

Абсолютные и относительные хореографии в динамике твердого тела*

А. В. Борисов, А. А. Килин, И. С. Мамаев

Институт компьютерных исследований
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, Ижевск, ул. Университетская, 1
E-mail: borisov@rcd.ru, aka@rcd.ru, mamaev@rcd.ru

Получено 15 июня 2005 г.

В работе найдено семейство периодических в абсолютном пространстве решений (хореографий) в классической задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой на нулевой константе площадей. Данное семейство включает в себя известные решения Делоне (для случая Ковалевской), частные решения для случая Горячева-Чаплыгина, а также решения Стеклова. Приведена генеалогия найденных решений при продолжении по энергии и их связь с вращениями Штауде. Показано, что при ненулевом значении интеграла площадей соответствующие решения являются периодическими в равномерно вращающейся вокруг вертикали системе координат (относительными хореографиями).

Ключевые слова: динамика твердого тела, периодическое решение, продолжение по параметру, бифуркация.

A. V. Borisov, A. A. Kilin, I. S. Mamaev

Absolute and relative choreographies in rigid body dynamics

For the classical problem of motion of a rigid body about a fixed point with zero integral of areas, the paper presents a family of solutions which are periodic in the absolute space. Such solutions are known as choreographies. The family includes the famous Delaunay solution in the case of Kovalevskaya, some particular solutions in the Goryachev-Chaplygin case and Steklov's solution. The "genealogy" of the solutions of the family, arising naturally from the energy continuation, and their connection with the Staude rotations are considered.

It is shown that if the integral of areas is zero, the solutions are periodic but with respect to a coordinate frame that rotates uniformly about the vertical (relative choreographies).

Keywords: rigid body dynamics, periodic solutions, continuation by a parameter, bifurcation.

Mathematical Subject Classifications: 76B47, 37J35, 70E40.

*Работа выполнена в рамках программы «Государственная поддержка ведущих научных школ» (грант НШ 136.2003.1), при поддержке РФФИ (гранты 04-205-264367 и 05-01-01058), CRDF (грант RU-M1-2583-M0-04) и INTAS (грант 04-80-7297).

1. Введение

Настоящая работа посвящена поиску и исследованию периодических решений в задаче о движении тяжелого твердого тела с закрепленной точкой. Здесь и далее под *периодическими решениями* мы подразумеваем периодические решения приведенной системы, описывающей динамику в связанной с телом системе координат. Как известно из классической динамики твердого тела, такой приведенной системой являются уравнения Эйлера–Пуассона. Движения твердого тела периодические не только в системе координат связанной с телом, но и в неподвижной системе координат, мы будем называть *периодическими в абсолютном пространстве*. Все известные на настоящее время периодические решения в динамике твердого тела можно разбить на несколько классов по типу применяемых для их исследования методов.

1. *Точные решения*, имеющие явное аналитическое представление. Большинство из таких решений собраны в книгах [3, 6, 23], многие из них представляют собой периодические решения.
2. *Решения Ляпунова*, полученные методами малого параметра вблизи известных положений равновесия (например, вращений Штауде) при изменении начальных условий или значений первых интегралов и фиксированных параметрах. Получение и исследование данных решений основано на теореме Ляпунова о рождении периодических решений вблизи положений равновесия. Данный метод использовался, например, в работах [13, 14, 16, 24].
3. *Решения Пуанкаре*, рождающиеся из резонансных торов задачи Эйлера–Пуансо при малом смещении центра масс тела. Доказательство существования и изучение этих периодических решений основывается на теореме Пуанкаре о рождении пар периодических решений при разрушении резонансных торов интегрируемых систем [10]. Известны, например, периодические решения, рождающиеся из резонансных торов в случаях Лагранжа и Ковалевской.
4. *Периодические решения быстро вращающегося твердого тела*. Данные решения и результаты их анализа собраны в [1], их изучение основано на сочетании метода малого параметра и анализа квазилинейных автономных систем.
5. *Периодические решения указанные при помощи топологического метода* основанного на вариационном исчислении в целом, топологии и теории геодезических [10, 15].

Отметим, что рассмотренные методы охватывают достаточно узкую область исследований периодических решений в динамике твердого тела. Так, решения первого типа достаточно сложно обнаружить, к тому же явные аналитические формулы выраженные с помощью специальных функций как правило не позволяют сделать качественный анализ движения. Решения второго и третьего типа, как правило, ограничены достаточно малыми возмущениями исходных параметров или начальных условий. Это связано с необходимостью определения радиуса сходимости рассматриваемых рядов по малому параметру. Решения четвертого типа рассматриваются только при достаточно больших угловых скоростях вращения (то есть, фактически, вблизи задачи Эйлера–Пуансо). Пятый же метод является неконструктивным и представляет собой теорему о существовании периодических решений. Поэтому нельзя даже указать конкретные периодические решения, связанные с данным методом. Таким образом, практически полностью остается не исследованным вопрос о периодических решениях вдали от интегрируемых случаев. Достаточно

полный ответ на данный вопрос может дать анализ, основанный на теории бифуркаций периодических решений и компьютерных методах исследования динамических систем. Наиболее важными из них, с точки зрения рассматриваемого вопроса, являются метод построения отображения Пуанкаре и метод продолжения периодического решения по параметру. Подробное описание как первого, так и второго метода можно найти, например, в [3, 4].

В настоящей работе указано новое семейство периодических решений на нулевой константе площадей. Данное семейство включает в себя ряд уже известных аналитических периодических решений. Оно существует вдали от интегрируемых случаев и связано, как с решениям Пуанкаре, так и с решениями Ляпунова. Также данное семейство позволяет связать все эти решения при всевозможных промежуточных значениях параметров. Замечательным фактом, отличающим это семейство от остальных, является то, что найденные решения являются периодическим в абсолютном пространстве. Данное свойство, как правило, является исключительным для известных периодических решений, которые являются периодическими на сфере Пуассона (в приведенной системе), но не в абсолютном пространстве. Число известных на сегодняшний день периодических решений в абсолютном пространстве крайне мало (это, например, некоторые из решений класса Делоне, решения Стеклова, частные решения Горячева—Чаплыгина). Указанные нами решения устанавливают генеалогию этих решений друг с другом.

1.1. Уравнения движения

Уравнения Эйлера—Пуассона, описывающие движение твердого тела вокруг неподвижной точки в однородном поле тяжести, имеют вид

$$\begin{cases} \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \mu \mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — компоненты вектора угловой скорости, радиус-вектора центра масс и единичного орта вертикали в системе главных осей инерции (e_1, e_2, e_3) , жестко связанных с твердым телом и проходящих через точку закрепления, $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — тензор инерции относительно точки закрепления в тех же осях (не умаляя общности будем полагать, что $I_1 > I_2 > I_3$), $\mu = mg$ — вес тела (рис. 1).

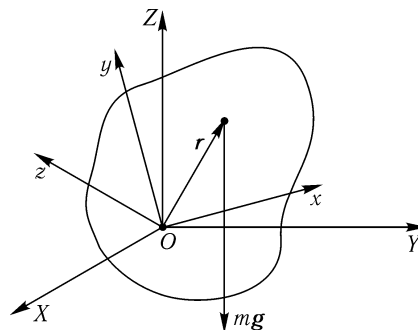


Рис. 1. Твердое тело с неподвижной точкой в поле тяжести.

При помощи вектора кинетического момента $\mathbf{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$ в проекциях на те же оси, уравнения (1.1) могут быть представлены в гамильтоновой форме

$$\dot{M}_i = \{M_i, H\}, \quad \dot{\gamma}_i = \{\gamma_i, H\}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.2)$$

со скобкой Пуассона, соответствующей алгебре $e(3)$

$$\{M_i, M_j\} = -\varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, \gamma_j\} = -\varepsilon_{ijk} \gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0, \quad (1.3)$$

и гамильтонианом — полной энергией тела

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{M}) - \mu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}), \quad (1.4)$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{I}^{-1} = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$.

Скобка Ли–Пуассона (1.3) является вырожденной, она обладает двумя функциями Казимира, коммутирующими в структуре (1.3) с любой функцией от \mathbf{M} , γ ,

$$\mathcal{F}_1 = (\mathbf{M}, \gamma), \quad \mathcal{F}_2 = \gamma^2. \quad (1.5)$$

В векторном виде уравнения (1.2) могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{M}} + \gamma \times \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \gamma}, \\ \dot{\gamma} = \gamma \times \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{M}}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Функции \mathcal{F}_1 и \mathcal{F}_2 являются интегралами уравнений (1.6) с любым гамильтонианом \mathcal{H} . Для уравнений Эйлера–Пуассона они имеют естественное физическое и геометрическое происхождение. Интеграл \mathcal{F}_1 связан с симметрией относительно вращений вокруг неподвижной вертикальной оси и называется интегралом площадей. Интеграл $\mathcal{F}_2 = \text{const}$ — геометрический, для действительных движений значение константы этого интеграла равно единице $\mathcal{F}_2 = \gamma^2 = 1$. В конфигурационном пространстве $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ уравнение $\mathcal{F}_2 = \gamma^2 = 1$ задает сферу Пуассона.

1.2. Движение в абсолютном пространстве

Уравнения (1.6) описывают динамику приведенной системы, в которой игнорируется прецессия твердого тела вокруг вертикали. Для определения абсолютного движения необходимо выполнить дополнительную квадратуру

$$\dot{\psi} = \frac{\omega_1 \gamma_1 + \omega_2 \gamma_2}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}, \quad (1.7)$$

или проинтегрировать соответствующие уравнения Пуассона для направляющих косинусов

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (1.8)$$

Для численных исследований оба этих способа не являются оптимальными. В первом случае проблемы возникают из-за особенности вблизи полюсов $\gamma_3 = \pm 1$, во втором — вследствие потери ортонормированности векторов $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, вызванной диссипацией численных методов. Наиболее удобной для численных исследований является кватернионная форма записи уравнений движения (см. [3]). Эта система описывает абсолютную динамику твердого тела, лишена особенностей и не является избыточной, что делает ее незаменимой для численных исследований. Все результаты компьютерных экспериментов, приведенные в данной статье, были получены с использованием кватернионной формы уравнений движения.

Остановимся подробнее на типичных ситуациях, с точки зрения абсолютного движения.

Неподвижные точки на сфере Пуассона, определяющие решения Штауде и относительные равновесия, соответствуют равномерным вращениям тела вокруг вертикали.

Периодические решения на сфере Пуассона в абсолютном пространстве, вообще говоря, не являются периодическими. Для такой периодичности необходима (и достаточна) соизмеримость приращения угла прецессии $\Delta\psi$ с π :

$$\Delta\psi = \int_t^{t+T} \frac{\omega_1 \gamma_1 + \omega_2 \gamma_2}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} dt = \frac{p}{q} \pi, \quad p, q \in \mathbb{N}, \quad (1.9)$$

где интеграл вычисляется вдоль периодического движения приведенной системы $\omega(t), \gamma(t)$. В общем случае $\Delta\psi$ и π не являются соизмеримыми и абсолютное движение является квазипериодическим и двухчастотным, т. е. движение в абсолютном пространстве может выглядеть достаточно сложно.

Квазипериодические (двухчастотные) траектории приведенной системы определяют в общем случае трехчастотные квазипериодические движения в абсолютном пространстве, которые могут иметь довольно запутанный вид. Тем не менее, эти движения являются регулярными в отличие от «настоящих» хаотических движений, которые порождаются хаотическими траекториями приведенной системы [3].

В заключении отметим, что в общем неинтегрируемом случае тело совершает как сложные хаотические движения, для исследования которых, кроме частотного анализа, видимо, надо использовать более тонкие статистические характеристики (типа корреляционных функций), так и различные периодические и квазипериодические движения, нахождение которых в фазовом пространстве и составляет одну из основных задач современной динамики. Более того, периодические решения составляют так называемый скелет динамической системы с помощью которого можно описать различные пути перехода к хаосу, во многом определяемые генеалогией периодических орбит.

2. Рождение абсолютных хореографий

2.1. Случай Эйлера–Пуансо

Напомним, что в интегрируемом случае Эйлера–Пуансо тело движется по инерции ($\mathbf{r} = 0$), а гамильтониан и дополнительный интеграл имеют вид

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \mathbf{AM}), \quad \mathcal{F}_3 = M^2 = \text{const.} \quad (2.1)$$

Явное интегрирование случая Эйлера–Пуансо легко проводится в переменных Андуайе (l, L, g, G, H) , связанных с (\mathbf{M}, γ) следующим образом [3]

$$\begin{aligned} M_1 &= \sqrt{G^2 - L^2} \sin l, \quad M_2 = \sqrt{G^2 - L^2} \cos l, \quad M_3 = L, \\ \gamma_1 &= \left(\frac{H}{G} \sqrt{1 - \left(\frac{L}{G}\right)^2} + \frac{L}{G} \sqrt{1 - \left(\frac{H}{G}\right)^2} \cos g \right) \sin l + \sqrt{1 - \left(\frac{H}{G}\right)^2} \sin g \cos l, \\ \gamma_2 &= \left(\frac{H}{G} \sqrt{1 - \left(\frac{L}{G}\right)^2} + \frac{L}{G} \sqrt{1 - \left(\frac{H}{G}\right)^2} \cos g \right) \cos l - \sqrt{1 - \left(\frac{H}{G}\right)^2} \sin g \sin l, \\ \gamma_3 &= \left(\frac{H}{G}\right) \left(\frac{L}{G}\right) - \sqrt{1 - \left(\frac{L}{G}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{H}{G}\right)^2} \cos g. \end{aligned}$$

Поэтому данные переменные являются наиболее удобными для построения отображения Пуанкаре (фазового портрета). При этом в качестве плоскости сечения выбирается плоскость $g = \pi/2$, а в качестве координат на этой плоскости — $l \bmod 2\pi$ и L/G [22]. Соответствующий фазовый портрет случая Эйлера–Пуансо приведен на рис. 2.

Неподвижным точкам фазового портрета соответствуют перманентные вращения тела вокруг главных осей инерции (устойчивым — вокруг большой и малой, и неустойчивым — вокруг

средней). Более сложные интересующие нас периодические решения лежат на резонансных торах. Как известно, частоты движения на резонансных торах становятся соизмеримыми, то есть $p\omega_g - q\omega_l = 0$, $p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, где ω_l и ω_g — частоты соответствующие угловым переменным Андуайе l и g . При этом весь тор заполняется периодическими решениями, которым на фазовом портрете соответствуют неподвижные точки порядка q (далее для краткости будем говорить о решениях порядка q). Одним из инструментов поиска резонансных торов является исследование *числа вращения* равного отношению частот $n = \omega_l/\omega_g$. Число вращения зависит только от выбранного тора и на резонансных торах равно целочисленной несократимой дроби $n = p/q$, $p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, более подробно описание чисел вращения и их свойств для задачи Эйлера—Пуансо можно найти в [10].

На заданном уровне энергии $\mathcal{H}(l, L, G) = E$ торы можно параметризовать одной переменной, в данном случае это $\varepsilon = \frac{2E}{G^2}$. Таким образом, число вращения является функцией одной переменной и может быть записано в виде [10]

$$n(\varepsilon)^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(a_1 + (a_2 - a_1) \sin^2 y) dy}{\sqrt{(a_2 - a_1 - (\varepsilon - a_1) \sin^2 y)(a_3 - a_1 - (\varepsilon - a_1) \sin^2 y)}}, & \varepsilon \in [a_1, a_2], \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a_1 \sin^2 l + a_2 \cos^2 l) dl}{\sqrt{(\varepsilon - a_1 \sin^2 l - a_2 \cos^2 l)(a_3 - a_1 \sin^2 l - a_2 \cos^2 l)}}, & \varepsilon \in [a_2, a_3], \end{cases} \quad (2.2)$$

причем значение $\varepsilon = a_1$ соответствует вращению тела вокруг максимальной оси инерции, $\varepsilon = a_3$ — вращению тела вокруг минимальной оси инерции, а $\varepsilon = a_2$ — вращению тела вокруг средней оси инерции. График числа вращения в зависимости от переменной, параметризующей торы, при фиксированных моментах инерции приведен на рисунке 3.

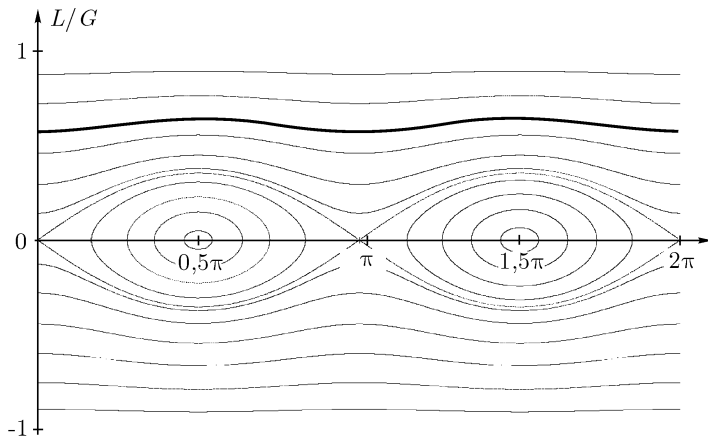


Рис. 2. Отображение Пуанкаре задачи Эйлера—Пуассона при следующих параметрах $E = 2$, $c = 0$, $\mathbf{a} = (1, 1.25, 3)$. Жирной линией на рисунке изображен резонансный тор с числом вращения $n = 1$.

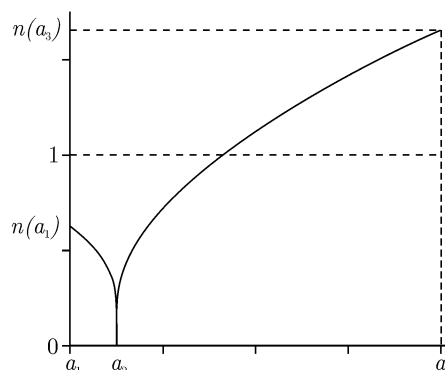


Рис. 3. График числа вращения в зависимости от переменной, параметризующей торы на заданном уровне энергии $E = 2$ при $\mathbf{a} = (1, 1.25, 3)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Вообще говоря, у векторного поля без особых точек на двумерном торе существует не одно, а бесконечно много чисел вращения, связанных между собой соотношением

$$n' = \frac{pn + l}{qn + m}, \quad (2.3)$$

где $\begin{pmatrix} p & l \\ q & m \end{pmatrix}$ — унимодулярная матрица (ее элементы — целые числа, а определитель равен ± 1). В нашем случае конкретное число вращения фиксируется выбором переменных Андуайе и плоскости сечения Пуанкаре.

Рассмотрим наиболее интересный случай равенства частот $\omega_l = \omega_g$, когда число вращения становится равным единице. Как показано в [10] качественный вид графика на \mathbb{Z} сохраняется при любых моментах инерции, следовательно, для существования соответствующего тора необходимо, чтобы выполнялось хотя бы одно из неравенств

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow a_1} n(\varepsilon) > 1, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow a_3} n(\varepsilon) > 1, \tag{2.4}$$

где, как показано в [10],

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow a_1} n(\varepsilon) &= ((I_1/I_3 - 1)(I_1/I_2 - 1))^{1/2}, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow a_3} n(\varepsilon) &= (((1 - I_3/I_2)(1 - I_3/I_1))^{-1/2} - 1)^{-1}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Заметим, что из первого неравенства (2.4) следует $I_2 + I_3 < I_1$, что противоречит неравенству треугольника. Следовательно на промежутке $\varepsilon \in (a_1, a_2)$ (то есть внутри сепаратрисы на фазовом портрете) тора с числом вращения $n = 1$ быть не может. Второе из неравенств (2.4) определяет некоторую область на плоскости параметров $(I_2/I_1, I_3/I_1)$. Та часть этой области, для которой выполняется неравенство треугольника ($I_2 + I_3 > I_1$) и будет являться областью существования тора с числом вращения $n = 1$ (см. рис. 4). Отображение Пуанкаре на рис. 2 построено для параметров $(I_2/I_1, I_3/I_1)$, лежащих в найденной области существования тора с $n = 1$. Инвариантная кривая, заполненная неподвижными точками первого порядка соответствующая данному тору изображена на рисунке жирной линией.

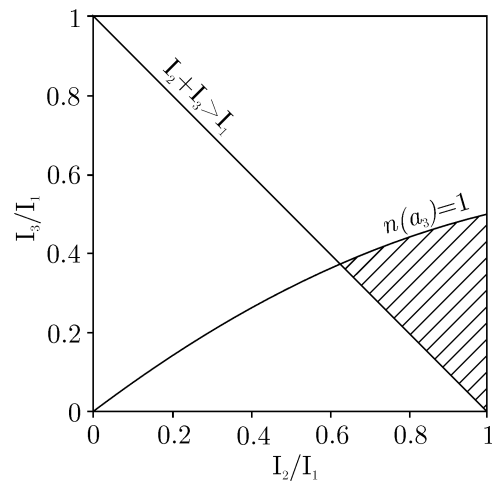


Рис. 4. Область существования резонансного тора $n = 1$.

Оказывается, что решения, лежащие на резонансном торе, на сфере Пуассона имеют вид замкнутых кривых с самопересечением типа *восьмерки*, причем точки их самопересечения лежат в экваториальной плоскости (см. рис. 5а). Более того, все эти решения являются периодическими и в абсолютном пространстве. Для доказательства этого факта можно использовать следующее

Предложение 1. *Все периодические решения приведенной системы в задаче Эйлера—Пуансо являются периодическими в абсолютном пространстве.*

Данное предложение легко доказать используя явное интегрирование абсолютного движения в задаче Эйлера—Пуансо.

На рис. 5б приведены несколько следов единичного вектора e_1 (апекса) жестко связанного с осью тела Ox для периодических решений лежащих на рассматриваемом торе. Все эти следы также имеют вид восьмерок, причем точки их самопересечения лежат в некоторой вертикальной плоскости. В дальнейшем, на всех рисунках для иллюстрации движения в абсолютном пространстве также будет приводиться след апекса e_1 .

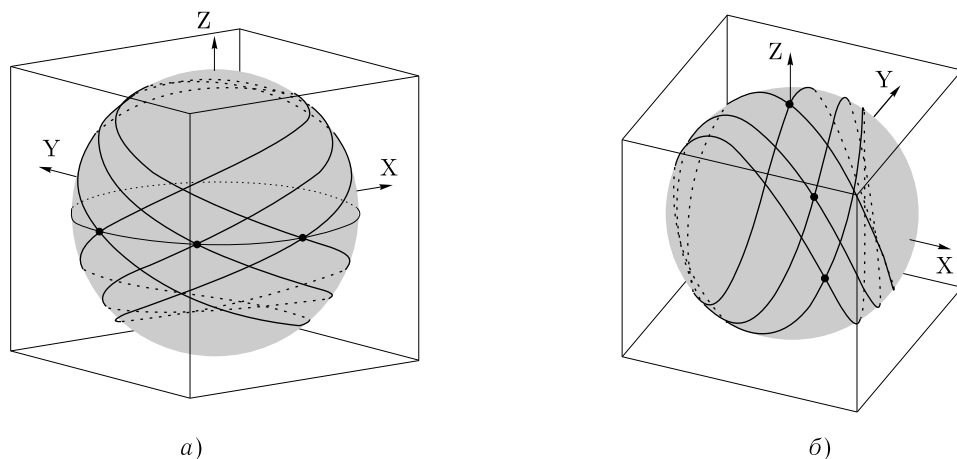


Рис. 5. Периодические решения, лежащие на резонансном торе $n = 1$. а) Движение на сфере Пуассона. б) След апекса e_1 в абсолютном пространстве.

2.2. Возмущение случая Эйлера–Пуансо

Поставим вопрос о существовании периодических в абсолютном пространстве решений при возмущении задачи Эйлера–Пуансо. Рассмотрим сначала возмущение на нулевой константе интеграла площадей. В качестве малого параметра выберем смещение центра масс тела относительно его центра инерции. В данном случае справедливо следующее

Предложение 2. При смещении центра масс в плоскости перпендикулярной минимальной оси инерции тела ($r_1 \neq 0$, $r_2 \neq 0$, $r_3 = 0$) из резонансного тора с числом вращения $n = 1$ задачи Эйлера–Пуансо на нулевой константе интеграла площадей рождается пара периодических в абсолютном пространстве решений (устойчивое и неустойчивое).

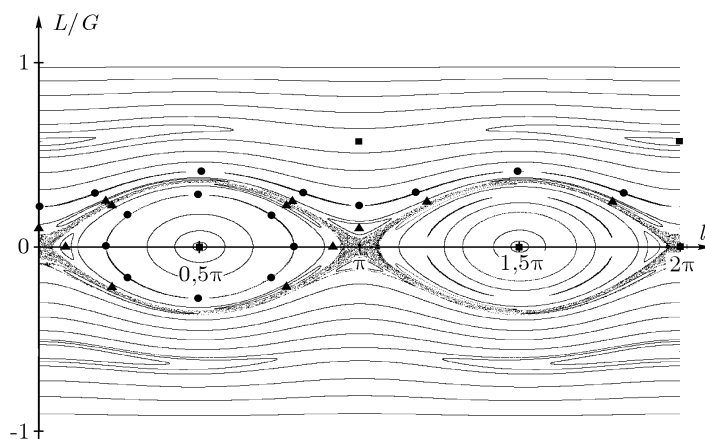


Рис. 6. Отображение Пуанкаре Задачи Эйлера–Пуассона при следующих параметрах $E = 2$, $c = 0$, $\mathbf{a} = (1, 1.25, 3)$, $\mathbf{r} = (1, 0, 0)$, $mi = 0.01$. Квадратными маркерами отмечены неподвижные точки первого порядка, круглыми — второго порядка и треугольными — третьего порядка.

При малых смещениях центра масс существование данных периодических решений приведенной системы доказывалось с помощью теоремы Пуанкаре о рождении периодических решений из резонансных торов невозмущенной задачи [10]. Доказательство периодичности решений в абсолютном пространстве, а также обобщение этого результата на случай конечного смещение центра масс было проведено нами с помощью компьютерных методов. Обобщение на случай конечного смещение центра масс проводилось с помощью метода продолжения по параметру, а для доказательства периодичности в абсолютном пространстве использовалось явное интегрирование абсолютного движения твердого тела методами Эверхарта различного порядка. Минимальная величина незамыкания траектории (которую можно определить, например, как величину смещения апекса e_1 за период относительного движения) при выборе метода Эверхарта 27-го порядка составила 10^{-13} . Кроме того, при увеличении точности, метода наблюдается явная сходимость величины незамыкания траектории к нулю.

Заметим, что при смещении центра масс вне указанной плоскости ($r_3 \neq 0$) также рождаются периодические решения приведенной системы, однако они уже не являются периодическими в абсолютном пространстве.

Фазовый портрет для случая смещения центра масс вдоль максимальной оси инерции приведен на рис. 6. Замечательно, что решения родившиеся из резонансного тора $n = 1$, наряду с перманентными вращениями, являются определяющими для фазового портрета. Приведем наиболее интересные свойства указанных решений:

1. Вектор γ на сфере Пуассона описывает восьмерку с точкой самопересечения, лежащей на экваторе ($\gamma_3 = 0$) и симметричную относительно экваториальной плоскости. В случае смещения центра масс вдоль одной из главных осей восьмерка обладает симметрией группы C_{2v} (то есть восьмерка является центрально-симметричной). Соответствующие траектории на сфере Пуассона для нескольких смещений центра масс приведены на рис. 7а.
2. Указанное решение симметрично относительно преобразования вида $\sigma(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\gamma_1, \gamma_2, -\gamma_3, -\omega_1, -\omega_2, \omega_3)$. Используя данное свойство при вычислении интеграла (1.9) можно доказать, что указанные решения являются периодическими в абсолютном пространстве.
3. Апексы главных осей инерции e_1, e_2 описывают на сфере восьмерки с той же группой симметрии, что и на сфере Пуассона, а e_3 — выпуклую замкнутую кривую без самопересечений. Соответствующие следы апекса e_1 для нескольких смещений центра масс приведены на рис. 7б.

По аналогии с восьмеркообразными периодическими траекториями в небесномеханической задаче трех тел, открытыми Муром, Шенсине, Монтомгери и Симо [21, 25], в дальнейшем будем называть подобные решения *абсолютными хореографиями*. Термин хореография подразумевает, что несколько частиц движутся по некоторому числу замкнутых кривых. Применимость этого термина в данной ситуации объясняется тем, что для абсолютного движения все три апекса (подобно трем материальным точкам) будут двигаться по замкнутым кривым (так называемая трехсвязная хореография), две из которых являются восьмерками.

Рассматриваемые абсолютные хореографии образуют некоторое семейство, зависящее от параметров системы. Выбором единиц измерения, а также с помощью масштабного преобразования количество независимых параметров от которых зависит семейство сводится к четырем ($E, I_2/I_1, I_3/I_1, r_2/r_1$). При этом увеличению возмущения задачи Эйлера—Пуансо соответствует уменьшение энергии E из бесконечности при постоянных смещении центра масс и массе тела. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением трехпараметрического семейства при заданном направлении смещения центра масс (r_2/r_1).

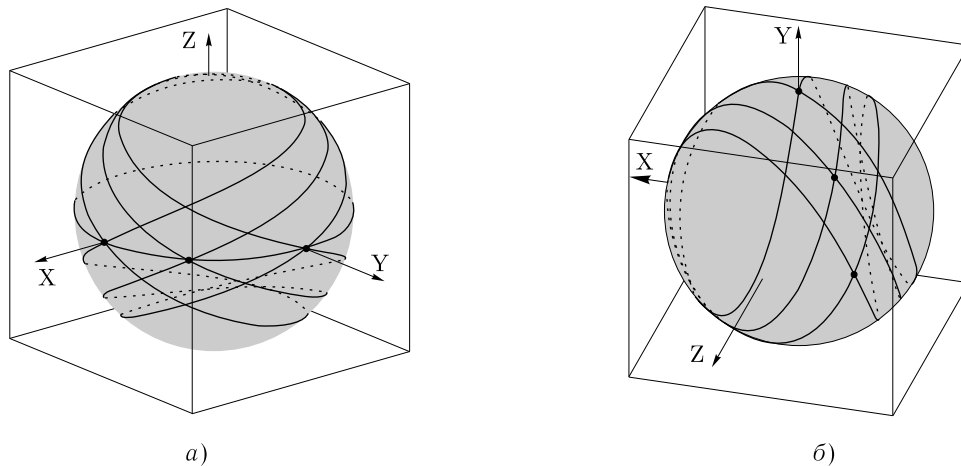


Рис. 7. Периодические решения, рождающиеся из резонансного тора $n = 1$ при трех различных смещениях центра масс $\mathbf{r} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{r} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, $\mathbf{r} = (0, 1, 0)$. а) Движение на сфере Пуассона. б) След апекса e_1 в абсолютном пространстве.

2.3. Сценарии рождения абсолютных хореографий

Как было указано выше, абсолютные хореографии в задаче о движении тяжелого твердого тела с закрепленной точкой рождаются из резонансного тора задачи Эйлера–Пуансо с числом вращения равным единице. В случае, когда такого тора не существует (см. рис. 4) также могут рождаться абсолютные хореографии. Причем в данном случае рождение хореографии происходит путем субкритической бифуркации удвоения периода при продолжении по энергии перманентного вращения вокруг минимальной оси инерции (задачи Эйлера–Пуансо). Отметим, что в работе [4] уже изучались бифуркации удвоения периода перманентных вращений. Более того, в указанной работе был найден целый каскад удвоений периода начинающийся из перманентного вращения задачи Эйлера–Пуансо, однако свойства абсолютного движения рождающихся при этом решений не обсуждались.

Таким образом, в задаче Эйлера–Пуассона при уменьшении энергии из бесконечности, существует два сценария рождения абсолютных хореографий:

1. *Рождение из резонансных торов задачи Эйлера–Пуансо. Значения моментов инерции лежат в области существования тора $n = 1$ на рис. 4;*
2. *Рождение из перманентного вращения задачи Эйлера–Пуансо путем бифуркации удвоения периода. Значения моментов инерции лежат вне области существования тора $n = 1$ на рис. 4.*

Приведенные сценарии рождения хореографий можно проиллюстрировать с помощью рис. 10а, б, которые более подробно обсуждаются в п. 3.2.

Заметим, что если в первом случае хореографии рождаются парами (устойчивая–неустойчивая), то во втором — рождается только устойчивая хореография. Связь этих случаев осуществляется путем продолжения по моментам инерции. Причем во время такого продолжения происходит еще одна бифуркация удвоения периода при которой рождается (или исчезает) неустойчивая хореография.

3. Генеалогия хореографий

Здесь мы не будем проводить полный бифуркационный анализ найденного семейства абсолютных хореографий при всех возможных значениях параметров. В полном объеме эта задача является предметом отдельного исследования. Здесь мы лишь укажем связь найденного семейства с уже известными периодическими решениями и интегрируемыми случаями, а также приведем типичные случаи рождения и бифуркаций найденных решений.

3.1. Связь с интегрируемыми случаями

Рассмотрим отдельно эволюцию найденных решений для динамически симметричного тела ($I_1 = I_2$) в зависимости от отношения I_3/I_1 при конечном значении энергии и смещении центра масс в экваториальной плоскости ($r_3 = 0$). Точке $I_3/I_1 = 1/2$ соответствует случай Ковалевской, фазовый портрет которого приведен на рис. 8. В данном случае на портрете присутствуют только устойчивая абсолютная хореография, родившаяся из перманентного вращения путем бифуркации удвоения периода. Как оказалось, она совпадает с хорошо известными *решениями Делоне* (см., например, [3]), периодичность которых в абсолютном пространстве доказана аналитически в [8].

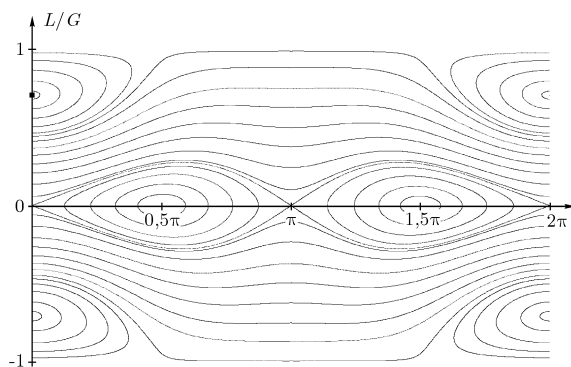


Рис. 8. Фазовый портрет для случая Ковалевской на нулевой константе площадей ($E = 2, c = 0, \mathbf{a} = (1, 1, 4), \mathbf{r} = (1, 0, 0)$).

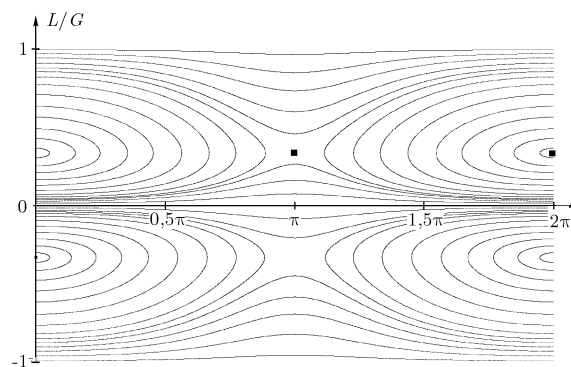


Рис. 9. Фазовый портрет для случая Горячева-Чаплыгина на нулевой константе площадей ($E = 2, c = 0, \mathbf{a} = (1, 1, 2), \mathbf{r} = (1, 0, 0)$).

При уменьшении параметра I_3/I_1 происходит частичная хаотизация фазового портрета, однако найденная устойчивая хореография при этом сохраняется. Кроме того, при некотором значении I_3/I_1 (в общем случае зависящего от энергии и отношения I_2/I_1) из перманентного вращения вокруг минимальной оси инерции рождается неустойчивая абсолютная хореография (также путем бифуркации удвоения периода). При достижении значения $I_3/I_1 = 1/4$ мы приходим к интегрируемому случаю Горячева-Чаплыгина, фазовый портрет которого приведен на рис. 9. Оба решения соответствующие абсолютным хореографиям (устойчивое и неустойчивое) в данном случае также хорошо видны на фазовом портрете. Их периодичность в абсолютном пространстве была указана в [3], а аналитическое доказательства данного факта для некоторых частных случаев приведено в [5, 7]. Дальнейшее уменьшение параметра I_3/I_1 опять приводит к частичной хаотизации фазового портрета, при сохранении периодических решений соответствующих абсолютным хореографиям.

3.2. Продолжение по энергии и связь с решениями Штауде

Рассмотрим эволюцию абсолютных хореографий при изменении энергии и фиксированных значениях моментов инерции. Для визуализации такой эволюции построим зависимость положения хореографии на фазовом портрете (координаты L/G) от энергии системы. На рис. 10а изображены бифуркации устойчивой и неустойчивой хореографий, рождающихся по первому сценарию (см. п. 2.3). Устойчивые хореографии изображены на рисунке сплошной линией, а неустойчивые — пунктиром. Видно, что при больших энергиях обе хореографии на фазовом портрете стремятся к тору $n = 1$. При уменьшении энергии неустойчивая хореография сливается с вращением вокруг минимальной оси инерции (лежащем на оси $L/G = 1$) через бифуркацию удвоения периода. Устойчивая хореография при уменьшении энергии два раза меняет устойчивость проходя через две бифуркации типа вилки, а затем посредством еще одной вилки сливается с вращением вокруг максимальной оси инерции (лежащем на оси $L/G = 0$). Критические энергии при которых происходят бифуркации в общем случае зависят от моментов инерции тела и образуют трехмерную бифуркационную диаграмму в пространстве параметров $(E, I_2/I_1, I_3/I_1)$.

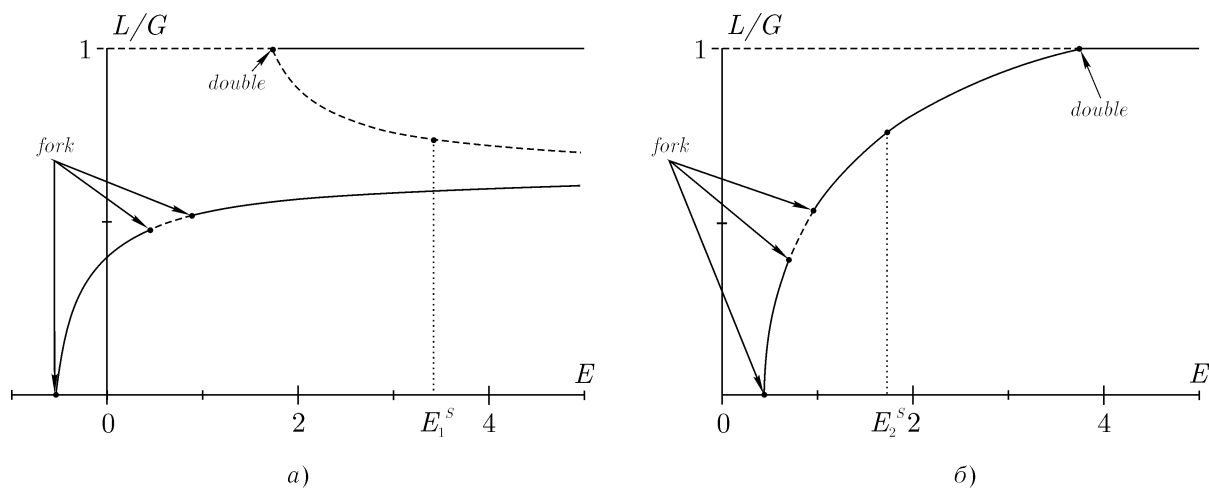


Рис. 10. Бифуркационные диаграммы абсолютных хореографий. а) для хореографий рождающихся по первому сценарию $\mathbf{a} = (1, 1.25, 3)$, $\mathbf{r} = (0, 1, 0)$. б) для хореографий рождающихся по второму сценарию $\mathbf{a} = (1, 1.5, 2.25)$, $\mathbf{r} = (1, 0, 0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Заметим, что некоторые из решений, рождающихся из устойчивой хореографии при бифуркациях типа вилки, также являются абсолютными хореографиями. При этом соответствующие им следы апексов в абсолютном пространстве обладают уже меньшей симметрией — одно из колец восьмерки становится больше другого. Кроме того, при смещении центра масс вдоль средней оси инерции и продолжении этих несимметричных хореографий по энергии наблюдается каскад удвоенных периодов. Причем все рождающиеся решения также являются абсолютными хореографиями.

На рис. 10б изображены бифуркации для второго варианта рождения хореографий (см. п. 2.3). Неустойчивое решение в данном случае отсутствует, а устойчивое рождается из вращения вокруг минимальной оси инерции (лежащего на оси $L/G = 1$) через бифуркацию удвоения периода. Дальнейшая эволюция устойчивой хореографии качественно не отличается от предыдущего случая.

Таким образом, с одной стороны найденные хореографии являются решениями Пуанкаре,

рождающимися из резонансных торов при уменьшении энергии из бесконечности. А с другой стороны, при увеличении энергии, эти же хореографии рождаются из вращений вокруг главных осей инерции, которые являются решениями Ляпунова для перманентных вращений Штауде.

3.3. Связь с решениями Стеклова

Известно, что решения, указанные В.А.Стекловым [17, 11], являются периодическими в абсолютном пространстве. Их периодичность следует из явного анализа квадратур, которые выражаются в эллиптических функциях [18]. Замечательным фактом является то, что форма движения апексов в абсолютном пространстве для решений Стеклова имеет вид восьмерки [18]. Оказывается, что решение Стеклова является частным случаем найденного нами семейства абсолютных хореографий.

Действительно, при решении Стеклова, кроме неравенства треугольника, и принятых нами в начале статьи предположений ($I_1 > I_2 > I_3$), на моменты инерции накладываются дополнительные условия

$$\begin{aligned} I_2 > 2I_3, \mathbf{r} = (0, 1, 0) & \quad \text{— для решений первого типа;} \\ I_1 > 2I_3, \mathbf{r} = (1, 0, 0) & \quad \text{— для решений второго типа.} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Для моментов инерции, удовлетворяющих условиям (3.1), можно вычислить конкретные значения энергии $E_{1,2}^S(I_1, I_2, I_3)$ при которых и существуют решения Стеклова первого или второго типа. Следовательно, семейства решений Стеклова являются двухпараметрическими и вкладываются в найденное нами семейство абсолютных хореографий. Хореографии соответствующие решениям Стеклова отмечены точками на рис. 10.

На рисунке 11а и б приведены области существования решений Стеклова первого и второго типов на плоскости параметров $(I_2/I_1, I_3/I_1)$. Как видно из рисунков, все решения первого типа и часть решений второго типа попадает в область существования тора $n = 1$ задачи Эйлера–Пуансо. При продолжении по энергии эти решения переходят в решения Пуанкаре для тора $n = 1$ (в соответствии с первым сценарием рождения хореографий).

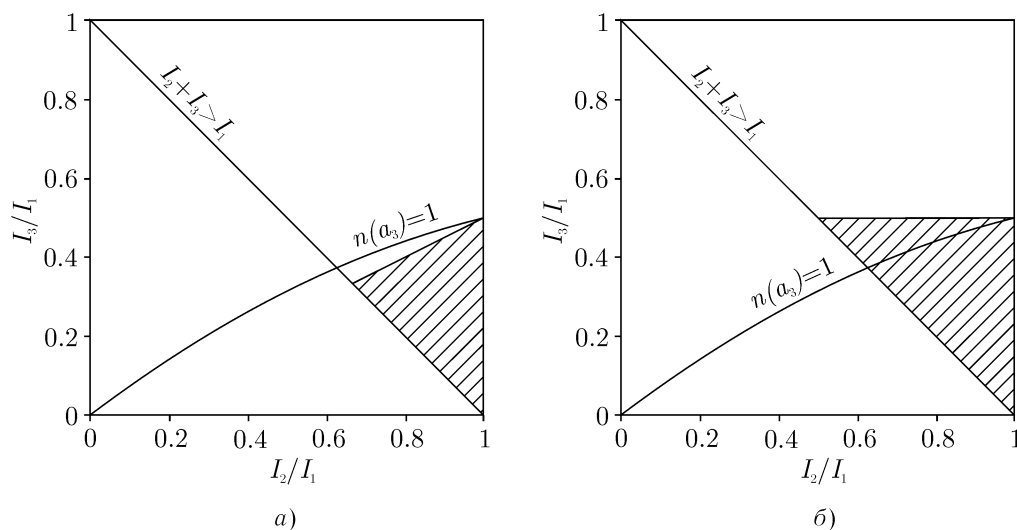


Рис. 11. Области существования решения Стеклова на плоскости $(I_2/I_1, I_3/I_1)$: а) I типа; б) II типа.

Решения Стеклова второго типа, которые не попадают в область существования тора $n = 1$, при продолжении по энергии сливаются с вращением вокруг главной оси инерции через бифуркацию удвоения периода (в соответствии со вторым сценарием рождения хореографий).

4. Более сложные хореографии

Рассмотрим вопрос о существовании более сложных периодических движений в абсолютном пространстве. Как и ранее, начнем со случая Эйлера–Пуансо. Очевидно, что кроме тора $n = 1$ в задаче Эйлера–Пуансо существует счетное множество резонансных торов (на фиксированном уровне энергии E), заполненных периодическими решениями различного порядка. В силу предложения 1 все эти решения являются абсолютными хореографиями. Соответствующие следы апексов в абсолютном пространстве имеют вид замкнутых кривых с числом самопересечений, не меньшим чем порядок решения.

Для всех резонансных торов, с помощью неравенств аналогичных 2.4, можно найти области существования на плоскости $(I_2/I_1, I_3/I_1)$. Из тех же неравенств следует, что торы с $n \geq 1$ лежат только в вне сепаратрисы ($p \in (a_2, a_3)$) а торы с числами вращения $n < 1$ могут лежать как вне так и внутри сепаратрисы.

Рассмотрим теперь возмущение задачи Эйлера–Пуансо (как и выше на нулевом уровне интеграла площадей). По теореме Пуанкаре все резонансные торы при возмущении расщепляются на четное число периодических решений (поровну устойчивых и неустойчивых). Некоторые из этих решений также могут быть абсолютными хореографиями. При этом, с точностью до проведенных компьютерных исследований справедливо следующее,

Предложение 3. 1. *При смещении центра масс в плоскости перпендикулярной минимальной оси инерции ($r_3 = 0$) из резонансных торов задачи Эйлера–Пуансо, лежащих вне сепаратрисы ($\varepsilon \in (a_2, a_3)$) рождаются периодические в абсолютном пространстве решения.*

2. *При смещении центра масс в плоскости перпендикулярной максимальной оси инерции ($r_1 = 0$) из резонансных торов задачи Эйлера–Пуансо, лежащих внутри сепаратрисы ($\varepsilon \in (a_1, a_2)$) также рождаются периодические в абсолютном пространстве решения.*

Из данного предложения следует, что при смещении центра масс в направлении средней оси инерции все родившиеся из резонансных торов периодические решения являются периодическими в абсолютном пространстве. Соответствующее сечение Пуанкаре, на котором отмечены абсолютные хореографии родившиеся из резонансных торов с числами вращения $n = 1/2$ и $n = 1/3$ приведено на рисунке 12. Сами хореографии (следы апекса e_1) приведены на рисунке 13.

5. Относительные хореографии

Рассмотрим теперь возмущение задачи Эйлера–Пуансо на ненулевой константе интеграла площадей. В приведенной системе в данном случае из резонансных торов также рождаются периодические решения Пуанкаре [10]. Однако эти решения уже не являются периодическими в абсолютном пространстве.

Сформулируем некоторые общие свойства абсолютного движения связанного с периодическими решениями приведенной системы.



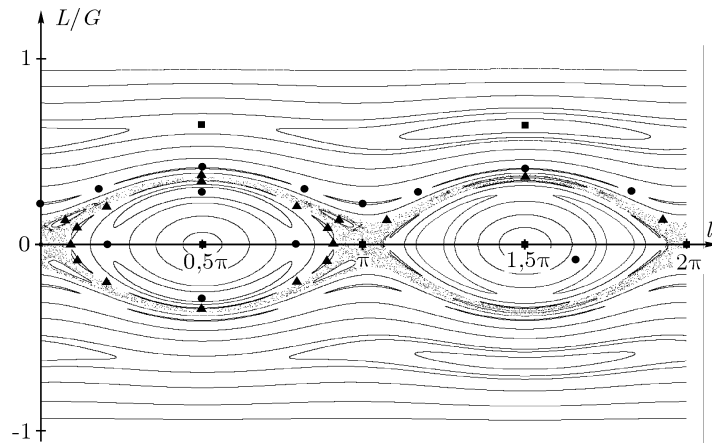


Рис. 12. Отображение Пуанкаре задачи Эйлера-Пуассона при следующих параметрах $E = 2$, $c = 0$, $\mathbf{a} = (1, 1.25, 3)$, $\mathbf{r} = (0, 1, 0)$, $\mu = 0.02$. Квадратными маркерами отмечены неподвижные точки первого порядка, круглыми — второго порядка и треугольными — третьего порядка.

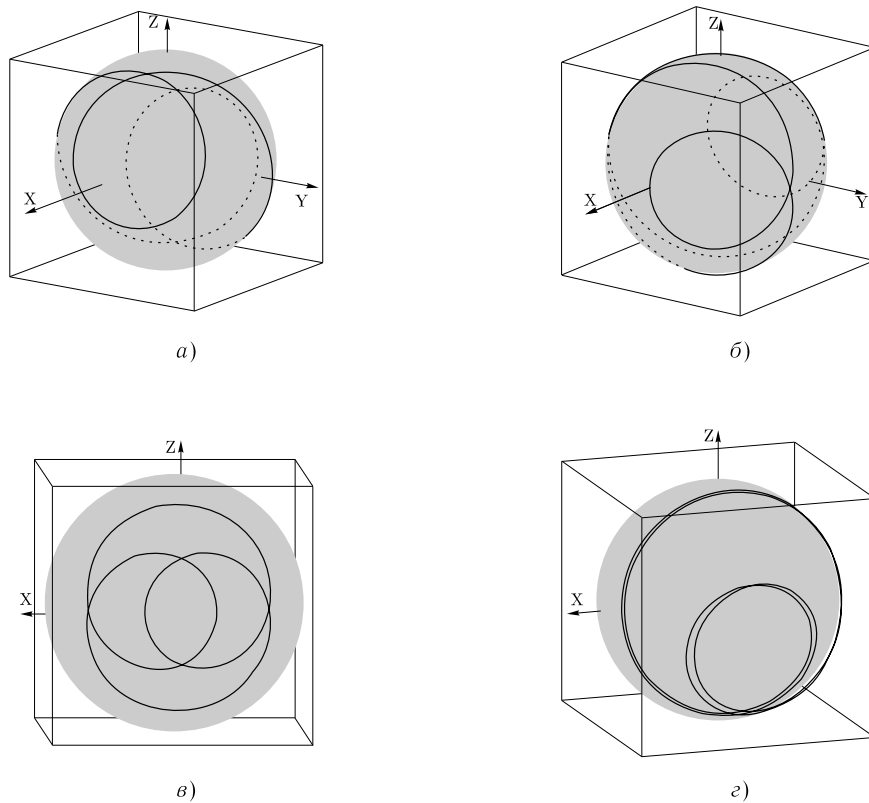


Рис. 13. Примеры абсолютных хореографий соответствующих периодическим решениям второго и третьего порядков, родившимся из торов $n = 1/2$ и $n = 1/3$ при смещении центра масс вдоль средней оси инерции ($\mathbf{r} = (0, 1, 0)$). а), б) — вне сепаратрисы ($p \in (a_2, a_3)$); в), г) — внутри сепаратрисы ($p \in (a_1, a_2)$).

Предложение 4. Всегда существует равномерно вращающаяся вокруг вертикальной оси система координат, в которой абсолютное движение соответствующее периодическому решению приведенной системы также является периодическим с тем же периодом (т. е. все апексы твердого тела описывают в этой системе замкнутые кривые).

Доказательство.

Доказательство основывается на методе, предложенном в работе [10]. Поскольку для периодического решения ω, γ — периодические функции времени, разложим правую часть (1.7) в сходящийся ряд Фурье

$$\dot{\psi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt}.$$

Интегрируя это соотношение, находим

$$\psi(t) = a_0 t + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{a_n T}{2\pi i n} e^{i\frac{2\pi}{T}nt} + \text{const} = a_0 t + \Psi(t),$$

где $\Psi(t)$ — T -периодическая функция времени. Ясно, что в системе координат, вращающейся вокруг вертикали с угловой скоростью $\Omega = a_0$, для заданного решения все углы Эйлера θ, φ, ψ являются T -периодическими функциями времени. ■

Таким образом, абсолютное движение тела, соответствующее периодическим решениям, родившимся из резонансных торов, в случае ненулевой константы интеграла площадей можно интерпретировать как *относительную хореографию* (термин также заимствован из [21, 25]) — то есть, как периодическое движение в системе координат, равномерно вращающейся вокруг вертикали с некоторой угловой скоростью Ω . Точно так же можно интерпретировать и периодические решения родившиеся на нулевой константе интеграла площадей при смещении центра масс, не удовлетворяющем условиям предложения 2 (то есть при $r_3 \neq 0$). Примеры различных относительных хореографий, соответствующих одному и тому же периодическому решению, родившемуся из тора $n = 1$, приведены на рис. 14.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Вообще говоря, одному периодическому решению соответствует бесконечное число относительных хореографий. Действительно, замена

$$\Omega' = \Omega + \frac{p}{q}\omega, \quad p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \quad (5.1)$$

где ω — частота относительного движения твердого тела, не меняет свойства замкнутости траектории во вращающейся системе координат.

6. Открытые проблемы

В заключение, приведем ряд открытых вопросов, которые, по нашему мнению, заслуживают отдельного внимания при дальнейшем исследовании найденных хореографий.

1. Аналитическое доказательство периодичности хореографий в абсолютном пространстве. Аналогичное доказательство, основанное на вариационных и топологических принципах было приведено А. Шенсине и Р. Монтгомери в [21] для хореографий в задаче трех тел.



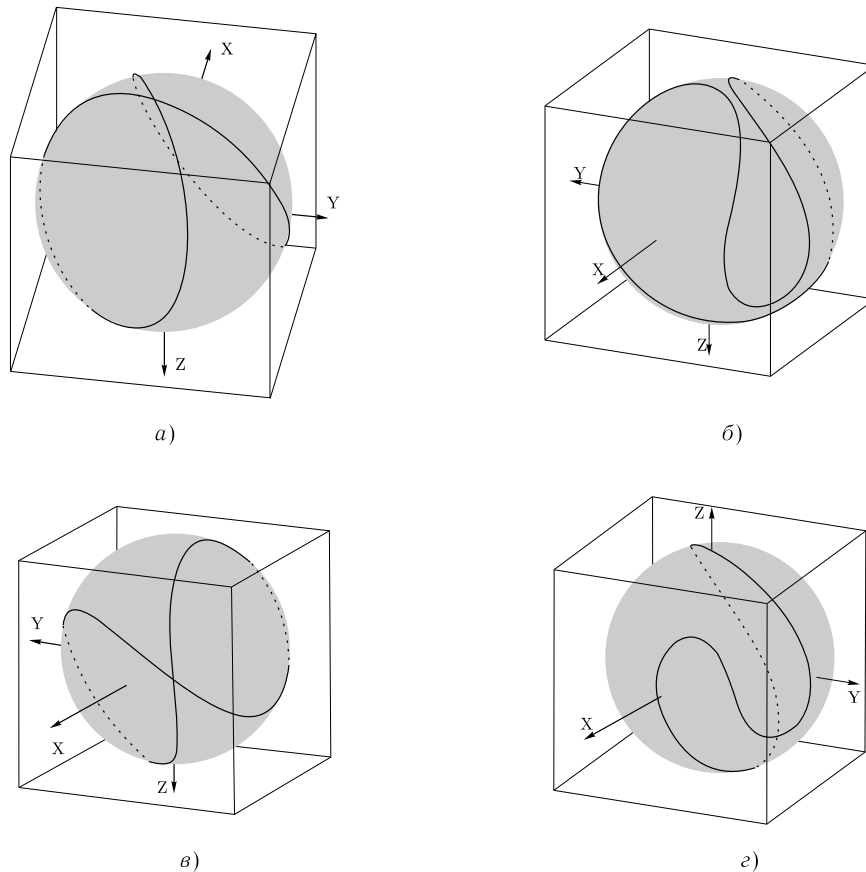


Рис. 14. Следы апекса e_1 во вращающейся системе координат, соответствующие периодическому решению, родившемуся из тора $n = 1$. При смещении центра масс вдоль оси Oz ($\mathbf{r} = (0, 0, 1)$) на нулевой константе интеграла площадей ($c = 0$): а) $\Omega = -0.3334243$; б) $\Omega = 2.0623605$. При смещении центра масс вдоль оси Oy ($\mathbf{r} = (0, 1, 0)$) и ненулевой константе интеграла площадей ($c = 1$): в) $\Omega = 0.0969602$; г) $\Omega = 2.4865794$. Все рисунки приведены при $\mathbf{a} = (1, 1.25, 3)$, $E = 4$.

2. Полный бифуркационный анализ найденных решений при всех параметрах системы $E, I_2/I_1, I_3/I_1, r_2/r_1$. Очевидно, что ввиду большого числа параметров и отсутствия аналитического описания найденных решений данный анализ может быть сделан преимущественно с помощью компьютерных методов.
3. Исследование устойчивости найденных решений в зависимости от параметров системы. Данное исследование, по уже описанным в предыдущем пункте причинам, также может быть проведено только с использованием численного анализа.

Список литературы

- [1] Архангельский Ю. А. *Динамика быстровращающегося твердого тела* // М.: Наука, 1985.
- [2] Баркин Ю. В. *Периодические и условно-периодические решения в задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки* // Прикл. Мат. Мех., 1981, т. 45, № 3, с. 535–544.
- [3] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Динамика твердого тела* // Москва-Ижевск: РХД, 2001, 384 с.

- [4] Борисов А. В., Симаков Н. Н. *Бифуркации удвоения периода в динамике твердого тела* // Рег. и хаот. динам., 1997, т. 2, №1, с. 64–75.
- [5] Горр Г. В. *Об одном движении тяжелого твердого тела в случае Горячева-Чаплыгина* // Прикл. мат. мех., 1970, т. 34, вып. 6, с. 1139–1143.
- [6] Горр Г. В., Кудряшова Л. В., Степанова Л. А. *Классические задачи динамики твердого тела* // Киев: Наукова думка, 1978, 296 с.
- [7] Горр Г. В., Левицкая Г. Д. *Об одном периодическом движении гироскопа Горячева-Чаплыгина* // Мех. тв. тела, 1971, № 3, с. 101–106.
- [8] Горр Г. В., Савченко А. Я. *Об одном периодическом движении в решении С. В. Ковалевской* // Мех. тв. тела, 1971, № 3, с. 64–69.
- [9] Делоне Н. Б. *К вопросу о геометрическом истолковании интегралов движения твердого тела около неподвижной точки, данных С. В. Ковалевской* // Мат. сборник Круга любителей мат. наук, 1892, т. 16, вып. 2, с. 346–351.
- [10] Козлов В. В. *Методы качественного анализа в динамике твердого тела* // Ижевск: Изд-во РХД, 2000, 256 с.
- [11] Кузьмин П. А. *Дополнение к случаю В. А. Стеклова движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки* // Прикл. мат. мех., 1952, т. 16, № 3, с. 243–245.
- [12] Мак-Миллан В. Д. *Динамика твердого тела* // М.-Л.: Изд-во ин. литер., 1951, 468 с. Пер. с англ.: Macmillan W. D. *Dynamics of rigid bodies* // N. Y. London, 1936.
- [13] Маринбах М. А. *О ляпуновских периодических движениях тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой* // Вестн. МГУ, сер. мат. мех., 1979, № 5, с. 75–79.
- [14] Маринбах М. А. *О ляпуновских периодических движениях тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в общем случае* // Прикл. мат. мех., 1981, вып. 5, с. 800–807.
- [15] Новиков С. П. *Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса* // Усп. мат. наук, 1982, т. 37, №5 (227), с. 3–49.
- [16] Сергеев В. С. *О периодических решениях уравнений движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки* // Вестн. МГУ, сер. мат. мех., 1969, № 1, с. 40–51.
- [17] Стеклов В. А. *Новое частное решение дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку* // Труды отд. физ. наук Общ-ва любителей естествознания, 1899, т. 10, № 1, с. 1–3.
- [18] Харламов М. П., Сергеев Е. К. *Построение полного решения одной задачи динамики твердого тела* // Мех. тв. тела, Киев, 1982, вып. 14, с. 33–38.
- [19] Чаплыгин С. А. *Новое частное решение задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки*, в Собр. соч., т. 1 // М.-Л.: ГИТТЛ, 1948, с. 125–132. (Изд. 1-е: Труды отд. физ. наук Общ-ва любителей естествознания, 1904, т. 12, № 1, с. 1–4.)
- [20] Borisov A. V., Mamaev I. S. *Euler-Poisson equations and integrable cases* // Reg. & Chaot. Dyn., 2001, V. 6, № 3, p. 253–274.
- [21] Chenciner A., Montgomery R. *A remarkable periodic solution of the three body problem in the case of equal masses* // Annals of Mathematics, 2000, V. 152, p. 881–901.
- [22] Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. *Chaotic motions and transition to stochasticity in the classical problem of the heavy rigid body with a fixed point* // Nuovo Cimento, 1981, V. 61B, №1, p. 1–20.

- [23] Leimanis E. *The general problem of the motion of coupled rigid bodies about a fixed point* // Springer-Verlag, Berlin, 1965.
- [24] Mettler E. *Periodische und asymptotische Bewegungen des unsymmetrischen schweren Kreisels* // Math. Z, 1937, Bd. 43, H. 1, S. 59–100.
- [25] Simó C. *Dynamical properties of the figure eight solution of the three-body problem* // Celestial Mechanics, dedicated to Donald Saari for his 60th Birthday. Proceedings of an International Conference on Celestial Mechanics, 15-19 December, 1999 at Northwestern University, Evanston, Illinois. Providence, RI: American Mathematical Society, Contemporary Mathematics, 2002, Vol. 292, p.209
- [26] Staude O. *Über permanente Rotationen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt* // J. Reine und Angew. Math, 1894, Bd. 113, H. 4, S. 318–334.