

Линейный анализ устойчивости плоских колебаний спутника-пластинки на круговой орбите*

О. В. Холостова

Московский авиационный институт
125871, Россия, Москва, Волоколамское ш., 4
E-mail: markeev@ipmnet.ru

Получено 14 октября 2005 г.

Исследуются движения спутника — твердого тела относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле на круговой орбите. Предполагается, что главные центральные моменты инерции A , B , C спутника связаны соотношением $B = A + C$, соответствующим тонкой пластинке. Существуют частные движения, когда пластинка, находясь в плоскости орбиты, совершает плоские маятникообразные колебания произвольной амплитуды. Проводится линейный анализ орбитальной устойчивости этих движений. В плоскости параметров задачи — амплитуды колебаний и инерционного параметра — численно и аналитически построены области орбитальной устойчивости и неустойчивости колебаний спутника в линейном приближении.

Ключевые слова: спутник, орбитальная устойчивость, параметрический резонанс, переменные действие–угол, метод Дебри–Хори.

O. V. Kholostova

Linear analysis of stability the planar oscillations of a satellite being a plate in a circular orbit

We study the motion of a satellite (a rigid body) in a circular orbit about its centre of mass. The satellite is subject to the central Newtonian gravitational field. The satellite's principal central moments of inertia A , B and C are assumed to satisfy the equation $B = A + C$. This equation holds for thin plates. Particular motions occur when the plate executes pendulum-like oscillations of an arbitrary amplitude in the plane of the orbit. A linear analysis of the orbital stability of this motion is carried out. In the plane of parameters of the problem (an amplitude of oscillations and an inertial parameter) domains of orbital linear stability and instability of oscillations of the satellite are obtained both numerically and analytically.

Keywords: satellite, orbital stability, parametric resonance, action–angle variables, Deprit–Hori method.

Mathematical Subject Classifications: 93D05, 70H14

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 05-01-00386) и гранта Президента Российской Федерации для поддержки научных школ (НШ-1477.2003.1).

1. Введение

Рассматриваются движения спутника — твердого тела в центральном ньютоновском гравитационном поле. Размеры спутника предполагаются малыми по сравнению с размерами орбиты, поэтому принимается обычное допущение о независимости движения центра масс спутника от его движения относительно центра масс. Орбита центра масс спутника считается круговой.

Известны частные движения спутника, когда одна из его главных центральных осей инерции перпендикулярна плоскости орбиты, а сам спутник совершает вокруг этой оси плоские маятникообразные движения — колебания с произвольной амплитудой или вращения с произвольной угловой скоростью. Эти движения неустойчивы по Ляпунову, так как частоты колебаний и вращений зависят от начальных условий. Необходимо рассматривать задачу об орбитальной устойчивости указанных движений. Такая задача для ряда частных случаев ранее исследовалась как в линейной приближении [9, 10, 12], так и в нелинейной постановке [3, 7, 11].

В данной работе предполагается, что главные центральные моменты инерции A, B, C спутника удовлетворяют соотношению $B = A + C$, соответствующему тонкой пластинке. Исследуется орбитальная устойчивость плоских колебаний спутника в линейном приближении. В работе показывается, что в плоскости параметров задачи — амплитуды колебаний и инерционного параметра — имеется счетное множество областей орбитальной устойчивости и неустойчивости колебаний спутника в линейном приближении. Выделяется часть плоскости изменения параметров задачи, в которой получена и описана полная картина чередования областей устойчивости и неустойчивости.

2. Гамильтониан возмущенного движения

Для описания движения спутника введем орбитальную систему координат $OXYZ$, оси OX , OY и OZ которой направлены соответственно по радиус-вектору центра масс спутника, по вектору скорости центра масс и по нормали к плоскости орбиты. Введем также связанную систему координат $Oxyz$, ее оси направлены вдоль главных центральных осей инерции спутника. Ориентацию связанной системы координат относительно орбитальной зададим при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ .

Движения спутника относительно центра масс описываются каноническими уравнениями с функцией Гамильтона

$$H = \frac{6 - (3 + \alpha^2) \cos^2 \varphi}{3 - \alpha^2} \frac{(p_\psi - p_\varphi \cos \theta)^2}{2 \sin^2 \theta} + \frac{6 - (3 + \alpha^2) \sin^2 \varphi}{2(3 - \alpha^2)} p_\theta^2 + \frac{3 + \alpha^2}{3 - \alpha^2} \sin \varphi \cos \varphi \frac{(p_\psi - p_\varphi \cos \theta) p_\theta}{\sin \theta} - \frac{p_\psi}{\alpha} + \frac{3p_\varphi^2}{3 + \alpha^2} + \frac{3}{4\alpha^2} \left[a_{12}^2 + \frac{\alpha^2}{3} (a_{13}^2 - a_{11}^2) \right], \quad (2.1)$$

$$a_{11} = \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta, \quad a_{12} = -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta, \quad a_{13} = \sin \psi \sin \theta.$$

Здесь $p_\psi, p_\theta, p_\varphi$ — отвечающие координатам ψ, θ, φ безразмерные импульсы; $\alpha = \sqrt{3(B - 2A)/B}$ ($0 < \alpha < \sqrt{3}$) — безразмерный инерционный параметр, введенный в предположении, что $C > A$. Граничные случаи $\alpha = 0$ и $\alpha = \sqrt{3}$ отвечают соответственно динамически симметричной пластинке ($A = C = B/2$) и тонкому стержню ($A = 0, B = C$) и далее рассматриваться не будут. За независимую переменную в гамильтониане (2.1) принята величина $\tau = \omega_0 \alpha t$, где ω_0 — угловая скорость движения центра масс спутника по орбите.

Частное решение $\theta = \pi/2$, $\varphi = 0$, $p_\theta = p_\varphi = 0$ системы с гамильтонианом (2.1) соответствует движению пластинки в плоскости орбиты. Последнее описывается каноническими уравнениями с функцией Гамильтона

$$h = \frac{1}{2}p_\psi^2 - \frac{p_\psi}{\alpha} - \frac{1}{4}\cos 2\psi, \tag{2.2}$$

которая после канонической замены переменных

$$\psi = \frac{1}{2}q_3, \quad p_\psi = \frac{1}{\alpha} + \frac{p_3}{2} \tag{2.3}$$

может быть записана в виде

$$h_1 = \frac{1}{2}p_3^2 - \cos q_3 \tag{2.4}$$

Гамильтониан (2.4) (или (2.2)) отвечает математическому маятнику. Решение $q_3 = p_3 = 0$ системы с гамильтонианом (2.4) соответствует устойчивому положению равновесия маятника, а соотношения

$$q_3 = q_3(\tau) = 2 \arcsin[k \operatorname{sn}(\tau, k)], \quad p_3 = p_3(\tau) = 2k \operatorname{cn}(\tau, k), \quad k = \sin \varepsilon \tag{2.5}$$

описывают колебания маятника в окрестности этого положения равновесия, происходящие с амплитудой ε . В (2.5) использованы стандартные обозначения для эллиптических функций.

Одновременно с заменой (2.3) введем возмущения q_j, p_j ($j = 1, 2$) по формулам

$$\theta = \frac{\pi}{2} + q_1, \quad \varphi = q_2, \quad p_\theta = \frac{p_1}{4}, \quad p_\varphi = \frac{p_2}{4}.$$

В новых переменных гамильтониан (2.1) переписется в виде

$$H = \frac{1}{2}p_3^2 - \cos q_3 + H_2 + \dots \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} H_2 = & \frac{(3 - \alpha^2)(1 - \cos q_3) + (2 + \alpha p_3)^2}{2\alpha^2} q_1^2 - \frac{(3 + \alpha^2) \sin q_3}{\alpha^2} q_1 q_2 + \\ & + \frac{(3 + \alpha^2)[(3 - \alpha^2)(1 + \cos q_3) + (2 + \alpha p_3)^2]}{2\alpha^2(3 - \alpha^2)} q_2^2 + \frac{2 + \alpha p_3}{2\alpha} q_1 p_2 + \\ & + \frac{(3 + \alpha^2)(2 + \alpha p_3)}{2\alpha(3 - \alpha^2)} q_2 p_1 + \frac{3}{4(3 - \alpha^2)} p_1^2 + \frac{3}{4(3 + \alpha^2)} p_2^2 \end{aligned} \tag{2.7}$$

В (2.6) многоточие обозначает совокупность членов не менее четвертой степени относительно q_1, q_2, p_1, p_2 .

Предельный случай $\varepsilon = 0$ соответствует устойчивому относительному равновесию $q_3 = 0$, $p_3 = 0$ спутника в орбитальной системе координат [1]. При $q_3 = 0$, $p_3 = 0$ квадратичная относительно пространственных возмущений q_j, p_j ($j = 1, 2$) функция (2.7) имеет вид

$$H_2^{(0)} = \frac{2}{\alpha^2} q_1^2 + \frac{(3 + \alpha^2)(5 - \alpha^2)}{\alpha^2(3 - \alpha^2)} q_2^2 + \frac{1}{\alpha} q_1 p_2 + \frac{3 + \alpha^2}{\alpha(3 - \alpha^2)} q_2 p_1 + \frac{3}{4(3 - \alpha^2)} p_1^2 + \frac{3}{4(3 + \alpha^2)} p_2^2. \tag{2.8}$$

Характеристическое уравнение линейной системы с гамильтонианом (2.8) имеет две пары чисто мнимых корней $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$, ($\omega_1 = 2/\alpha$, $\omega_2 = 1/\alpha$), а унивалентная каноническая замена



переменных $q_1, q_2, p_1, p_2 \rightarrow \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ по формулам

$$q_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{6\alpha}{3-\alpha^2}} \eta_2, \quad q_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3\alpha}{3+\alpha^2}} \xi_1, \quad (2.9)$$

$$p_1 = -\sqrt{\frac{3+\alpha^2}{3\alpha}} \xi_1 - 2\sqrt{\frac{3-\alpha^2}{6\alpha}} \xi_2, \quad p_2 = 2\sqrt{\frac{3+\alpha^2}{3\alpha}} \eta_1 - \frac{3+\alpha^2}{3} \sqrt{\frac{6}{\alpha(3-\alpha^2)}} \eta_2, \quad (2.1)$$

приводит гамильтониан (2.8) к нормальной форме

$$\Gamma_2^{(0)} = \frac{1}{2} \omega_1 (\xi_1^2 + \eta_1^2) + \frac{1}{2} \omega_2 (\xi_2^2 + \eta_2^2). \quad (2.10)$$

Пусть теперь $\varepsilon \neq 0$. При помощи унивалентной канонической замены $q_3, p_3 \rightarrow w, I$ по формулам [5]

$$q_3 = 2 \arcsin [k \operatorname{sn} (\Omega^{-1} w, k)], \quad p_3 = 2k \operatorname{cn} (\Omega^{-1} w, k), \quad \Omega = \frac{\pi}{2K(k)}, \quad (2.11)$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, перейдем в функции Гамильтона (2.6) к переменным действие—угол. В соотношениях (2.11) $k = k(I)$, причем

$$I(k) = \frac{8}{\pi} [E(k) - (1-k^2)K(k)],$$

а $E(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода.

В новых переменных часть (2.4) гамильтониана (2.6) имеет вид

$$\tilde{h}_1(I) = 2k^2, \quad (2.12)$$

а невозмущенное движение описывается соотношениями

$$I = I_0 = \text{const}, \quad w = \Omega\tau + w_0 \quad (w_0 = \text{const}).$$

Зададим возмущение $r = I - I_0$ переменной действие. Перейдем затем к новой независимой переменной $u = \Omega\tau$. Гамильтониан возмущенного движения запишется в виде

$$\hat{H} = r + \hat{H}_2(q_1, q_2, p_1, p_2, w) + O_4, \quad \hat{H}_2 = \Omega^{-1} H_2^{(0)}. \quad (2.13)$$

Здесь $H_2^{(0)}$ — функция (2.7), в которой сделана замена (2.11); ее коэффициенты 2π -периодичны по w . Слагаемое O_4 — совокупность членов не ниже четвертой степени относительно переменных $q_1, q_2, p_1, p_2, |r|^{1/2}$.

Задача об орбитальной устойчивости плоских колебаний спутника эквивалентна задаче об устойчивости системы с функцией Гамильтона (2.13) по отношению к переменным q_1, q_2, p_1, p_2, r .

3. Условия орбитальной устойчивости и неустойчивости

Исследуем линейную задачу об орбитальной устойчивости, рассмотрев движения системы, описываемой функцией Гамильтона, получаемой из (2.13) путем отбрасывания слагаемого O_4 . С этой целью строится фундаментальная матрица $\mathbf{X}(u)$ линейной системы с функцией Гамильтона $\hat{H}_2(q_1, q_2, p_1, p_2, u)$, нормированная условием $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}$, где \mathbf{E} — единичная матрица четвертого порядка. Исследуется характеристическое уравнение матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$, имеющее вид

$$\varrho^4 - a_1 \varrho^3 + a_2 \varrho^2 - a_1 \varrho + 1 = 0 \quad (3.1)$$

Здесь a_1 — след матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$, a_2 — сумма всех ее главных миноров второго порядка.

Коэффициенты a_1 и a_2 уравнения (3.1) зависят от параметров ε и α задачи. Если параметры ε и α таковы, что отвечающая им точка (a_1, a_2) плоскости a_1, a_2 лежит внутри криволинейного треугольника, задаваемого неравенствами

$$-2 < a_2 < 6, \quad 4(a_2 - 2) < a_1^2 < \frac{1}{4}(a_2 + 2)^2, \quad (3.2)$$

то уравнение (3.1) имеет две различные пары комплексно-сопряженных корней, равных по модулю единице [2]. Соответствующие им характеристические показатели $\pm i\lambda_j (j = 1, 2)$ чисто мнимые. Следовательно, рассматриваемые плоские колебания спутника орбитально устойчивы в линейном приближении.

Если точка (a_1, a_2) лежит вне треугольника (3.2), то хотя бы один из корней характеристического уравнения (3.1) имеет модуль, больший единицы, и исследуемые колебания спутника орбитально неустойчивы.

4. Области параметрического резонанса в случае малых амплитуд колебаний спутника

Пусть амплитуда ε колебаний спутника мала. Сделаем в гамильтониане \hat{H}_2 замену переменных (2.9) и разложим преобразованный гамильтониан Γ_2 в ряд по степеням ε :

$$\Gamma_2 = \Gamma_2^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma_2^{(k)}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, u), \quad (4.1)$$

где невозмущенный гамильтониан $\Gamma_2^{(0)}$ определен соотношением (2.10), а $\Gamma_2^{(k)}$ — 2π -периодические функции u .

При малых, но отличных от нуля значениях ε , в плоскости ε, α возникают области параметрического резонанса. На основании теоремы Крейна—Гельфанда—Лидского [8], порождающими точками для этих областей являются те точки оси $\varepsilon = 0$, для которых величины $2\omega_1, 2\omega_2$ и $\omega_1 + \omega_2$ являются целыми числами. Эти точки определяются выражениями

$$\alpha_1 = \frac{1}{n}, \quad \alpha_2 = \frac{2}{2n+1}, \quad \alpha_3 = \frac{4}{2n+1}, \quad \alpha_4 = \frac{3}{m},$$

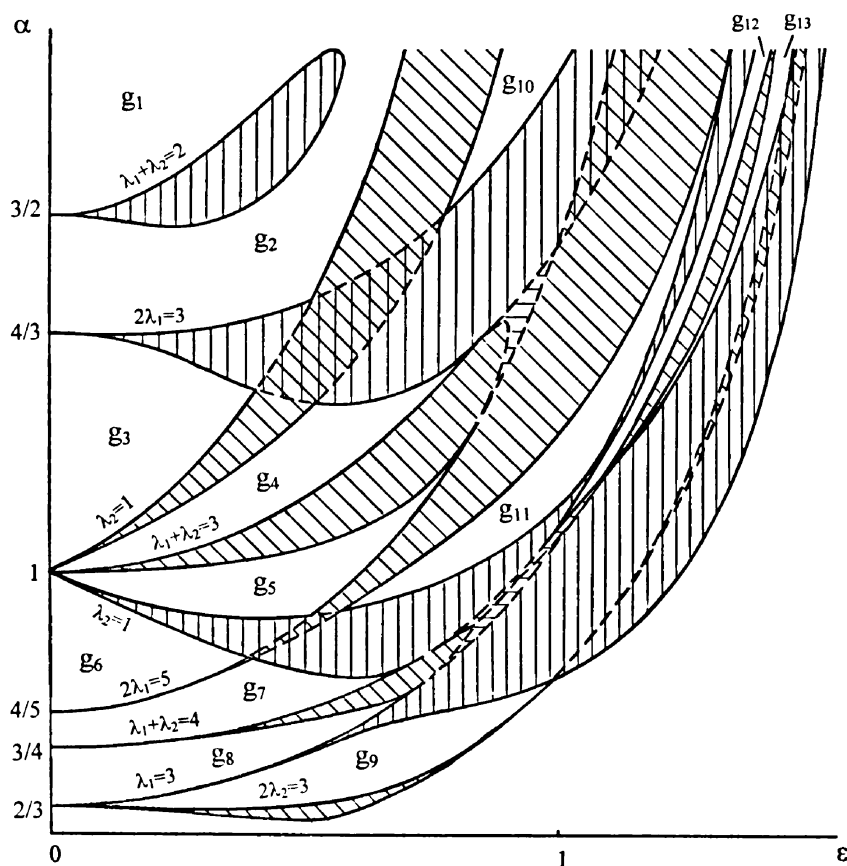
где n и m — целые числа ($n \geq 1, m \geq 2$ и m не кратно 3).

При $\alpha = \alpha_1$ в системе реализуется кратный параметрический резонанс, когда обе частоты ω_1 и ω_2 являются целыми числами ($\omega_1 = 2n, \omega_2 = n$). В случае $\alpha = \alpha_2$ также имеет место кратный параметрический резонанс, при этом одна частота целая и одна полуцелая ($\omega_1 = 2n + 1, \omega_2 = (2n + 1)/2$). При $\alpha = \alpha_3$ в системе реализуется параметрический резонанс $\omega_1 = (2n + 1)/2$ основного типа (другая частота $\omega_2 = (2n + 1)/4$), а при $\alpha = \alpha_4$ — параметрический резонанс $\omega_1 + \omega_2 = m$ комбинационного типа (для него $\omega_1 = 2m/3, \omega_2 = m/3$).

Множество порождающих точек $\alpha_j (j = 1, 2, 3, 4)$ счетно. С ростом n или m эти точки скапливаются вблизи предельной точки $\alpha = 0$.

Случаи кратного параметрического резонанса $\omega_1 = 2, \omega_2 = 1$ (порождающая точка $\alpha = 1$) и $\omega_1 = 3, \omega_2 = 3/2$ (порождающая точка $\alpha = 2/3$) в задаче об устойчивости плоских линейных колебаний спутника—пластинки на круговой орбите при малых значениях амплитуды колебаний ε рассмотрены ранее в работе [6]. Показано, что из точки $\alpha = 1$ при $\varepsilon \neq 0$ рождаются три области

неустойчивости; в окрестности точки $\varepsilon = 0, \alpha = 2/3$ существует две области неустойчивости (см. рисунок). В обоих резонансных случаях получены (при малых ε) уравнения границ областей параметрического резонанса.



В точке $\varepsilon = 0, \alpha = 1$ выполняются четыре резонансных соотношения: $\omega_1 = 2, \omega_2 = 1, \omega_1 + \omega_2 = 3, \omega_1 - \omega_2 = 1$. При этом три области неустойчивости, рождающиеся при $\varepsilon \neq 0$ из данной точки, отвечают только двум из перечисленных резонансов: на границах верхней и нижней областей неустойчивости имеют место соотношения $\lambda_2 = 1$, на границах средней области — $\lambda_1 + \lambda_2 = 3$.

В точке $\varepsilon = 0, \alpha = 2/3$ имеет место двойной параметрический резонанс $\omega_1 = 3, 2\omega_2 = 3$; при этом на границах верхней и нижней областей неустойчивости, выходящих из указанной точки, выполняются соответственно равенства $\lambda_1 = 3$ и $2\lambda_2 = 3$, то есть реализуются оба случая.

Заметим, что в случаях однократного параметрического резонанса (порождающие точки $\alpha = \alpha_3$ и $\alpha = \alpha_4$) частоты ω_1 и ω_2 колебаний системы при $\varepsilon = 0$ являются в рассматриваемой задаче рациональными числами. Поэтому при рассмотрении однократных резонансов для построения границ областей неустойчивости может быть, с соответствующими изменениями, использован алгоритм, разработанный в статье [6] для случаев кратных резонансов (когда ω_1 и ω_2 — целые или полуцелые числа).

Уравнения $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ границ областей параметрического резонанса, рождающихся из точки $\varepsilon = 0, \alpha = \alpha_*$, представим в виде рядов по степеням ε

$$\alpha = \alpha_* + \alpha_1 \varepsilon + \dots + \alpha_p \varepsilon^p + \dots \quad (4.2)$$

где коэффициенты α_s ($s = 1, 2, \dots, p$) подлежат определению.

Осуществим в гамильтониане (4.1) T -периодическую по u каноническую замену переменных $\xi_j, \eta_j \rightarrow x_j, X_j$ ($j = 1, 2$) по формулам

$$\xi_j = x_j \cos(\omega_j u) + X_j \sin(\omega_j u), \quad \eta_j = -x_j \sin(\omega_j u) + X_j \cos(\omega_j u) \quad (4.3)$$

Период T равен 8π и 6π для случаев параметрического резонанса основного ($\alpha_* = \alpha_3$) и комбинационного ($\alpha_* = \alpha_4$) типов соответственно. В результате замены (4.3) в гамильтониане (4.1) уничтожается невозмущенная часть $\Gamma_2^{(0)}$.

Далее при помощи метода Депри—Хори [4] строится T -периодическая по u линейная замена переменных $x_j, X_j \rightarrow y_j, Y_j$ ($j = 1, 2$), уничтожающая в преобразованном гамильтониане переменную u в членах до требуемого порядка по ε . Анализ биквадратного характеристического уравнения приближенной автономной гамильтоновой системы позволяет найти границы областей неустойчивости.

Расчет проводился для двух случаев $2\lambda_1 = 3$ и $2\lambda_1 = 5$ параметрического резонанса основного типа (порождающие точки $\alpha = 4/3$ и $\alpha = 4/5$) и двух случаев комбинационного резонанса $\lambda_1 + \lambda_2 = 2$ и $\lambda_1 + \lambda_2 = 4$ (порождающие точки $\alpha = 3/2$ и $\alpha = 3/4$).

В случае основного резонанса функция Гамильтона приближенной автономной системы получена в виде

$$K = \frac{1}{2}(c_{2000}y_1^2 + c_{0020}Y_1^2) + \frac{1}{2}c_{0101}(y_2^2 + Y_2^2) \quad (4.4)$$

а в случае комбинационного резонанса — в виде

$$K = \frac{1}{2}d_{1010}(y_1^2 + Y_1^2) + \frac{1}{2}d_{0101}(y_2^2 + Y_2^2) + d_{1100}(y_1y_2 - Y_1Y_2) \quad (4.5)$$

В (4.4) и (4.5) c_{ijkl} и d_{ijkl} — постоянные коэффициенты, являющиеся функциями искомым величин $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ и представляемые в форме

$$c_{ijkl} = \sum_{s=1}^p \varepsilon^s c_{ijkl}^{(s)}(\alpha_1, \dots, \alpha_s), \quad d_{ijkl} = \sum_{s=1}^p \varepsilon^s d_{ijkl}^{(s)}(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \quad (4.6)$$

Границы областей неустойчивости системы с гамильтонианом (4.4) задаются соотношениями

$$c_{2000} = 0 \text{ или } c_{0020} = 0 \quad (4.7)$$

Характеристическое уравнение системы с гамильтонианом (4.5) имеет вид

$$\lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0$$

$$a = d_{1010}^2 + d_{0101}^2 - 2d_{1100}^2, \quad b = (d_{1100}^2 - d_{1010}d_{0101})^2$$

а его дискриминант равен

$$D = (d_{1010} - d_{0101})^2[(d_{1010} + d_{0101})^2 - 4d_{1100}^2]$$

Отсюда следует, что границы областей неустойчивости задаются уравнениями

$$d_{1010} + d_{0101} = \pm 2d_{1100} \quad (4.8)$$

Приравнявая в уравнениях (4.7) или (4.8) коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим систему уравнений для определения коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ на граничных кривых (4.2).

На основании описанного алгоритма получены следующие уравнения границ областей неустойчивости:

резонанс $\lambda_1 + \lambda_2 = 2$:

$$\alpha^{(1)}(\varepsilon) = \frac{3}{2} + 1.033107\varepsilon^2 - 0.693496\varepsilon^4 + O(\varepsilon^6)$$

$$\alpha^{(2)}(\varepsilon) = \frac{3}{2} - 0.650639\varepsilon^2 + 7.666873\varepsilon^4 + O(\varepsilon^6)$$

резонанс $2\lambda_1 = 3$:

$$\alpha^{(1)}(\varepsilon) = \frac{4}{3} - 0.224084\varepsilon^2 + 1.483750\varepsilon^3 - 1.329529\varepsilon^4 + O(\varepsilon^5), \quad \alpha^{(2)}(\varepsilon) = \alpha^{(1)}(-\varepsilon)$$

резонанс $2\lambda_1 = 5$:

$$\alpha^{(1)}(\varepsilon) = \frac{4}{5} + 0.593155\varepsilon^2 - 0.719723\varepsilon^4 + 0.553197\varepsilon^5 + O(\varepsilon^6), \quad \alpha^{(2)}(\varepsilon) = \alpha^{(1)}(-\varepsilon)$$

резонанс $\lambda_1 + \lambda_2 = 4$:

$$\alpha^{(1)}(\varepsilon) = \frac{3}{4} + 0.192036\varepsilon^2 + 0.229453\varepsilon^4 + O(\varepsilon^5)$$

$$\alpha^{(2)}(\varepsilon) = \frac{3}{4} + 0.192036\varepsilon^2 - 0.215832\varepsilon^4 + O(\varepsilon^5)$$

Кроме рассмотренных порождающих точек $\alpha = 3/2$, $\alpha = 4/3$, $\alpha = 1$, $\alpha = 4/5$, $\alpha = 3/4$, $\alpha = 2/3$ областей параметрического резонанса других порождающих точек на отрезке $2/3 \leq \alpha < \sqrt{3}$ оси $\varepsilon = 0$ нет. На интервале $0 < \alpha < 2/3$ оси $\varepsilon = 0$ таких точек счетное множество. Области неустойчивости, рождающиеся из них, являясь при малых значениях ε очень узкими, с ростом ε расширяются и, накладываясь одна на другую, образуют весьма сложную картину. Поэтому далее ограничим исследование частью плоскости параметров ε, α задачи, расположенной выше границ областей неустойчивости, выходящих из точки $\varepsilon = 0, \alpha = 2/3$.

5. Области устойчивости и неустойчивости при произвольных амплитудах

Для произвольных значений амплитуды колебаний ε ($0 < \varepsilon < \pi/2$) границы областей параметрического резонанса получены путем проведения численного расчета: строились такие множества точек (ε, α) , для которых соответствующие коэффициенты a_1, a_2 характеристического уравнения (3.1) удовлетворяют одному из соотношений

$$a_2 = 2a_1 - 2, \quad a_2 = -2a_1 - 2, \quad a_2 = \frac{1}{4}a_1^2 + 2$$

т.е. точки (a_1, a_2) плоскости a_1, a_2 принадлежат одной из границ криволинейного треугольника (3.2).

Области орбитальной устойчивости и неустойчивости колебаний спутника в линейном приближении показаны, в рассматриваемой части плоскости параметров ε и α задачи, на рисунке.

Области неустойчивости, рождающиеся на оси $\varepsilon = 0$, отмечены на рисунке вертикальной или наклонной штриховкой. С ростом ε эти области пересекаются и накладываются одна на другую, или более широкая область поглощает более узкую (см. поведение двух областей неустойчивости, рождающихся в точке $\alpha = 2/3$ оси $\varepsilon = 0$). Части граничных кривых, оказавшиеся внутри

областей неустойчивости (штриховые линии на рисунке), соответствуют продолжениям сторон криволинейного треугольника.

Границы областей неустойчивости, отвечающие комбинационному резонансу и имеющие петлеобразную форму, либо соприкасаются с границами соседних с ними областей параметрического резонанса (границы средней области неустойчивости, рождающейся из точки $\alpha = 1$, и области, выходящей из точки $\alpha = 3/4$), либо касаются прямой $\alpha = \sqrt{3}$ (граница области, выходящей из точки $\alpha = 3/2$).

В точках пересечения кривых, являющихся границами различных областей неустойчивости, имеет место кратный параметрический резонанс, когда величины λ_1 и λ_2 равны целым или полуцелым числам.

Кроме областей параметрического резонанса, берущих начало на оси $O\alpha$, есть еще внутренние области неустойчивости, отмеченные на рисунке горизонтальной штриховкой (для них $a_2 > 6$).

Области неустойчивости чередуются с областями орбитальной устойчивости колебаний спутника в линейном приближении. В исследуемой части плоскости параметров (ε, α) таких областей тринадцать; они не заштрихованы на рисунке и обозначены через g_1, g_2, \dots, g_{13} . Области $g_1, g_2, g_3, g_6, g_7, g_8$ непосредственно примыкают к оси $\varepsilon = 0$. Области g_4, g_5, g_9 находятся между областями неустойчивости, рождающимися из точек кратных резонансов $\alpha = 1$ и $\alpha = 2/3$ оси $\varepsilon = 0$. Области g_{10}, \dots, g_{13} являются внутренними, последние три из них, узкие и длинные, простираются в область достаточно больших значений амплитуды ε колебаний спутника. На левой и правой границах внутренних областей устойчивости имеют соответственно место соотношения $\lambda_2 = 1$ и $2\lambda_1 = 3$ (область g_{10}), $2\lambda_1 = 5$ и $\lambda_2 = 1$ (область g_{11}), $\lambda_2 = 1$ и $\lambda_1 + \lambda_2 = 4$ (область g_{12}), $\lambda_1 + \lambda_2 = 4$ и $\lambda_1 = 3$ (область g_{13}).

Список литературы

- [1] Белецкий В. В. *Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле* // М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975, 308 с.
- [2] Ляпунов А. М. *Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах. Собр. соч.* // М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1954, т. 1. с. 327–401.
- [3] Маркеев А. П. *Устойчивость плоских колебаний и вращений спутника на круговой орбите* // Космич. исследования, 1975, т. 13, вып. 3, с. 322–336.
- [4] Маркеев А. П. *Точки либрации в небесной механике и космодинамике* // М.: Наука, 1978, 312 с.
- [5] Маркеев А. П. *Теоретическая механика* // Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001, 592 с.
- [6] Маркеев А. П. *О кратном резонансе в линейных системах Гамильтона* // Доклады РАН, 2005, т. 402, № 3, с. 339–343.
- [7] Маркеев А. П., Сокольский А. Г. *Исследование устойчивости плоских периодических движений спутника на круговой орбите* // Изв. АН СССР. Мех. тв. тела, 1977, № 4, с. 46–57.
- [8] Якубович В. А., Старжинский В. М. *Параметрический резонанс в линейных системах* // М.: Наука, 1987, 328 с.
- [9] Kane T. R., Shippey D. J. *Attitude stability of a spinning unsymmetrical satellite in a circular orbit* // J. Astronaut. Sci., 1963, V. 10, № 4, p. 114–119.
- [10] Kane T. R. *Attitude stability of Earth - pointing satellites* // AIAA Journal, 1965, V. 3, № 4, p. 726–731.

- [11] Markeev A. P., Bardin B. S. *On Stability of Planar Oscillations and Rotations of a Satellite in a Circular Orbit* // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2003, V. 85, № 1, p. 51–66.
- [12] Meirovitch L., Wallace F. *Attitude instability regions of a spinning unsymmetrical satellite in a circular orbit* // J. Astronaut. Sci., 1967, V. 14, № 3, p. 123–133.