

Хаос в ограниченной задаче о вращении тяжелого твердого тела с закрепленной точкой*

А. В. Борисов, А. А. Килин, И. С. Мамаев

Институт компьютерных исследований
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, Ижевск, ул. Университетская, 1
E-mail: borisov@ics.org.ru, aka@ics.org.ru, mamaev@ics.org.ru

Получено 1 августа 2005 г.

В работе исследован процесс хаотизации фазового портрета в ограниченной задаче о вращении тяжелого твердого тела с закрепленной точкой. Указаны два дополняющих друг друга механизма хаотизации — рост гомоклинической структуры и развитие каскадов бифуркаций удвоения периода. Отмечено адиабатическое поведение системы на нулевом уровне интеграла площадей при стремлении энергии к нулю. Найдены меандровые торы, связанные с нарушением свойства закручивания рассматриваемого отображения.

Ключевые слова: движение твердого тела, фазовый портрет, механизм хаотизации, бифуркации.

A. V. Borisov, A. A. Kilin, I. S. Mamaev

Chaos in a restricted problem of rotation of a rigid body with a fixed point

The paper deals with a transition to chaos in the phase-plane portrait of a restricted problem of rotation of a rigid body with a fixed point. Two interrelated mechanisms responsible for chaotisation have been indicated: 1) growth of the homoclinic structure and 2) development of cascades of period doubling bifurcations. On the zero level of the integral of areas, an adiabatic behavior of the system (as the energy tends to zero) has been noticed. Meander tori induced by the breakdown of the torsion property of the mapping have been found.

Keywords: motion of a rigid body, phase-plane portrait, mechanism of chaotisation, bifurcations.
Mathematical Subject Classifications: 70E17, 65P30, 83C10

*Работа выполнена в рамках программы «Государственная поддержка ведущих научных школ» (грант НШ 136.2003.1), при поддержке РФФИ (гранты 04-205-264367 и 05-01-01058), CRDF (грант RU-M1-2583-M0-04) и INTAS (грант 04-80-7297).

1. Введение

Уравнения Эйлера-Пуассона, описывающие движение твердого тела вокруг неподвижной точки в однородном поле тяжести, имеют вид

$$\begin{cases} \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \mu \mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — компоненты вектора угловой скорости, радиус-вектора центра масс и единичного орта вертикали в системе главных осей инерции (e_1, e_2, e_3) , жестко связанных с твердым телом и проходящих через точку закрепления, $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — тензор инерции относительно точки закрепления в тех же осях, $\mu = mg$ — вес тела (рис. 1).

Уравнения (1.1) обладают тремя первыми интегралами движения

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) - \mu(r, \boldsymbol{\gamma}), \quad \mathcal{F}_1 = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}), \quad \mathcal{F}_2 = \boldsymbol{\gamma}^2. \quad (1.2)$$

Рис. 1. Твердое тело с неподвижной точкой в поле тяжести.

Здесь \mathcal{H} — полная энергия тела, интеграл \mathcal{F}_1 — связан с симметрией относительно вращений вокруг неподвижной вертикальной оси и называется интегралом площадей, а \mathcal{F}_2 — геометрический интеграл, значение которого для действительных движений твердого тела равно единице $\mathcal{F}_2 = \boldsymbol{\gamma}^2 = 1$.

Рассмотрим задачу о движении динамически симметричного тела при следующих предположениях: $I_1 = I_2 = 1$, $I_3 = \delta$, $\mathbf{r} = (0, \delta, 0)$. При достаточно малых $\delta < 2$ для моментов инерции выполнены неравенства треугольников, следовательно, выбранной конфигурации соответствует некоторое реальное распределение масс. Уравнения движения при этом принимают вид

$$\dot{\omega}_1 = (1 - \delta)\omega_2\omega_3 - \delta\gamma_3, \quad \dot{\omega}_2 = (\delta - 1)\omega_1\omega_3, \quad \dot{\omega}_3 = \gamma_1. \quad (1.3)$$

Рассмотрим предельный случай данной задачи при $\delta \rightarrow 0$, когда тело вырождается в отрезок прямой. Данный предельный переход вполне аналогичен предельному переходу к ограниченной задаче трех тел в небесной механике. При этом одновременно стремятся к нулю момент инерции и момент силы тяжести относительно оси динамической симметрии. Таким образом, в пределе получается нетривиальное уравнение для собственного вращения, которое мы рассмотрим ниже. Впервые этот предельный переход предложен В. В. Козловым и Д. В. Трещевым в [6]. Аналогичный предельный переход в более общем случае динамически несимметричного тела был рассмотрен А. А. Бутовым в [3].

После предельного перехода $\delta \rightarrow 0$ уравнения (1.3) примут следующий вид

$$\dot{\omega}_1 = \omega_2\omega_3, \quad \dot{\omega}_2 = -\omega_1\omega_3, \quad \dot{\omega}_3 = \gamma_1. \quad (1.4)$$

Интегралы для системы (1.4), получающиеся из интегралов (1.2) исходной задачи предельным переходом, имеют вид

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = h, \quad \omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2 = c, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \quad (1.5)$$

Проредуцируем уравнения (1.4) на совместный уровень интегралов (1.5) [6]. Для этого выберем в качестве переменных ξ, η, γ_3 , связанные с $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ следующим образом

$$\omega_1 = \sqrt{2h} \sin \xi, \quad \omega_2 = \sqrt{2h} \cos \xi, \quad \omega_3 = \eta. \quad (1.6)$$

Уравнение для γ_3 отделяется, и после его интегрирования получим $\gamma_3 = A \cos(\sqrt{2ht})$, где A зависит от величин интегралов (1.5). Подставив полученное решение в уравнения (1.1) для $\dot{\gamma}$ и выражения для интегралов (1.5), находим

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{c}{\sqrt{2h}} \sin \xi - \sqrt{1 - \frac{c^2}{2h}} \sin(\sqrt{2ht}) \cos \xi, \\ \gamma_2 &= \frac{c}{\sqrt{2h}} \cos \xi + \sqrt{1 - \frac{c^2}{2h}} \sin(\sqrt{2ht}) \sin \xi, \\ \gamma_3 &= \sqrt{1 - \frac{c^2}{2h}} \cos(\sqrt{2ht}). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Легко показать, что для всех движений твердого тела подкоренные выражения в (1.7) неотрицательны. После подстановки (1.6) и (1.7) в уравнения движения (1.4) получим уравнения для оставшихся двух переменных ξ, η :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \eta, \\ \dot{\eta} = \frac{c}{\sqrt{2h}} \sin \xi - \sqrt{1 - \frac{c^2}{2h}} \sin(\sqrt{2ht}) \cos \xi. \end{cases} \quad (1.8)$$

Уравнения (1.8) можно представить в гамильтоновой форме

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta}, \quad \dot{\eta} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi}, \\ \mathcal{H} &= \frac{\eta^2}{2} + \frac{c}{\sqrt{2h}} \cos \xi + \sqrt{1 - \frac{c^2}{2h}} \sin(\sqrt{2ht}) \sin \xi. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Таким образом, рассматриваемый предельный случай задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки сводится к гамильтоновой системе с полутора степенями свободы.

Рассмотрим теперь свойства абсолютного движения ограниченной задачи о движении твердого тела. Для этого запишем квадратуру для угла прецессии

$$\dot{\psi} = \frac{\omega_1 \gamma_1 + \omega_2 \gamma_2}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}. \quad (1.10)$$

Подставив (1.5) и (1.7) в (1.10) и проинтегрировав полученное выражение по времени, получим

$$\psi(t) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2h}}{c} \operatorname{tg}(\sqrt{2ht})\right) + \psi(0), & c \neq 0, \\ \psi(0), & c = 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

В рассматриваемом предельном случае тело вырождается в отрезок прямой, поэтому его движения в неподвижной системе координат описываются только апексом e_3 , параллельным третьей оси инерции. Зависимость e_3 от углов Эйлера имеет вид

$$e_3 = (\sin \theta \sin \psi, -\sin \theta \cos \psi, \cos \theta). \quad (1.12)$$

Учитывая равенство $\cos \theta = \gamma_3$ и используя (1.11), приходим к выводу, что при любых значениях интегралов и начальных условий уравнений (1.9), движение стержня является периодическим с частотой $\sqrt{2h}$. В частности, при $c = 0$ отсутствует прецессия, и любое движение тела является равномерным вращением в вертикальной плоскости. Таким образом, в предельной постановке уравнения движения разделяются на две части. Первая часть связана с абсолютным движением тела и может быть явно проинтегрирована. Вторая часть связана с собственным вращением тела и, вообще говоря, не имеет отношения к реальному движению тела (так как фактически описывает вращение бесконечно тонкого стержня вокруг своей оси). Интересным фактом является то, что даже в случае хаотического собственного вращения, в неподвижной системе координат тело будет двигаться регулярно и периодически. Кроме того, благодаря предельному переходу в ограниченной задаче мы избегаем проблем связанных с топологией изоэнергетических уровней и выбором глобального трансверсального сечения Пуанкаре. Отметим также, что основные свойства развития хаоса, описанные в этой работе, проявляются также в общих уравнениях Эйлера-Пуассона [2].

Отметим, что систему (1.9) также можно рассматривать как задачу о математическом маятнике с периодическим по времени возмущением специального вида. Действительно, положив $\nu = \sqrt{1 - \frac{c^2}{2h}}$ и считая ν малым параметром, получим

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \nu \mathcal{H}_1 + o(\nu), \quad \mathcal{H}_0 = \frac{\eta^2}{2} + \cos \xi, \quad \mathcal{H}_1 = \sin(\sqrt{2h}t) \sin \xi. \quad (1.13)$$

Таким образом, при $\nu = 0$ система (1.9) интегрируема. Ее аналитическая неинтегрируемость при $\nu \neq 0$ была показана в [6] для случая $c \neq 0$, и в [4] для случая $c = 0$ при помощи численного построения расщепляющихся сепаратрис для неустойчивого периодического решения. Кроме того, в [9] вычислены показатели Ковалевской и тем самым показана алгебраическая неинтегрируемость рассматриваемой задачи. Рассмотрим сначала процесс перехода к хаосу в данной задаче при $c = 0$.

2. Переход к хаосу при $c = 0$

Рассмотрим эволюцию фазового портрета системы (1.9) при $c = 0$ и изменении полной энергии тела h (см. (1.5)) от $+\infty$ до 0. Для этого изучим отображение за период возмущения на плоскости $(\xi \bmod 2\pi, \eta)$ для уравнений (1.8).

Рассматриваемое отображение симметрично относительно замен $(\eta \rightarrow -\eta, \xi \rightarrow \pi - \xi)$ и $(\xi \rightarrow -\xi, t \rightarrow -t)$. Это позволяет ограничиться рассмотрением динамики системы в области $\eta \geq 0, \xi \in (0, \pi)$, однако далее для наглядности мы будем приводить полные фазовые портреты. Заметим также, что основной интерес представляет поведение системы при достаточно малых η , так как при больших η слагаемыми, зависящими от ξ и t в гамильтониане (1.9), можно пренебречь, и движение становится близким к интегрируемому. На фазовом портрете это проявляется в том, что при увеличении η инвариантные кривые все меньше отличаются от горизонтальных прямых.

Отметим, что существует *два дополняющих друг друга механизма хаотизации* фазового портрета:

- *трансверсальное пересечение неустойчивых инвариантных многообразий — сепаратрис* (и возникающая при этом гомоклиническая структура отображения и подкова Смейла). Данный механизм отвечает за образование хаотического слоя вблизи неустойчивых периодических решений.

- *каскад бифуркаций удвоения периода*. После прохождения каскада бифуркаций удвоения периода фазовый портрет характеризуется наличием траекторий со сколь угодно большим периодом. Хаос, обусловленный таким поведением, можно назвать локальным, так как он связан с конкретными периодическими решениями. Глобальная же хаотизация фазового портрета вблизи каскада связана с тем, что благодаря каскаду области регулярности «дробятся» на все более мелкие части, вокруг которых образуется хаос по первому механизму хаотизации.

Как мы увидим ниже, в рассматриваемой задаче совместное действие обоих механизмов приводит к полной хаотизации фазового портрета.

Рассмотрим теперь этапы хаотизации фазового портрета рассматриваемой задачи при уменьшении энергии более подробно.

Расщепление резонансных торов. При $h = +\infty$ система (1.9) является интегрируемой, а соответствующий фазовый портрет на плоскости (ξ, η) имеет вид горизонтальных прямых, причем каждой прямой соответствует своя частота вращения по ξ . При уменьшении энергии ин-

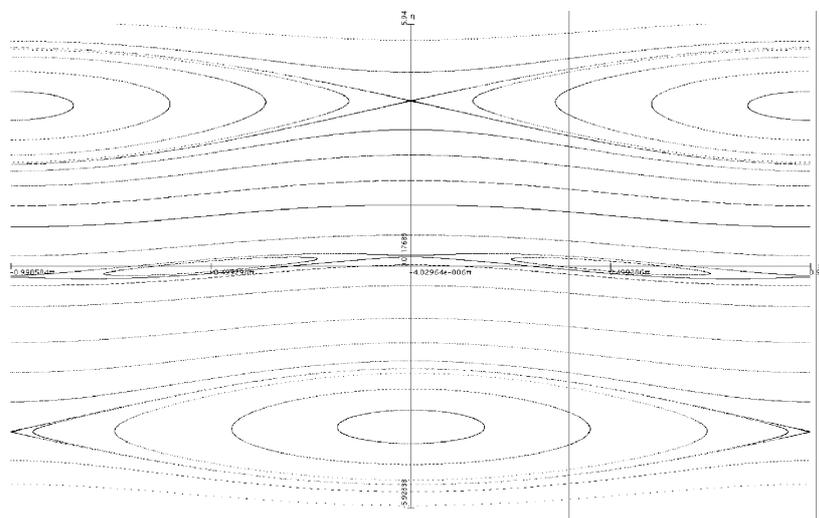


Рис. 2. Фазовый портрет при $c = 0$, $h = 8$.

вариантные кривые, для которых частота вращения по ξ соизмерима с частотой вынуждающей силы $\sqrt{2h}$ (так называемые резонансные торы) расщепляются. На рисунке 2 приведен соответствующий фазовый портрет системы при достаточно большой, но уже не бесконечной энергии. Как видно из рисунка, расщепление резонансных торов при этом значении h достаточно значительно, однако фазовый портрет все еще близок к интегрируемому случаю. Определяющими для фазового портрета в данном случае являются резонансы (периодические решения) первого порядка. Все периодические решения, которые «материализовались» при добавлении возмущения (уменьшении энергии), на рисунке 2 пронумерованы. Резонансы более высоких порядков при данном значении энергии не «материализуются», то есть расщепляются слабо и почти не отличаются от обычных торов.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Неподвижным точкам под номерами 1 и 2 на рисунке 2 соответствуют перманентные вращения тела вокруг осей Ox и Oy . Причем разным точкам с одинаковыми номерами соответствуют одинаковые вращения в противоположных направлениях. Неподвижные точки под номерами 3 и 4 со-

ответствуют периодическим в абсолютном пространстве решениям, которые, следуя [1], будем называть хореографиями. Во время движения по соответствующим им периодическим решениям апексы Ox и Oy описывают замкнутые кривые в виде восьмерок, а третий апекс Oz движется по окружности в вертикальной плоскости.

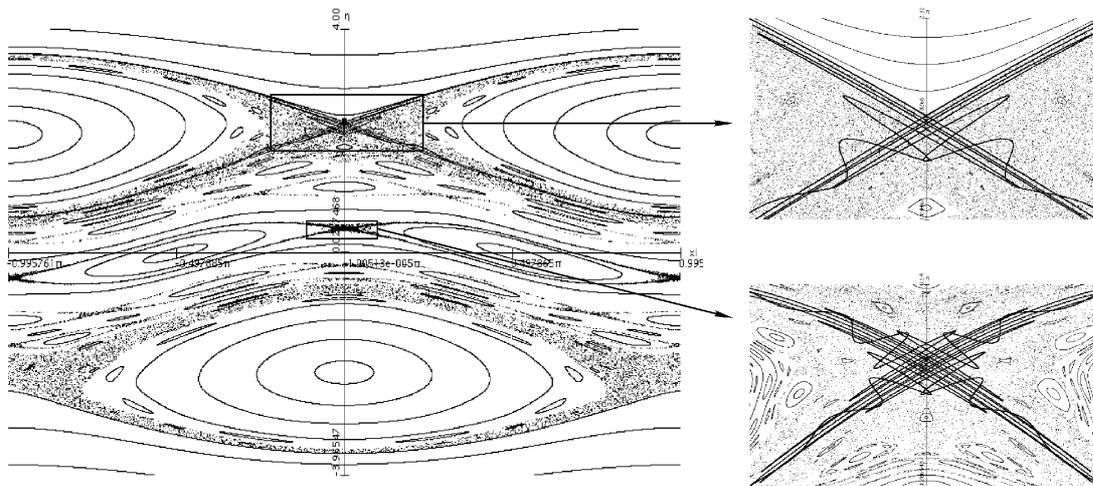


Рис. 3. Фазовый портрет при $c = 0$, $h = 2.5$.

Гомоклиническая структура отображения. При уменьшении энергии происходит расщепление сепаратрис вблизи неустойчивых периодических решений. При этом рождаются узкие хаотические слои вокруг устойчивых периодических решений различного порядка (см. рис. 3). Методику построения сепаратрис можно найти в [12].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Интересно, что верхняя пара сепаратрис периодического решения, соответствующего неустойчивой хореографии, практически не расщепляется по сравнению с нижней парой (см. рис. 3 справа вверху). Отметим, что такая ситуация наблюдается почти во всем промежутке изменения h (за исключением достаточно малых значений).

При дальнейшем уменьшении энергии торы, разделяющие хаотические слои, разрушаются, а хаотические слои сливаются друг с другом. При этом сепаратрисы, соответствующие различным неподвижным точкам, трансверсально пересекают друг друга. После слияния всех хаотических слоев образуется один хаотический слой, образованный сетью пересечений сепаратрис различных порядков. Соответствующий фазовый портрет и пересечения сепаратрис неустойчивых неподвижных точек 1, 2, 3, 4, 5 и 7 порядков приведены на рис. 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из теоремы о замыкании [8] и существования промежуточных пересечений сепаратрис высокого порядка следует, что сепаратрисы, соответствующие верхней и нижней неподвижным точкам первого порядка на рис. 4, также пересекаются, а их замыкания совпадают. Однако, вблизи критического значения h , при котором разрушается последний инвариантный тор, разделяющий хаотические слои, это пересечение может происходить на очень больших расстояниях (в смысле числа итераций) от неподвижных точек. Таким образом, для нахождения первого пересечения сепаратрис понадобится экспоненциально большое время.

Каскады бифуркаций удвоения периода. На следующем этапе хаотизации, при уменьшении энергии оставшиеся острова регулярности разрушаются через каскады бифуркаций удвоения периода. Каскады представляют собой бесконечную последовательность бифуркаций удвоения периода (или кратных увеличений периода) при изменении параметра системы в конечных

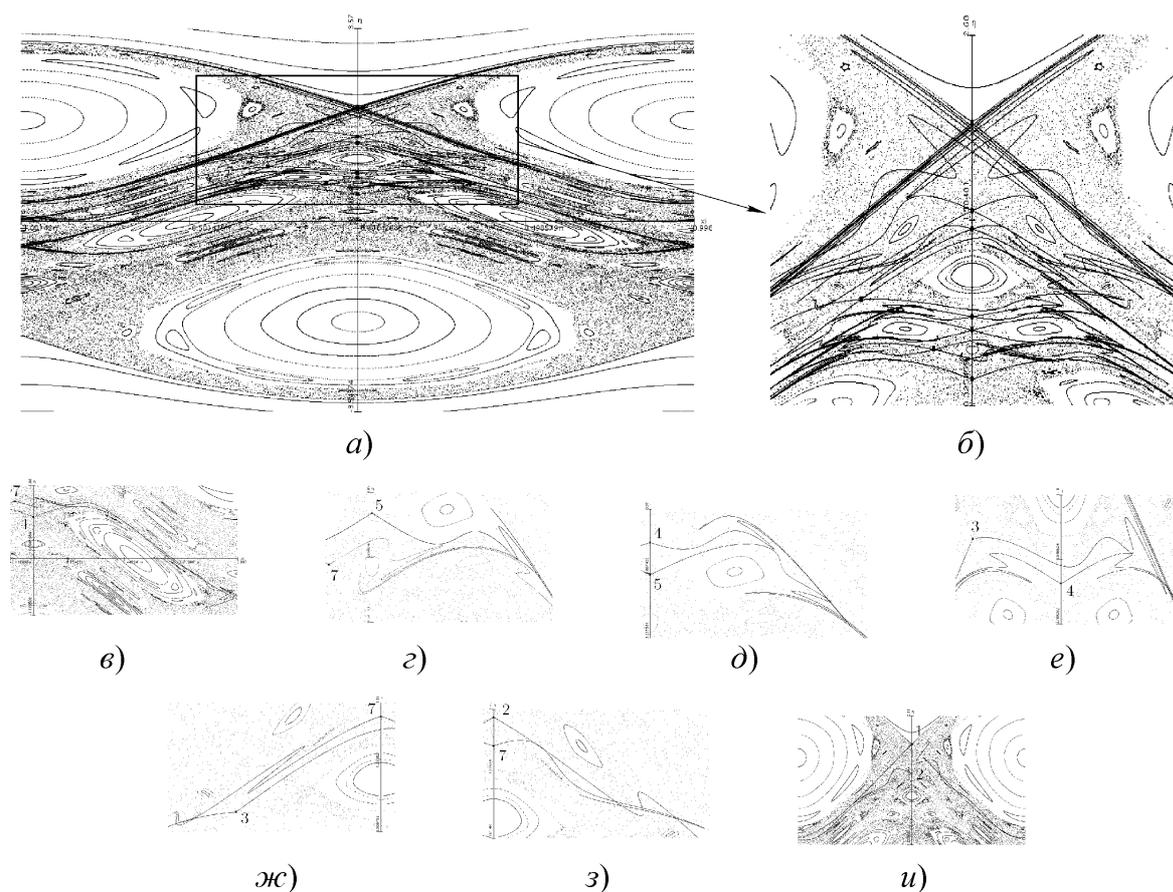


Рис. 4. Фазовый портрет и пересечения сепаратрис 1, 2, 3, 4, 5 и 7 порядков при $c = 0$, $h = 2$. а), б) — фазовый портрет и его увеличение в области построения сепаратрис, в)–и) — последовательные пересечения сепаратрис. Числами около неподвижных точек указаны их периоды.

пределах. Более подробно различные типы бифуркаций периодических решений и каскады бифуркаций описаны в Приложении. После прохождения каскадов образуется достаточно однородный хаотический слой вблизи начала координат (рис. 5).

Отметим, что каскадам, как правило, предшествуют некоторые предварительные бифуркации. Приведем для иллюстрации схему бифуркаций при уменьшении энергии для двух наиболее важных устойчивых периодических решений первого порядка.

– *Периодическое решение 1 (рис. 2).*

- 1) бифуркация удвоения периода;
- 2) бифуркация типа вилки;
- 3) каскад бифуркаций удвоения периода.

– *Периодическое решение 3 (рис. 2).*

- 1) двойная бифуркация удвоения периода, при которой неподвижная точка сохраняет свой тип устойчивости, и из нее рождается две пары устойчивых и две пары неустойчивых решений удвоенного периода;
- 2) каскад бифуркаций удвоения периода родившейся пары устойчивых периодических решений второго порядка;

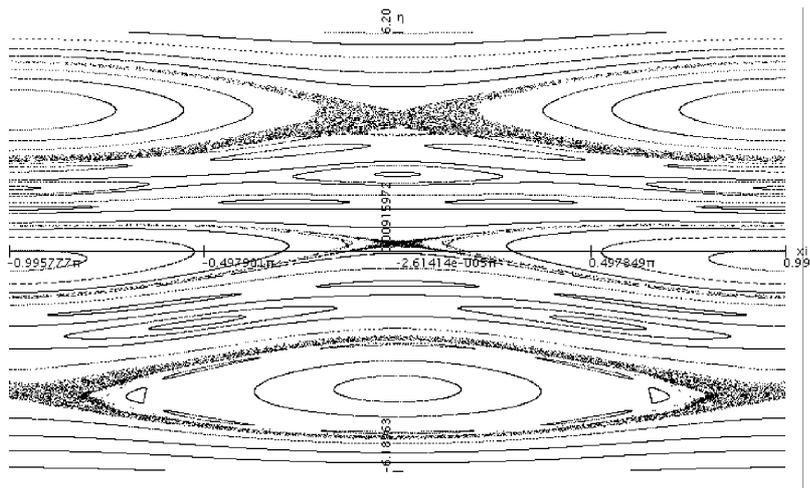


Рис. 5. Фазовый портрет и сепаратрисы неподвижных точек первого порядка при $c = 0$, $h = 1$.

- 3) бифуркация типа вилки основного решения;
- 4) каскад бифуркаций удвоения периода.

Третье периодическое решение лежит на плоскости симметрии $\xi = \pi$. В работе [13] для обратимого отображения показано, что при бифуркации периодического решения, лежащего на плоскости симметрии, получающиеся при этом новые периодические решения пересекают эту плоскость в двух точках. Кроме того, при продолжении по параметру эти решения не сходят с плоскости симметрии. Таким образом, при изучении бифуркаций удвоения третьего периодического решения достаточно следить за рождающимися периодическими решениями, лежащими на оси $\xi = \pi$. Соответствующая проекция дерева бифуркаций удвоения на плоскость (h, η) изображена на рис. 6. Константы масштабного преобразования по параметру h для первых шести бифуркаций удвоения приведены в таблице 1. Как видно из таблицы, значения коэффициентов масштабного преобразования достаточно быстро сходятся к постоянной Фейгенбаума $\delta = 8.721 \dots$

Таблица 1. Коэффициенты масштабного преобразования для дерева бифуркаций на рис. 6

Номер бифуркации	h_n	δ_n	Номер бифуркации	h_n	δ_n
2	0,287733199		2	0,734936403	
3	0,282333473		3	0,721745207	
4	0,281711468	8,681161784	4	0,720016837	7,632159557
5	0,281640344	8,745399858	5	0,719817826	8,684798818
6	0,28163219	8,721983486	6	0,719795025	8,728028583

Как уже было сказано выше, после прохождении каскадов удвоений периода фазовый портрет системы при малых η практически полностью хаотизуется. Однако, при некотором (достаточно малом) значении энергии, на оси $\xi = \pi$ вновь рождается устойчивое периодическое решение первого порядка. При дальнейшем уменьшении энергии данное решение испытывает бифуркацию типа вилки, а затем, образовавшаяся область регулярности хаотизуется через еще один каскад удвоений периода.

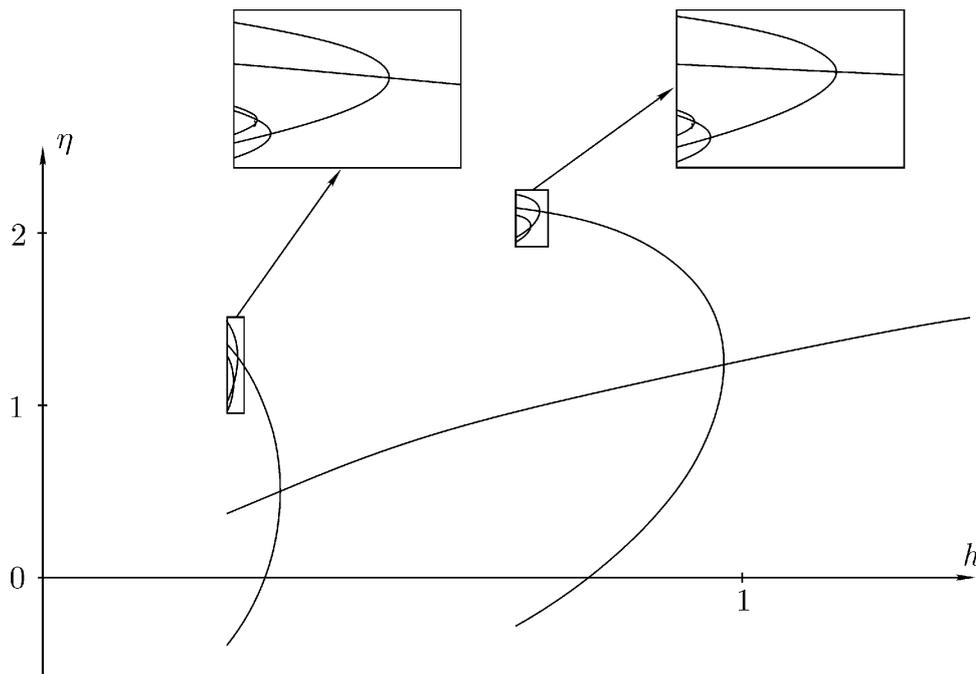


Рис. 6. Проекция дерева бифуркаций удвоения периода, начинающееся с абсолютных хореографий, на плоскость (h, η) .

Случай $c = 0, h \rightarrow 0$. Адиабатическое поведение. Рассмотрим эволюцию фазового портрета при стремлении энергии h к нулю. Для этого напомним, что при фиксированном h и бесконечно больших η система (1.9) становится интегрируемой, и все ее движения представляют собой равномерные вращения по ξ при постоянном η . Рассмотрим теперь уравнения (1.9) при больших η как периодическое по времени возмущение такой интегрируемой системы. В качестве возмущения при этом будут выступать второе и третье слагаемые в гамильтониане (1.9), а увеличению возмущения будет соответствовать уменьшение η .

Введем понятие числа вращения следующим образом

$$n = \frac{1}{2\pi} \int_0^T \dot{\xi} dt, \quad (2.1)$$

где $T = \frac{2\pi}{\sqrt{2h}}$ — период возмущения. Как обычно, добавление возмущения приводит к разрушению резонансных торов, для которых выполнено равенство $n = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$. При этом из таких резонансных торов по теореме Пуанкаре [5] рождается четное число периодических решений порядка q . Подставив (1.8) в (2.1), при больших η получим

$$n = \frac{\eta}{\sqrt{2h}} + o(\eta). \quad (2.2)$$

Как видно из (2.2), число вращения неограниченно растет при увеличении η . Таким образом, *при фиксированном h в системе (1.9) существует бесконечно много периодических решений*

первого порядка, родившихся при расщеплении резонансных торов с целыми числами вращения ($q = 1$).

Рассмотрим эволюцию этих периодических решений с заданным числом вращения n . Из (2.2) следует, что при уменьшении h периодические решения с заданным числом вращения движутся по направлению к началу координат. При достаточно малых h , слагаемые в гамильтониане уже нельзя рассматривать как малое возмущение. В результате дальнейшая эволюция неподвижных точек может быть исследована только компьютерными методами, в частности, методом продолжения периодического решения по параметру (см. Приложение). Оказывается, при дальнейшем уменьшении h неподвижные точки, родившиеся из резонансных торов, продолжают приближаться к хаотическому слою, образовавшемуся после каскадов удвоения периода. При некотором критическом значении h происходит слияние этого слоя с узким хаотическим слоем вблизи неустойчивых периодических решений с числом вращения n . Оставшиеся после этого острова регулярности вблизи устойчивых периодических решений с числом вращения n хаотизируются через каскады удвоений периода.

Описанная эволюция наблюдается для неподвижных точек первого порядка с целыми числами вращения $n \geq 3$. Таким образом, *при устремлении энергии h к нулю в системе наблюдается бесконечное число каскадов удвоений периода неподвижных точек первого порядка, спускающихся из бесконечности по h в хаотический слой.*

Отметим, что при любом, сколь угодно малом $c \neq 0$ и минимальном значении $h = h_{min} = c^2/2$, система (1.8) сводится к уравнению математического маятника и является интегрируемой. При $c = 0$ и $h = 0$ также получается интегрируемая система, однако, при сколь угодно малых $h > 0$ на фазовом портрете наблюдается хаотический слой конечной ширины (не стремящийся к нулю). Такое поведение в чем-то аналогично поведению систем с адиабатическим хаосом. Действительно, при $c = 0$ уравнения движения с гамильтонианом $\mathcal{H} = \frac{\eta^2}{2} + \sin(\sqrt{2ht}) \sin \xi$ при малых h можно рассматривать как адиабатическую систему с медленно меняющимся параметром $\tau = \sqrt{2ht}$: $\dot{\tau} = \sqrt{2h} \rightarrow 0$. Методы исследования таких систем развиты в [7]. Отметим, что эти методы тесно связаны с изучением скачков адиабатического инварианта при переходе через сепаратрисы гиперболических неподвижных точек (периодических решений), а также получением явных критериев для расщепления этих сепаратрис. Отличительной особенностью нашей задачи является смена устойчивости основных периодических решений в течение периода возмущения. В результате этого техника, развитая в [7], становится не применима. Тем не менее, эксперименты показывают, что при $h \rightarrow 0$ неустранимым образом присутствует некоторая зона хаоса. Интересным представляется вопрос о нахождении предельного при $h \rightarrow 0$ значения η , ограничивающего этот хаотический слой.

3. Случай $c \neq 0$

Система (1.9) является двухпараметрической, поэтому в общем случае необходимо исследование системы на плоскости параметров (c, h) . Здесь мы ограничимся рассмотрением конкретного значения $c = 1$, хотя, как показывают расчеты, при других c общие закономерности в эволюции хаоса сохраняются.

Опишем кратко основные этапы эволюции фазового портрета.

1. При $h = +\infty$ (так же как и в случае $c = 0$) система (1.9) является интегрируемой, а фазовый портрет расслоен на параллельные прямые.



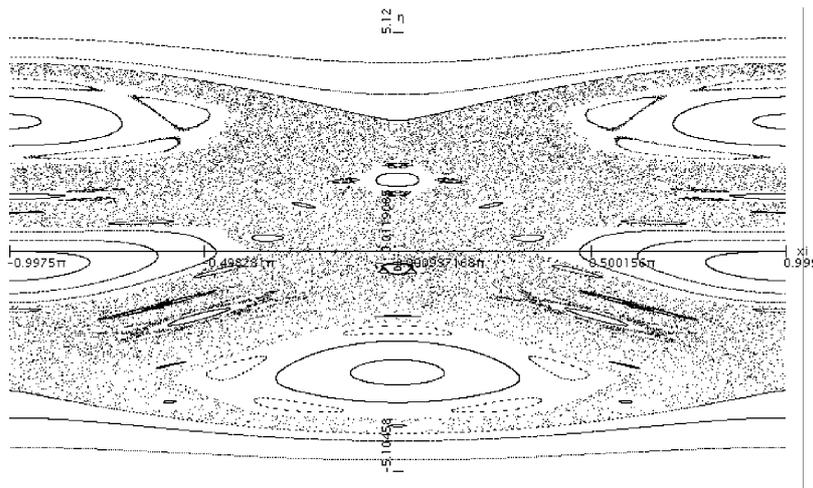


Рис. 7. Фазовый портрет при $c = 1$, $h = 8$.

2. При уменьшении h происходит расщепление резонансных торов и увеличение соответствующих хаотических слоев (см. рис. 7). В данном случае уравнения (1.9) инвариантны только относительно замены $(\xi \rightarrow -\xi, t \rightarrow -t)$, поэтому фазовый портрет симметричен только относительно плоскости $\xi = 0$. Это приводит к тому, что при достаточно больших энергиях решения 1 (рис. 2) отсутствуют, а одно из решений 2 является устойчивым.
3. При дальнейшем уменьшении h образовавшиеся хаотические слои объединяются в один (см. рис. 8). Данный этап качественно ничем не отличается от рассмотренного ранее случая $c = 0$.
4. Почти все острова регулярности в образовавшемся хаотическом слое (так же как и в случае $c = 0$) разрушаются через каскады бифуркаций удвоения периода. Исключение в рассматриваемом случае $c = 1$ составляют остров регулярности вокруг решения номер 2 и некоторые мелкие резонансы высокого порядка (см. рис. 9). Отметим, что в общем случае (при $c \neq 0$) и они могут хаотизоваться. Например, при достаточно малых c решение 2 теряет устойчивость через бифуркацию типа вилки. Однако, в дальнейшем оно снова бифурцирует и становится устойчивым.
5. Дальнейшее уменьшение h приводит к росту острова регулярности вокруг решения 2 и уменьшению хаотического слоя (см. рис. 10). Завершается этот процесс при $h = h_{min} = c^2/2$ переходом к интегрируемой системе (математический маятник). При переходе появляются так называемые меандровые торы, к описанию которых мы и переходим.

4. Меандровые торы

Рассмотрим подробнее эволюцию фазового портрета вблизи минимального значения энергии, т. е. вблизи математического маятника. На фазовом портрете существует пара периодических решений первого порядка (устойчивое и неустойчивое). Оказывается, что при увеличении энергии h (добавлении возмущения) вблизи устойчивого периодического решения свойство закручивания отображения уже не выполняется. Результатом нарушения закручивания является

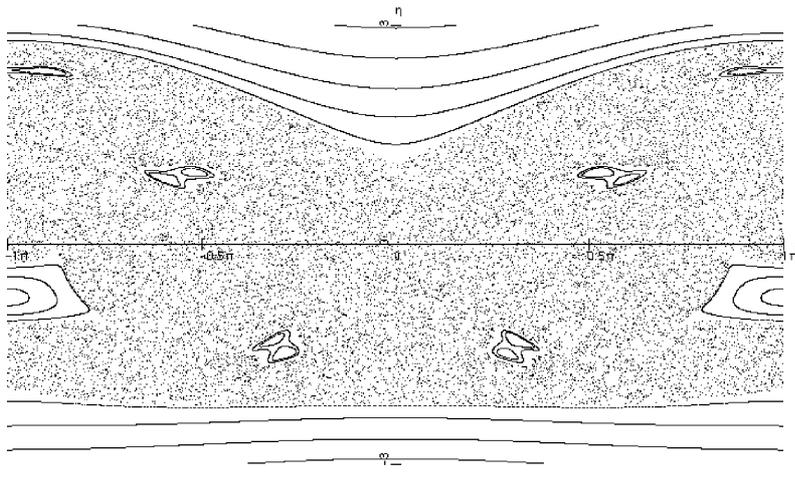


Рис. 8. Фазовый портрет при $c = 1, h = 4.5$.

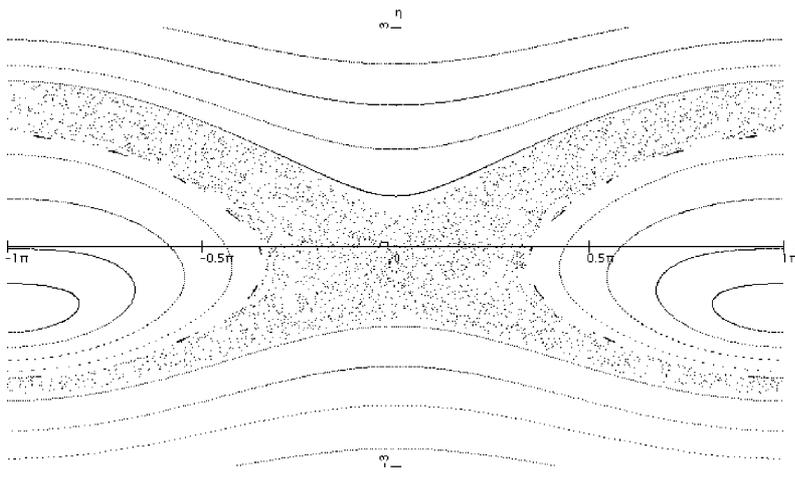
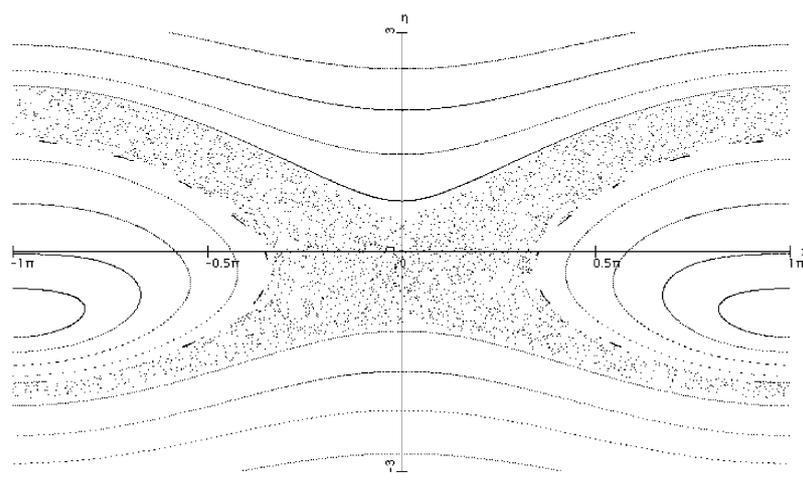
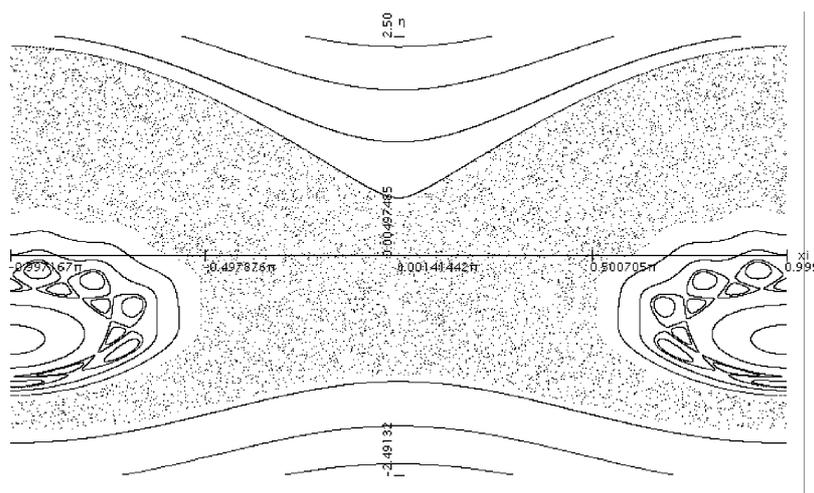


Рис. 9. Фазовый портрет при $c = 1, h = 0.935$.

появление *меандровых торов* [14], для которых радиус не может быть представлен как однозначная функция угла (см. рис. 11 и 12). Меандровые торы в небесномеханической задаче Хилла были обнаружены в [15].

Вкратце опишем механизм образования меандровых торов. Так как свойство закручивания больше не выполняется, то экстремум (в данном случае максимум) числа вращения не совпадает с основным периодическим решением, а лежит на некоторой инвариантной кривой (торе). В результате, по разные стороны от этой кривой существуют резонансные торы (далее резонансы) с одинаковыми числами вращения $n = p/q, p, q \in \mathbb{N}$. При увеличении возмущения (росте h) максимальное значение числа вращения приближается к величине p/q , в результате чего резонансы приближаются друг к другу. Кроме того, с ростом h увеличивается их расщепление. При некотором критическом значении h^* резонансы сливаются, а сепаратрисы, принадлежащие разным резонансам, пересекаются друг с другом. После этого появляются

Рис. 10. Фазовый портрет при $c = 1$, $h = 0.510152$.Рис. 11. Меандровые торы вблизи резонансов с числом вращения $n = 2/9$ при $c = 1$, $h = 0.5539$.

торы, огибающие устойчивые периодические решения обоих резонансов, которые и называют меандровыми. При дальнейшем увеличении h устойчивые периодические решения одного резонанса приближаются к неустойчивым решениям другого и затем взаимно уничтожаются. Уничтожение происходит в момент, когда максимальное значение числа вращения становится равно p/q .

Отметим, что меандровые торы существуют в достаточно узком интервале энергий $h \in (h^*, h(n_{max} = p/q))$. Так для меандровых торов, изображенных на рис. 11 и 12, этот интервал имеет порядок 10^{-4} . Кроме того, ширина меандрового тора сильно зависит от величины расщепления исходных резонансных торов. Поэтому лучше всего на фазовом портрете видны меандровые торы, рождающиеся из резонансов малого порядка на достаточно большом удалении от интегрируемого случая.

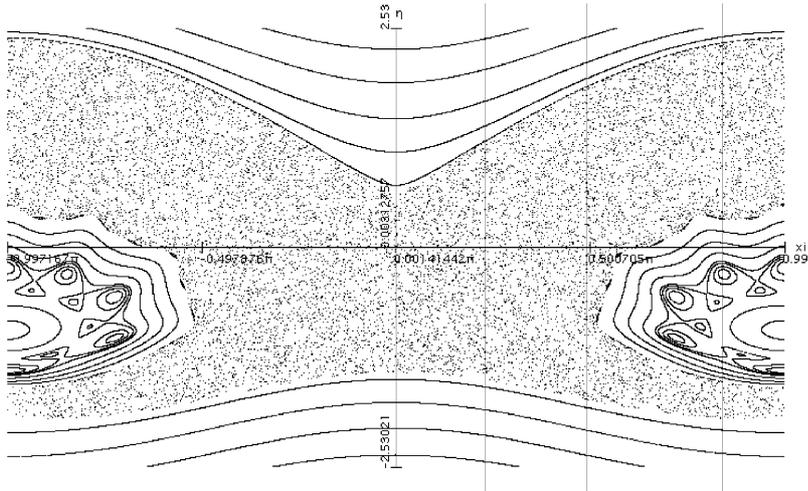


Рис. 12. Меандровые торы вблизи резонансов с числом вращения $n = 1/4$ при $c = 1$, $h = 0.57362$.

5. Приложение. Методы исследования отображений

5.1. Поиск неподвижных точек отображения

Здесь и далее мы будем рассматривать сохраняющие площадь отображения плоскости на саму себя $T(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, возникающие как отображение через период для неавтономной системы с одной степенью свободы, или как отображение Пуанкаре для автономной гамильтоновой системы с двумя степенями при фиксированной энергии. Поиск неподвижной точки отображения сводится к численному решению уравнения

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}. \quad (5.1)$$

Если матрица монодромии $L = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}}$ отображения в окрестности неподвижной точки имеет собственные значения, отличные от 1, то неподвижная точка является изолированной и может быть найдена с помощью метода Ньютона. Итерационная формула для нахождения очередного приближения неподвижной точки в этом случае имеет вид

$$(L - E)(\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i) = -(T(\mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_i). \quad (5.2)$$

Если отображение индуцировано фазовым потоком $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, то матрицу монодромии можно найти с помощью решения уравнений в вариациях

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})\delta \mathbf{x}. \quad (5.3)$$

Для этого в качестве начальных условий для $\delta \mathbf{x}$ выберем малые смещения вдоль координатных осей ($\delta \mathbf{x}_{1,2}^0 = (\varepsilon, 0), (0, \varepsilon)$). Проинтегрируем одновременно уравнения движения и (5.3) от точки \mathbf{x}_0 до следующего пересечения с плоскостью сечения. Получившиеся в результате этого векторы $\delta \mathbf{x}_i$, деленные на ε , представляют собой столбцы матрицы монодромии $L = \frac{1}{\varepsilon}(\delta \mathbf{x}_1, \delta \mathbf{x}_2)$.

Устойчивость неподвижной точки отображения в линейном приближении определяется мультипликаторами — собственными числами матрицы монодромии $\lambda_{1,2}$. Так как отображение $T(\mathbf{x})$ сохраняет площадь, то $\det L = \lambda_1 \lambda_2 = 1$. Следовательно, собственные числа либо комплексно сопряжены и лежат на единичной окружности, либо действительны и взаимнообратны.

В случае комплексно сопряженных собственных чисел неподвижная точка является устойчивой (эллиптического типа). Если же собственные числа действительны, то неподвижная точка неустойчива (гиперболического типа, или гиперболического типа с инверсией, если $\lambda_i < 0$). Вывод об устойчивости параболической ($\lambda_1 = \lambda_2 = -1$) и вырожденной ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1$) неподвижных точек в линейном приближении сделать нельзя.

5.2. Продолжение неподвижных точек отображения по параметру

Рассмотрим отображение плоскости на саму себя, зависящее от параметра $T(\mathbf{x}, \mu)$. Пусть \mathbf{x}_0 — неподвижная точка отображения при значении параметра $\mu = \mu_0$. При малом изменении параметра $\mu = \mu_0 + \delta\mu$ она переходит в близкую ей неподвижную точку, первое приближение которой $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}$ вычисляется из уравнения

$$(L - E)\delta\mathbf{x} = -\frac{\partial T}{\partial \mu}(\mathbf{x}_0, \mu_0)\delta\mu \quad (5.4)$$

Дальнейшее уточнение положения неподвижной точки происходит с помощью описанного выше метода Ньютона. Последовательное применение описанной процедуры позволяет строить семейство неподвижных точек отображения при изменении параметра.

5.3. Бифуркации неподвижных точек отображения

Под бифуркацией мы будем понимать точку ветвления, рождения или исчезновения неподвижной точки при изменении параметров системы. Возможные сценарии бифуркаций ограничены требованием сохранения индекса Пуанкаре [10]. Индекс Пуанкаре для замкнутой кривой C , непроходящей через неподвижные точки отображения, определяется как число оборотов вектора $\theta(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$ при перемещении вдоль кривой. Индекс Пуанкаре неподвижной точки определяется как индекс кривой из окрестности рассматриваемой неподвижной точки и обходящей только ее. Легко показать, что индекс Пуанкаре эллиптической точки равен $+1$, гиперболической -1 , и гиперболической с инверсией $+1$. Индекс произвольного контура равен сумме индексов охватываемых им неподвижных точек. По определению индекс Пуанкаре является целым и должен сохраняться при изменении параметров системы, вследствие аналитичности отображения как функции параметров. Поэтому *сумма индексов неподвижных точек в заданной области при изменении параметров системы сохраняется* (при этом полагается, что ни одна из точек не пересекает границу области). Сформулированное правило жестко ограничивает возможные бифуркации неподвижных точек. Рассмотрим некоторые бифуркации, упоминающиеся в данной статье:

1. *Бифуркация типа вилки.* При изменении параметра мультипликаторы неподвижной точки проходят через значение $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. При этом тип точки меняется с эллиптического на гиперболический, а индекс Пуанкаре изменяется с $+1$ на -1 . В результате, вблизи исходной точки рождаются (поглощаются) две устойчивых (неустойчивых) неподвижных точки с индексами $+1(-1)$.
2. *Бифуркация удвоения периода.* При изменении параметра мультипликаторы неподвижной точки проходят через значение $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. При этом тип точки меняется с эллиптического на гиперболический с инверсией, а индекс Пуанкаре сохраняется. Однако для отображения $T^2(\mathbf{x})$ индекс Пуанкаре изменяется с $+1$ на -1 , в результате чего вблизи исходной точки рождаются (поглощаются) две устойчивые (неустойчивые) неподвижные точки второго порядка с индексами $+1(-1)$.

Заметим, что при уходе от интегрируемого случая наиболее типична потеря устойчивости неподвижной точки с рождением пары устойчивых неподвижных точек удвоенного периода. Более того, подобные бифуркации могут образовывать бесконечные последовательности, к описанию которых мы и перейдем.

5.4. Каскад бифуркаций удвоения периода

Рассмотрим бесконечную последовательность бифуркаций удвоения периода, происходящих при значениях параметра $\mu = \mu_i$, $i \in \mathbb{N}$. В промежутке $\mu \in (\mu_i, \mu_{i+1})$ отображение $T(\mathbf{x}, \mu)$ имеет устойчивое периодическое решение периода 2^k . При $\mu = \mu_{k+1}$ оно становится неустойчивым, а в его окрестности рождается устойчивое периодическое решение удвоенного периода 2^{k+1} . Такая последовательность бифуркаций происходит при изменении параметра в конечных пределах, обладает универсальным асимптотическим поведением и называется *каскадом бифуркаций удвоения периода* [10]. Универсальность поведения заключается в том, что показатель скорости сходимости $\delta_i = \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_{i+2} - \mu_{i+1}}$ при увеличении i стремится к универсальной *постоянной Фейгенбаума*, не зависящей от вида отображения. Для двумерных консервативных отображений значение константы Фейгенбаума равно $\delta = 8.72109\dots$

Кроме рассмотренного свойства универсальности, для двумерных отображений существует еще два универсальных фактора. Оказывается, что в надлежащем образом выбранной системе координат структура периодических траекторий повторяет себя с масштабами $\alpha = 4.018\dots$ и $\beta = 16.363\dots$ вдоль координатных осей.

Список литературы

- [1] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. *Абсолютные и относительные хореографии в динамике твердого тела* // Нелинейная Динамика, 2005, т. 1, № 1, с. 123–141.
- [2] Борисов А. В., Симаков Н. Н. *Бифуркации удвоения периода в динамике твердого тела* // Регулярная и хаотическая динамика, 1997, т. 2, № 1, с. 64–75.
- [3] Буров А. А. *Об ограниченной постановке задачи о движении тяжелого твердого тела* // ПММ, 2004, т. 68, вып. 6, с. 958–963.
- [4] Довбыш С. А. *Численное исследование двух задач механики: трансверсальное пересечение сепаратрис колмогоровская устойчивость*. В кн. *Численный анализ, математическое моделирование и их применение в механике* // М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
- [5] Козлов В. В. *Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой динамике* // Ижевск: Изд-во УдГУ, 1995, 432 с.
- [6] Козлов В. В., Трещев Д. В. *Неинтегрируемость общей задачи о вращении динамически симметричного тяжелого твердого тела с неподвижной точкой II* // Вестник Моск. ун-та. Сер. мат., мех., 1986, № 1, с. 39–44.
- [7] Нейштадт А. И. *Об изменении адиабатического инварианта при переходе через сепаратрису* // Физика плазмы, 1986, т. 12, вып. 8., с. 992.
- [8] Трещев Д. В. *Введение в теорию возмущений гамильтоновых систем* // М.: ФАЗИС, 1998, 184 с.
- [9] Borisov A. V., Dudoladov S. L. *Kovalevskaya Exponents and Poisson Structures* // Reg. & Chaot. Дуп., 1999, V. 4, № 3, p. 13–20.

- [10] Feigenbaum M. J., Greene J. M., MacKay R. S., Vivaldi V. *Universal behaviour in families of area-preserving maps* // *Physica 3D*, 1981, p. 468–486.
- [11] MacKay R. S. *Renormalisation in area-preserving maps* // World Scientific, 1993, 324 p.
- [12] Parker T. S., Chua L. O. *Practical numerical algorithms for chaotic systems* // New York: Springer-Verlag, 1989.
- [13] Rimmer R. *Generic bifurcations from fixed points of involutory area preserving maps* // *Diff. Equations*, 1978, V. 29, p. 329, и *P. Math. Res. Paper, La Trobe U., Melbourne*, 1979, V. 79, №. 7.
- [14] Simo C. *Invariant curves of perturbations of non twist integrable area preserving maps* // *Reg. & Chaot. Дин.*, 1998, V. 3, p. 180–195.
- [15] Simo C., Stuchi T. J. *Central stable/unstable manifolds and the destruction of KAM tori in the planar Hill problem* // *Physica D*, 2000, V. 140, № 1-2, p. 1–32. См. также кн. (пер. с англ.): Симо К., Смейл С., Шенсине А. *Современные проблемы хаоса и нелинейности* // Ижевск: ИКИ, 2002, 304 с.
- [16] Wiggins S. *Chaotic transport in dynamical systems* // NY, Springer, 1992.