УДК 532.5.013

Редукция и хаотическое поведение точечных вихрей на плоскости и сфере*

А. В. Борисов, А. А. Килин, И. С. Мамаев
Институт компьютерных исследований
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, Ижевск, ул. Университетская, 1
E-mail: borisov@ics.org.ru, aka@ics.org.ru, mamaev@ics.org.ru

Получено 12 сентября 2005 г.

В работе рассмотрены новый метод конструктивного понижения порядка для систем точечных вихрей на плоскости и сфере. Этот метод близок к классической процедуре исключения узла по Якоби в небесной механике. Однако, в случае динамики вихрей возникают некоторые особые ситуации, требующие отдельного рассмотрения. Более подробно рассмотрена задача приведения четырех точечных вихрей на плоскости и сфере. С помощью сечения Пуанкаре проведен анализ регулярного и хаотического поведения системы четырех вихрей на плоскости и сфере.

Ключевые слова: редукция, точечный вихрь, уравнения движения, отображение Пуанкаре.

A. V. Borisov, A. A. Kilin, I. S. Mamaev

Reduction and chaotic behavior of point vortices on a plane and a sphere

We offer a new method of reduction for a system of point vortices on a plane and a sphere. This method is similar to the classical node elimination procedure. However, as applied to the vortex dynamics, it requires substantial modification. Reduction of four vortices on a sphere is given in more detail. We also use the Poincare surface-of-section technique to perform the reduction a four-vortex system on a sphere.

Keywords: reduction, point vortex, equations of motion, Poincaré map.
Mathematical Subject Classifications: 76M23, 34A05

*Работа выполнена в рамках программы «Государственная поддержка ведущих научных школ» (грант НШ 136.2003.1), при поддержке РФФИ (гранты 04-205-264367 и 05-01-01058), CRDF (грант RU-M1-2583-MO-04) и INTAS (грант 04-80-7297).

Рассмотрим последовательно уравнения движения, первые интегралы и соответствующую им процедуру редукции для случаев плоскости и сферы.

1. Уравнения движения и первые интегралы системы вихрей на плоскости

Кратко остановимся на основных формах уравнений и первых интегралов динамики точечных вихрей на плоскости, отсылая за более полным изложением к книгам [2, 22], где также приведены гидродинамические допущения, при которых эти уравнения справедливы.

Уравнения движения n точечных вихрей с декартовыми координаты (x_i, y_i) и интенсивностями Γ_i могут быть записаны в гамильтоновой форме

$$\Gamma_i x_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_i}, \quad \Gamma_i \dot{y}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{1.1}$$

с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{4\pi}\sum_{i<j}^{n}\Gamma_i\Gamma_j \ln M_{ij}, \quad M_{ij} = |\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|^2, \quad \boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i). \tag{1.2}$$

Здесь скобка Пуассона имеет вид

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\Gamma_i}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}\Big). \tag{1.3}$$

Уравнения (1.1) инвариантны относительно группы движений плоскости $E(2)$, поэтому кроме гамильтониана они обладают еще тремя интегралами

$$Q = \sum_{i=1}^{n}\Gamma_i x_i, \quad P = \sum_{i=1}^{n}\Gamma_i y_i, \quad I = \sum_{i=1}^{n}\Gamma_i(x_i^2 + y_i^2), \tag{1.4}$$

которые, однако, не являются инволютивными

$$\{Q, P\} = \sum_{i=1}^{N}\Gamma_i, \quad \{P, I\} = -2Q, \quad \{Q, I\} = 2P. \tag{1.5}$$

В дальнейшем вместо интеграла I удобнее использовать интеграл вида

$$D = \sum_{i<j}^{n}\Gamma_i\Gamma_j|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|^2 = (\sum_{i=1}^{n}\Gamma_i)I - P^2 - Q^2. \tag{1.6}$$

Из этих трех интегралов можно образовать два инволютивных $Q^2 + P^2$, I и, следовательно, согласно общей теории [6], можно понизить порядок на две степени свободы. В частности, вследствие этого, задача трех вихрей сводится к одной степени свободы и является интегрируемой (Грёбли, Кирхгоф, Пуанкаре) [22], а задача четырех вихрей сводится к системе с двумя степенями свободы. Последняя задача, вообще говоря, не является интегрируемой [4].

Эффективное понижение порядка для системы четырех вихрей с интенсивностями одного знака, основанное на рассмотрении двух пар вихрей, для каждой из которых выбираются соответствующие переменные типа действие-угол, а общая система получается как возмущение двух соответствующих невозмущенных задач, было получено К. М. Ханиным в [18]. Исходя из процедуры описанного построения возмущающей функции в работе [18] доказано (используя методы КАМ-теории) существование квазипериодических решений, причем в качестве малого параметра принимается величина, обратная расстоянию между двумя парами вихрей.

Для случая равных интенсивностей вихрей и для случаев двух одинаковых пар вихрей понижение порядка для четырех вихрей выполнено соответственно в работах [9, 17]. Обобщение этой конфигурации на случай N вихрей содержится в работе [11]. Редуцированные уравнения используются для применения КАМ-теории к проблеме четырех вихрей в [15].

Понижение порядка на одну степень свободы с помощью трансляционных инвариантов P и Q выполнено Лимом [21] при помощи введения барицентрических координат Якоби (в данном случае — связанных с центром завихренности), имеющими хорошо известные аналоги в классической небесномеханической задаче n тел [8]. Отметим, что уже такая (частичная) редукция позволила применить для анализа задачи о движении точечных вихрей некоторые методы КАМ-теории [21].

В работе [12] была использована формально алгебраическая схема понижения порядка на две степени свободы, для случая N произвольных вихрей. Она основана на представлении уравнений движения системы точечных вихрей на плоскости во «взаимных» переменных, в качестве которых выбраны квадраты расстояний между парами вихрей и ориентированные площади треугольников:

$$M_{ij} = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2, \quad \Delta_{ijk} = (\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k) \wedge (\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i). \tag{1.7}$$

Взаимная коммутация таких переменных, кстати говоря, восходящих к Э. Лауре, приводит к некоторой алгебре Ли. При этом процедура понижения порядка (точнее говоря, последний канонический шаг этой процедуры) сводится к чисто алгебраической проблеме введения симплектических координат на орбитах соответствующих алгебр Ли [12].

2. Редукция на плоскости

Выполним понижение порядка для задачи N вихрей произвольной интенсивности на две степени свободы. Воспользуемся для этого аналогией с плоской задачей n тел в небесной механике.

Как известно, для задачи n тел сначала, выполняется *исключение центра масс* [8]. В частности, для этого можно выбрать переменные Якоби

$$\boldsymbol{\xi}_2 = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \quad \boldsymbol{\xi}_3 = \boldsymbol{r}_3 - \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{\xi}_n = \boldsymbol{r}_n - \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + \ldots + m_{n-1}\boldsymbol{r}_{n-1}}{m_1 + \ldots + m_{n-1}},$$

которые определяют положение тел в системе центра масс ($\sum m_i\boldsymbol{r}_i = 0$). Ясно, что аналогичная процедура в задаче n вихрей (вместо масс необходимо выбрать завихренности $m_i \to \Gamma_i$) позволяет *исключить центр завихренности*, тем самым мы используем группу трансляций [21, 20]. При этом приведенная система инвариантна относительно вращений (группа $SO(2)$) вокруг центра завихренности. В небесной механике редукция по оставшейся группе вращений известна как *исключение узла по Якоби* и может быть выполнена различными способами (см. [8, 7]).

Для вихревой динамики аналогичная редукция существенно отличается (в связи с тем, что уравнения движения имеют первый порядок по времени), и может быть выполнена при помощи перехода к полярным координатам в переменных Якоби ($\xi_{ix} = \sqrt{2\rho_i}\cos\varphi_i$, $\xi_{iy} = \sqrt{2\rho_i}\sin\varphi_i$) с последующим исключением угла общего поворота всей конфигурации вихрей.

Предложение 1. *Система N произвольных вихрей на плоскости с ненулевой суммарной интенсивностью ($\sum_{i=1}^N \Gamma_i \neq 0$) допускает редукцию на две степени свободы, при которой каноническими переменными приведенной системы являются*

$$q_i = \rho_{i+2}\frac{\Gamma_{i+2}\sum_{k=1}^{i+1}\Gamma_k}{\sum_{k=1}^{i+2}\Gamma_k}, \quad \psi_i = \varphi_{i+2} - \varphi_2, \quad i = 1, \ldots, N-2, \tag{2.1}$$

где

$$\rho_i = \frac{1}{2}|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}^{(i-1)}|^2, \quad \varphi_i = \mathrm{arctg}\left(\frac{y_i - R_y^{(i-1)}}{x_i - R_x^{(i-1)}}\right), \quad i = 2\ldots N, \tag{2.2}$$

$\boldsymbol{R}^{(i)} = \dfrac{\sum_{j=1}^i \Gamma_j \boldsymbol{r}_j}{\sum_{j=1}^i \Gamma_j}$ *определяет центр завихренности i вихрей, а $\boldsymbol{r}_i$ — радиус-вектор i-го вихря (см. рис. 1).*

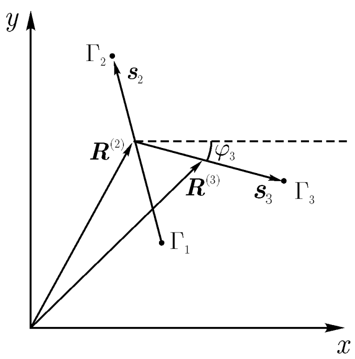

Рис. 1.

Доказательство.

Вычислим сначала скобку Пуассона для переменных ρ_i и φ_i

$$\{\rho_i, \varphi_j\} = \delta_{ij}\frac{\sum_{k=1}^i \Gamma_k}{\Gamma_i \sum_{k=1}^{i-1}\Gamma_k}, \quad i = 2, \ldots, N. \tag{2.3}$$

Если числитель и знаменатель не обращается в ноль, нормируем переменные ρ_i и получаем, что переменные q_i, ψ_i, определенные по формулам (2.1), являются каноническими. Несложно показать, что если $\sum_{i=1}^N \Gamma_i \neq 0$ всегда можно выбрать нумерацию вихрей так, что $\sum\limits_{k=1}^{i} \Gamma_k \neq 0$, $i = 1, \ldots, N-1$.

Покажем теперь, что на совместной поверхности уровня интегралов Q, P и D (1.4), (1.6) гамильтониан (1.2) можно выразить через переменные (2.1). Действительно, квадраты взаимных расстояний M_{ij} можно выразить через векторы $\boldsymbol{s}_i$, $i = 1\ldots N$, которые соединяют вихрь с номером i с центром завихренности подсистемы $i-1$ вихря

$$\begin{gathered} \boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{r}_i - \frac{\sum_{j=1}^{i-1}\Gamma_j \boldsymbol{r}_j}{\sum_{j=1}^{i-1}\Gamma_j}, \\ M_{ij} = \left|\boldsymbol{s}_i - \boldsymbol{s}_j + \sum_{k=j}^{i-1}\frac{\Gamma_k \boldsymbol{s}_k}{\sum_{l=1}^k \Gamma_l}\right|^2, \quad i > j. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Согласно (2.2), $\boldsymbol{s}_i = (\sqrt{2\rho_i}\cos\varphi_i, \sqrt{2\rho_i}\sin\varphi_i)$, причем ρ_i и φ_i выражаются через переменные q_i и ψ_i и общий угол поворота всей системы вихрей вокруг общего центра завихренности $\psi_0 = \varphi_2$ по формулам

$$\begin{gathered} \rho_2 = \left(\frac{D}{2\sum_{i=1}^N \Gamma_i} - \sum_{k=1}^{N-2} q_k\right)\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{\Gamma_1\Gamma_2}, \\ \rho_i = \frac{\sum_{k=1}^i \Gamma_k}{\Gamma_i \sum_{k=1}^{i-1}\Gamma_k} q_{i-2}, \quad \varphi_i = \psi_{i-2} + \psi_0, \quad i = 3, \ldots, N. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Поскольку квадраты взаимных расстояний выражаются через всевозможные скалярные произведения $(\boldsymbol{s}_i, \boldsymbol{s}_j) = 2\sqrt{\rho_i\rho_j}\cos(\varphi_i - \varphi_j)$, то они не зависят от угла ψ_0. Таким образом квадраты взаимных расстояний, а, следовательно, и гамильтониан системы, на совместном уровне интегралов системы выражается через переменные (2.1). ■

Рассмотрим подробнее частный случай $\sum\limits_{i=1}^{N}\Gamma_i = 0$, который не имеет аналога в небесной механике (в связи с положительностью масс тел $m_i > 0$). В этом случае говорят, что центр завихренности находится на бесконечности, и переменные (2.1) не определены (один из знаменателей обращается в ноль). Соответствующая редукция в этом случае описывается следующим образом.

Предложение 2. *В случае $\sum_{j=1}^{N}\Gamma_j = 0$ канонические переменные приведенной системы (соответствующие редукции на две степени свободы) $\widetilde{\rho}_i$, $\widetilde{\varphi}_i$, $i = 1, \ldots, N-2$ задаются соотношениями*

$$\widetilde{\rho}_i = \frac{\Gamma_i\sum_{k=1}^{i-1}\Gamma_k}{\sum_{k=1}^{i}\Gamma_k}\rho_{i+1}, \quad \widetilde{\varphi}_i = \varphi_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, N-2, \tag{2.6}$$

где ρ_i и φ_i заданы соотношениями (2.2).

Доказательство.

Как показано выше, скобка Пуассона переменных ρ_i и φ_i (2.2) определяется соотношением (2.3). В рассматриваемом случае выполняется соотношение $\{\rho_N, \varphi_N\} = 0$, а переменные ρ_N и φ_N являются интегралами движения. Они связаны со стандартными интегралами движения (1.4), (1.6) следующими соотношениями

$$P = \Gamma_N\sqrt{2\rho_N}\cos\varphi_N,\ Q = \Gamma_N\sqrt{2\rho_N}\sin\varphi_N,\ D = -\Gamma_N^2\rho_N. \tag{2.7}$$

Также как и в предыдущем предложении, квадраты взаимных расстояний M_{ij} выражаются через векторы $\boldsymbol{s}_i = (\sqrt{2\rho_i}\cos\varphi_i, \sqrt{2\rho_i}\sin\varphi_i)$ по формуле (2.4). Таким образом, гамильтониан системы на совместном уровне интегралов системы будет зависеть от $2(N-2)$ переменных $(\rho_i, \varphi_i, i = 2\ldots N-1)$ и значений двух интегралов ρ_N и φ_N. ■

Рассмотрим еще более частный (но не менее интересный) случай $\sum_{j=1}^{N}\Gamma_j = 0$ и $D = 0$. Вследствие существования трех инволютивных интегралов (1.4) при этом возможно понижения порядка сразу на три степени свободы. Например, для задачи четырех вихрей при этих условиях получается частный случай интегрируемости [5, 16], а система пяти точечных вихрей сводится к двум степеням свободы. Действительно, справедливо следующее

Предложение 3. *В случае $\sum_{j=1}^{N}\Gamma_j = 0$ и $D = 0$ система допускает редукцию на три степени свободы. Канонические переменные приведенной системы определяются соотношениями* (2.1) *при $i = 1\ldots N-3$.*

Доказательство.

Как было показано в предыдущем предложении, в случае $\sum_{j=1}^{N}\Gamma_j = 0$ замена переменных (2.2) понижает размерность системы на две степени свободы. Для редукции еще на одну степень свободы от оставшихся после редукции переменных ρ_k, φ_k, $k = 2\ldots N-1$ необходимо перейти к переменным (2.1), определенным теперь для $i = 1\ldots N-3$. Повторяя рассуждения предложения 1, можно показать, что на совместном уровне первых интегралов гамильтониан системы выражается через переменные q_i, ψ_i, $i = 1\ldots N-3$ и параметрически зависит от двух значений интегралов ρ_N и φ_N. ■

3. Уравнения движения и первые интегралы системы вихрей на сфере $\mathbb{S}^2$

Для n точечных вихрей на сфере $\mathbb{S}^2$ гамильтоновы уравнения движения в сферических координатах (θ_i, φ_i) могут быть записаны в виде [1]

$$\dot{\theta}_i = \{\theta_i, \mathcal{H}\}, \quad \dot{\varphi}_i = \{\varphi_i, \mathcal{H}\}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.1}$$

со скобкой Пуассона

$$\{\varphi_i, \cos\theta_k\} = \frac{\delta_{ik}}{R^2\Gamma_i}, \tag{3.2}$$

где Γ_i — интенсивности вихрей и гамильтониан

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{4\pi}\sum_{i<k}^{n}\Gamma_i\Gamma_k\ln(M_{ik}) = -\frac{1}{4\pi}\sum_{i<k}^{n}\Gamma_i\Gamma_k\ln\left(4R^2\sin^2\frac{\gamma_{ik}}{2}\right). \tag{3.3}$$

Здесь R — радиус сферы, M_{ij} — квадрат расстояния между i-ым и j-ым вихрями измеряемого по хорде, γ_{ik} — угол между векторами, соединяющими центры сферы с точечными вихрями i и k,

$$\cos\gamma_{ik} = \cos\theta_i\cos\theta_k + \sin\theta_i\sin\theta_k\cos(\varphi_i - \varphi_k).$$

Помимо гамильтониана уравнения (3.1) допускают еще три независимых неинволютивных интеграла

$$F_1 = R\sum_{i=1}^{n}\Gamma_i\sin\theta_i\cos\varphi_i, \quad F_2 = R\sum_{i=1}^{n}\Gamma_i\sin\theta_i\sin\varphi_i, \quad F_3 = R\sum_{i=1}^{n}\Gamma_i\cos\theta_i. \tag{3.4}$$

Вектор $\boldsymbol{F}$ с компонентами $(F_1,\ F_2,\ F_3) = \boldsymbol{F} = \sum\Gamma_i\boldsymbol{r}_i$ ($\boldsymbol{r}_i$ — радиус-вектор вихрей) называется *моментом завихренности*, его компоненты коммутируют следующим образом:

$$\{F_i, F_j\} = \frac{1}{R}\varepsilon_{ijk}F_k. \tag{3.5}$$

Как и в плоском случае, можно редуциоровать систему на две степени свободы, используя инволютивные интегралы, например F_3 и $\boldsymbol{F}^2$.

Таким образом, в случае трех вихрей получим вполне интегрируемую систему (она была независимо указана и исследована в (Ньютон, Кидамби, Борисов, Лебедев, 1998) [13, 14, 19]). Задача 4-х вихрей редуцируется к двум степеням свободы и в общем случае неинтегрируема (Д. А. и А. А. Багрец).

4. Редукция на сфере

На сфере, в отличие от плоского случая, невозможно разделить симметрии на трансляции и вращения, тем не менее предложенный выше алгоритм редукции (обобщающий редукцию Якоби) допускает обобщения. Так же, как и выше, будем последовательно рассматривать момент завихренности 2-х, 3-х, ..., n вихрей:

$$\boldsymbol{F}_2 = \Gamma_1\boldsymbol{r}_1 + \Gamma_2\boldsymbol{r}_2, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{F}_n = \Gamma_1\boldsymbol{r}_1 + \ldots + \Gamma_n\boldsymbol{r}_n = \boldsymbol{F},$$

где $\boldsymbol{r}_i \in \mathbb{R}^3$ — декартовы координаты вихрей на сфере вложенной в $\mathbb{R}^3$. Квадраты моментов $\boldsymbol{F}_k^2$, $k = 2, \ldots, n$, обладают следующими (очевидными) свойствами:

1°. все $\boldsymbol{F}_k^2$ коммутируют между собой

$$\{\boldsymbol{F}_k^2, \boldsymbol{F}_m^2\} = 0;$$

2°. квадрат момента $\boldsymbol{F}_k^2$ коммутирует с координатами всех вихрей с номерами $1, 2, \ldots, k$

$$\{\boldsymbol{F}_k^2, x_i\} = \{\boldsymbol{F}_k^2, y_i\} = \{\boldsymbol{F}_k^2, z_i\} = 0, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Таким образом квадраты моментов $\boldsymbol{F}_2^2, \ldots, \boldsymbol{F}_{n-1}^2$ инвариантны относительно действия группы симметрий $SO(3)$, коммутируют между собой и их число равно половине размерности приведенной системы. С помощью свойства 2° этот набор несложно пополнить некоторыми относительными угловыми переменными приведенной системы.

Предложение 4. *Система N вихрей на сфере в случае $\boldsymbol{F}_N = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \boldsymbol{r}_i \neq 0$ допускает редукцию на две степени свободы с помощью канонических переменных ρ_i, ψ_i, задающихся соотношениями*

$$\rho_i = |\boldsymbol{F}_{i+1}|, \quad \operatorname{tg}\psi_i = \frac{\rho_i(\boldsymbol{F}_{i+1}, \boldsymbol{r}_{i+1} \times \boldsymbol{r}_{i+2})}{(\boldsymbol{r}_{i+1} \times \boldsymbol{F}_{i+1}, \boldsymbol{r}_{i+2} \times \boldsymbol{F}_{i+1})}, \quad i = 1, \ldots, N-2, \tag{4.1}$$

где ψ_i представляет собой угол между плоскостями $(\boldsymbol{F}_{i+1}, \boldsymbol{r}_{i+2})$ и $(\boldsymbol{F}_{i+1}, \boldsymbol{r}_{i+1})$ (см. рис. 2).

Доказательство.

1. С помощью прямых вычислений используя соотношения (4.1) можно показать, что переменные ρ_i, ψ_i коммутируют следующим образом

$$\{\rho_i, \rho_j\} = \{\psi_i, \psi_j\} = 0, \quad \{\rho_i, \psi_j\} = \frac{\delta_{ij}}{R}. \tag{4.2}$$

2. Покажем теперь, что на совместной поверхности уровня интегралов $\boldsymbol{F}_N$ гамильтониан (3.3) можно выразить через переменные (4.1). Так как $\boldsymbol{r}_i$ и $\boldsymbol{F}_i$, $i = 2, \ldots, N$ связаны друг с другом линейным преобразованием

$$\boldsymbol{r}_i = \frac{1}{\Gamma_i}(\boldsymbol{F}_i - \boldsymbol{F}_{i-1}), \quad i = 2, \ldots, N,$$

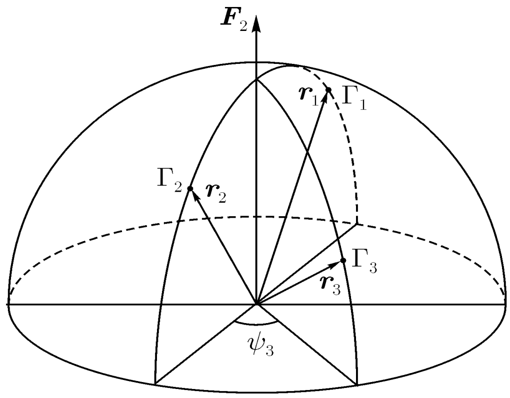

Рис. 2.

то квадраты взаимных расстояний между вихрями M_{ij} можно выразить через всевозможные скалярные произведения векторов $\boldsymbol{F}_1 = \Gamma_1 \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_N$. Таким образом для доказательства предложения достаточно показать, что данные скалярные произведения на совместном уровне интеграла $\boldsymbol{F}_N$ полностью определяются переменными (4.1).

Рассмотрим алгоритм построения векторов $\boldsymbol{F}_i$, $i = 1 \ldots N-1$ по известным переменным (4.1) и значению интеграла $\boldsymbol{F}_N$. Угол ψ_{i-2}, по построению, является углом между плоскостями $(\boldsymbol{F}_{i-1}, \boldsymbol{r}_i)$ и $(\boldsymbol{F}_{i-1}, \boldsymbol{r}_{i-1})$, или что то же самое, между плоскостями $(\boldsymbol{F}_{i-1}, \boldsymbol{F}_i)$ и $(\boldsymbol{F}_{i-1}, \boldsymbol{F}_{i-2})$. Следовательно можно записать следующее тождество

$$\begin{gathered}\boldsymbol{F}_{i-2} = \boldsymbol{F}_{i-1}\frac{(\boldsymbol{F}_{i-1}, \boldsymbol{F}_{i-2})}{\boldsymbol{F}_{i-1}^2} + \Big(\boldsymbol{n}_1 \sin\psi_{i-2} + \boldsymbol{n}_2 \cos\psi_{i-2}\Big)\sqrt{\boldsymbol{F}_{i-2}^2 - \frac{(\boldsymbol{F}_{i-1}, \boldsymbol{F}_{i-2})^2}{\boldsymbol{F}_{i-1}^2}},\\ \boldsymbol{n}_1 = \frac{\boldsymbol{F}_i \times \boldsymbol{F}_{i-1}}{|\boldsymbol{F}_i \times \boldsymbol{F}_{i-1}|}, \quad \boldsymbol{n}_2 = \frac{\boldsymbol{F}_{i-1} \times (\boldsymbol{F}_i \times \boldsymbol{F}_{i-1})}{|\boldsymbol{F}_{i-1} \times (\boldsymbol{F}_i \times \boldsymbol{F}_{i-1})|}.\end{gathered} \tag{4.3}$$

Используя определения $\boldsymbol{F}_i$ и ρ_i (4.1), находим

$$(\boldsymbol{F}_i, \boldsymbol{F}_{i-1}) = \frac{1}{2}(\rho_{i-1}^2 + \rho_{i-2}^2 - \Gamma_i^2 R^2), \quad \boldsymbol{F}_i^2 = \rho_{i-1}^2. \tag{4.4}$$

Подставляя эти соотношения в (4.3), получим рекуррентное выражение для определения вектора $\boldsymbol{F}_{i-2}$ через $\boldsymbol{F}_{i-1}$, $\boldsymbol{F}_i$ и координаты ρ_i, ψ_i

$$\begin{gathered}\boldsymbol{F}_{i-2} = \boldsymbol{F}_{i-1}\frac{\rho_{i-2}^2 + \rho_{i-3}^2 - \Gamma_{i-1}^2 R^2}{2\rho_{i-2}^2} + \Big(\boldsymbol{n}_1 \sin\psi_{i-2} + \boldsymbol{n}_2\cos\psi_{i-2}\Big)\times \\ \times\sqrt{\rho_{i-3}^2 - \frac{(\rho_{i-2}^2 + \rho_{i-3}^2 - \Gamma_{i-1}^2 R^2)^2}{4\rho_{i-2}^2}}, \quad i = 3, \ldots, N,\end{gathered} \tag{4.5}$$

где введено обозначение $\rho_0 = |\boldsymbol{F}_1| = \Gamma_1 R$.

Используя (4.5) легко показать, что

$$\boldsymbol{F}_i = \alpha_i \boldsymbol{F}_N + \beta_i \boldsymbol{F}_{N-1} + \gamma_i \boldsymbol{F}_N \times \boldsymbol{F}_{N-1}, \quad i = 1, \ldots, N-2, \tag{4.6}$$

где коэффициенты α_i, β_i, γ_i выражаются через координаты (4.1). Следовательно, все скалярные произведения $(\boldsymbol{F}_i,\ \boldsymbol{F}_j)$ выражаются через координаты (4.1) и величины $(\boldsymbol{F}_N,\ \boldsymbol{F}_N)$, $(\boldsymbol{F}_{N-1},\ \boldsymbol{F}_{N-1})$ и $(\boldsymbol{F}_N,\ \boldsymbol{F}_{N-1})$. С помощью (4.4) мы можем выразить эти величины через координаты (4.1) и постоянные интегралов $\boldsymbol{F}_N$. Таким образом скалярные произведения $(\boldsymbol{F}_i,\ \boldsymbol{F}_j)$ (а значит и взаимные расстояния между вихрями) будут зависеть только от переменных (4.1). Следовательно, переход к переменным (4.1) приводит к редукции на две степени свободы. ■

Рассмотрим теперь частный случай понижения порядка на дополнительную степень свободы, вполне аналогичный случаю $\sum_{j=1}^N \Gamma_j = 0$, $D_N = 0$ при движении вихрей по плоскости. Имеем

Предложение 5. *В случае* $\boldsymbol{F}_N = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \boldsymbol{r}_i = 0$ *система* (3.1) *допускает редукцию на три степени свободы. Канонические переменные приведенной системы определяются соотношением* (4.1) *при* $i = 1, \ldots, N-3$.

Доказательство.

Для доказательства предложения, так же как и в предыдущем случае, покажем, что скалярные произведения $(\boldsymbol{F}_i,\ \boldsymbol{F}_j)$ зависят только от переменных ρ_i, ψ_i, $i = 1, \ldots, N-3$.

Аналогично предыдущему случаю, с помощью соотношения (4.5) вектора $\boldsymbol{F}_i$ можно выразить через $\boldsymbol{F}_{N-1}$ и $\boldsymbol{F}_{N-2}$

$$\boldsymbol{F}_i = \widetilde{\alpha}_i \boldsymbol{F}_{N-1} + \widetilde{\beta}_i \boldsymbol{F}_{N-2} + \widetilde{\gamma}_i \boldsymbol{F}_{N-1} \times \boldsymbol{F}_{N-2}, \quad i = 1, \ldots, N-3, \tag{4.7}$$

где коэффициенты $\widetilde{\alpha}_i$, $\widetilde{\beta}_i$, $\widetilde{\gamma}_i$ зависят от координат ρ_i, ψ_i, $i = 1, \ldots, N-3$. Следовательно, скалярные произведения $(\boldsymbol{F}_i,\ \boldsymbol{F}_j)$ выражаются через координаты ρ_i, ψ_i, $i = 1, \ldots, N-3$ и величины $(\boldsymbol{F}_{N-1},\ \boldsymbol{F}_{N-1})$, $(\boldsymbol{F}_{N-2},\ \boldsymbol{F}_{N-2})$ и $(\boldsymbol{F}_{N-1},\ \boldsymbol{F}_{N-2})$. В рассматриваемом случае $\boldsymbol{F}_{N-1} = -\Gamma_N \boldsymbol{r}_N$, поэтому $\rho_{N-2} = |\boldsymbol{F}_{N-1}| = R|\Gamma_N|$ является интегралом движения. Следовательно, используя (4.4), скалярные произведения $(\boldsymbol{F}_{N-1},\ \boldsymbol{F}_{N-1})$, $(\boldsymbol{F}_{N-2},\ \boldsymbol{F}_{N-2})$ и $(\boldsymbol{F}_{N-1},\ \boldsymbol{F}_{N-2})$, можно выразить через координаты ρ_i, ψ_i, $i = 1, \ldots, N-3$. Таким образом, взаимные расстояния между вихрями задаются только переменными ρ_i, ψ_i, $i = 1, \ldots, N-3$ и замена (4.1) приводит к редукции на три степени свободы. ■

Заметим, что при указанных условиях система четырех вихрей на сфере оказывается интегрируемой [22, 3].

5. Явная редукция системы четырех вихрей на плоскости и сфере

A. Случай плоскости. Укажем явный вид приведенной системы для случая четырех вихрей на плоскости. Гамильтониан выражается через взаимные расстояния по формуле (1.2), которые в свою очередь могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
&M_{12} = 2\rho_2, \quad M_{23} = 2\rho_3 + 2\Big(\frac{\Gamma_1}{\Gamma_1+\Gamma_2}\Big)^2\rho_2 - \frac{4\Gamma_1}{\Gamma_1+\Gamma_2}\sqrt{\rho_2\rho_3}\cos\psi_1,\\
&M_{13} = 2\rho_3 + 2\Big(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1+\Gamma_2}\Big)^2\rho_2 + \frac{4\Gamma_2}{\Gamma_1+\Gamma_2}\sqrt{\rho_2\rho_3}\cos\psi_1,\\
&M_{34} = 2\rho_4 + 2\Big(\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3}\Big)^2\rho_3 - \frac{4(\Gamma_1+\Gamma_2)}{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3}\sqrt{\rho_3\rho_4}\cos(\psi_1-\psi_2),\\
&M_{14} = 2\rho_4 + 2\Big(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1+\Gamma_2}\Big)\rho_2 + 2\Big(\frac{\Gamma_3}{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3}\Big)^2\rho_3 + \frac{4\Gamma_2}{\Gamma_1+\Gamma_2}\sqrt{\rho_2\rho_4}\cos\psi_2 + \\
&\qquad + \frac{4\Gamma_3}{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3}\sqrt{\rho_3\rho_4}\cos(\psi_1-\psi_2) + \frac{4\Gamma_2\Gamma_3}{(\Gamma_1+\Gamma_2)(\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3)}\sqrt{\rho_2\rho_3}\cos\psi_1,\\
&M_{24} = 2\rho_4 + 2\Big(\frac{\Gamma_1}{\Gamma_1+\Gamma_2}\Big)^2\rho_2 + 2\Big(\frac{\Gamma_3}{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3}\Big)^2\rho_3 - \frac{4\Gamma_1}{\Gamma_1+\Gamma_2}\sqrt{\rho_2\rho_4}\cos\psi_2 + \\
&\qquad + \frac{4\Gamma_3}{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3}\sqrt{\rho_3\rho_4}\cos(\psi_1-\psi_2) - \frac{4\Gamma_2\Gamma_3}{(\Gamma_1+\Gamma_2)(\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3)}\sqrt{\rho_2\rho_3}\cos\psi_1,
\end{aligned} \tag{5.1}$$

где ρ_i выражаются через канонические переменные q_1, q_2 ($\{q_i, \psi_j\} = \delta_{ij}$) и постоянную интеграла D по формулам

$$\rho_2 = \Big(\frac{1}{2}\frac{D}{\sum_{i=1}^4 \Gamma_i} - q_1 - q_2\Big)\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{\Gamma_1\Gamma_2}, \quad \rho_3 = \frac{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3}{\Gamma_3(\Gamma_1+\Gamma_2)}q_1, \quad \rho_4 = \frac{\sum_{i=1}^4 \Gamma_i}{\Gamma_4(\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3)}q_2.$$

Геометрический смысл переменных поясняется на рис. 3.

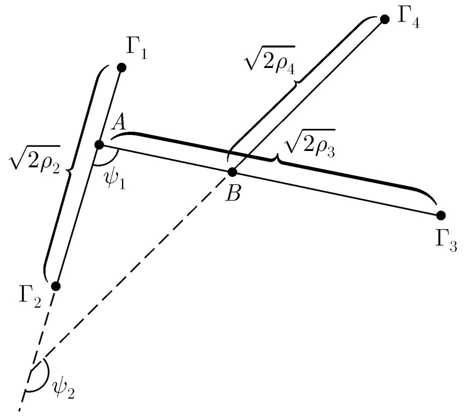

Рис. 3. Геометрический смысл переменных приведенной системы. Точки A и B центры завихренности пары Γ_1, Γ_2 и тройки вихрей $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ соответственно.

Отметим, что указанные формулы справедливы не только для всех положительных интенсивностей, подобно [18].

B. Случай сферы. Аналогично укажем выражения для взаимных расстояний 4-х вихрей на сфере через канонические переменные приведенной системы ($\{\rho_i, \psi_j\} = R^{-1}\delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$) и квадрат интеграла $\boldsymbol{F}^2 = \boldsymbol{F}_4^2 = c^2 = \mathrm{const}$ (при произвольных интенсивностях вихрей):

$$
\begin{gathered}
M_{12} = \frac{(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2 R^2 - \rho_1^2}{\Gamma_1\Gamma_2}, \quad M_{23} = \frac{((\Gamma_2 + \Gamma_3)^2 - \Gamma_1^2)R^2 - \rho_2^2 + 2(\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{F}_3)}{\Gamma_2\Gamma_3},\\
M_{13} = \frac{((\Gamma_1 + \Gamma_3)^2 - \Gamma_2^2 - \Gamma_3^2)R^2 + \rho_1^2 - 2(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_3)}{\Gamma_1\Gamma_3}, \ M_{14} = 2R^2 + 2\frac{(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_3) - (\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F})}{\Gamma_1\Gamma_4},\\
M_{34} = \frac{(\Gamma_3 + \Gamma_4)^2 R^2 - \rho_1^2 - c^2 + 2(\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F})}{\Gamma_3\Gamma_4},\\
M_{24} = \frac{(2\Gamma_2\Gamma_4 - \Gamma_3^2)R^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2(\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}) + 2(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}) - 2(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_3)}{\Gamma_2\Gamma_4},
\end{gathered}
\tag{5.2}
$$

где скалярные произведения выражаются по формулам

$$
\begin{gathered}
(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2) = \frac{1}{2}(\rho_1^2 + \Gamma_1^2 R^2 - \Gamma_2^2 R^2), \quad (\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3) = \frac{1}{2}(\rho_2^2 + \rho_1^2 - \Gamma_3^2 R^2),\\
(\boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F}) = \frac{1}{2}(c^2 + \rho_2^2 - \Gamma_4^2 R^2),\\
(\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}) = \frac{(\boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F})(\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3)}{\rho_2^2} + \left(c^2 - \frac{(\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F})^2}{\rho_2^2}\right)\cos\psi_2\sqrt{\frac{\rho_1^2\rho_2^2 - (\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3)^2}{\rho_2^2 c^2 - (\boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F})^2}},\\
(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_3) = \frac{(\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3)(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)}{\rho_1^2} + \left(\rho_2^2 - \frac{(\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3)^2}{\rho_1^2}\right)\cos\psi_1\sqrt{\frac{\rho_1^2\Gamma_1^2 R^2 - (\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)^2}{\rho_1^2\rho_2^2 - (\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3)^2}},\\
(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}) = \frac{(\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F})(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)}{\rho_1^2} + \left((\boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F}) - \frac{(\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F})(\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3)}{\rho_1^2}\right)\cos\psi_1 \times\\
\times\sqrt{\frac{\rho_1^2\Gamma_1^2 R^2 - (\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)^2}{\rho_1^2\rho_2^2 - (\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3)^2}} + \frac{\sin\psi_1 \sin\psi_2}{\rho_1\rho_2}\sqrt{(\rho_1^2\Gamma_1^2 R^2 - (\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)^2)(\rho_2^2 c^2 - (\boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F})^2)}.
\end{gathered}
\tag{5.3}
$$

6. Сечение Пуанкаре для системы четырех вихрей на плоскости и сфере

A. Случай плоскости. Полученные системы канонических редуцированных переменных могут быть применены для различных аналитических и численных исследований. Рассмотрим например, несколько задач связанных с исследованием хаотического поведения четырех вихрей на плоскости и сфере.

Приведем отображение Пуанкаре для приведенной системы четырех вихрей на плоскости. Выберем в качестве секущей плоскость $\psi_1 = \text{const}$. Пересечение изоэнергетической поверхности $\mathcal{H}(q_1, \psi_1, q_2, \psi_2) = E = \text{const}$ с этой плоскостью представляет собой некоторую двумерную поверхность в пространстве q_1, q_2, ψ_2 (вообще говоря, несвязную). На этой поверхности фазовый поток системы задает отображение Пуанкаре. Как правило, при этом поверхность имеет достаточно сложный вид, поэтому удобнее изображать отображение Пуанкаре на этой поверхности непосредственно в трехмерном пространстве, а не проецировать на какую-либо плоскость (рис. 4).

ЗАМЕЧАНИЕ. Представления отображения Пуанкаре на поверхность в пространстве позволяет избежать различных особенностей проецирования и не приводит к появлению несуществующих объектов, указанным в [9] (мы имеем в виду серповидные торы, существование которых можно объяснить особенностями проектирования).

Для обеспечения возвращаемости, рассмотрим случай ограниченности траекторий приведенной системы. Как показано в [3] для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих требований:

1. Все интенсивности имеют одинаковый знак;
2. Все интенсивности кроме одной положительны (отрицательны) и $\sum_{i=1}^{4} \Gamma_i < 0$ $(\sum_{i=1}^{4} \Gamma_i > 0)$;

Фазовые портреты для случая четырех одинаковых вихрей приведены в работах [9, 2]. Здесь мы подробнее рассмотрим второй случай компактного движения вихрей при $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = -1$, $\Gamma_4 = 4$. В качестве сечения выбрана плоскость $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$. Рисункам a), b) соответствует уровень энергии $E = -2$; рисункам c), d) — уровень $E = -1.3$; рисунку e) — уровень $E = -1$. Заметим, что в отличие от случая интенсивностей одного знака энергия в данном случае не ограничена ни сверху ни снизу. Тем не менее как показывают численные эксперименты при увеличении энергии стохастический слой практически пропадает. Он является достаточно обширным при малых энергиях, что еще раз подтверждает численные и аналитические результаты о стахостичности и неинтегрируемости проблемы четырех вихрей. Детальное исследование структуры хаоса, возможное с помощью описанной процедуры редукции и исследования сечений Пуанкаре, подобные, например [23], в этой задаче пока не выполнено.

B. Случай сферы. Приведем сечения Пуанкаре для задачи четырех вихрей на сфере, которые, насколько нам известно, раньше не строились. Для случая сферы все траектории ограничены, и условие возвращаемости заведомо выполняется, но мы ограничимся простейшим случаем равных интенсивностей.

Так же как и для предыдущего случая, выберем в качестве секущей плоскость $\psi_1 = \pi/2$. На рисунке 5 приведены фазовые портреты в пространстве ρ_1, ρ_2, ψ_2 для случая четырех одинаковых вихрей при $D = 3.55$. Рисункам а), б) соответствует уровень энергии $E = 0.8$; рисункам в), г) — уровень $E = 0.67$; рисунку д) — уровень $E = 0.64$.

Заметим, что при малых (близких к томсоновской конфигурации), а также при достаточно больших энергиях фазовый портрет системы практически регулярен (рис. 5 а, б, д). В то время как при промежуточных энергиях происходит почти полная хаотизация фазового потока системы (рис. 5 в, г).

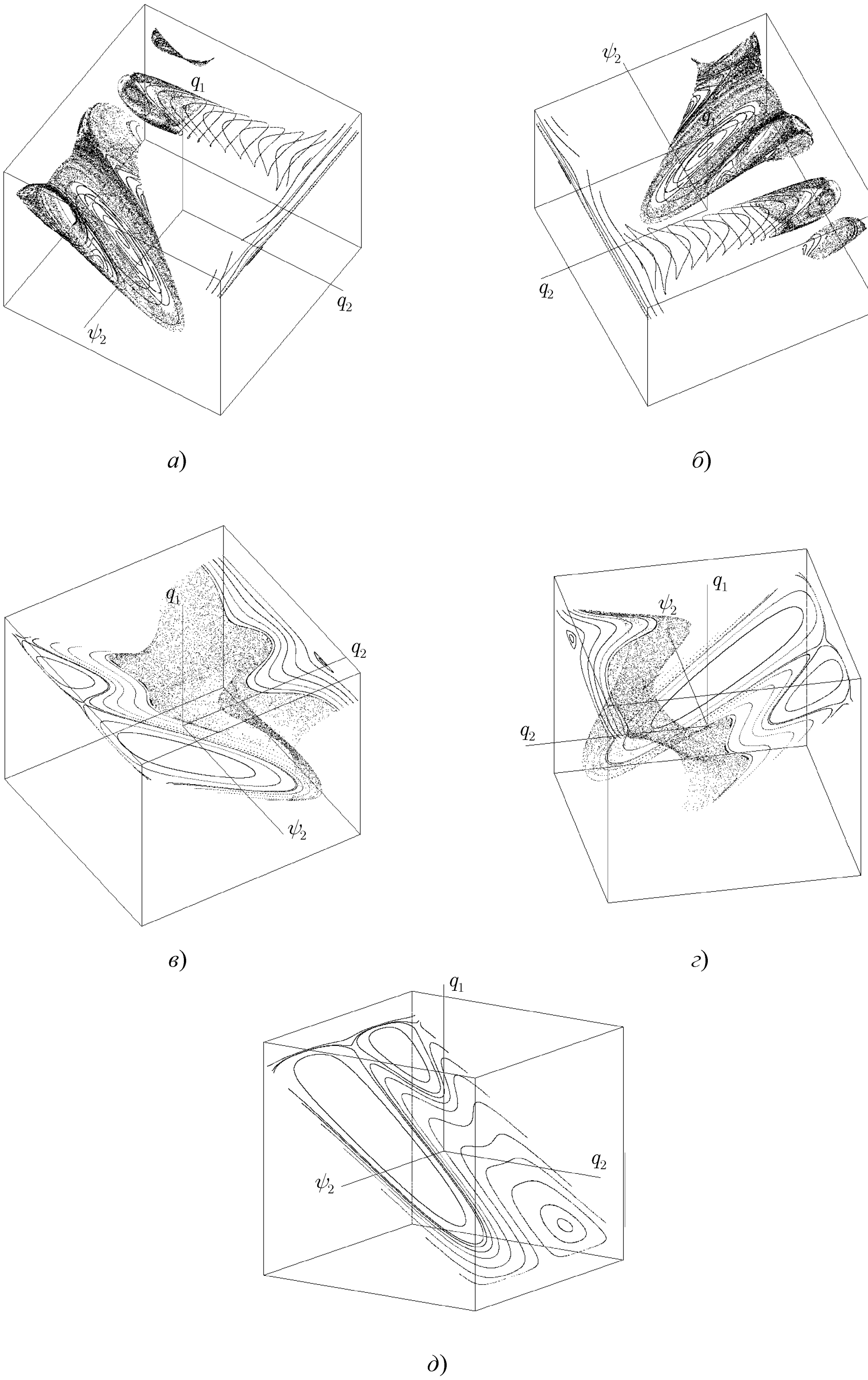

Рис. 4. Отображения Пуанкаре для задачи четырех вихрей на плоскости при $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = -1$, $\Gamma_4 = 4$. В качестве сечения выбрана плоскость $\psi_1 = \dfrac{\pi}{2}$. Рисункам а), б) соответствует уровень энергии $E = -2$; рисункам в), г) — уровень $E = -1.3$; рисунку д) — уровень $E = -1$.

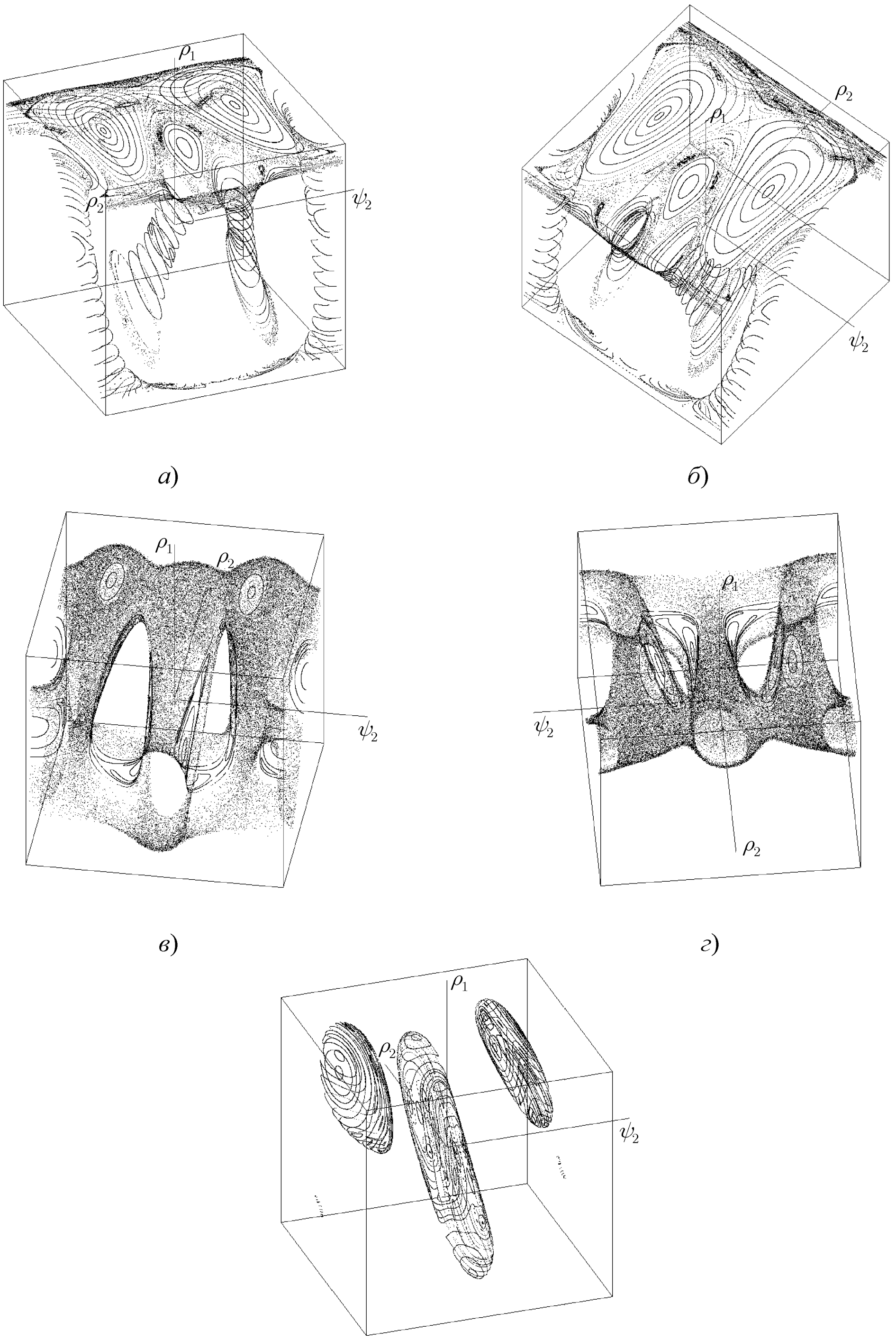

Рис. 5. Отображения Пуанкаре для задачи четырех вихрей равной интенсивности на сфере при $D = 3.55$. В качестве сечения выбрана плоскость $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$. Рисункам а), б) соответствует уровень энергии $E = 0.8$; рисункам в), г) — уровень $E = 0.67$; рисунку д) — уровень $E = 0.64$.

Список литературы

[1] Богомолов В. А. *Динамика завихренности на сфере* // Изв. АН. СССР. Мех. жид. и газа, 1977, № 6, с. 57–65.

[2] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Математические методы динамики вихревых структур*. В сб. «*Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей*» (ред. Борисов А. В., Мамаев И. С., Соколовский М. А.) // НИЦ РХД, 2003, 704 с.

[3] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике* // Ижевск: Изд. дом. «Удмуртский университет», 1999, 464 с.

[4] Зиглин С. Л. *Неинтегрируемость задачи о движение четырех точечных вихрей* // ДАН СССР, 1979, т. 250, № 6, с. 1296–1300.

[5] Козлов В. В. *Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике* // Успехи мат. наук, 1983, т. 38, № 1, с. 3–67.

[6] Козлов В. В. *Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике* // Ижевск: Изд-во УдГУ, 1995.

[7] Уинтнер А. *Аналитические основы небесной механики* // М.: Наука, 1967.

[8] Шарлье К. Л. *Небесная механика* // М.: Наука, 1966, 627 с.

[9] Aref H., Pomphrey N. *Integrable and chaotic motions of four vortices. I. The case of identical vortices* // Proc. R. Soc. London, 1982, V. 380 A, p. 359–387.

[10] Bagrets A. A., Bagrets D. A. *Nonintegrability of two problems in vortex dynamics* // Chaos, 1997, V. 7, № 3, p. 368–375.

[11] Boatto S., Laskar J. *Point vortex cluster formation in the plane and on the plane and on the sphere. An energy bifurcation condition* // Chaos, 2003, V. 13, № 3, p. 824–835.

[12] Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. *Lie algebras in vortex dynamics and celestial mechanics — IV* // Reg. & Chaot. Dyn., 1999, V. 4, № 1, p. 23–50.

[13] Borisov A. V., Lebedev V. G. *Dynamics of three vortices on a Plane and a Sphere — II. General compact case* // Reg. & Ch. Dynamics, 1998, V. 3, № 2, p. 99–114.

[14] Borisov A. V., Lebedev V. G. *Dynamics of three vortices on a Plane and a Sphere — III. General compact case* // Reg. & Ch. Dynamics, 1998, V. 3, № 4, p. 76–90.

[15] Celletti A., Falclini C. *A remark on the KAM theorem applied to a four-vortex problem* // J. Stat. Phys., 1988, V. 52, p. 471–477.

[16] Eckhardt B. *Integrable four vortex motion* // Phys. Fluids, 1988, V. 31, № 10, p. 2796–2801.

[17] Eckhardt B., Aref H. *Integrable and chaotic motion of four vortices II. Collision dynamics of vortex pairs* // Phil. Trans. R. Soc. Lond., 1988, A, V. 326, p. 655–696.

[18] Khanin K. M. *Quasi-periodic motions of vortex systems* // Physica D., 1982, V. 4, p. 261–269.

[19] Kidambi R., Newton P. K. *Motion of three point vortices on a sphere* // Physica D, 1998, V. 116, p. 143–175.

[20] Lim C. C. *A combinatorical perturbation method and Arnold's wiskered tori in vortex dynamics* // Physica D, 1993, V. 64, p. 163–184.

[21] Lim C. C. *Graph theory and special class of symplectic transformations: the generalized Jacobi variables* // J. Math. Phys., 1991, V. 32, № 1, p. 1–7.

[22] Newton P. K. *The N-Vortex problem. Analytical Techniques* // Springer, 2001.

[23] Simo C., Stuchi T. J., *Central stable/unstable manifolds and the destruction of KAM tori in the planar Hill problem* // Physica D, 2000, V. 140, p. 1–32.