \qquad \frac{ds_2}{d\tau} = 2Cp_2 + E. \tag{2.2}$$

Находя моменты p_1, p_2 из (2.1) и подставляя их в соотношения $H = e_1$ и $K = e_2$, получаем

$$(s_1 - s_2)[s_1 \frac{\dot{s_1}^2}{S(s_1)} - s_2 \frac{\dot{s_2}^2}{S(s_2)}] + 16(e_1 - f)s_1 s_2 + \frac{4\delta^2}{(s_1 - s_2)^3}(s_2^3 S(s_1) - s_1^3 S(s_2)) = 0 \qquad (2.3)$$

и

$$(s_1 - s_2)s_1 s_2 \left(\frac{\dot{s_1}^2}{S(s_1)} - \frac{\dot{s_2}^2}{S(s_2)}\right) - 4\delta\sqrt{S(s_1)S(s_2)}\left(s_1^2 \frac{\dot{s_1}}{S(s_1)} + s_2^2 \frac{\dot{s_2}}{S(s_2)}\right) + \qquad (2.4)$$

$$16 s_1 s_2((e_1 - f)(s_1 + s_2) + (e_2 - F)s_1 s_2) - \frac{4\delta^2}{(s_1 - s_2)^3}\left(s_2^3 S(s_1)(s_1 - 2s_2) - s_1^3 S(s_2)(s_2 - 2s_1)\right) = 0,$$

где f и F определены формулами (1.4), (1.6).

Одной из основных технических задач является переписывание этой системы в компактной форме. Непосредственно исключение, скажем, $\dot{s_2}$ приводит к малоприятному уравнению четвертой степени относительно $\dot{s_1}$.

Предложение 1. *Пусть (u, v) — произвольное решение системы:*

$$L(s_2)u^2 - 2L(s_1)v - M(s_2, s_1) = 0, \qquad L(s_1)v^2 - 2L(s_2)u - M(s_1, s_2) = 0, \qquad (2.5)$$

где

$$M(x, y) = 3L(y) + L'(y)(x - y) + k(y)(x - y)^2, \qquad L(x) = \delta^2 S(x).$$

Тогда производные

$$\dot{s}_1 = -J\frac{s_2\, u + s_1}{s_1 - s_2}, \qquad \dot{s}_2 = -J\frac{s_1\, v + s_2}{s_1 - s_2} \qquad (2.6)$$

удовлетворяют системе (2.3), (2.4).

Исключение переменных p_1, p_2 из (2.1), (2.2) приводит к неоднородной системе гидродинамического типа

$$(s_1)_t + s_2(s_1)_\tau = -J, \qquad (s_2)_t + s_1(s_2)_\tau = J. \qquad (2.7)$$

Из этой формулы и из (2.6) следует

$$(s_1)_\tau = J\frac{u + 1}{s_1 - s_2}, \qquad (s_2)_\tau = J\frac{v + 1}{s_1 - s_2}. \qquad (2.8)$$

Кроме того, мы находим из (2.1), (2.6), что

$$p_1 = \frac{J\, u}{8S(s_1)}, \qquad p_2 = -\frac{J\, v}{8S(s_2)}. \qquad (2.9)$$

Следующая параметризация решений системы (2.5) является первым шагом к разделению переменных.

Предложение 2. *Пусть z_1, z_2, z_3 — решения уравнения*

$$z^6 L(s_2)^2 - L(s_2)M(s_2, s_1)z^4 + M(s_1, s_2)L(s_1)z^2 - L(s_1)^2 = 0, \qquad (2.10)$$

такие, что

$$\frac{L(x)}{L(y)} = z_1 z_2 z_3, \qquad \frac{M(y, x)}{L(y)} = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2, \qquad \frac{M(x, y)}{L(x)} = \frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2} + \frac{1}{z_3^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&(u_1,v_1)=(z_1+z_2+z_3,\ \frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}), \qquad (u_2,v_2)=(z_1-z_2-z_3,\ \frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_2}-\frac{1}{z_3}),\\
&(u_3,v_3)=(z_2-z_1-z_3,\ \frac{1}{z_2}-\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_3}), \qquad (u_4,v_4)=(z_3-z_1-z_2,\ \frac{1}{z_3}-\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_2})
\end{aligned} \tag{2.11}$$

— *решения системы* (2.5).

3. Разделение переменных

Для того, чтобы разделить переменные в случае $\delta \neq 0$, мы находим функцию действия $\tilde{S}(s_1, s_2)$ в явном виде.

Рассмотрим систему уравнений

$$\Phi(\xi, Y) = 0, \qquad Y^2 = \frac{1}{\delta^2}(\xi - s_1)(\xi - s_2),$$

где многочлен $\Phi(\xi, Y)$ задан формулой (1.1). Легко проверить, что если мы подставим в первое из уравнений выражение для Y^2 из второго уравнения, тогда старшие степени ξ сократятся и уравнение для ξ окажется кубическим. Обозначим через $\xi_i(s_1, s_2)$, $\quad i = 1, 2, 3$ корни этого уравнения.

Теорема. *Функция* (ср. с [22])

$$\tilde{S}(s_1, s_2, e_1, e_2) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{3}\left[\delta \operatorname{arctanh}\frac{\xi_n - \frac{1}{2}(s_1+s_2)}{\delta\, Y(\xi_n)} - \int^{\xi_n}\frac{d\xi}{Y(\xi)}\right] \tag{3.1}$$

удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби

$$H\left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial s_1}, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial s_2}, s_1, s_2\right) = e_1, \qquad K\left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial s_1}, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial s_2}, s_1, s_2\right) = e_2,$$

где функции $H(p_1, p_2, s_1, s_2)$ и $K(p_1, p_2, s_1, s_2)$ *определены формулами* (1.3)–(1.5).

Доказательство.

Из (2.9) следует, что частные производные действия $\tilde{S}$ имеют вид:

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial s_1} = \frac{J\,u}{8S(s_1)}, \qquad \frac{\partial \tilde{S}}{\partial s_2} = -\frac{J\,v}{8S(s_2)}. \tag{3.2}$$

Согласно Лемме Якоби, эта пара уравнений совместна. Условие совместности

$$S(s_2)\frac{\partial}{\partial s_2}(Ju) + S(s_1)\frac{\partial}{\partial s_1}(Jv) = 0$$

следует из тождеств

$$\begin{aligned}
&(L'(y) + M_x(x,y))\,(x-y) + 6L(y) - 2M(x,y) = 0,\\
&(x-y)\,(M_y(x,y) + M_x(y,x)) + 4(M(x,y) - M(y,x)) = 0,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

которые легко проверить непосредственно.

Рассмотрим дополнительный гамильтониан вида (ср. с формулой (2.10))

$$\tilde{H} = p_1^3 L(s_1) + p_1^2 p_2 M(s_2, s_1) + p_1 p_2^2 M(s_1, s_2) + p_2^3 L(s_2). \tag{3.4}$$

Нетрудно проверить, что $\{\tilde{H}, \tilde{K}\} = 0$, где

$$\tilde{K} = -(s_1 - s_2)^2 p_1 p_2.$$

Легко видеть, что если $\{p_i, s_j\} = \delta_{ij}$, то скобки Пуассона между функциями

$$a_0 = p_1 + p_2, \qquad a_1 = s_1 p_1 + s_2 p_2, \qquad a_2 = s_1^2 p_1 + s_2^2 p_2 \tag{3.5}$$

задаются формулами

$$\{a_0, a_1\} = a_0, \qquad \{a_0, a_2\} = 2a_1, \qquad \{a_1, a_2\} = a_2. \tag{3.6}$$

Выражение $Q = a_1^2 - a_0 a_2$ является функцией Казимира для линейных $sl(2)$-скобок (3.6). Оказывается, что функция $\tilde{K}$, переписанная в переменных (3.5), совпадает с Q. Гамильтониан $\tilde{H}$ также может быть выражен только через переменные (3.5):

$$\tilde{H} = a_0^3 L\left(\frac{a_1}{a_0}\right) - \delta^2(\alpha a_2 + e_2 a_1 + e_1 a_0) + \frac{\delta^4}{4}\frac{a_1^2}{a_0}.$$

Из этой формулы видно, что переменная

$$\xi = \frac{a_1}{a_0} = \frac{p_1 s_1 + p_2 s_2}{p_1 + p_2}$$

должна играть ключевую роль в описании свойств многочленов (2.10), (3.4), поскольку именно она является аргументом многочлена L. Предположим, что $\tilde{H}(p_1, p_2) = 0$; тогда решение z уравнения (2.10) может быть выражено через ξ формулой

$$z = \sqrt{\frac{s_2 - \xi}{s_1 - \xi}}\sqrt{\frac{S(s_1)}{S(s_2)}}. \tag{3.7}$$

Уравнение (2.10) кубично по ξ. Оно может быть переписано в виде (1.1), где

$$Y^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\delta^2}(\xi - s_1)(\xi - s_2). \tag{3.8}$$

Наша задача состоит в том, чтобы найти решение системы (3.2) явно. Согласно формулам (2.11), для этого достаточно решить систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma}{\partial s_1} &= \frac{J}{8S(s_1)} z = \frac{\delta}{4(s_1 - s_2)}\sqrt{\frac{s_2 - \xi}{s_1 - \xi}}, \\ \frac{\partial\sigma}{\partial s_2} &= -\frac{J}{8S(s_2)}\frac{1}{z} = -\frac{\delta}{4(s_1 - s_2)}\sqrt{\frac{s_1 - \xi}{s_2 - \xi}}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Здесь $z(s_1, s_2)$ — произвольный корень уравнения (2.10) и ξ — соответствующее (см. (3.7)) значение $\xi(s_1, s_2)$. Искомая функция действия $\tilde{S}$ получается, как сумма трех решений (3.9), соответствующих трем ветвям функции $\xi(s_1, s_2)$.

Сначала мы находим функцию σ_0 такую, что (3.9) выполняется при условии, что ξ — параметр, не зависящий от s_1, s_2. Нетрудно видеть, что

$$\sigma_0(\xi, s_1, s_2) = \frac{1}{4}\delta \operatorname{arctanh} \frac{\xi - \frac{1}{2}(s_1 + s_2)}{\sqrt{(\xi - s_1)(\xi - s_2)}}$$

Теперь, принимая во внимание формулу

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\sigma_0 = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{(\xi - s_1)(\xi - s_2)}}$$

и заменяя $\sqrt{(\xi - s_1)(\xi - s_2)}$ на $Y\delta$, мы получаем выражение (3.1) для функции действия.

Дифференцируя действие по параметрам e_i и принимая во внимание, что

$$\frac{\partial\tilde{S}}{\partial e_1} = t + c_1, \qquad \frac{\partial\tilde{S}}{\partial e_2} = c_2,$$

мы окончательно получаем

$$dt = \sum_{n=1}^{3}\omega_1(\xi_n), \qquad 0 = \sum_{n=1}^{3}\omega_2(\xi_n). \tag{3.10}$$

Здесь $\omega_1,\ \omega_2$ - элементы базиса

$$\omega_1(\xi) = \frac{d\xi}{Z}, \qquad \omega_2(\xi) = \frac{\xi\, d\xi}{Z}, \qquad \omega_3(\xi) = \frac{(\xi^2 - \delta^2Y^2)d\xi}{Z}, \qquad \omega_4(\xi) = \frac{Y\, d\xi}{Z} \tag{3.11}$$

голоморфных дифференциалов на кривой $\Phi(\xi, Y) = 0$. В формуле (3.11) мы используем обозначение $Z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial\Phi}{\partial Y}$.

Дифференциал ω_4 играет особую роль. В переменных (ξ, η), где

$$\eta = \xi^2 - \delta^2Y^2, \tag{3.12}$$

кривая (1.1) превращается в следующую кубику:

$$s_6\eta^3+s_5\eta^2\xi+\frac{1}{5}s_4\eta(\eta+4\xi^2)+\frac{1}{5}s_3\xi(\eta+2\xi^2)+\frac{1}{5}s_2(\eta+4\xi^2)+s_1\xi+s_0+\frac{4}{\delta^2}(\eta-\xi^2)(\alpha\eta+e_2\xi+e_1) = 0. \tag{3.13}$$

Голоморфный дифференциал на эллиптической кривой (3.13) переходит в ω_4 при преобразовании (3.12).

Из (3.8) следует, что функции $Y(\xi_i)$ связаны между собой соотношением

$$\frac{1}{\delta^2} = \frac{Y^2(\xi_1)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} + \frac{Y^2(\xi_2)}{(\xi_2 - \xi_3)(\xi_2 - \xi_1)} + \frac{Y^2(\xi_3)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)}. \tag{3.14}$$

Условие (3.14) переписывается в переменных (ξ, η) как

$$\eta_1(\xi_2 - \xi_3) + \eta_2(\xi_3 - \xi_1) + \eta_3(\xi_1 - \xi_2) = 0.$$

Эта формула означает, что точки (ξ_i, η_i) принадлежат пересечению эллиптической кривой (3.13) и прямой $\eta = \xi(s_1 + s_2) - s_1 s_2$.

Таким образом, мы имеем три условия (3.10), (3.14) для определения трех функций $\xi_i(t)$. Наличие связи (3.14) позволяет определить из формулы (3.8) две функции $s_1(t), s_2(t)$, удовлетворяющие уравнениям движения (2.3),(2.4), исходя из трех функций $\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)$. Отметим, что как эти функции, так и сами уравнения движения определяются исключительно в терминах кривой (1.1).

Одним из результатов этой статьи является следующее

Замечание 1. Существует следующее обобщение интегрируемой пары (1.3), (1.5):

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{[h(s_2)U_1 - h(s_1)U_2] + h(s_1)a(s_2) - h(s_2)a(s_1)}{h(s_2)k(s_1) - h(s_1)k(s_2)}\,, \\
K &= \frac{[k(s_2)U_1 - k(s_1)U_2] + k(s_1)a(s_2) - k(s_2)a(s_1)}{h(s_2)k(s_1) - h(s_1)k(s_2)}\,,
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

где

$$
U_1 = u(p_1, p_2, s_1, s_2) \equiv S(s_1)p_1^2 + \delta\frac{\sqrt{S(s_1)S(s_2)}}{(s_1 - s_2)}p_2 - \frac{\delta^2}{40}S''(s_1) + \frac{\delta^2}{4}\frac{S'(s_1)}{(s_1 - s_2)} - \frac{3\delta^2}{4}\frac{S(s_1)}{(s_1 - s_2)^2},
$$

и $U_2 = u(p_2, p_1, s_2, s_1)$. Здесь $S(x)$ - произвольный многочлен степени 6, δ - параметр,

$$
h(x) = h_2x^2 + h_1x + h_0, \qquad k(x) = k_2x^2 + k_1x + k_0, \qquad a(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0
$$

произвольные квадратичные многочлены такие, что $h(x) \neq const\, k(x)$. Нетрудно проверить, что функции (3.15) коммутируют относительно стандартных скобок Пуассона. Пара (1.3),(1.5) получается из (3.15) при $h(x) = 1$, $k(x) = x$. Было бы интересно обобщить конструкцию из разделов 2,3 на общий случай.

4. Волчок Шоттки-Манакова

Хорошо известно (см., например, [3]), что гамильтониан

$$
H = (\vec{S_1}, A\vec{S_1}) + 2(\vec{S_1}, B\vec{S_2}) + (\vec{S_2}, A\vec{S_2}),
$$

где $A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3)$, $B = \mathrm{diag}(b_1, b_2, b_3)$, коммутирует с некоторым квадратичным многочленом K того же вида относительно спиновых скобок Пуассона

$$
\{S_i^\alpha, S_j^\beta\} = \kappa\, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S_i^\gamma \delta_{ij} \tag{4.1}
$$

тогда и только тогда, когда

$$
b_1^2(a_2 - a_3) + b_2^2(a_3 - a_1) + b_3^2(a_1 - a_2) + (a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1) = 0. \tag{4.2}
$$

Здесь $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — полностью кососимметрический тензор, $\kappa \neq 0$ - параметр.

Поскольку H и K могут быть заменены произвольными линейными комбинациями H, K и функций Казимира

$$
J_1 = (\vec{S}_1, \vec{S}_1), \qquad J_2 = (\vec{S}_2, \vec{S}_2)
$$

скобок (4.1), интеграл K может быть приведен к виду [17]

$$
K = 2(\vec{S_1}, \hat{C}\vec{S_2}), \qquad C = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).
$$

Без ограничения общности матрицы A и B, определяющие гамильтониан H, могут быть выбраны следующим образом:

$$A = \mathrm{diag}(-\alpha_1^2, -\alpha_2^2, -\alpha_3^2), \qquad B = \mathrm{diag}(\alpha_2\alpha_3 + \lambda\alpha_1,\ \alpha_3\alpha_1 + \lambda\alpha_2,\ \alpha_1\alpha_2 + \lambda\alpha_3).$$

Произвольный параметр λ соответствует сдвигу H на $\lambda\, K$.

Редукция к стандартным скобкам. Фиксируем значения функций Казимира: $(\vec{S}_k, \vec{S}_k) = j_k^2$. Тогда формулы

$$\vec{S}_k = p_k \vec{K}(q_k) + \frac{j_k}{2}\vec{K}'(q_k), \qquad \text{где} \qquad \vec{K}(q) = ((q^2-1),\ i(q^2+1),\ 2q), \tag{4.3}$$

задают преобразование, связывающее симплектический лист пуассонова многообразия с координатами $\vec{S}_1, \vec{S}_2$ и скобками (4.1), где $\kappa = -2i$, и многообразие с координатами p_1, p_2, q_1, q_2 и каноническими скобками Пуассона $\{p_\alpha, q_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}$. В результате многочлены H и K переходят в

$$\begin{gathered} H = p_1^2 r(q_1) + \frac{j_1}{2}p_1\, r'(q_1) + \frac{j_1^2}{12}r''(q_1) + p_2^2 r(q_2) + \frac{j_2}{2}p_2\, r'(q_2) + \frac{j_2^2}{12}r''(q_2) + \\ 2\left(p_1 + \frac{j_1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1}\right)\left(p_2 + \frac{j_2}{2}\frac{\partial}{\partial q_2}\right) Z(q_1, q_2), \end{gathered} \tag{4.4}$$

и

$$K = 2\left(p_1 + \frac{j_1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1}\right)\left(p_2 + \frac{j_2}{2}\frac{\partial}{\partial q_2}\right) W(q_1, q_2), \tag{4.5}$$

где

$$\begin{gathered} r(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\vec{K}(x),\ A\vec{K}(x)) = -\alpha_1^2(x^2-1)^2 + \alpha_2(x^2+1)^2 - 4\alpha_3 x^2, \\ Z(x,y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\vec{K}(x),\ B\vec{K}(y)) = \\ = (\alpha_2\alpha_3 + \lambda\alpha_1)(x^2-1)(y^2-1) - (\alpha_3\alpha_1 + \lambda\alpha_2)(x^2+1)(y^2+1) + 4(\alpha_1\alpha_2 + \lambda\alpha_3)xy, \end{gathered} \tag{4.6}$$

$$W(x,y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\vec{K}(x),\ C\vec{K}(y)) = \alpha_1(x^2-1)(y^2-1) - \alpha_2(x^2+1)(y^2+1) + 4\alpha_3 xy. \tag{4.7}$$

Нетрудно проверить, что

$$Z^2(x,y) - r(x)r(y) = W(x,y)\bar{W}(x,y), \tag{4.8}$$

где $\bar{W}$ — некоторый многочлен, квадратичный по каждой из переменных.

Замечание 2. Отметим, что более общий гамильтониан

$$H = \sum_{ij,\mu,\nu} S_i^\mu S_j^\nu c_{\mu\nu}^{ij}, \qquad i,j = 1,\ldots,N, \qquad \mu,\nu = x,y,z,$$

описывающий взаимодействие N спинов, может быть сведен к

$$H = \sum_{ij} g^{ij} p_i p_j + \sum_i a^i p_i + v,$$

где

$$g^{ij} = \sum_{\mu,\nu} K^\mu(x^i) K^\nu(x^j) c_{\mu\nu}^{ij},$$

$$a^i = \sum_k j_k \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^k} - \frac{1}{2} j_i \frac{\partial g^{ii}}{\partial x^i},$$

$$v = \frac{1}{4}\sum_{ik} j_i j_k \frac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{1}{6}\sum_k j_k^2 \frac{\partial^2 g^{kk}}{\partial x^k \partial x^k}$$

аналогичным преобразованием

$$\vec{S}_k = p_k \vec{K}(x^k) + \frac{j_k}{2}\vec{K}'(x^k), \qquad k = 1, \ldots, N.$$

В терминах координат и скоростей лагранжиан и энергия такой модели имеют вид

$$L = \frac{1}{4}\sum_{ij} g_{ij}(\dot{x}^i - a^i)(\dot{x}^j - a^j) - v, \qquad E = \frac{1}{4}\sum_{ij} g_{ij}(\dot{x}^i\dot{x}^j - a^i a^j) + v,$$

где $\sum\limits_j g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$.

Дополнительный интеграл вида

$$K = \sum_{ij} G^{ij} p_i p_j + \sum_i A^i p_i + V$$

существует если и только если

$$\sum_k \frac{\partial G^{ij}}{\partial x^k} g^{kl} - \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} G^{kl} = 0, \qquad \sum_k a^k \frac{\partial G^{ij}}{\partial x^k} - 2\frac{\partial a^i}{\partial x^k} G^{kj} - A^k \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} + 2\frac{\partial A^i}{\partial x^k} g^{kj} = 0,$$

$$\sum_k a^k \frac{\partial A^i}{\partial x^k} - A^k \frac{\partial a^i}{\partial x^k} + 2g^{ik}\frac{\partial V}{\partial x^k} - 2G^{ik}\frac{\partial v}{\partial x^k} = 0, \qquad \sum_k a^k \frac{\partial V}{\partial x^k} - A^k \frac{\partial v}{\partial x^k} = 0.$$

Диагонализация квадратичной части гамильтониана. После преобразования (4.3) функции H и K приняли вид

$$H = ap_1^2 + 2bp_1p_2 + cp_2^2 + dp_1 + ep_2 + f, \tag{4.9}$$

$$K = Ap_1^2 + 2Bp_1p_2 + Cp_2^2 + Dp_1 + Ep_2 + F, \tag{4.10}$$

где коэффициенты — некоторые (в нашем случае рациональные) функции переменных q_1, q_2.

Общие формулы, связанные с парой коммутирующих гамильтонианов, квадратичных по моментам, и некоторые примеры могут быть найдены в [11, 14, 13, 21].

Класс гамильтонианов (4.9) инвариантен относительно *канонических* преобразований вида

$$p_1 = k_1\hat{p}_1 + k_2\hat{p}_2 + k_3, \qquad p_2 = \bar{k}_1\hat{p}_1 + \bar{k}_2\hat{p}_2 + \bar{k}_3, \qquad q_1 = \phi, \qquad q_2 = \bar{\phi},$$

где $k_i, \bar{k}_i, \phi, \bar{\phi}$ — некоторые функции от $\hat{q}_1, \hat{q}_2$. Легко видеть, что функции $k_1, k_2, \bar{k}_1, \bar{k}_2$ единственным образом определяются через $\phi, \bar{\phi}$ из условий $\{p_\alpha, q_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}$:

$$k_1 = \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\hat{q}_2}W^{-1}, \quad k_2 = -\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\hat{q}_1}W^{-1}, \qquad \bar{k}_1 = -\frac{\partial\phi}{\partial\hat{q}_2}W^{-1}, \quad \bar{k}_2 = \frac{\partial\phi}{\partial\hat{q}_1},$$

где

$$W = \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\hat{q}_2}\frac{\partial\phi}{\partial\hat{q}_1} - \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\hat{q}_1}\frac{\partial\phi}{\partial\hat{q}_2}.$$

С помощью канонических преобразований можно диагонализовать квадратичные части H и K. Тот факт, что коэффициент при of $\hat{p}_1\hat{p}_2$ в преобразованном гамильтониане (4.9) равен нулю, означает, что

$$a(\phi,\bar{\phi})\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\hat{q}_1}\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\hat{q}_2} + c(\phi,\bar{\phi})\frac{\partial\phi}{\partial\hat{q}_1}\frac{\partial\phi}{\partial\hat{q}_2} = b(\phi,\bar{\phi})\left(\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\hat{q}_2}\frac{\partial\phi}{\partial\hat{q}_1} + \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\hat{q}_1}\frac{\partial\phi}{\partial\hat{q}_2}\right). \tag{4.11}$$

Аналогично, условие

$$A(\phi,\bar{\phi})\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\hat{q}_1}\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\hat{q}_2}+C(\phi,\bar{\phi})\frac{\partial\phi}{\partial\hat{q}_1}\frac{\partial\phi}{\partial\hat{q}_2}=B(\phi,\bar{\phi})\left(\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\hat{q}_2}\frac{\partial\phi}{\partial\hat{q}_1}+\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\hat{q}_1}\frac{\partial\phi}{\partial\hat{q}_2}\right) \tag{4.12}$$

гарантирует равенство нулю коэффициента при $\hat{p}_1\hat{p}_2$ в преобразованном интеграле (4.10). Существование решения $\phi,\bar{\phi}$ системы (4.11), (4.12) очевидно. Укажем явный вид функций $\phi,\bar{\phi}$ для пары (4.4), (4.5).

Определим «переменные Ковалевской» $s_1(q_1,q_2)$ и $s_2(q_1,q_2)$ как корни квадратного уравнения

$$W(q_1,q_2)\,s^2+2Z(q_1,q_2)\,s+\bar{W}(q_1,q_2)=0,$$

где W и Z заданы формулами (4.7), (4.6), а многочлен $\bar{W}$ находится из (4.8).

Предложение 3. *В переменных* s_1, s_2 *функции* (4.4), (4.5) *имеют вид* (1.3)-(1.5), *где многочлены S и R определены формулами*

$$S(x)=-(x+\lambda-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)(x+\lambda+\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)(x+\lambda+\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)(x+\lambda-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$$

и

$$\alpha=\frac{1}{4}\left(\frac{\delta^2}{5}-\nu^2\right),\qquad \delta=j_1-j_2,\qquad \nu=j_1+j_2.$$

Значения h и k интегралов H и K (4.4), (4.5) связаны с постоянными e_1,e_2 из формулы (1.2) посредством соотношений

$$h=e_1+\frac{1}{12}\alpha S''(0),\qquad k=e_2+\frac{1}{12}\alpha S'''(0).$$

Таким образом, общая схема из раздела 3 применима к волчку Шоттки–Манакова. Из-за комплексности преобразования (4.3), вещественные значения исходных переменных $\vec{S}_1,\vec{S}_2$ не соответствуют вещественным s_1,s_2. Проблема восстановления вещественных $\vec{S}_1,\vec{S}_2$ будет рассмотрена отдельно.

5. Волчок Клебша

Волчок Клебша задается гамильтонианом

$$H=\frac{1}{2}(J_1^2+J_2^2+J_3^2)+\frac{1}{2}(\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+\lambda_3x_3^2),$$

который коммутирует относительно $e(3)$-скобок Пуассона

$$\{J_i,J_j\}=i\,\varepsilon_{ijk}J_k,\qquad \{x_i,x_j\}=0,\qquad \{J_i,x_j\}=i\,\varepsilon_{ijk}x_k$$

с интегралом движения

$$K=(\lambda_1J_1^2+\lambda_2J_2^2+\lambda_3J_3^2)-\lambda_1\lambda_2\lambda_3\left(\frac{x_1^2}{\lambda_1}+\frac{x_2^2}{\lambda_2}+\frac{x_3^2}{\lambda_3}\right).$$

Зафиксируем значения функций Казимира для $e(3)$-скобок:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2,\qquad J_1x_1+J_2x_2+J_3x_3=l.$$

Используя преобразование

$$J_1 = \frac{1}{2}p_1(1-q_1^2)+\frac{1}{2}p_2(1-q_2^2)+\frac{l}{a}\,q_1,\ J_2 = \frac{i}{2}p_1(1+q_1^2)+\frac{i}{2}p_2(1+q_2^2)-i\frac{l}{a}\,q_1,\ J_3 = p_1q_1+p_2q_2-\frac{l}{a},$$

$$x_1 = a\frac{1-q_1q_2}{q_1-q_2}, \qquad x_2 = ia\frac{1+q_1q_2}{q_1-q_2}, \qquad x_3 = a\frac{q_1+q_2}{q_1-q_2},$$

выразим H и K через канонически сопряженные переменные $p_1, q_1,\ p_2, q_2$:

$$H = -\frac{1}{2}(x-y)^2p_1p_2 + \frac{l}{a}\,p_2(x-y) + \frac{a^2}{2}\frac{W(x,y)}{(x-y)^2} + \frac{1}{2}(\lambda a^2 + \frac{l^2}{a^2})$$

$$K = \frac{1}{4}(R(x)p_1^2+R(y)p_2^2+2\,p_1p_2W(x,y))-\frac{l}{4a}p_1R'(x)-\frac{l}{2a}p_2W_x(x,y)-a^2\frac{\bar W(x,y)}{(x-y)^2}+\frac{l^2R''(x)}{12a^2}+\frac{\lambda l^2}{3a^2},$$

где

$$R(x) = (\lambda_1-\lambda_2)(x^2-1)^2 + 4(\lambda_3-\lambda_2)x^2,$$
$$W(x,y) = \lambda_1(x^2-1)(y^2-1) - \lambda_2(x^2+1)(y^2+1) + 4\lambda_3xy,$$
$$\bar W(x,y) = \lambda_2\lambda_3(x^2-1)(y^2-1) - \lambda_3\lambda_1(x^2+1)(y^2+1) + 4\lambda_1\lambda_2xy + \kappa(x-y)^2,$$
$$\lambda = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3, \qquad \kappa = \lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1.$$

Определим «переменные Ковалевской» $s_1(q_1,q_2)$ и $s_2(q_1,q_2)$ как корни уравнения

$$(q_1-q_2)^2\,s^2 + W(q_1,q_2)\,s + \bar W(q_1,q_2) = 0.$$

Задавая t-динамику с помощью K, получаем уравнения движения (2.3), (2.4) для s_1, s_2, где

$$S(\xi) = 4(\xi-\lambda_1)(\xi-\lambda_2)(\xi-\lambda_3).$$

Наша общая процедура разделения переменных из раздела 3 приводит к кривой (1.1), где

$$s_6 = 0, \qquad l(\xi) = \frac{l^2}{64}, \qquad 4\,k(\xi) = a^2\xi^2 + (2e_1 - a^2\lambda)\xi - e_2.$$

Отметим, что в случае волчка Клебша $\delta = i\dfrac{l}{4a}$. После замены arctanh на arctan в формуле (3.1) действие становится вещественным. Восстановление вещественных исходных переменных J_i, x_i будет рассмотрено отдельно.

6. Гиростат Ковалевской

В этом разделе мы используем формулы из работы [18], которые описывают динамику гиростата Ковалевской в переменных Ковалевской.

Гамильтонова структура для гиростата описывается $e(3)$-скобками Пуассона

$$\{M_i\,, M_j\} = \varepsilon_{ijk}M_k\,, \qquad \{M_i\,, \gamma_j\} = \varepsilon_{ijk}\gamma_k\,, \qquad \{\gamma_i\,, \gamma_j\} = 0,$$

где ε_{ijk} — полностью кососимметрический тензор. Эти скобки обладают функциями Казимира

$$A = \sum_{k=1}^{3}\gamma_k^2, \qquad B = \sum_{k=1}^{3}\gamma_kM_k. \tag{6.1}$$

Гамильтониан гиростата имеет вид:

$$H = \frac{1}{2}(M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2 - 2\lambda M_3) + c\gamma_1\,, \tag{6.2}$$

где c и λ — постоянные. Дополнительный интеграл движения, в отличие от волчков Шоттки-Манакова и Клебша имеет имеет четвертую степень и задается формулой

$$K = \xi_1\xi_2 + 4\lambda\Big((M_3 - \lambda)z_1z_2 - (z_1 + z_2)c\gamma_3\Big), \tag{6.3}$$

где

$$\xi_1 = z_1^2 - 2c(\gamma_1 + i\gamma_2)\,, \qquad \xi_2 = z_2^2 - 2c(\gamma_1 - i\gamma_2)$$

и

$$z_1 = M_1 + iM_2, \qquad z_2 = M_1 - iM_2.$$

Положим

$$R(z_1, z_2) = z_1^2z_2^2 - 2h(z_1^2 + z_2^2) - 4cb(z_1 + z_2) - 4c^2\,a + k.$$

Здесь a, b, h и k — значения интегралов (6.1), (6.2) и (6.3). Переменные Ковалевской определяются как

$$s_{1,2} = \frac{R(z_1, z_2) \pm \sqrt{R(z_1, z_1)R(z_2, z_2)}}{2(z_1 - z_2)^2}.$$

Отметим, что для гиростата вещественные значения «физических» переменных соответствуют вещественным s_1, s_2.

Оказывается [18], что уравнения движения имеют вид

$$h = \frac{s_1 - s_2}{2}\left(\frac{\dot s_1^2}{\varphi_1} - \frac{\dot s_2^2}{\varphi_2}\right) - \frac{s_1 + s_2}{2}\,, \tag{6.4}$$

$$\frac{k}{4} = (2h + s_1 + s_2)\lambda^2 - \lambda\sqrt{-\varphi_1\varphi_2}\left(\frac{\dot s_1}{\varphi_1} + \frac{\dot s_2}{\varphi_2}\right) + (s_1 - s_2)\left(\frac{s_2\dot s_1^2}{\varphi_1} - \frac{s_1\dot s_2^2}{\varphi_2}\right) - s_1s_2 + h^2\,. \tag{6.5}$$

Здесь $\varphi_i = S(s_i)$,

$$S(s) = 4s^3 - 8h\,s^2 + 4h^2\,s - k\,s + 4c^2a\,s + 4c^2\,b.$$

Совпадение этих формул с (2.3),(2.4) объясняется, по-видимому, существованием связи между гиростатом Ковалевской и волчком Клебша [18].

Подставляя выражения для скоростей (2.8)

$$\dot s_1 = -\frac{1}{4}\frac{J}{s_1 - s_2}(u + 1), \qquad \dot s_2 = -\frac{1}{4}\frac{J}{s_1 - s_2}(v + 1)$$

в (6.4), (6.5), мы получаем в точности (2.5), где

$$k(x) = 4(x + h)^2 + 4\delta^2(x - 2h) - k, \qquad \lambda = i\delta.$$

Соответствующая кривая $\Phi(Y, \xi) = 0$ имеет род 3. Дифференциалы $\omega_1, \omega_2, \omega_4$ образуют базис в пространстве голоморфных дифференциалов.

Поскольку, в отличие от случаев Шоттки-Манакова и Клебша, коэффициенты многочлена S зависят от значений H и K, формула (3.1) не задает функции действия для гиростата Ковалевской. Однако, формулы (3.10), (3.14) дают решение уравнении движения (6.4), (6.5). Отметим, что явные θ-функциональные формулы для решения гиростата были получены в [9]. Было бы интересно сравнить эти формулы с нашими.

7. Случай $S = -1$

Решения совместной системы (1.3), (1.5) удовлетворяют уравнению (2.7), которое в случае $S(\xi) = -1$ совпадает с уравнением Гиббонса-Царева [15]. В этом случае кривая (1.1) имеет вид

$$-4\alpha\delta^2 Y^4 + (4e_1 + 4\xi e_2 + 4\xi^2\alpha)Y^2 + 1 = 0.$$

Она имеет род 1 и может быть параметризована с помощью функции Вейерштрасса следующим образом:

$$Y = -\frac{1}{16\alpha^2}\frac{y}{x-\beta_3}, \qquad \xi = -\frac{e_2}{2\alpha} - \frac{y}{16}\frac{\delta}{\alpha^2}\left(\frac{1}{x-\beta_1} + \frac{1}{x-\beta_2} - \frac{1}{x-\beta_3}\right),$$

где $x = \wp(z, g_2, g_3), \quad y = \wp'(z, g_2, g_3)$,

$$y^2 = 4(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3), \qquad \beta_3 = \frac{8\alpha^2}{3\delta^2}(4\alpha e_1 - e_2^2), \quad \beta_{1,2} = -\frac{1}{2}\beta_3 \pm \frac{16\alpha^3}{\delta}\sqrt{-\alpha}.$$

Мероморфные интегралы в формулах

$$dt = \sum_{n=1}^{3}\omega_1(\xi_n), \qquad d\tau = \sum_{n=1}^{3}\omega_2(\xi_n)$$

могут быть найдены явно. Результат задается формулами

$$z_1+z_2+z_3 = \mathrm{const}, \qquad t = \frac{1}{2\sqrt{-\alpha}}\sum_{i=1}^{3}\log\left(\frac{x_i-\beta_2}{\beta_1-x_i}\right), \qquad \tau = -\frac{e_2}{\alpha}t - 2\alpha\sum_{i=1}^{3}\frac{y_i}{(x_i-\beta_1)(x_i-\beta_2)},$$

где $x_i = \wp(z_i, g_2, g_3)$, $y_i = \wp'(z_i, g_2, g_3)$.

Благодарности

Авторы благодарны А. В. Борисову, Б. А. Дубровину, F. Magri и Е. В. Ферапонтову за полезные обсуждения. Второй автор (В.С.) благодарен институту Макса Планка (Бонн) за гостеприимство и финансовую поддержку.

Список литературы

[1] Бобенко А.И. *Уравнения Эйлера на* $so(4)$ *и* $e(3)$. *Изоморфизм интегрируемых случаев* // Функц. анализ и его прил., 1986, т. 20, №1, с. 64–66.

[2] Борисов А. В., Мамаев И.С. *Современные методы теории интегрируемых систем* // Москва-Ижевск: РХД, 2003, 296 с.

[3] Веселов А. П. *Об услових интегрируемости уравнения Эйлера на so(4)* // ДАН СССР, 1983, т. 270, №6, с. 1298–1300.

[4] Манаков С. В. *Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики* n*-мерного твердого тела* // Функц. анализ и его приложения, 1976, т. 10, №4, с. 93–94.

[5] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. *Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли* // Изв. АН СССР, Сер. мат., 1978, т. 42, №2, с. 396–415.

[6] Переломов А. И. *Несколько замечаний об интегрировании уравнений движения твердого тела в идеальной жидкости* // Функц. анализ и его приложения, 1981, т. 15, №2, с. 83–85.

[7] Рейман А. Г., Семенов-тян-Шанский М. А. *Интегрируемые системы* // Москва-Ижевск: РХД, 2003, 352 с.

[8] Adler M., van Moerbeke P. *The Kowalewski and Henon-Heiles motions as Manakov geodesic flows on so(4) - a two dimensional family of Lax pairs* // Comm. in Math. Phys., 1988, V. 113, p. 659–700.

[9] Bobenko A. I., Reyman A. G., Semenov-tian-Shansky M.A. *The Kowalewski Top 99 Year Later: a Lax pair, generalizations and explicit solutions* // Commun. Math. Phys., 1989, V. 122, p. 321–354.

[10] Clebsch A. *Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit* // Math. Annalen, 1870, V. 3, p. 238-262.

[11] Dorizzi B., Grammaticos B., Ramani A., Winternitz P. *Integrable Hamiltonian systems with velocity dependent potentials* // J. Math. Phys., 1985, V. 26, p. 3070–3079.

[12] Fedorov Yu. N. *Integrable systems, Lax representations, and confocal quadrics* // Amer. Math. Soc. Transl., 1995, V.168, №2, p. 173-199.

[13] Ferapontov E. V., Fordy A. P. *Commuting quadratic Hamiltonians with velocity-dependent potentials* // Rep. Math. Phys., 1999, V. 44, №1/2, p. 71-80.

[14] Ferapontov E. V., Fordy A. P. *Nonhomogeneous systems of hydrodynamic type related to quadratic Hamiltonians with electromagnetic term* // Physica D, 1997, V. 108, p. 350-364.

[15] Gibbons J., Tsarev S. P. *Reductions of the Benney equations* // Phys. Lett. A, 1996, V. 211, p. 19–24.

[16] Haine L., Horozov E. *A Lax pair for the Kowalewski top* // Physica D, 1987, V. 29, p. 173-180.

[17] Kalnins E. G., Miller W., Winternitz P. *The group O(4), separation of variables and the hydrogen atom* // SIAM J. Appl. Math., 1976, V. 30, №4, p. 630–664.

[18] Komarov I. V., Tsiganov A. V. *On integration of the Kowalewski gyrostat problem* // Reg. and Chaot. Dyn., 2004, V. 9, №2, p. 169-187.

[19] Kötter F. *Über die Bewegung eines festen Körpers in einer Flussigkeit. I.II* // J. Reine und Angew. Math., 1892, Bd. 109, p. 51–81, p. 89–111.

[20] Krichever I.M., Phong D.H. *Symplectic forms in the theory of solitons*. In: Surveys in differential geometry IV: integrable systems // Int. press, Boston, 1998, p. 239–313.

[21] McSween E., Winternitz P. *Integrable and superintegrable Hamiltonian systems in magnetic fields* // J. Math. Phys, 2000, V. 41, p. 2957-2967.

[22] Novikov S. P., Veselov A. P. *On Poisson brackets compatible with algebraic geometry and Korteweg-de Vries dynamics on the space of finite-zone potentials* // Soviet Math. Doklady, 1982, V. 26, p. 357–362.

[23] Schottky F. *Über das analytische Problem der Rotation eines starren Körpers in Raume von vier Dimensionen* // Sitzungsberichte der Königligh preussischen Academie der Wissenschaften zu Berlin, 1891, Bd. XIII, p. 227–232.

[24] Sklyanin E.K. *Separation of variables—new trends* // Progr. Theor. Phys. Suppl., 1995, V. 118, p. 35–61.

[25] Sklyanin E.K., Takebe T. *Separation of variables in the elliptic Gaudin model* // Comm. Math. Phys., 1999, V. 204, №2, p. 17–38.