

Численное исследование вращения твердого тела под действием суммы постоянного и диссипативного возмущающих моментов

К. Г. Тронин

Институт компьютерных исследований
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, Ижевск, ул. Университетская, 1
E-mail: kg@ics.org.ru

Получено 26 августа 2005 г.

Работа посвящена исследованию эволюции вращения твердого тела под действием суммы постоянного и диссипативного возмущающих моментов. В предположении малости возмущающих моментов при помощи численных методов показано, что для всех исследованных начальных условий твердое тело асимптотически стремится к вращению либо вокруг оси наибольшего, либо вокруг оси наименьшего главного центрального момента инерции. Показано также, что на плоскости начальных условий расположение областей, соответствующих различным асимптотикам при малом возмущении, близко к случайному.

Ключевые слова: возмущенное движение, вероятностные эффекты, диаграммы асимптотического движения.

K. G. Tronin

Numerical analysis of rotation of a rigid body subject to the sum of a constant and dissipative moment

The paper explores the evolution of rotation of a rigid body influenced by a constant and dissipative disturbing moments. With the assumption that the disturbing moments are small, it has been shown numerically that for almost all initial conditions the body's motion tends asymptotically to a steady rotation around a principal axis with either largest or smallest moment of inertia. On the plane of initial conditions, the points corresponding to these two types of ultimate rotation have been shown to be distributed almost randomly.

Keywords: disturbed motion, probabilistic phenomena, diagrams of asymptotic motion.

Mathematical Subject Classifications: 70E99

1. Введение

В работе [1] рассмотрена (качественно) эволюция вращения несимметричного твердого тела под действием двух малых возмущающих моментов: постоянного в связанных с телом осях и диссипативного. В подвижной системе координат с началом в центре масс тела, оси которой направлены по главным центральным осям инерции, уравнения для этой задачи имеют вид

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr &= \varepsilon(M_1 - N_1p) \\ B\dot{q} + (A - C)pr &= \varepsilon(M_2 - N_2q) \\ C\dot{r} + (B - A)qp &= \varepsilon(M_3 - N_3r), \end{aligned} \quad (1.1)$$

в которых p, q, r — проекции вектора угловой скорости на координатные оси, A, B, C — главные центральные моменты инерции тела. В правой части (1.1) стоят компоненты возмущающего момента: ε — малый положительный параметр, $M_i \neq 0$, $N_i > 0 (i = 1, 2, 3)$ — постоянные. В [1] рассмотрен случай $A > B > C, M_1 > 0, M_3 > 0$.

Невозмущенная система (1.1) представляет собой задачу Эйлера-Пуансо и обладает двумя интегралами

$$E = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \quad G^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2. \quad (1.2)$$

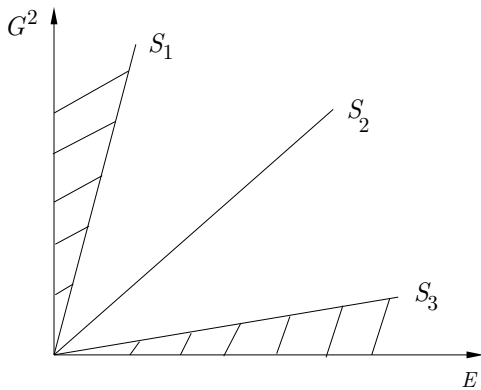


Рис. 1

Для действительных значений p, q, r область возможных движений $V = \{(E, G^2) : 2CE \leq G^2 \leq 2AE, E > 0\}$ на плоскости E, G^2 ограничена углом, сторонам которого соответствуют вращения вокруг осей наибольшего (луч S_1) и наименьшего (луч S_3) моментов инерции (рис. 1). Лучу $S_2 = \{G^2 = 2BE, E > 0\}$ соответствует вращение вокруг оси среднего момента инерции. Уравнение $G^2 = 2BE$ определяет в пространстве угловых скоростей две пересекающиеся плоскости, которые разбивают все пространство на четыре области. Две из них через отображение (1.2) проецируются на часть V , лежащую выше $S_2 (V_1)$, другие две — на часть, лежащую ниже $S_2 (V_3)$. Области V_1 и V_3 соответствуют вращению вокруг оси наибольшего и наименьшего момента инерции. Одно значение G^2 определяет

два возможных направления вращения твердого тела, отличающихся друг от друга только знаком. Поэтому каждая из областей, на самом деле, состоит из двух частей $V_{\pm 1}$ и $V_{\pm 3}$.

В процессе эволюции системы (1.1) точки фазовой траектории переходят из одной области в другую. В работах, например [1, 2, 3], показано, что такие переходы при $\varepsilon \rightarrow 0$ необходимо рассматривать как вероятностные.

В настоящей работе проводится численное исследование эволюции вращения твердого тела под одновременным действием постоянного и диссипативного возмущающих моментов.

2. Дифференциальные уравнения

Перепишем уравнения (1.1) через компоненты вектора кинетического момента

$$\dot{M} = M \times \mathbf{A}M - \varepsilon(\mathbf{B}M + \mathbf{K}), \quad (2.1)$$



где $\mathbf{A} = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_2, b_3)$ — постоянные матрицы, $a_i = 1/I_i$, I_i — главные моменты инерции, $\mathbf{K} = (K_1, K_2, K_3)$ — произвольный постоянный вектор, ε — малый параметр (также будем считать, что $a_1 < a_2 < a_3$). Интегралы (1.2) примут вид

$$E = \frac{1}{2} (\mathbf{M}, \mathbf{A}\mathbf{M}), \quad G^2 = \mathbf{M}^2. \tag{2.2}$$

Систему (2.1) удобно исследовать в переменных Андуайе-Депри L, G, l, g , связь которых с кинетическим моментом определяется соотношениями

$$M_1 = \sqrt{G^2 - L^2} \sin l, \quad M_2 = \sqrt{G^2 - L^2} \cos l, \quad M_3 = L, \quad G^2 = M^2. \tag{2.3}$$

На рис. 2 приведены траектории системы (2.1) на плоскости $(L/G, l)$ для $\varepsilon = 0, \varepsilon = 0.1, \varepsilon = 0.01, \varepsilon = 0.001$, на котором отчетливо проявляется наличие двух асимптотически устойчивых точек (обозначены цифрами 1 и 2), к которым в конечном итоге приходит система (2.1).

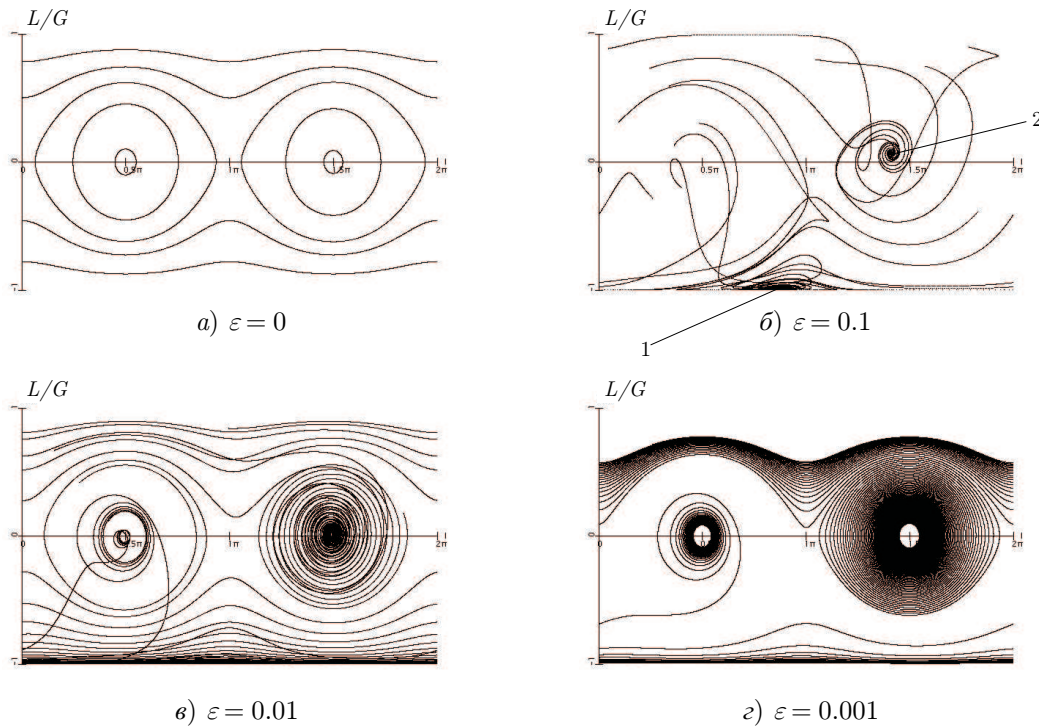


Рис. 2. Траектории системы (2.1) при значениях параметров: $E = 1$; $\mathbf{A} = \text{diag}(\frac{1}{3}, 1, 1.5)$; $\mathbf{B} = \text{diag}(1, 1, 1)$; $\mathbf{K} = (1, 1, 1)$ и $\varepsilon = 0$ (а); 0.1(б); 0.01(в); 0.001(г).

При постоянных параметрах траектория движения определяется соотношением между малым параметром ε и энергией невозмущенной системы (2.2). Соотношение этих параметров также определяет, к какой из асимптотических точек придет траектория (рис. 3).

Изменение постоянного момента изменяет положение асимптотических точек (рис. 4). Матрица диссипативного момента (\mathbf{B}) определяет характер асимптотического поведения системы: энергия либо асимптотически стремится к постоянному значению, либо растет пропорционально G^2 .

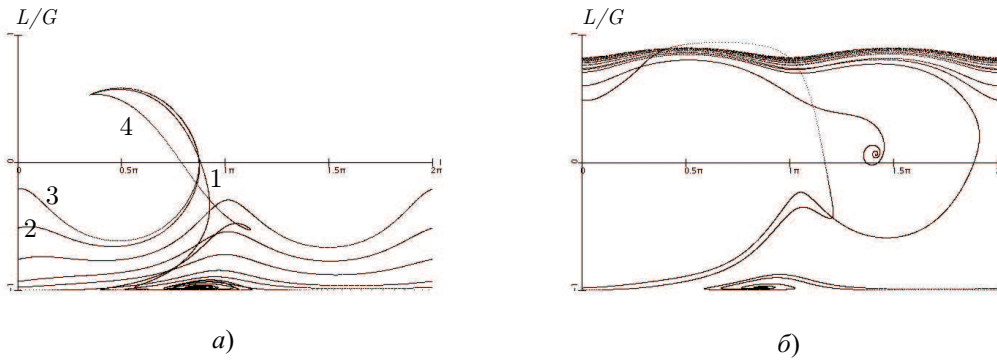


Рис. 3. Траектории движения системы (2.1) для $\epsilon = 0.1$ при различных энергиях и постоянных других параметрах: *a, б* — различные начальные условия.

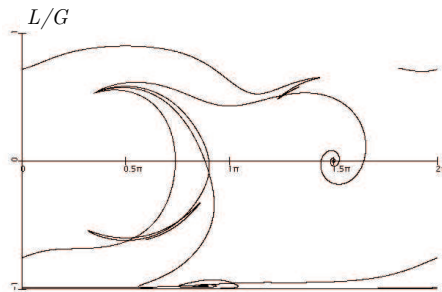


Рис. 4. Изменение траектории системы (2.1) при изменении компонент вектора постоянного возмущающего момента.

Из рис. 2 видно (и это в принципе понятно из вида уравнений (2.1)), что при уменьшении параметра ϵ возмущенная система длительное время движется вдоль невозмущенной траектории. При этом определенность в том, к какой асимптотике придет система исчезает. Для заданных параметров $E = 1$; $\mathbf{A} = \text{diag}(1/3, 1, 1.5)$; $\mathbf{B} = \text{diag}(1, 1, 1)$; $\mathbf{K} = (1, 1, 1)$ в зависимости от начальных условий возможно два асимптотических движения (см. рис. 5). Одному из них, который изображен в виде областей черного цвета, соответствует вращение вокруг оси наибольшего главного момента инерции, второму асимптотическому движению соответствует вращение вокруг оси наименьшего главного момента инерции. На рис. 6 изображены две различные траектории, приводящие к различным асимптотикам, а также асимптотическое поведение компонент вектора кинетического момента. Согласно приведенным данным, с учетом знаков M_1 и M_3 , первая асимптотика (изображенная черным цветом) принадлежит области V_{-1} , а вторая асимптотика — области V_{-3} .

Для $\epsilon = 0.01$ асимптотики разделены регулярными границами. При уменьшении возмущения ($\epsilon = 0.001$) границы асимптотик все еще остаются регулярными, но при этом видно, что их распределение на плоскости начальных условий приближается к случайному. Вероятности того или иного исхода могут быть легко определены как отношение площади, занимаемой каждой из асимптотик, к общей площади плоскости начальных условий.

В работе [1] описание возмущенного движения твердого тела базируется на методе усреднения интегралов (2.2) вдоль невозмущенной системы. Предложенный же в настоящей работе

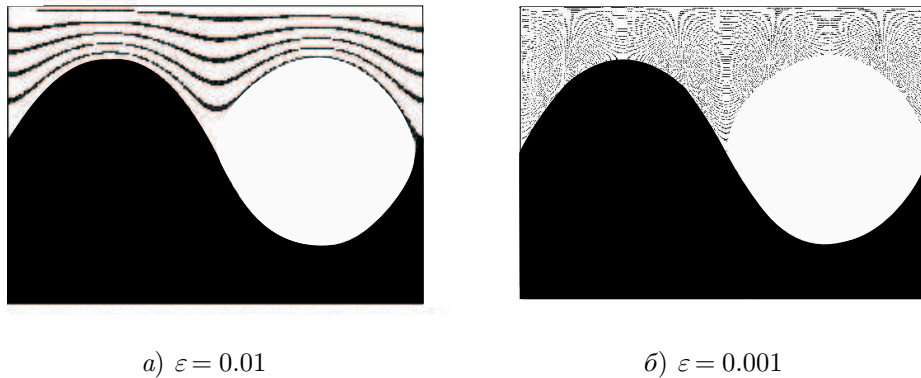


Рис. 5.

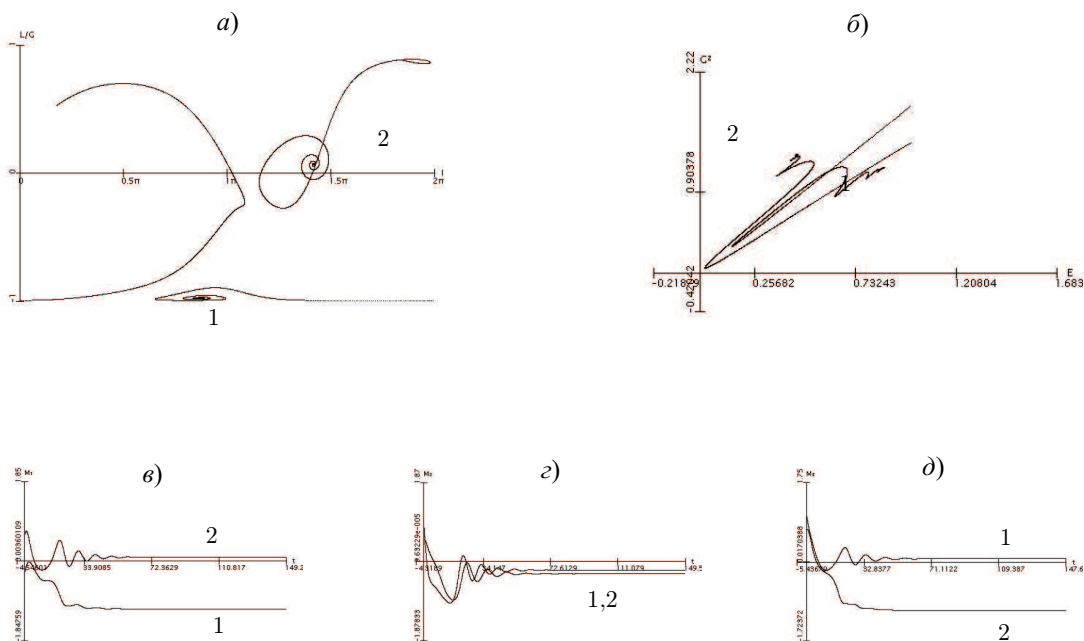


Рис. 6. Траектория системы (2.1) в плоскостях $(L/G, l)$ (а) и (E, G^2) (б) и изменение компонентов вектора кинетического момента M_1, M_2, M_3 (в–д).

метод позволяет (численно) описать движение твердого тела при произвольных параметрах полностью и точно.

Таким образом, численные методы исследования вероятностных эффектов в динамике твердого тела существенно дополняют результаты аналитических исследований.

Список литературы

- [1] Нейштадт А. И. Об эволюции вращения твердого тела под действием суммы постоянного и диссипативного возмущающих моментов // Мех. тв. тела, 1980, № 6, с. 30–36.
- [2] Нейштадт А. И. Об изменении адиабатического инварианта при переходе через сепаратрису // Физика плазмы, 1986, т. 12, вып. 8., с. 992.
- [3] Neistadt A. I. Probability phenomena due to separatrix crossing // Chaos, 1991, V. 1, № 1. p. 42.

