

## Двумерные конфигурации в трехмерной задаче четырех гравитирующих тел

**Г. А. Гальперин**

Department of Mathematics and Computer Science  
Eastern Illinois University  
600 Lincoln Avenue, Charleston IL, 61920-30996, USA  
E-mail: cfigg@ux1.cts.eiu.edu

*Получено 17 августа 2005 г.*

В работе исследуется поведение четырех гравитирующих тел («планет»), три из которых имеют нулевую массу, а четвертое является притягивающим центром («Солнцем»). Описываются все возможные случаи попадания этих четырех тел в одну плоскость, при этом существенную роль играют как арифметические, так и геометрические характеристики движения «планет».

Ключевые слова: момент уплощения, гравитирующие тела, движение планет, тор.

**G. A. Galperin**

### Two-dimensional configuration in the three-dimensional problem of four gravitating bodies

The paper concerns the behavior of four gravitating bodies. Three bodies have zero mass and are referred to “planet”. The fourth body (the “Sun”) is a massive gravitating center. The conditions under which the four bodies lie in one plane are discussed. These conditions are shown to be deeply connected with arithmetic and geometric characteristics of “planets” motion.

Keywords: flattening moment, gravitating bodies, motion of planets, torus.

Mathematical Subject Classifications: 70F15

## Введение

Рассмотрим движение четырех гравитирующих по закону Ньютона точечных тел  $O$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  в трехмерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  для всех моментов времени  $t$  из бесконечного интервала  $(-\infty, +\infty)$ .

**Определение 1.** Будем говорить, что в момент  $t_0$  произошло *уплощение*, если в этот момент все четыре тела оказались в одной плоскости. Момент  $t_0$  будем называть *моментом уплощения*.

Возникает вопрос: всегда ли в задаче четырех тел происходит уплощение?

Например, если в момент  $t_0$  сталкиваются два или более тел, то  $t_0$  — момент уплощения.

Рассмотрим правую полуось времени  $(0, +\infty)$ . Легко построить пример движения четырех одинаковых тел, никогда не попадающих в одну плоскость на промежутке времени  $(0, +\infty)$ . Для этого достаточно векторы их скоростей направить по лучам, соединяющим центр правильного тетраэдра с его вершинами (рис. 1). Однако, обратив время, получаем в момент  $t = 0$  столкновение всех четырех тел, т. е. на всем промежутке  $(-\infty, +\infty)$  уже имеется момент уплощения. Попытка построить конфигурацию из четырех тел, попарные расстояния между которыми постоянны во времени (а тогда не было бы и уплощения), также оканчиваются неудачей: из результатов книги [5] следует, что для  $n \geq 4$  гравитирующих тел такой конфигурации не существует.

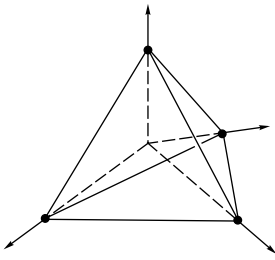


Рис. 1

В настоящей работе мы исследуем следующий частный случай этой задачи.

Будем предполагать, что точка  $O$  («солнце») закреплена неподвижно в начале координат пространства  $\mathbb{R}^3$ , а точки  $P_1$ ,  $P_2$ , и  $P_3$  («планеты») периодически вращаются вокруг солнца  $O$  по кеплеровским орбитам — эллипсам. Ниже всюду предполагается, что массы всех планет равны 0, т. е. что планеты не влияют друг на друга. Это так называемая задача четырех тел с выделенным центром.

Обозначим через  $T_k$  период вращения планеты  $P_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) и предположим для определенности, что  $T_1 \geq T_2 \geq T_3 \geq 0$ . Дадим геометрическую интерпретацию этой задачи.

Рассмотрим сферу радиуса 1 с центром в точке  $O$ . Обозначим через  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  три окружности больших кругов на этой сфере, которые являются пересечениями трех плоскостей орбит планет с этой сферой. Спроектируем на сферу движущиеся точки  $P_k$  вдоль радиусов, соединяющих центр  $O$  с  $P_k$ , и получим три движущихся по окружностям  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  точки, которые мы будем обозначать теми же буквами  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ . Движение этих точек *периодическое* (с периодами  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$ ), но, вообще говоря, *неравномерное*.

Обобщим теперь произвольным образом закон движения точек  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  по сфере, оставив только периодичность и непрерывность их движения по окружностям больших кругов (у траектории точки  $P_k$  могут иметься, например, дуги возврата, т. е. ее движение не обязано быть монотонным).

В этой работе дается полный ответ на вопрос, в каком случае момент уплощения обязательно существует, а когда такого момента может и не быть. Ответ включает в себя соотношение между периодами  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  и геометрическим расположением на сфере окружностей  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ .

В гл. I доказывается, что *для почти всех начальных состояний точек и для почти всех периодов  $T_k$  момент уплощения существует (теорема 1)*.

Далее рассматриваются два основных случая движения:

случай А) — *равномерное движение каждой из трех точек*;

случай Б) — *произвольное движение точек*.

В случае А) геометрическое расположение окружностей  $S_k$  не играет роли, а играет роль соотношение между периодами  $T_k$ . В случае Б), наоборот, основную роль играет геометрическое расположение окружностей  $S_k$ . В конце работы приводится сводная таблица всех полученных результатов.

Ниже мы всюду вместо чисел  $T_1, T_2, T_3$  будем пользоваться обратными величинами

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1}, \quad \omega_2 = \frac{1}{T_2}, \quad \omega_3 = \frac{1}{T_3},$$

которые назовем частотами вращений точек  $P_1, P_2$  и  $P_3$ . Для равномерного движения точек эти числа суть *угловые скорости*.

Из неравенств, накладываемых на периоды вращения, получаем неравенства, связывающие частоты:

$$0 < \omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3, \tag{1}$$

которые на протяжении всей работы будем считать выполненными (если не оговорено противное).

Перейдем к рассмотрению *конфигурационного пространства* нашей системы.

Конфигурационным пространством является прямое произведение трех окружностей  $S_1, S_2, S_3$ , т. е. *трехмерный тор*  $\mathbb{T}^3$ :

$$\mathbb{T}^3 = S_1 \times S_2 \times S_3.$$

Координаты на  $\mathbb{T}^3$  задаются *фазами* (угловыми координатами) точек  $P_1, P_2$  и  $P_3$  на своих окружностях (мы фиксировали начало отсчета на каждой окружности  $S_k$ ), причем  $0 \leq \varphi_k < 2\pi$  ( $k = 1, 2, 3$ ). Иногда фазы будут обозначаться через  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Траектория конфигурационной точки  $\mathbf{x} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \bmod 2\pi$  в  $\mathbb{T}^3$  может вести себя тремя качественно различными способами (см. [1]):

- (I) *быть всюду плотной в  $\mathbb{T}^3$ ;*
- (II) *всюду плотно заполнять двумерную поверхность в  $\mathbb{T}^3$ , гомотопную двумерному тору  $\mathbb{T}^2$ ;*
- (III) *быть замкнутой кривой, т. е. быть гомотопной одномерному тору  $\mathbb{T}^1$  (окружности).*

Числа  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  можно рассматривать как векторы над полем рациональных чисел  $\mathbb{Q}$ . Тогда они могут:

- (а) *быть линейно-независимыми, т. е. их линейная комбинация*

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + k_3\omega_3, \quad k_i \in \mathbb{Q}, \quad i = 1, 2, 3$$

равна нулю тогда и только тогда, когда  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ :  $rk_{\mathbb{Q}}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 3$ ;

- (б) *лежать в одной двумерной рациональной плоскости, т. е. некоторая линейная комбинация  $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + k_3\omega_3$  ( $k_i \in \mathbb{Q}$ ) равна 0, но не все  $k_i = 0$ :  $rk_{\mathbb{Q}}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 2$ ;*

- (в) *быть коллинеарными, т. е.  $k_1\omega_1 = k_2\omega_2 = k_3\omega_3$  при некоторых ненулевых  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Q}$ :  $rk_{\mathbb{Q}}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 1$ .*

Очевидно, что имеется взаимно-однозначное соответствие (I)  $\longleftrightarrow$  (а), (II)  $\longleftrightarrow$  (б), (III)  $\longleftrightarrow$  (в) (см. книгу [1], §51).

Рассмотрению этих случаев посвящены главы 1–6.



## 1. Существование момента уплощения в типичном случае движения

Типичный случай движения точек  $\{P_k\}$  — это случай (I) всюду плотной траектории конфигурационной точки в трехмерном торе  $\mathbb{T}^3$ , когда частоты  $\{\omega_k\}$  рационально независимы. Этот случай реализуется для всех периодов обращения планет вокруг солнца, кроме множества меры нуль.

**Теорема 1.** *В типичном случае движения планет существует момент уплощения.*

*Доказательство.* Натянем на векторы  $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{OP_1}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{OP_2}$ ,  $\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{OP_3}$  параллелепипед  $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$  и вычислим его ориентированный объем

$$I = \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3). \quad (1.1)$$

В дальнейшем функцию  $I$  будем для краткости именовать «якобианом».

Конфигурационная точка  $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^3$  есть образ тройки векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  при естественном отображении.

$$\text{вектор } \mathbf{e}_k \longrightarrow \text{фаза } \varphi_k.$$

При движении  $\mathbf{x}$  по  $\mathbb{T}^3$  возникает непрерывная функция  $I(\mathbf{x})$ , определяемая (1.1).

Пусть  $\mathbf{x}^+ = \mathbf{x}(0)$  — конфигурационная точка на  $\mathbb{T}^3$ , отвечающая в момент  $t = 0$  векторам  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , а  $\mathbf{x}^-$  — симметричная для  $\mathbf{x}^+$  точка, отвечающая векторам  $-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3$ . Будем предполагать, что в момент  $t = 0$  уплощения нет, тогда  $I(\mathbf{x}^+) \neq 0$ ; для определенности считаем  $I(\mathbf{x}^+) > 0$ .

Тогда

$$I(\mathbf{x}^-) = (-1)^3 I(\mathbf{x}^+) < 0.$$

В силу непрерывности якобиана  $I(\mathbf{x})$  существуют такие окрестности  $O(\mathbf{x}^+)$  и  $O(\mathbf{x}^-)$  точек  $\mathbf{x}^+$  и  $\mathbf{x}^-$ , что для произвольных точек  $\mathbf{y} \in O(\mathbf{x}^+)$  и  $\mathbf{z} \in O(\mathbf{x}^-)$  выполняются неравенства

$$I(\mathbf{y}) > 0, \quad I(\mathbf{z}) < 0.$$

Рассмотрим конфигурационную точку  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{T}^3$ ,  $t \in (-\infty, +\infty)$ . Поскольку ее траектория всюду плотна в  $\mathbb{T}^3$ , найдется момент  $t_1$ , в который точка  $\mathbf{x}(t_1)$  принадлежит окрестности  $O(\mathbf{x}^+)$ , и найдется момент  $t_2$ , в который точка  $\mathbf{x}(t_2)$  принадлежит окрестности  $O(\mathbf{x}^-)$ . Следовательно,

$$I(\mathbf{x}(t_1)) > 0, \quad I(\mathbf{x}(t_2)) < 0.$$

В силу непрерывности функции  $I$  существует момент  $t_0$ , в который выполняется равенство

$$I(\mathbf{x}(t_0)) = 0. \quad (1.2)$$

Отсюда следует, что  $t_0$  — момент уплощения. Теорема 1 доказана. ■

В главах 2–6 рассматриваются все оставшиеся случаи движения конфигурационной точки  $\mathbf{x}$  по трехмерному тору (когда траектория точки  $\mathbf{x}$  не всюду плотна в  $\mathbb{T}^3$ ).

### А. Случай равномерного движения планет

Итак, точки  $P_1, P_2, P_3$  движутся равномерно по окружностям  $S_1, S_2, S_3$  с угловыми скоростями  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , причем  $0 < \omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3$ .



## 2. Арифметическая теорема об уплощении

**Теорема 2.** а). Пусть  $\omega_3 \neq \omega_1 + \omega_2$ . Тогда для любых начальных расположений орбит и планет на них существует момент уплощения.

б). Пусть  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ . Тогда существуют такие расположения окружностей  $S_1, S_2, S_3$  на сфере и такие начальные положения точек  $P_1, P_2, P_3$  на них, что момент уплощения отсутствует.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Очевидно, что множество  $\{\omega_3 = \omega_1 + \omega_2\}$  имеет меру нуль в пространстве всех угловых скоростей  $\{\omega_k\}$ .

*Доказательство теоремы 2.* а). Здесь мы не будем касаться случая (I) всюду плотной траектории конфигурационной точки  $\mathbf{x}$  в трехмерном торе  $\mathbb{T}^3$ , поскольку он исследован в гл. 1.

Рассмотрим случай (II) — конфигурационная траектория всюду плотно заполняет двумерный тор  $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{T}^3$ . В этом случае частоты  $\omega_k$  связаны соотношением

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + k_3\omega_3 = 0 \quad (k_i \in \mathbb{Q}).$$

Умножая это соотношение на общий знаменатель чисел  $k_i$ , можно сделать все коэффициенты несократимыми целыми числами:

$$n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + n_3\omega_3 = 0 \quad (n_i \in \mathbb{Z}, \text{НОД}(n_1, n_2, n_3) = 1) \quad (2.1)$$

Движение точек  $P_1, P_2, P_3$  описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\varphi}_k = \omega_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Отсюда интегрированием получаем соотношение на фазы

$$n_1\varphi_1 + n_2\varphi_2 + n_3\varphi_3 = C. \quad (2.2)$$

Это и есть уравнение двумерного тора  $\mathbb{T}^2$ , всюду плотно заполненного рассматриваемой траекторией.

Отображение

$$\text{фаза } \varphi_k \longrightarrow \text{вектор } \mathbf{e}_k \in S_k$$

запишем более подробно в виде

$$\varphi_k \longrightarrow \mathbf{u}_k \cos \varphi_k + \mathbf{w}_k \sin \varphi_k = \frac{e^{i\varphi_k} + e^{-i\varphi_k}}{2} \mathbf{u}_k + \frac{e^{i\varphi_k} - e^{-i\varphi_k}}{2i} \mathbf{w}_k = \mathbf{e}_k,$$

где  $\{\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k\}$  — фиксированный ортонормированный базис в плоскости окружности  $S_k$  (рис. 2). Подставляя эти выражения в (1.1), находим, что функция «якобиан»

$$I(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$$

есть сумма конечного числа экспонент вида

$$c_{\pm\pm\pm} e^{i(\pm\varphi_1 \pm \varphi_2 \pm \varphi_3)} \quad (2.3)$$

с различными комбинациями знаков “+” и “−” в показателе экспоненты. Для дальнейшего нам понадобится следующая

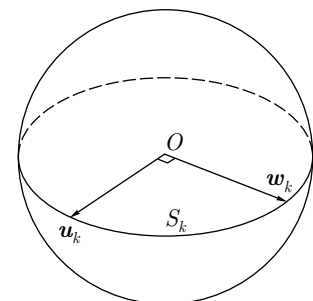


Рис. 2

**Лемма 1.** Пусть каждый целочисленный трехмерный вектор  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k \in \mathbb{Z}^3$  несократим, т. е. для любого  $j, 0 \leq j \leq k$ , для любого натурального  $r \in \mathbb{Z}_+, r \neq 1$ , вектор  $r^{-1}\mathbf{p}_j \notin \mathbb{Z}^3$ . Пусть, кроме того, задано отображение  $I : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  трехмерного тора в комплексную плоскость  $\mathbb{C}$ :

$$I(\varphi) = \sum_{s=1}^k c_s e^{i(\mathbf{p}_s, \varphi)}, \quad \varphi \in \mathbb{T}^3, \quad \mathbf{p}_s \in \mathbb{Z}^3.$$

Рассмотрим двумерный тор  $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{T}^3$ , задаваемый уравнением

$$\mathbb{T}^2 = \{\varphi \in \mathbb{T}^3 \mid (\mathbf{p}_0, \varphi) = \text{const} = c\}$$

с естественной мерой  $d\mu$  на нем (индуцированной лебеговой мерой на  $\mathbb{T}^3$ ). Пусть вектор  $\mathbf{p}_0$  не совпадает ни с одним из векторов  $\pm\mathbf{p}_1, \dots, \pm\mathbf{p}_k$ . Тогда

$$\int_{\mathbb{T}^2} I(\varphi) d\mu = 0.$$

*Доказательство.* Докажем, что ни одна из функций  $e^{i(\mathbf{p}_j, \varphi)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$  не постоянна на торе  $\mathbb{T}^2$ .

Пусть на  $\varphi$ -плоскости  $(\mathbf{p}_0, \varphi) = \text{const}$  в  $\mathbb{R}^3$  задана постоянная функция  $(\mathbf{p}_j, \varphi) = \text{const}_j$ . Тогда векторы  $\mathbf{p}_0$  и  $\mathbf{p}_j$  коллинеарны (поскольку они ортогональны двум параллельным плоскостям), т. е.  $\mathbf{p}_j = \lambda\mathbf{p}_0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Но по условию, векторы  $\mathbf{p}_0$  и  $\mathbf{p}_j$  целочисленны, следовательно,  $\lambda$  — рациональное число. Так как  $\mathbf{p}_0$  — несократимый вектор, то  $\lambda$  может быть только целым числом:  $\lambda \in \mathbb{Z}$ .

Но  $\mathbf{p}_j$  — тоже несократимый вектор, следовательно,  $\lambda = \pm 1$ . Получили противоречие с условием леммы.

Итак, все функции  $e^{i(\mathbf{p}_j, \varphi)}$  не постоянны на торе  $\mathbb{T}^2$ . А тогда, для каждого  $j = 1, 2, \dots, k$

$$\int_{\mathbb{T}^2} I(\varphi) d\mu = \int_{\mathbb{T}^2} \sum_{j=1}^k c_j e^{i(\mathbf{p}_j, \varphi)} d\mu = 0.$$

Лемма I доказана. ■

Из условий  $\omega_3 \geq \omega_2 \geq \omega_1 > 0$ ,  $\omega_3 \neq \omega_1 + \omega_2$  следует, что в уравнении (2.1) не все числа  $n_1, n_2, n_3$  равны  $\pm 1$ . Тогда из леммы I вытекает, что

$$\int_{\mathbb{T}^2} I(\varphi) \Big|_{\mathbb{T}^2} d\mu = 0. \quad (2.4)$$

Из непрерывности функции  $I$ , компактности тора  $\mathbb{T}^2$  и того, что конфигурационная траектория всюду плотна на  $\mathbb{T}^2$ , следует, что существует бесконечно много моментов времени, в которые  $I(\varphi) = 0$ , т. е. существует бесконечно много моментов уплощения. ■

Наконец, докажем утверждение теоремы 2а) для случая (III), когда конфигурационная траектория замкнута, т. е. когда существуют целые числа  $n_1, n_2, n_3$  такие, что

$$n_1\omega_1 = n_2\omega_2 = n_3\omega_3.$$

Без ограничения общности можно считать  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  целыми числами (сократив, быть может, на общую иррациональную часть).

Доказательство в этом случае аналогично предыдущему, но гораздо проще. Поскольку движение планет *равномерное*,  $\varphi_1 = \omega_1 t, \varphi_2 = \omega_2 t, \varphi_3 = \omega_3 t$ , а якобиан  $I(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  есть сумма экспонент вида (2.3), то  $I = I(t)$  — специального вида *функция времени*  $t$ . По условию теоремы

$$\omega_3 \neq \omega_1 + \omega_2 \quad (0 < \omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3),$$

поэтому

$$\pm\varphi_1 \pm \varphi_2 \pm \varphi_3 \neq \text{const.}$$

Значит,

$$\int_0^{2\pi} c_{\pm\pm\pm} e^{i(\pm\varphi_1 \pm \varphi_2 \pm \varphi_3)} dt = \int_0^{2\pi} c_{\pm\pm\pm} e^{itm} dt = 0,$$

так как мы предположили, что  $m = \pm\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3$  — *целое число*. Следовательно,

$$\int_0^{2\pi} I(t) dt = 0,$$

а поскольку  $I(t)$  непрерывна на  $[0, 2\pi)$ , то найдется момент  $t_0 \in [0, 2\pi)$ , в который  $I(t_0) = 0$ . Следовательно,  $t_0$  — момент уплощения, что и требовалось доказать. ■

*Доказательство пункта б) теоремы 2.* Мы рассматриваем случай фиксированных угловых скоростей  $0 < \omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3$ , причем  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ , и хотим построить окружности  $S_1, S_2, S_3$  на сфере с центром  $O$ , а затем так расположить на них точки  $P_1, P_2, P_3$ , чтобы не существовало момента уплощения.

Построим окружности  $S_1, S_2$  и  $S_3$  следующим образом:  $S_3$  — экватор,  $S_1$  и  $S_2$  симметричны относительно экватора  $S_3$  и располагаются под углами  $+\varepsilon$  и  $-\varepsilon$  к нему (о выборе  $\varepsilon$  речь пойдет ниже). Пересечение окружностей состоит из двух диаметрально противоположных точек  $A$  и  $B$  (рис. 3). Направление движения планет выберем так, чтобы все планеты двигались «в одну сторону», т. е. чтобы все три вектора угловых скоростей  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  лежали в одном полупространстве относительно плоскости окружности  $S$  (в верхнем на рис. 3). Фазы на окружностях  $S_1, S_2, S_3$  будем отсчитывать от точки  $A$  в направлении движения планет.

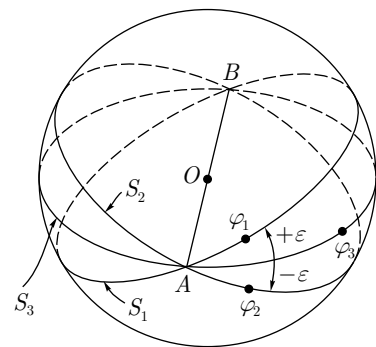


Рис. 3

Начальное положение планет  $P_1$  и  $P_2$ , задаваемые начальными фазами  $\varphi_1(0)$  и  $\varphi_2(0)$ , выберем так, чтобы планеты  $P_1$  и  $P_2$  никогда не оказывались одновременно в одном или разных концах диаметра  $AB$ . Такие  $\varphi_1(0)$  и  $\varphi_2(0)$  существуют. Действительно, условие попадания обеих планет на диаметр  $AB$  в момент  $t$  записывается в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(0) + \omega_1 t = k\pi, \\ \varphi_2(0) + \omega_2 t = m\pi, \end{cases} \quad k, m \in \mathbb{Z}.$$

Исключая из этой системы  $t$ , получим

$$\omega_2 \varphi_1(0) - \omega_1 \varphi_2(0) = (\omega_2 k - \omega_1 m)\pi$$



или

$$\varphi_1(0) = \frac{\omega_1}{\omega_2} \varphi_2(0) + (k - \frac{\omega_1}{\omega_2} m) \pi.$$

При произвольном выборе  $\varphi_2(0)$  этому уравнению удовлетворяет лишь счетное множество значений  $\varphi_1(0)$ , получаемых при всевозможных целых  $k$  и  $m$ . Следовательно, существуют пары  $\varphi_1(0), \varphi_2(0)$ , не удовлетворяющие этому уравнению.

Начальное положение третьей планеты выберем из условия

$$\varphi_3(0) = \varphi_1(0) + \varphi_2(0).$$

Докажем, что так расположенные в нулевой момент точки  $P_k$  никогда не окажутся в одной плоскости, проходящей через центр: *уплощения не будет*.

Заметим предварительно, что в каждый момент  $t$  выполняется равенство  $\varphi_3(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$ , так как оно выполнено при  $t = 0$ , имеет место равенство  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  и движение точек равномерное во времени.

Вычислим якобиан  $I(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = I(\varphi)$  :

$$\begin{aligned} I(\varphi) &= \det \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & \cos \varphi_2 & \cos \varphi_3 \\ \cos \varepsilon \cdot \sin \varphi_1 & \cos \varepsilon \cdot \sin \varphi_2 & \sin \varphi_3 \\ \sin \varepsilon \cdot \sin \varphi_1 & -\sin \varepsilon \cdot \sin \varphi_2 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= -\cos \varphi_3 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin 2\varepsilon + \sin \varphi_3 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \sin \varepsilon = \\ &= \sin \varepsilon [-\cos \varphi_3 (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \cos(\varphi_1 + \varphi_2)) \cos \varepsilon + \sin \varphi_3 \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся тем, что для нашего движения  $\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$  и выразим якобиан через две переменные  $\alpha = \varphi_1 - \varphi_2$  и  $\beta = \varphi_1 + \varphi_2$ .

Положим

$$\begin{aligned} I_1(\alpha, \beta) &= \cos \beta (-\cos \alpha + \cos \beta) + \sin^2 \beta = -\cos \alpha \cos \beta + 1, \\ I_2(\alpha, \beta) &= \cos \beta (\cos \alpha - \cos \beta). \end{aligned}$$

Тогда

$$I = I(\alpha, \beta, \varepsilon) = \sin \varepsilon [I_1(\alpha, \beta) + (1 - \cos \varepsilon) I_2(\alpha, \beta)].$$

Заметим, что при всех  $\alpha$  и  $\beta$   $I_1(\alpha, \beta) \geq 0$ , причем равенство выполняется только при  $\alpha = 0, \beta = 0$  или  $\alpha = \pi, \beta = \pi$ , что соответствует попаданию точек  $P_1$  и  $P_2$  в один и тот же или же в разные концы диаметра  $AB$ .

Легко убедиться, что  $|I_2(\alpha, \beta)/I_1(\alpha, \beta)| < c_1$ , где  $c_1$  — некоторая положительная константа. При  $(\alpha, \beta)$ , близких к  $(0, 0)$  и  $(\pi, \pi)$  это следует из разложения в ряд по  $\alpha$  и  $\beta$  функций  $I_1(\alpha, \beta)$  и  $I_2(\alpha, \beta)$ , а для остальных  $(\alpha, \beta)$   $|I_1(\alpha, \beta)| > \text{const}$ . Следовательно, существует целый интервал малых  $\varepsilon > 0$  ( $1 - \cos \varepsilon < \frac{1}{c_1}$ ), для которых

$$I(\alpha, \beta, \varepsilon) \geq 0,$$

причем равенство возможно только при  $\alpha = \beta = 0$  и  $\alpha = \beta = \pi$ . В нашем же случае ни одно из этих равенств не выполняется. Значит, для указанных окружностей  $S_1, S_2, S_3$  и начальных положений точек  $P_1, P_2, P_3$  на них при всех  $t$  выполняется неравенство

$$I(\alpha, \beta, \varepsilon) > 0.$$

Утверждение пункта б) теоремы 2 полностью доказано: *момента уплощения не существует*. ■



**Б. Случай произвольного движения планет**

Произвольное движение планеты может не быть монотонным во времени, но обязано быть непрерывным и периодическим.

**3. Два примера неравномерного движения планет без уплощения с условием  $\omega_3 \neq \omega_1 + \omega_2$**

Для равномерного движения планет  $P_1, P_2$  и  $P_3$  по сфере при выполнении неравенства  $\omega_3 \neq \omega_1 + \omega_2$  ( $0 < \omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3$ ), как было установлено выше, обязательно происходит уплощение. В случае произвольного движения можно добиться того, чтобы момента уплощения не существовало.

ПРИМЕР 1. Положим  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1$ , и пусть плоскости окружностей  $S_1, S_2, S_3$  взаимно ортогональны. Опишем, как можно запустить точки  $P_1, P_2, P_3$  по этим окружностям так, чтобы отсутствовал момент уплощения. Предположим сначала, что точки  $P_1$  и  $P_2$  движутся *равномерно* по  $S_1$  и  $S_2$ , при этом

$$\vec{OP_1} = (\cos t, 0, -\sin t), \quad \vec{OP_2} = (-\sin t, \cos t, 0).$$

Найдем векторное произведение этих векторов:

$$\vec{OR} = \vec{OP_1} \times \vec{OP_2} = (\sin t \cos t, \sin^2 t, \cos^2 t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(\sin 2t, -\cos 2t, \cos 2t).$$

Мы видим, что конец  $R$  векторного произведения дважды за период движения точек  $P_1$  и  $P_2$  обегает эллипс  $\mathcal{E}$  с центром  $(0, 1/2, 1/2)$  и с наклоном  $45^\circ$  к горизонтальной плоскости. При этом точка  $P$  — радиальная проекция точки  $R$  на сферу ( $\vec{OP} = \vec{OR}/|\vec{OR}|$ ) обегает некоторую кривую  $S$  на сфере (рис. 4).

Предположим теперь, что точка  $P_1$  движется *неравномерно*, но что ее движение мало отличается от равномерного:

$$\vec{OP_1}(t) = (\cos(t + \gamma(t)), 0, -\sin(t + \gamma(t))),$$

$\gamma(t)$  — малая добавка, а точка  $P_2$  движется *по-прежнему равномерно*.

Тогда конец вектора  $\vec{OP}$  будет обегать кривую  $\tilde{S}$ , которая получается малым шевелением кривой  $S$  (рис. 5а). Можно выбрать точку  $A$  на сфере так, чтобы индекс кривой  $S$  относительно точки  $A$  был равен 1.

В качестве орбиты третьей планеты возьмем окружность  $S_3$ , плоскость которой ортогональна  $OA$ . Запустим по ней точку  $P_3$  следующим образом.

В каждый момент  $t$  будем рассматривать окружность большого круга, проходящую через точки  $A$  и  $P(t)$ , которая пересекает  $S_3$  в точке  $B(t)$ :

$$\sphericalangle AB(t) = \frac{\pi}{2}, \quad P(t) \in \sphericalangle AB(t) \quad (\text{рис. 5б}).$$

Точка  $B(t)$  движется по окружности  $S_3$  периодически с частотой, равной 1.

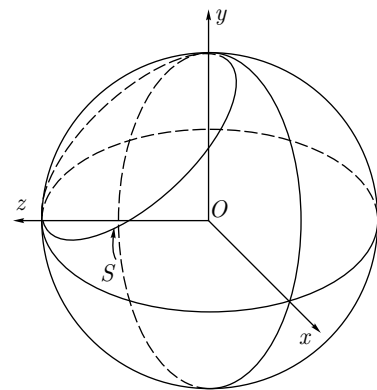


Рис. 4



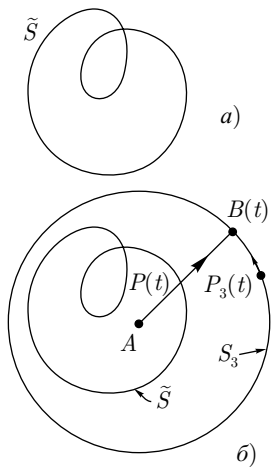


Рис. 5

Запустим точку  $P_3$  по окружности  $S_3$  так, чтобы ее движение было периодическим, и чтобы в каждый момент  $P_3(t)$  была близка к точке  $B(t)$ :  $\sphericalangle P_3(t)B(t) < \frac{\pi}{2}$ . Легко видеть, что точка  $P_3$  движется при этом по  $S_3$  с частотой  $\omega_3 = 1$ .

Итак,  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1$ . Докажем, что не происходит уплощения. Вычислим якобиан (смешанное произведение векторов):

$$I(t) = (\overrightarrow{OP_1}(t) \times \overrightarrow{OP_2}(t), \overrightarrow{OP_3}(t)) = |\overrightarrow{OR}(t)| \cdot |\overrightarrow{OP_3}(t)| \cos(\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OP_3}).$$

Докажем, что  $\cos(\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OP_3}) \neq 0$ . Действительно,

$$\cos(\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OP_3}) = \cos(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OP_3}) = \cos(\sphericalangle PP_3).$$

Катеты сферического прямоугольного треугольника  $PBP_3$  меньше  $\frac{\pi}{2}$ :  $\sphericalangle PB < \frac{\pi}{2}$ ,  $\sphericalangle BP_3 < \frac{\pi}{2}$ , поэтому

$$\cos(\sphericalangle PP_3) = \cos(\sphericalangle PB) \cdot \cos(\sphericalangle BP_3) > 0.$$

Отсюда вытекает, что момента уплощения не существует.

**ПРИМЕР 2.** В этом примере продолжается развитие идей из примера 1. Мы покажем, что можно запустить точки  $P_1, P_2$  и  $P_3$  без уплощения по кеплеровскому закону, т. е. так, чтобы их движения по окружностям  $S_1, S_2, S_3$  являлись радиальной проекцией движения планет  $P_1, P_2, P_3$  с нулевыми массами по кеплеровским эллипсам вокруг солнца  $O$ , все угловые частоты были одинаковыми:  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1$ , но при этом планеты  $P_1, P_2$  и  $P_3$  никогда не оказывались бы в одной плоскости.

Точка  $P_2$  будет двигаться равномерно по окружности:

$$\overrightarrow{OP_2}(t) = (-\sin t, \cos t, 0).$$

Точка  $P_1$  движется по закону:

$$\overrightarrow{OP_1}(t) = (\cos(t + \gamma(t)), 0, -\sin(t + \gamma(t))),$$

где  $\gamma(t)$  — малая  $2\pi$ -периодическая функция, близкая к синусоиде с малой амплитудой. Точка  $P_3$  движется по окружности  $S_3$ , лежащей в плоскости, натянутой на векторы  $e_1 = (0, 0, 1)$ ,  $e_2 = (\cos \alpha, -\sin \alpha, 0)$  по закону

$$\overrightarrow{OP_3}(t) = (\cos \alpha \cdot \cos(t + \delta(t) + \varphi), -\sin \alpha \cdot \cos(t + \delta(t) + \varphi), \sin(t + \delta(t) + \varphi)),$$

где  $\delta(t)$  — малая  $2\pi$ -периодическая функция, близкая к синусоиде с малой амплитудой;  $\varphi$  — некоторая фаза,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Якобиан имеет вид:

$$I(t) = \det \begin{pmatrix} \cos(t + \gamma(t)) & 0 & -\sin(t + \gamma(t)) \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ \cos \alpha \cdot \cos(t + \delta(t) + \varphi) & -\sin \alpha \cdot \cos(t + \delta(t) + \varphi) & \sin(t + \delta(t) + \varphi) \end{pmatrix} = \\ = \cos(t + \gamma) \cdot \sin(t + \delta(t) + \varphi) \cdot \cos t + \sin(t + \gamma) \cdot \cos(t + \delta(t) + \varphi) \cdot \cos(t - \alpha). \tag{3.1}$$

Приведем без доказательства следующие два утверждения.

**Утверждение 1.** *Существуют константы  $c_1 > 0$  и  $c_2 > 0$  такие, что для любого  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < c_1$ , найдутся числа  $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < \varepsilon$ ,  $0 \leq \beta_1, \beta_2 < 2\pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$  такие, что после подстановки в формулу (3.1) для якобиана функций  $\delta(t) = \varepsilon_1 \sin(t + \beta_1)$  и  $\gamma(t) = \varepsilon_2 \sin(t + \beta_2)$  при всех  $t$  будет выполняться неравенство*

$$I(t) < c_2\varepsilon.$$

Выберем теперь достаточно малое  $\varepsilon > 0$  и все константы и функции из утверждения 1. Пусть им соответствует некоторое движение точек  $P_1, P_2, P_3$ , указанное выше, и якобиан  $I(t)$  по формуле (3.1), который обозначим  $I^{(1)}(t)$ .

**Утверждение 2.** *Существует такое кеплеровское движение планет  $P_1, P_2, P_3$  с якобианом  $I^{(2)}(t)$  (т.е. существует специальный выбор функций  $\gamma(t), \delta(t)$  и фазы  $\varphi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ), что при всех  $t$*

$$\left| I^{(2)}(t) - I^{(1)}(t) \right| = O(\varepsilon^2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

(Техника доказательства подобных утверждений излагается в [2].)

Из утверждений 1 и 2 вытекает, что существует такое кеплеровское движение планет  $P_1, P_2, P_3$ , что при всех  $t$

$$I^{(2)}(t) > 0;$$

тем самым существует кеплеровское движение с  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1$  без уплощений.

#### 4. Теорема об отсутствии уплощения: случай одномерного тора

Чтобы доказать в общем случае, что момент уплощения существует или же что он отсутствует, следует рассмотреть уравнение

$$I(t) = 0, \tag{4.1}$$

где  $I(t)$  — якобиан (ориентированный объем  $\det(OP_1(t), OP_2(t), OP_3(t))$ ). В случае, если уравнение (4.1) имеет вещественный корень, момент уплощения существует (совпадает с этим корнем), в противном случае он отсутствует. Иначе говоря, если конфигурационная траектория в трехмерном торе  $\mathbb{T}^3$  пересекает поверхность  $I^{-1}(0)$  — полный прообраз точки 0 при отображении  $I : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , то момент уплощения существует, иначе его нет.

Здесь мы докажем, что для любых целых чисел  $n_1, n_2, n_3$  можно так (неравномерно) запустить планеты  $P_1, P_2, P_3$  с частотами  $n_1, n_2, n_3$ , чтобы движение планет было периодическим, но чтобы отсутствовало уплощение. Движение конфигурационной точки  $\mathbf{x}$  в  $\mathbb{T}^3$  в этом случае замкнуто, и конфигурационная траектория не будет пересекать поверхности  $I^{-1}(0)$ .

**Определение 2.** Замкнутую конфигурационную траекторию в  $\mathbb{T}^3$  будем называть *кривым одномерным тором*, если она принадлежит тому же гомотопическому типу, что и одномерный тор — «прямой тор» —  $\{\varphi_1 = \omega_1 t, \varphi_2 = \omega_2 t, \varphi_3 = \omega_3 t\}$ , отвечающий равномерному движению планет  $P_k$  по окружностям  $S_k$  с соизмеримыми частотами  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  случая (III) (см. введение).

Гомотопический тип одномерного тора  $\mathbb{T}^1$  кратко будем записывать в виде  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ , а тор  $\mathbb{T}^1$  будем называть *тором типа*  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  (при этом, тор  $\mathbb{T}^1$  может быть прямым тором или кривым (произвольной замкнутой кривой)).

В трехмерном торе  $\mathbb{T}^3$  имеются три одномерных тора типов  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$  и  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ , которые мы будем называть *базисными торами* и обозначим, соответственно  $\mathbf{b}_1,$



$\mathbf{b}_2$  и  $\mathbf{b}_3$ . Название «базисный тор» объясняется тем, что на множестве торов, проходящих через начало координат, определена операция сложения — суммой двух торов является кривой тор, получаемый путем прохождения сначала по первому тору, а затем — по второму, при этом тор  $\mathbb{T}^1$  типа  $(n_1, n_2, n_3)$  есть линейная комбинация базисных торов:  $\mathbb{T}^1 = n_1\mathbf{b}_1 + n_2\mathbf{b}_2 + n_3\mathbf{b}_3$ .

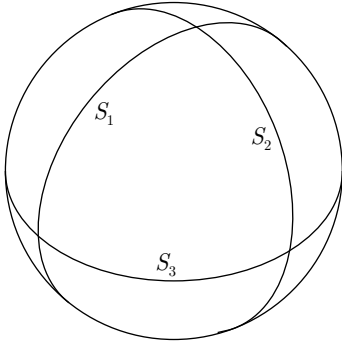


Рис. 6

**Теорема 3.** Пусть пересечение всех трех окружностей  $S_1, S_2, S_3$  на сфере пусто:  $S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \emptyset$  (рис. 6). Тогда для любых целых чисел  $n_1, n_2, n_3$  существует такое движение планет  $P_1, P_2, P_3$  с частотами  $\omega_1 = n_1, \omega_2 = n_2, \omega_3 = n_3$ , при котором отсутствует момент уплощения. Иными словами, найдется кривой одномерный тор типа  $(n_1, n_2, n_3)$ , не пересекающий поверхности  $I^{-1}(0)$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Теорема 3 показывает, что случай замкнутой конфигурационной траектории в неравномерном движении резко отличается от случая равномерного движения. Действительно, при неравномерном движении даже при  $\omega_3 \neq \omega_1 + \omega_2$  может не быть момента уплощения, а при равномерном движении уплощение в этом случае обязательно происходит.

*Доказательство теоремы 3.* Докажем сначала следующую лемму.

**Лемма.** Для каждого базисного одномерного тора  $\mathbf{b}_k, k = 1, 2, 3$ , существует одномерный кривой тор  $\mathbb{T}_k^1$  того же типа, что и  $\mathbf{b}_k$ , который не пересекает поверхности  $I^{-1}(0)$ .

*Доказательство.* Будем считать, без ограничения общности, что  $k = 3$ . Тор  $\mathbb{T}_3^1$  строим следующим способом (рис. 7).

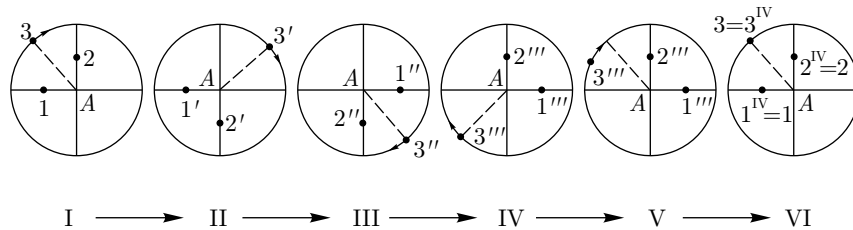


Рис. 7

Располагаем точки  $P_1$  и  $P_2$  вблизи точки  $A$  пересечения окружностей  $S_1$  и  $S_2$ . Точки  $P_1$  и  $P_2$  сначала неподвижны, а  $P_3$  движется равномерно по  $S_3$  (рис. 7, I), пока в момент  $t_1$  не попадает в одну плоскость с точками  $P_1$  и  $P_2$ . В момент  $t_1 - \varepsilon$  точка  $P_3$  останавливается, а точка  $P_2$  движется время  $\varepsilon$  за точку  $A$  и останавливается, после чего  $P_3$  продолжает свое движение (рис. 7, II) до аналогичного момента уплощения  $t_2$ . В момент  $t_2 - \varepsilon$  точка  $P_1$  смещается за точку  $A$ , после чего  $P_3$  начинает двигаться дальше (рис. 7, III), и т. д. согласно рис. 7, I–VI. В результате таких движений ни разу не произошло уплощения, а точки  $P_1, P_2$  и  $P_3$  вернулись на свои исходные позиции, при этом точка  $P_3$  совершила один оборот.

Тем самым, построен кривой тор  $\mathbb{T}_3^1$  того же гомотопического типа, что и прямой тор  $\mathbf{b}_3$ , не пересекающий поверхности  $I^{-1}(0)$ . Аналогично строятся кривые торы  $\mathbb{T}_1^1$  типа  $(1, 0, 0)$  и  $\mathbb{T}_2^1$  типа  $(0, 1, 0)$ , не пересекающие  $I^{-1}(0)$ . Лемма доказана. ■

Из леммы следует, что кривой одномерный тор

$$\mathbb{T}^1 = n_1\mathbb{T}_1^1 + n_2\mathbb{T}_2^1 + n_3\mathbb{T}_3^1$$

типа  $(n_1, n_2, n_3)$  не пересекает поверхности  $I^{-1}(0)$ .

Теорема 3 доказана. ■

## 5. Геометрическая теорема об уплощении: случай пустого пересечения окружностей

Здесь рассматривается случай  $S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \emptyset$  (рис. 6).

Как мы только что видели (гл. 4), при замкнутом движении конфигурационной точки, т. е. при ее движении по кривому одномерному тору в  $\mathbb{T}^3$ , уплощения, вообще говоря, может и не произойти. Для *незамкнутого движения* это, оказывается, не так: справедлива следующая

**Теорема 4.** Пусть конфигурационная траектория не замкнута в  $\mathbb{T}^3$  (т. е. не является кривым одномерным тором), и  $S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \emptyset$ . Тогда при любом начальном положении планет  $P_1, P_2, P_3$  существует момент уплощения, независимо от частот  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ . Иными словами, конфигурационная траектория пересекает поверхность  $I^{-1}(0)$ .

*Доказательство теоремы 4.* Случай траектории, всюду плотной во всем трехмерном торе, мы не рассматриваем, так как он полностью исследован в гл. 1.

Остается случай незамкнутой траектории, заполняющей всюду плотно некоторый двумерный тор  $\mathbb{T}^2$  или гомотопную ему двумерную поверхность.

**Определение 3.** Тройку коэффициентов  $(k_1, k_2, k_3)$  в уравнении двумерного тора  $\{k_1\alpha + k_2\beta + k_3\gamma = 0\}$  ( $\alpha, \beta, \gamma$  — угловые координаты на окружностях  $S_1, S_2, S_3$ ) будем называть *типом* этого тора. Сам тор  $\mathbb{T}^2$  будем называть *прямым тором*. Двумерную поверхность того же гомотопического типа, что и указанный тор, будем называть *кривым двумерным тором типа*  $(k_1, k_2, k_3)$ .

Для доказательства теоремы 4 нам понадобятся следующие леммы.

**Лемма 2.** Одномерный кривой тор  $\mathbb{T}^1$  типа  $(n_1, n_2, n_3) = \vec{n}$  пересекается с двумерным кривым тором  $\mathbb{T}^2$  типа  $(k_1, k_2, k_3) = \vec{k}$ , если скалярное произведение векторов  $(\vec{k}, \vec{n})$  отлично от 0.

*Доказательство.* Лемма следует из теоремы об инвариантности индекса пересечения при гомотопии компактных многообразий без края (см. [3], гл. VII, §4).

Если  $(\vec{k}, \vec{n} = 0)$ , то прямые одномерный и двумерный торы типов  $\vec{n}$  и  $\vec{k}$ , соответственно, пересекаются трансверсально; поэтому определен индекс пересечения этих многообразий (равный сумме индексов их точек пересечения). Как легко видеть, индексы всех точек пересечения совпадают, следовательно, индекс пересечения прямых торов отличен от нуля. Поскольку при гомотопии индекс пересечения не меняется, то соответствующие кривые торы также обязаны пересекаться. ■

**Лемма 3.**  $I^{-1}(0)$  — поверхность общего положения (неособая поверхность).

*Доказательство.* Для доказательства достаточно проверить, что система

$$\begin{cases} I(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial \alpha} = \frac{\partial I}{\partial \beta} = \frac{\partial I}{\partial \gamma} = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

не имеет решения. Будем обозначать через  $S_{1,2}, S_{1,3}, S_{2,3}$  окружности больших кругов на сфере, проходящие соответственно через пары точек  $P_1$  и  $P_2, P_1$  и  $P_3, P_2$  и  $P_3$ . Система (5.1) равносильна следующей:

$$\begin{cases} I(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \\ dI(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \end{cases} \quad (d - \text{полный дифференциал}). \quad (5.2)$$

Докажем, что для всех  $(\alpha, \beta, \gamma) \in I^{-1}(0)$  существует такое движение  $d\alpha, d\beta, d\gamma$  точек  $P_1, P_2, P_3$  по своим окружностям, при котором  $dI(\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$ .

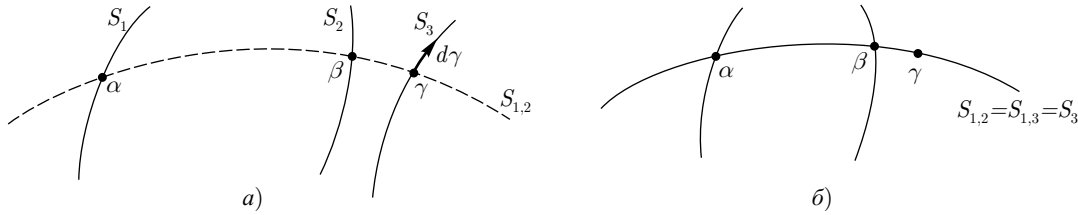


Рис. 8

1) Пусть окружность  $S_{1,2}$  не совпадает с  $S_3$  (рис. 8а). Тогда точку  $P_3$  уводим с окружности  $S_{1,2}$  на величину  $d\gamma$ , после чего становится  $I \neq 0$ .

2) Пусть окружность  $S_{1,2}$  совпадает с  $S_3$  (рис. 8б), т. е.  $S_{1,2} = S_{1,3} = S_3$ . Тогда точки  $P_1$  и  $P_2$  не могут совпадать или же быть диаметрально противоположными, так как иначе  $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \neq \emptyset$  — противоречие со сделанным в этой главе предложением.

Итак,  $P_3$  не совпадает с  $P_1$  или с  $P_2$ ; пусть, для определенности,  $P_3$  не совпадает с  $P_1$  — тогда  $S_{1,3}$  не совпадает с  $S_2$ . Тем самым, мы попали в предыдущий случай 1) с заменой точки  $P_2$  на  $P_3$ . Следовательно, и здесь найдется такое движение наших точек, при котором  $dI \neq 0$ .

Лемма 3 доказана. ■

**Лемма 4.** При малых по модулю  $h$  поверхность  $I^{-1}(h)$  содержит три кривых одномерных тора  $\mathbb{T}_1^1(h), \mathbb{T}_2^1(h), \mathbb{T}_3^1(h)$  того же типа, что и базисные торы  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ .

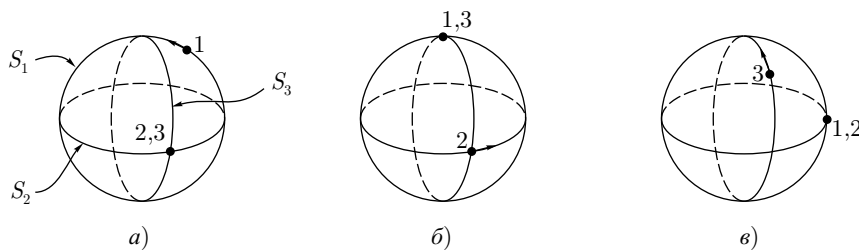


Рис. 9

*Доказательство.* На рис. 9а изображен прямой тор  $\mathbb{T}_1^1$  типа  $(1, 0, 0)$ , лежащий на поверхности  $I^{-1}(0)$ : обе точки  $P_2$  и  $P_3$  вечно расположены в точке пересечения окружностей  $S_2$  и  $S_3$ , а  $P_1$  движется по  $S_1$ . Из того, что поверхность  $I^{-1}(0)$ , а при малом  $|h|$  и поверхность  $I^{-1}(h)$  — неособые, следует, что на поверхности  $I^{-1}(h)$  лежит тор  $\mathbb{T}_1^1(h)$  того же типа, что и тор  $\mathbb{T}_1^1$ . Существование торов  $\mathbb{T}_2^1(h)$  и  $\mathbb{T}_3^1(h)$  доказывается аналогично, см. рис. 9б,в. ■

**Лемма 5.** На поверхности  $I^{-1}(h)$  существует одномерный кривой тор, пересекающийся с  $\mathbb{T}^2$ .

*Доказательство.* Пусть  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$  — тип двумерного тора  $\mathbb{T}^2$ . Поскольку по крайней мере одно из скалярных произведений

$$(\mathbf{k}, \mathbf{e}_1) = k_1, \quad (\mathbf{k}, \mathbf{e}_2) = k_2, \quad (\mathbf{k}, \mathbf{e}_3) = k_3$$

отлично от нуля (здесь  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ ), то по лемме 2 хотя бы один тор  $\mathbb{T}_1^1(h)$ ,  $\mathbb{T}_2^1(h)$ ,  $\mathbb{T}_3^1(h)$  из леммы 4 пересекается с  $\mathbb{T}^2$ . ■

**Лемма 6.** На любой всюду плотной обмотке кривого двумерного тора  $\mathbb{T}^2$  функция  $I$  принимает значение 0.

*Доказательство.* Из леммы 5 получаем, что на любом кривом двумерном торе  $\mathbb{T}^2$  функция  $I$  принимает все достаточно близкие к 0 значения, как положительные, так и отрицательные. Следовательно, на всюду плотной обмотке тора функция  $I$  также принимает значения разных знаков. В силу непрерывности функции  $I$  найдется точка  $\mathbf{x}_0$ , принадлежащая всюду плотной обмотке, в которой  $I(\mathbf{x}_0) = 0$ . ■

Поскольку исследуемая нами конфигурационная траектория является всюду плотной обмоткой двумерного тора, то из леммы 5 вытекает утверждение теоремы 4. Тем самым теорема 4 доказана. ■

## 6. Арифметическая теорема об уплощении: случай непустого пересечения окружностей

В этом параграфе нам удобно отказаться от неравенств (1), сформулированных во введении, и считать, что  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  — произвольные положительные числа.

Здесь рассматривается случай  $S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \emptyset$  (рис. 10). В отличие от случая гл. 5 здесь оказывается, что для существования уплощения необходимо накладывать на частоты то же самое арифметическое условие, что и в гл. 2 для *равномерного движения* планет. А именно, справедлива

**Теорема 5.** Пусть  $S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \{A\} \cup \{B\}$ ,  $A$  и  $B$  — диаметрально противоположные точки пересечения всех трех окружностей. Если  $\omega_3 \neq \omega_1 + \omega_2, \omega_2 \neq \omega_1 + \omega_3, \omega_1 \neq \omega_2 + \omega_3$ , то для любых начальных положений планет и их произвольных движений по своим окружностям всегда существует момент уплощения. Иными словами, при указанных условиях на частоты конфигурационная траектория пересекается с поверхностью  $I^{-1}(0)$ .

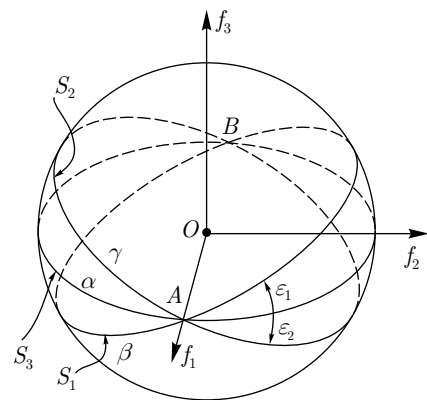


Рис. 10

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.** Для  $\omega_3 = \pm\omega_1 \pm \omega_2$  момента уплощения может и не существовать, как показывает утверждение б) теоремы 2.

*Доказательство теоремы 5.* Если какие-либо две окружности совпадают, то уплощение обязательно происходит (в момент попадания третьей планеты в плоскость первых двух.) Поэтому в дальнейшем считаем, что все окружности различны.

Случай всюду плотной конфигурационной траектории в трехмерном торе  $\mathbb{T}^3$  рассматривать не будем, см. гл. 1.

Доказательство теоремы 5 отдельно проведем для конфигурационной траектории, являющейся кривым одномерным тором  $\mathbb{T}^1$ , и для конфигурационной траектории, всюду плотно заполняющей кривой двумерный тор  $\mathbb{T}^2$ .

Обозначим через  $\alpha$  угловую координату (фазу) на окружности  $S_3$ , через  $\beta$  — фазу на  $S_1$  и через  $\gamma$  — фазу на  $S_2$  (фазы отсчитываются от точки  $A$  в направлении средних движений планет.)

Пусть окружности  $S_1$  и  $S_2$  образуют с окружностью  $S_3$  углы  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  (рис. 10). При определении углов будем учитывать ориентации окружностей, заданные направлением отсчета фаз. Таким образом, угол  $\varepsilon_1$  между окружностями  $S_1$  и  $S_3$  означает, что  $S_3$  при повороте вокруг оси  $AB$  на угол  $\varepsilon_1$  перейдет в  $S_1$  с совпадением ориентации.

Направим вектор  $\mathbf{f}_1$  по лучу  $OA$ ,  $\mathbf{f}_2$  — перпендикулярно  $\mathbf{f}_1$  в плоскости окружности  $S_3$ , и вектор  $\mathbf{f}_3$  перпендикулярно векторам  $\mathbf{f}_1$  и  $\mathbf{f}_2$ . Полученные три точки в базисе  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$  будут иметь следующие координаты:

$$\begin{aligned} \text{на } S_1 : & \quad \mathbf{f}_1 \cos \beta + (\mathbf{f}_2 \cos \varepsilon_1 + \mathbf{f}_3 \sin \varepsilon_1) \sin \beta; \\ \text{на } S_2 : & \quad \mathbf{f}_1 \cos \gamma + (\mathbf{f}_2 \cos \varepsilon_2 + \mathbf{f}_3 \sin \varepsilon_2) \sin \gamma; \\ \text{на } S_3 : & \quad \mathbf{f}_1 \cos \alpha + \mathbf{f}_2 \sin \alpha. \end{aligned}$$

Вычислим якобиан  $I = I(\alpha, \beta, \gamma)$  :

$$\begin{aligned} I &= \det \begin{pmatrix} \cos \beta & \cos \varepsilon_1 \cdot \sin \beta & \sin \varepsilon_1 \cdot \sin \beta \\ \cos \gamma & \cos \varepsilon_2 \cdot \sin \gamma & \sin \varepsilon_2 \cdot \sin \gamma \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \sin(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - \sin \alpha (\sin \varepsilon_2 \cdot \cos \beta \cdot \sin \gamma - \sin \varepsilon_1 \cdot \sin \beta \cdot \cos \gamma). \end{aligned}$$

Положив  $\lambda_1 = \sin(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$ ,  $\lambda_2 = -\sin \varepsilon_2$ ,  $\lambda_3 = \sin \varepsilon_1$ , формулу  $I(\alpha, \beta, \gamma) = 0$  для поверхности  $I^{-1}(0)$  перепишем в виде:

$$0 = \lambda_1 \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \lambda_2 \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \lambda_3 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma. \quad (6.1)$$

Из того, что окружности  $S_1, S_2, S_3$  различны, следует, что все коэффициенты  $\lambda_k$  отличны от 0. Заметим, что изменение знака коэффициента  $\lambda_1$  приводит к зеркальному отражению поверхности  $I^{-1}(0)$  относительно «плоскости»  $\alpha = 0$  :

$$(6.1) \iff (-\lambda_1) \cos(-\alpha) \sin \beta \sin \gamma + \lambda_2 \sin(-\alpha) \cos \beta \sin \gamma + \lambda_3 \sin(-\alpha) \sin \beta \cos \gamma = 0.$$

Точно так же, изменение знака у любого из оставшихся коэффициентов приводит к зеркальному отражению относительно плоскости  $\beta = 0$  или плоскости  $\gamma = 0$ .

Поэтому при исследовании поверхности  $I^{-1}(0)$  можно ограничиться каким-либо одним набором знаков коэффициентов  $\lambda_k$ , например, считать их всех положительными.

Из уравнения (6.1) непосредственно видно, что поверхность  $I^{-1}(0)$   $\pi$ -периодична по любой из координат  $\alpha, \beta, \gamma$ . Поэтому изобразим ее часть в кубе  $[0, \pi] \times [0, \pi] \times [0, \pi]$  (остальные 7 частей получаются параллельными переносами).

Рассматривая поведение поверхности вблизи ребер куба (два из чисел  $\alpha, \beta, \gamma$  близки к 0 или к  $\pi$ ), из (6.1) нетрудно получить, что поверхность  $I^{-1}(0)$  подходит к следующим *шести ребрам*: одно из чисел  $\alpha, \beta, \gamma$  равно 0, другое равно  $\pi$ , третье меняется от 0 до  $\pi$ .

Во внутренних точках куба можно, поделив обе части (6.1) на  $\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$ , перейти к эквивалентному уравнению

$$\lambda_1 \operatorname{ctg} \alpha + \lambda_2 \operatorname{ctg} \beta + \lambda_3 \operatorname{ctg} \gamma = 0,$$



откуда  $\gamma$  однозначно выражается через  $\alpha$  и  $\beta$  :

$$\gamma = \arctan \left( -\frac{\lambda_1}{\lambda_3} \operatorname{ctg} \alpha - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \operatorname{ctg} \beta \right).$$

Отсюда получаем, что поверхность  $I^{-1}(0)$  есть график непрерывной, убывающей по каждой координате функции  $\gamma = \gamma(\alpha, \beta)$ . Общий вид рассматриваемой поверхности изображен на рис. 11.

В результате склеивания четырех частей поверхности  $I(0)$ , расположенных в кубах

$$\begin{aligned} & [0, \pi] \times [0, \pi] \times [0, \pi], \\ & [0, \pi] \times [\pi, 2\pi] \times [\pi, 2\pi], \\ & [\pi, 2\pi] \times [0, \pi] \times [\pi, 2\pi], \\ & [\pi, 2\pi] \times [\pi, 2\pi] \times [0, \pi], \end{aligned}$$

получается поверхность, гомотопная двумерному тору  $\{\alpha + \beta + \gamma\}$  типа  $(1, 1, 1)$ . Склеивание остальных четырех частей дает еще один кривой двумерный тор типа  $(1, 1, 1)$ . Эти два тора склеены друг с другом в 8 точках  $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, \pi\}$ .

Таким образом, установлено, что при  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$  поверхность  $I^{-1}(0)$  содержит кривой двумерный тор типа  $(1, 1, 1)$ . При произвольных знаках  $\{\lambda_i\}$   $I^{-1}(0)$  содержит некоторый кривой двумерный тор типа  $(k_1, k_2, k_3)$ , где  $k_i = \pm 1$ .

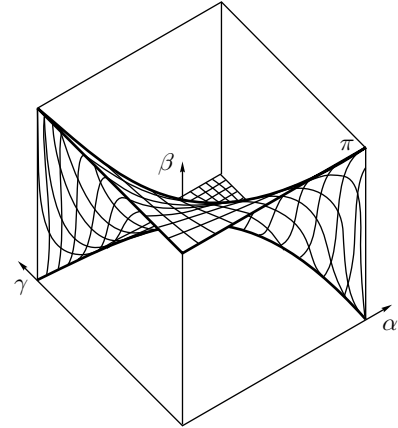


Рис. 11

*Случай кривого одномерного тора*

Пусть конфигурационная траектория — одномерный кривой тор  $\mathbb{T}^1$  типа  $(\omega_3, \omega_1, \omega_2)$ . (Напомним, что здесь фаза  $\alpha$  соответствует частоте  $\omega_3, \beta$  — частоте  $\omega_1$  и  $\gamma$  — частоте  $\omega_2$ .) Тор  $\mathbb{T}^1$  пересекается с двумерным кривым тором  $\tau^2$  типа  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$  при условии (см. лемму 2)

$$\pm \omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 \neq 0,$$

т. е. если выполнены условия теоремы 5. Следовательно, при этих условиях конфигурационная траектория пересекается с поверхностью  $I^{-1}(0)$ , т. е. происходит уплощение. ■

*Случай кривого двумерного тора*

Пусть конфигурационная траектория всюду плотно заполняет некоторый двумерный тор  $\mathbb{T}^2$ , причем  $\pm \omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 \neq 0$ . Поскольку  $I^{-1}(0)$  содержит кривой тор типа  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ , а тип тора  $\mathbb{T}^2$  отличен от  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ , то пересечение  $\mathbb{T}^2 \cap I^{-1}(0)$  содержит некоторую замкнутую кривую, не гомологичную нулю, и, следовательно, не стягиваемую в точку на  $\mathbb{T}^2$  (см. [3]). Поэтому всюду плотная обмотка тора  $\mathbb{T}^2$  пересекается с этой кривой, а, значит, и с поверхностью  $I^{-1}(0)$ . Таким образом, при  $\pm \omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 \neq 0$  происходит уплощение.

Теорема 5 полностью доказана. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Интересно выяснить, чем отличается топология поверхностей  $I^{-1}(0)$  в двух случаях:

- (1) пересечение всех трех окружностей пусто, и
- (2) имеются две точки, общие для всех трех окружностей.

В обоих случаях поверхность  $I^{-1}(0)$ , как легко видеть, связна и содержит три одномерных базисных тора. Вместе с тем, в случае (2) поверхность  $I^{-1}(0)$  пересекается с любым кривым одномерным тором, тип которого отличен от  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ , а в случае (1), напротив, существуют кривые одномерные тора всех типов, не пересекающиеся с  $I^{-1}(0)$ .



В случае (2) поверхность  $I^{-1}(0)$ , задаваемая уравнением  $\lambda_1 \operatorname{ctg} \alpha + \lambda_2 \operatorname{ctg} \beta + \lambda_3 \operatorname{ctg} \gamma = 0$ , как мы знаем, представляет собой два кривых двумерных тора, склеенные в 8 точках  $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, \pi\}$  — особых точках поверхности  $I^{-1}(0)$ .

При переходе от пересекающихся окружностей к непересекающимся в окрестности каждой особой точки происходит перестройка, изображенная на рис. 12, в результате которой в поверхности  $I^{-1}(0)$  возникают 8 «дырок». Через эти дырки и проходят одномерные торы, не пересекающиеся с  $I^{-1}(0)$ .

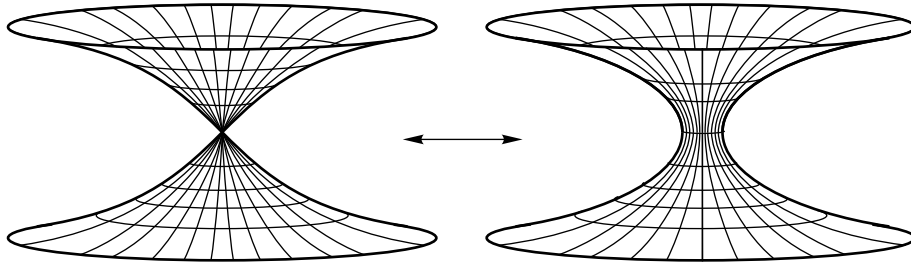


Рис. 12

Перестройка одной особой точки эквивалентна приклеиванию одной ручки, связывающей двумерные торы (см. [4]). При этом вся поверхность  $I^{-1}(0)$  становится топологически эквивалентной сфере с 9-ю ручками. В случае взаимно ортогональных плоскостей окружностей  $S_1, S_2, S_3$  уравнение этой поверхности —  $\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \gamma = 1$ .

Сведем результаты всех параграфов в одну таблицу.

|   |
|---|
| <p><b>А. РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ</b></p> <p><math>\omega_3 \neq \omega_1 + \omega_2 \implies</math> уплощение происходит всегда (гл. 1, гл. 2)</p> <p><math>\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 \implies</math> существуют примеры движения по <math>\mathbb{T}^1</math> и по <math>\mathbb{T}^2</math> без уплощения (гл. 2)</p>   |
| <p><b>Б. ПРОИЗВОЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ</b></p> <p><i>Первый случай:</i> <math>S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \emptyset</math></p> <p>Движение по <math>\mathbb{T}^1 \implies</math> существуют примеры движений без уплощения (гл. 4)</p> <p>Движение не по <math>\mathbb{T}^1 \implies</math> уплощение происходит всегда (гл. 1, гл. 5)</p> <p><i>Второй случай:</i> <math>S_1 \cap S_2 \cap S_3 \neq \emptyset</math></p> <p><math>\omega_3 \neq \omega_1 + \omega_2 \implies</math> уплощение происходит всегда (гл. 1, гл. 6)</p> <p><math>\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 \implies</math> существуют примеры движений без уплощения (гл. 2)</p> |

### Список литературы

[1] Арнольд В. И. *Математические методы классической механики* // М.: Наука, 1977.  
 [2] Белецкий В. В. *Очерки о движении космических тел* // М.: Наука, 1977.  
 [3] Дольд А. *Введение в алгебраическую топологию* // М.: Мир, 1976.  
 [4] Милнор Дж. *Теория Морса* // М.: Мир, 1965.  
 [5] Уинтнер А. *Аналитические основы небесной механики* // М.: Наука, 1967.

