

Звон диска Эйлера*

П. Кесслер, О. М. О'Рейли

Department of Mechanical Engineering
University of California at Berkeley
Berkeley, California 94720-1740, USA
E-mail: watchwrk@me.berkeley.edu, oreilly@me.berkeley.edu

Получено 23 января 2002 г.

Движение дисков, вращаемых на столах, имеет всем известную особенность, — связанный звуковой сигнал увеличивается в частоте, поскольку движение тяготеет к его внезапной остановке. Для увеличения времени до этой внезапной остановки не так давно была сконструирована коммерческая игрушка, известная как диск Эйлера. В этой статье представляем и моделируем модель твердого тела для диска Эйлера. Основываясь на природе связывающей силы между диском и столом, введенным посредством моделирования, предполагаем новый механизм для внезапной остановки диска и увеличенную акустическую частоту, связанную с падением диска.

Ключевые слова: твердое тело, движение диска, уравнения движения, диссипация.

P. Kessler, O. M. O'Reilly

The ringing of Euler's disk

The motion of disks spun on tables has the well-known feature that the associated acoustic signal increases in frequency as the motion tends towards its abrupt halt. Recently, a commercial toy, known as Euler's disk, was designed to maximize the time before this abrupt ending. In this paper, we present and simulate a rigid body model for Euler's disk. Based on the nature of the contact force between the disk and the table revealed by the simulations, we conjecture a new mechanism for the abrupt halt of the disk and the increased acoustic frequency associated with the decline of the disk.

Keywords: rigid body, motion of disk, equations of motion, dissipation.

Mathematical Subject Classifications: 70E18, 70E40

*P. Kessler, O. M. O'Reilly. *The Ringing of Euler's Disk* // Regular & Chaotic Dynamics, 2002, V.7, №.1. Пер. с англ. Н. В. Юговой.



1. Введение

Катящийся круглый диск является одним из самых популярных примеров твердого тела, находящегося под действием неголономной связи. Игнорируя диссипацию, уравнения движения для катящегося диска были введены в конце 19 столетия. Последующая работа Аппелля [1] и Кортвега [7] показала, что уравнения движения интегрируются. Почти столетие спустя результаты Аппелля и Кортвега были использованы Кашменом и др. [4] и О'Рейли [12] для исследования, помимо других вопросов, устойчивости и бифуркаций устойчивых движений (бесконечно тонких) круглых дисков.

Самая последняя игрушка, пробуждающая интерес к катящемуся диску, известна как диск Эйлера. Эта игрушка состоит из простого хромированного стального цилиндра. Диск Эйлера с заданным начальным наклоном и вращением начинает прецессировать, контактируя с поверхностью. Наблюдаемое движение имеет следующие особенности. Во-первых, диск в конечном счете неожиданно останавливается. В дополнение к этому, акустические частоты, издаваемые диском и поверхностью, демонстрируют резкое увеличение в конце движения. Эти две особенности также имеются у монет и многих других цилиндрических тел, однако, Бендик (Bendik) и др. [2], изобретатели диска Эйлера, оптимизировали выбор диска и поверхности таким образом, что время, необходимое для остановки диска, выходит за пределы 60 секунд.

Хотя в конце 90-х XX века Компер (Compre) [3] выполнил моделирование для диска Эйлера, именно статья Моффатта [9] пробудила значительный интерес к диску. Чтобы дать объяснение двум особым свойствам его движения, Моффатт рассматривал следствия вязкой диссипации на одном из типов устойчивого движения, задаваемого диском. Асимптотический анализ Моффатта показал, что движение диска достигло сингулярности в конечном времени. Статья Моффатта [9] вызвала огромное количество дискуссий, в частности, из-за игнорирования таких особенностей, как возможность скольжения и наличие трения качения. В частности, van den Engh и др. [5] и Ruina утверждали, что скольжение и трение качения, соответственно, во многих случаях были более значимы, чем вязкая диссипация. Отчасти касаясь этих вопросов, МакДональд и МакДональд [8] рассматривали диссипацию, механическая сила которого была равна

$$-\epsilon mgR (\dot{\theta})^\beta. \quad (1.1)$$

Здесь величины β и ϵ — постоянные, а θ — один из углов Эйлера, используемый, чтобы параметризовать вращение диска¹. Значение $\beta = 4$ находится в соответствии с моделью Моффатта. Проводя параллель с асимптотическим анализом Моффатта, но используя собственные данные эксперимента, МакДональд и МакДональд обнаружили, что значение $\beta = 2.5$ хорошо согласуется с экспериментами. Соответствующая статья Станиславского и Верона [16] расширила анализ Моффатта включением вышеупомянутых результатов классического интегрирования для катящегося диска. Эти авторы также намеревались сопоставить спектр частот незатухающих движений катящегося диска с акустическими частотами, производимыми диском Эйлера.

В настоящей статье мы используем анализ, предложенный van den Engh и др. и Ruina. Таким образом, мы моделируем диск как твердое цилиндрическое тело, движущееся с единственной точки контакта на горизонтальной поверхности. Создаваемая нами модель включает и качение и скольжение, переход между двумя этими идеализациями и конечную толщину диска. Хотя используемая модель для катящегося тела соответствует Аппеллю [1], мы также включаем момент трения M_f . Этот момент является первоначальным механизмом диссипации для катящегося тела, а наряду с силой трения скольжения, — и одним из механизмов диссипации для скользящего

¹ В работе Моффатта символ Ω используется для обозначения $\dot{\theta} = \omega_3 \sec(\alpha)$, примененного в настоящей статье.

тела. В частности, наша модель не включает вязкую диссипацию Моффатта. Она также отличается от модели Компера (Compege), смоделировавшего (бесконечно тонкий) катящийся диск, зависящий от момента вязкой диссипации и диссипативной силы.

Вследствие присутствия величины \mathbf{M}_f создаваемая нами модель не интегрируется даже в случае качения. Это является отличием от классической ситуации, рассмотренной Аппеллем [1]. Более того, выполнение анализа уравнений движения, аналогичного анализу, выполненному Кашменом и др. [4] и О’Рейли [12] о катящемся диске, кажется не возможным. Как результат, мы прибегаем к обширному множеству численных моделирований модели для диска Эйлера. В частности, мы находим, что диск часто перемещается между качением и скольжением, что обычная сила, действующая на диск, всегда положительна, и что мера частоты этой силы увеличивается по мере уменьшения угла наклона диска. Основываясь на результатах нашего численного моделирования, в завершающем параграфе статьи предполагаем новый механизм для внезапной остановки в движении диска.

2. Предварительные замечания

В этом параграфе укажем модель твердого тела для диска Эйлера. Полагаем диск Эйлера твердым телом массы m , движущимся по горизонтальной плоскости (см. рис. 1). Предположим, что тело имеет круглое поперечное сечение радиуса R и длины L , а его центр масс \bar{X} находится в его геометрическом центре. Другие примеры твердого тела включают круглые цилиндрические бруски и оболочки. Положение вектора \bar{X} определяется как $\bar{\mathbf{x}}$, а его вектор скорости равен $\bar{\mathbf{v}} = \dot{\bar{\mathbf{x}}}$. В данном случае точка сверху обозначает производную по отношению к времени t .

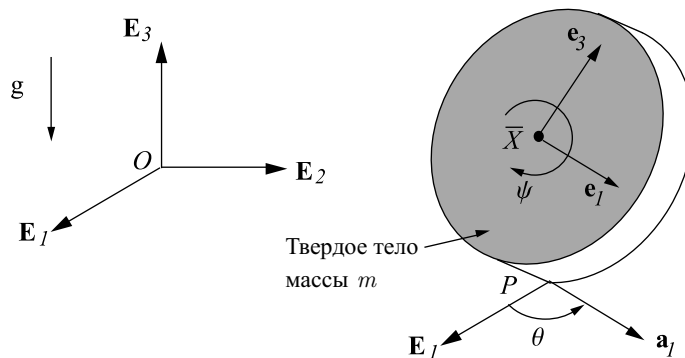


Рис. 1. Цилиндр, движущийся по горизонтальной плоскости. На этом рисунке также изображены два угла Эйлера, используемые для параметризации вращения твердого тела. Единичный вектор $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1$ ориентируется на ось симметрии цилиндра, а \mathbf{e}_1 всегда является горизонтальной.

Чтобы параметризовать вращение твердого тела, удобно использование множества 3-1-2 углов Эйлера θ , α и ψ . Первые два угла Эйлера θ и α можно использовать для определения базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, тогда как первый угол Эйлера θ определяет базис $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Отметим также, что $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ является неподвижным правым декартовым базисом.

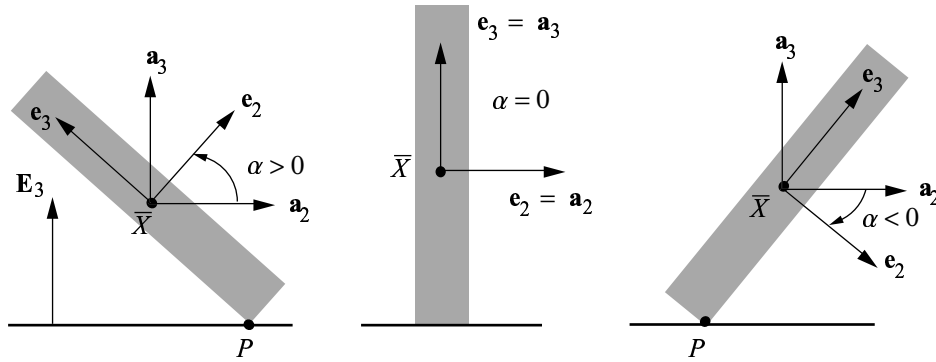


Рис. 2. Три из связанных сценариев твердого тела с горизонтальной плоскостью. Следует отметить, что вектор $\mathbf{a}_3 = \mathbf{E}_3$ является нормалью к горизонтальной плоскости.

Сингулярности 3-1-2 углов Эйлера возникают, когда угол наклона $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$. Ссылаясь на рис. 2, эти сингулярности соответствуют телу, лежащему горизонтально на плоскости. Этот рисунок также демонстрирует зависимость контакта между телом и плоскостью от α . Когда $\alpha \neq 0, \pm \frac{\pi}{2}$, существует единственная точка контакта P между телом и плоскостью. В противном случае, контакт между телом и плоскостью происходит либо на линии (при $\alpha = 0$), либо на поверхности. Нас интересуют случаи с одной точкой контакта.

Вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела имеет представления

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3 = \dot{\theta} \mathbf{E}_3 + \dot{\alpha} \mathbf{e}_1 + \dot{\psi} \mathbf{e}_2, \tag{2.2}$$

где

$$\omega_1 = \dot{\alpha}, \quad \omega_2 = \dot{\psi} + \dot{\theta} \sin(\alpha), \quad \omega_3 = \dot{\theta} \cos(\alpha). \tag{2.3}$$

Запишем также угловой импульс тела относительно его центра масс

$$\mathbf{H} = \left(\frac{mR^2 k^2}{4} + \frac{mL^2}{12} \right) (\omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_3 \mathbf{e}_3) + \left(\frac{mR^2 k^2}{2} \right) \omega_2 \mathbf{e}_2, \tag{2.4}$$

где $k^2 = 1$ для твердого цилиндрического бруска, а $k^2 = 2$ для цилиндрической оболочки незначительной толщины.

Мгновенную точку контакта твердого тела с горизонтальной поверхностью обозначим через P . В нашей модели мы проводим различия между двумя ситуациями, зависящими от вектора скорости \mathbf{v}_P величины P , и выделяем случай качения и случай скольжения. Используя предыдущие кинематические результаты, можно вычислить выражение для \mathbf{v}_P :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_P &= \bar{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times (-H \mathbf{e}_2 - R \mathbf{e}_3) = \\ &= \bar{\mathbf{v}} - (R\omega_2 - H\omega_3) \mathbf{a}_1 + (R \cos(\alpha) + H \sin(\alpha)) \omega_1 \mathbf{a}_2 - (H \cos(\alpha) - R \sin(\alpha)) \omega_1 \mathbf{E}_3. \end{aligned} \tag{2.5}$$

В данном случае $H = \frac{L}{2} \text{sign}(\alpha)$, а $H = 0$ при $\alpha = 0$. Когда тело катится, $\mathbf{v}_P = \mathbf{0}$. Если тело скользит, то имеет лишь $\mathbf{v}_P \cdot \mathbf{E}_3 = 0$, а вектор скорости скольжения \mathbf{v}_P не равен нулю.

В случае скольжения удобно разложение \mathbf{v}_P на его составляющие вдоль \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 :

$$\mathbf{v}_P = u_1 \mathbf{a}_1 + u_2 \mathbf{a}_2 = u \mathbf{s}. \tag{2.6}$$



Здесь величина u является скоростью скольжения, а единичный вектор \mathbf{s} задает направление скольжения:

$$\mathbf{s} = \cos(\nu)\mathbf{a}_1 + \sin(\nu)\mathbf{a}_2. \quad (2.7)$$

Если угол скольжения ν равен 0 или π , то \mathbf{v}_P параллельна \mathbf{a}_1 . Некоторые непосредственные манипуляции, использующие (2.2), (2.5), и (2.6), показывают, что

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \dot{u}_1 \cos(\nu) + \dot{u}_2 \sin(\nu), \\ \dot{\nu} &= \frac{1}{u} (\dot{u}_2 \cos(\nu) - \dot{u}_1 \sin(\nu)), \\ \dot{u}_1 &= \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{a}_1 + \dot{\theta}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{R}\omega_1 \cos(\alpha) - \mathbf{H}\omega_1 \sin(\alpha)) - \mathbf{R}\dot{\omega}_2 + \mathbf{H}\dot{\omega}_3, \\ \dot{u}_2 &= \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{a}_2 - \dot{\theta}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{R}\omega_2 - \mathbf{H}\omega_3) + \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{R} \sin(\alpha) - \mathbf{H} \cos(\alpha)). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Соответствующие уравнения для катящегося тела получаются из (2.8), полагая $u_1 = u_2 = \dot{u}_1 = \dot{u}_2 = 0$.

3. Диссипация и модели контакта

Возвращаемся к описанию сил и моментов, возникающих в теле вследствие его контакта с горизонтальной поверхностью. В большинстве решений связанных между собой задач, включающих круглые диски, контакт идеализируется как единственная точка контакта, и этот контакт порождает силу, действующую в точке контакта. В данном случае мы видоизменяем это условие, также включая момент в идеализированную единственную точку контакта. Этот момент \mathbf{M}_f диссипирует энергию из тела во время качения и скольжения и предназначается для включения последствий конечной области контакта в модель твердого тела.

Введение момента \mathbf{M}_f обусловливается временным смягчением основания, что тело является твердым. Подобный подход использовался для случая сфер (см., например, Неймарк (Neimark) и Фуфаева [11] или Журавлева [17]) и в моделях шин, используемых в динамике автомобиля (см., например, (Gillespie) [6] или (Pasejka) [13]). Вкратце, поскольку любое тело деформируется, действительный контакт между телом и горизонтальной поверхностью скорее будет включать область контакта \mathcal{A} , чем одну точку. Тело будет подвергаться полю сцепления \mathbf{t} с этой областью. Определение \mathbf{t} и \mathcal{A} , особенно для динамической задачи в этой статье, в настоящий момент трудно достижимо. В контексте динамики твердого тела поле сцепления равносильно сумме обычной силы \mathbf{N} и силы трения \mathbf{F}_f , действующей в P и моменте \mathbf{M}_f . То есть момент \mathbf{M}_f представляет собой результирующий момент поля \mathbf{t} в P . Будем использовать стандартные выражения для \mathbf{N} и \mathbf{F}_f и предложим новое выражение для \mathbf{M}_f .

Обычная сила, действующая на тело в P , имеет представление $\mathbf{N} = N\mathbf{E}_3$. Когда тело катится, полагаем, что сила трения \mathbf{F}_f имеет представление

$$\mathbf{F}_f = F_{f1}\mathbf{a}_1 + F_{f2}\mathbf{a}_2, \quad (3.1)$$

где величины F_{f1} и F_{f2} определяются согласно законам равновесия. Сила \mathbf{F}_f определяется из критерия статического трения $\sqrt{F_{f1}^2 + F_{f2}^2} \leq \mu_s |N|$, где μ_s — постоянный коэффициент статического трения Кулона. Когда тело скользит, полагаем, что сила трения \mathbf{F}_f равна

$$\mathbf{F}_f = -\mu_d |N| \frac{u_1 \mathbf{a}_1 + u_2 \mathbf{a}_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} = -\mu_d |N| \mathbf{s}, \quad (3.2)$$

где $\mu_d \geq 0$ — (постоянный) коэффициент динамического трения.

Для момента \mathbf{M}_f проводим параллель с выражением (3.2):

$$\mathbf{M}_f = - \sum_{i=1}^3 k_i |N| (\text{sign}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{a}_i)) \mathbf{a}_i, \quad (3.3)$$

где $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 0$ и $k_3 \geq 0$ постоянны. Нетрудно понять, что k_1 , k_2 и k_3 будут зависеть от размерностей области контакта \mathcal{A} . Чтобы оправдать наш выбор составляющих $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{a}_i$ в (3.3), заметим, что \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 являются касательными к горизонтальной плоскости, включающей тело, тогда как $\mathbf{a}_3 = \mathbf{E}_3$ является нормалью к этой плоскости. Поскольку \mathcal{A} определяется посредством \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 , выбор этих составляющих, как противоположных $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_i$, к примеру, кажется более подходящим. И наконец, предположение, что k_1 , k_2 и k_3 не являются отрицательными, мотивируется тем условием, что \mathbf{M}_f диссипирует энергию диска, т. е. $\mathbf{M}_f \cdot \boldsymbol{\omega} \leq 0$. Это условие также можно интерпретировать так, что \mathbf{M}_f противоположен вращению твердого тела.

Пять составляющих k_1 , k_2 , k_3 , μ_s и μ_d , связанных с \mathbf{F}_f и \mathbf{M}_f , необходимо определить экспериментально. Также отметим, что выражение для \mathbf{M}_f не является единственным. Действительно, несколько других выражений обсуждаются в литературе (см., например, [11, 17]). К примеру, также можно было бы предположить, что \mathbf{M}_f зависит от \mathbf{F}_f . Однако, мы полагаем, что (3.3) задает легко поддающуюся обработке физически реалистическую модель.

4. Уравнения движения для скользящего тела

Уравнения движения для скользящего тела можно получить, используя баланс линейного импульса

$$-mg\mathbf{E}_3 + \mathbf{N} + \mathbf{F}_f = m\dot{\mathbf{v}} \quad (4.1)$$

и баланс углового момента

$$(-R\mathbf{e}_3 - H\mathbf{e}_2) \times (\mathbf{N} + \mathbf{F}_f) + \mathbf{M}_f = \dot{\mathbf{H}}. \quad (4.2)$$

В этих уравнениях \mathbf{F}_f и \mathbf{M}_f описываются с помощью (3.2) и (3.3), соответственно.

Дополненные условием скольжения $\mathbf{v}_P \cdot \mathbf{E}_3 = 0$ (4.1) и (4.2) составляют семь уравнений для определения неизвестной обычной силы \mathbf{N} и движения тела. Действительно, из (4.1) легко видеть, что

$$\mathbf{N} = N\mathbf{E}_3 = m \left(g + \frac{d^2}{dt^2} (H \sin(\alpha) + R \cos(\alpha)) \right) \mathbf{E}_3. \quad (4.3)$$

Вместо непосредственного решения для движения центра масс и ориентации диска удобным является введение дифференциальных уравнений, задающих скорости скольжения u_1 и u_2 вместе с угловыми скоростями ω_1 , ω_2 и ω_3 и углом наклона α . Эти уравнения получаются из (4.1) и (4.2) с помощью (2.8). Тогда решения этих уравнений можно использовать для определения положения центра масс $\bar{\mathbf{x}}$ и углов Эйлера $\theta(t)$, $\alpha(t)$ и $\psi(t)$. Прежде чем записать эти уравнения, вводим следующие соотношения, безразмерные скорости и безразмерное время

$$h = \frac{H}{R}, \quad \hat{u}_\beta = \left(\frac{\chi}{R} \right) u_\beta, \quad \hat{\omega}_i = \chi \omega_i, \quad \tau = \frac{t}{\chi}, \quad (4.4)$$

где

$$\chi = \sqrt{\left(\frac{k^2 + 4}{4} \right) \frac{R}{g}}. \quad (4.5)$$

В дополнение к этому составляющая безразмерной обычной скорости согласно (4.3) имеет вид

$$\Phi = \left(\frac{\chi^2}{mR} \right) N = \frac{k^2 + 4}{4} + \frac{d^2}{d\tau^2} (\cos(\alpha) + h \sin(\alpha)). \quad (4.6)$$

Поскольку это необходимо для контакта диска с горизонтальной плоскостью, предположим, что величина Φ является строго положительной.

Дифференциальные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{d\tau} + \frac{d\omega_2}{d\tau} - h \frac{d\omega_3}{d\tau} &= \omega_3 \sec(\alpha)(u_2 - \omega_1 e) - \mu_d \Phi \cos(\nu), \\ \frac{du_2}{d\tau} - e \frac{d\omega_1}{d\tau} &= -\omega_3 \sec(\alpha)(u_1 + \omega_2 - h\omega_3) + f\omega_1^2 - \mu_d \Phi \sin(\nu), \\ \frac{d\alpha}{d\tau} &= \omega_1, \\ \left(1 + \frac{4h^2}{3k^2} + \frac{4f^2}{k^2} \right) \frac{d\omega_1}{d\tau} &= \omega_3 \left(2\omega_2 - \left(1 + \frac{4h^2}{3k^2} \right) \omega_3 \tan(\alpha) \right) - \\ &\quad - f \left(1 + \frac{4}{k^2} \right) + \left(\frac{4ef}{k^2} \right) \omega_1^2 - \\ &\quad - \left(\frac{4\mu_d e}{k^2} \right) \Phi \sin(\nu) - \left(\frac{4k_1}{k^2 R} \right) \Phi \text{sign}(\omega_1), \\ \frac{d\omega_2}{d\tau} &= \left(\frac{2\mu_d}{k^2} \right) \Phi \cos(\nu) - \left(\frac{2\bar{k}_2}{k^2 R} \right) \Phi, \\ \left(1 + \frac{4h^2}{3k^2} \right) \frac{d\omega_3}{d\tau} &= -\omega_1 \left(2\omega_2 - \left(1 + \frac{4h^2}{3k^2} \right) \omega_3 \tan(\alpha) \right) - \\ &\quad - \left(\frac{4\mu_d h}{k^2} \right) \Phi \cos(\nu) - \left(\frac{4\bar{k}_3}{k^2 R} \right) \Phi. \end{aligned} \quad (4.7)$$

В данном случае, для удобства мы определили

$$\begin{aligned} \bar{k}_2 &= k_2 \cos(\alpha) \text{sign}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{a}_2) + k_3 \sin(\alpha) \text{sign}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{a}_3), \\ \bar{k}_3 &= k_3 \cos(\alpha) \text{sign}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{a}_3) - k_2 \sin(\alpha) \text{sign}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{a}_2), \end{aligned} \quad (4.8)$$

и

$$e = h \sin(\alpha) + \cos(\alpha), \quad f = \frac{de}{d\alpha} = h \cos(\alpha) - \sin(\alpha). \quad (4.9)$$

В (4.7) с помощью подчеркивания сверху обозначены безразмерные переменные. Уравнения (4.7)_{1,2} были получены из (2.8), где $\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{a}_\alpha$ была определена с помощью \mathbf{a}_α составляющей (4.1). Остальные четыре дифференциальные уравнения (4.7)_{3,4,5,6} были получены посредством (2.2) и \mathbf{e}_i составляющих (4.2). Для выявления роли диссипативных членов (4.7) мы воздержались от замены для Φ , используя (4.6). Однако, прежде чем численно интегрировать (4.7), выполним эту замену.

5. Уравнения движения для катящегося тела

Когда тело катится, ограничение $\mathbf{v}_P = \mathbf{0}$ и уравнение (2.8) можно использовать для вычисления ускорения центра масс на основе вращательной кинематики тела

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{a}_1 &= \dot{\theta}(R\omega_1 \cos(\alpha) + H\omega_1 \sin(\alpha)) + R\dot{\omega}_2 - H\dot{\omega}_3, \\ \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{a}_2 &= \dot{\theta}(R\omega_2 - H\omega_3) + \frac{d}{dt}((R \cos(\alpha) + H \sin(\alpha))\omega_1).\end{aligned}\quad (5.1)$$

Следуя Раусу (1905), для вычисления выражений для сил \mathbf{N} и \mathbf{F}_f в качестве функций вращательной кинематики можно использовать (5.1) вместе с равновесием линейного импульса в форме (4.1). Пренебрегая деталями, безразмерная форма этих сил имеет вид

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{F}}_f &= \left(\frac{\chi^2}{mR}\right) \mathbf{F}_f = \left(\frac{d\omega_2}{d\tau} - h\frac{d\omega_3}{d\tau} + e\omega_1\omega_3 \sec(\alpha)\right) \mathbf{a}_1 + \\ &+ \left(-e\frac{d\omega_1}{d\tau} - f\omega_1^2 + (\omega_2 - h\omega_3)\omega_3 \sec(\alpha)\right) \mathbf{a}_2, \\ \Phi \mathbf{E}_3 &= \left(\frac{k^2 + 4}{4} + \frac{d^2 e}{d\tau^2}\right) \mathbf{E}_3.\end{aligned}\quad (5.2)$$

Следует отметить, что уравнение (5.2)₂, как и ожидалось, тождественно (4.6), мы пренебрегли подчеркиванием сверху, обозначающим безразмерные скорости в (5.2).

Баланс углового момента катящегося тела используется в совокупности с (5.2) для определения дифференциальных уравнений, описывающих вращение катящегося тела. Пренебрегая деталями и не определяя размерность получающихся уравнений, находим следующие четыре дифференциальные уравнения первого порядка

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{d\tau} &= \omega_1, \\ \left(1 + \frac{4}{k^2} + \frac{16h^2}{3k^2}\right) \frac{d\omega_1}{d\tau} &= \omega_3 \left(2\omega_2 - \left(1 + \frac{4h^2}{3k^2}\right) \omega_3 \tan(\alpha)\right) + \\ &+ \left(\frac{4e}{k^2}\right) \omega_3 \sec(\alpha) (\omega_2 - h\omega_3) - \\ &- f \left(1 + \frac{4}{k^2}\right) - \left(\frac{4k_1}{k^2 R}\right) \Phi, \\ \frac{d\omega_2}{d\tau} - \left(\frac{2h}{k^2 + 2}\right) \frac{d\omega_3}{d\tau} &= - \left(\frac{2e}{k^2 + 2}\right) \omega_1 \omega_3 \sec(\alpha) - \\ &- \left(\frac{2\bar{k}_2}{(k^2 + 2)R}\right) \Phi, \\ \left(1 + \frac{16h^2}{3k^2}\right) \frac{d\omega_3}{d\tau} - \left(\frac{4h}{k^2}\right) \frac{d\omega_2}{d\tau} &= -\omega_1 \left(2\omega_2 - \left(1 + \frac{4h^2}{3k^2}\right) \omega_3 \tan(\alpha)\right) + \\ &+ \left(\frac{4he}{k^2}\right) \omega_1 \omega_3 \sec(\alpha) - \left(\frac{4\bar{k}_3}{k^2 R}\right) \Phi.\end{aligned}\quad (5.3)$$

Как и в случае скольжения, мы еще не сделали замену для Φ , используя (5.2)₂ в (5.3), подчеркивание сверху обозначает безразмерные переменные. Однако, перед тем как численно интегрировать (5.3), выполним эту замену.

Можно провести замену решений $\hat{\omega}_i(\tau)$ и $\alpha(\tau)$ из (5.3) в (5.2) для определения \mathbf{F}_f и \mathbf{N} в качестве функций времени. Их также можно использовать для определения ориентации тела в качестве функции времени, а используя условие качения $\mathbf{v}_P = \mathbf{0}$, и для определения $\bar{\mathbf{x}}(t)$.

6. Замечания о регулирующих уравнениях

6.1. Интегрирование

В своих плодотворных работах Аппелль [1] и Кортевег [7] показали, что уравнения движения для катящегося диска (где $\mathbf{M}_f = 0$) можно интегрировать аналитически для определения $\alpha(t)$ и $\omega_i(t)$.² Аппелль [1] указал, что уравнения движения для катящегося тела цилиндрической формы, обсуждаемого в настоящей статье, также имеют эту особенность. Метод, с помощью которого он продемонстрировал эти результаты, можно применить к уравнениям, управляющим движением скользящего тела, обсуждаемым в этой статье, обеспечивая условия $\mathbf{M}_f = \mathbf{0}$ и $\mu_d = 0$.

Когда $\mathbf{M}_f \neq \mathbf{0}$ для катящегося тела цилиндрической формы, а $\mathbf{M}_f \neq \mathbf{0}$ или $\mu_d \neq 0$ для скользящего тела цилиндрической формы, метод Аппелля и Кортевега больше не применим. Действительно, мы не смогли проинтегрировать (4.7) или (5.3) в этих случаях. Поэтому мы прибегали к численному моделированию уравнений твердого тела.

6.2. Переходы от качения и к качению

Для представления моделирования мы даем описание множества начальных условий для твердого тела: $\bar{\mathbf{v}}(t_0)$, $\boldsymbol{\omega}(t_0)$ и $\alpha(t_0)$. Исследуем результирующую скорость P , чтобы выяснить, тело скользит или катится. В зависимости от \mathbf{v}_P интегрируется либо система (5.3) в случае качения, либо (4.7) в случае скольжения. На каждой стадии интегрирования (5.3) исследуется критерий статического трения для подтверждения того факта, что во время качения тела присутствует достаточное статическое трение. Если этот критерий нарушается, то тело начинает скользить — тогда используем (4.7). Начальное направление скольжения \mathbf{s} (или угол ν) определяется посредством исследования направления \mathbf{F}_f (см. (5.2)) в текущий момент до нарушения критерия статического трения, а начальная скорость скольжения u задается малой предписанной величиной. Во время численного интегрирования (4.7) мы непрерывно наблюдаем за скоростью скольжения. Поскольку величина скорости скольжения становится меньше, чем описанная допустимая, тело полагается катящимся, а численное интегрирование производится для системы (5.3).

6.3. Активные размышления

Безразмерная общая энергия \tilde{E} тела имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{E} = \left(\frac{\chi^2}{mR^2} \right) E = & \frac{1}{2} (u_1 + \omega_2 - h\omega_3)^2 + \frac{1}{2} (u_2 + e\omega_1)^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{k^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) (\omega_1^2 + \omega_3^2) + \left(\frac{k^2}{4} \right) \omega_2^2 + \\ & + \left(\frac{k^2 + 4}{4} \right) (e - h). \end{aligned} \quad (6.1)$$

²Дальнейшие детали и обобщения о работе Аппелля и Кортевега можно найти в [4, 12].

Мы снова пренебрегли подчеркиванием сверху, обозначающим безразмерные скорости в этом уравнении. Когда $\mathbf{M}_f = \mathbf{0}$ и $\mu_d > 0$, легко доказать необходимость сохранения энергии E катящегося твердого тела по сравнению с тем, что она монотонно уменьшается для скользящего тела. В дополнении к этому, когда $\mathbf{M}_f \neq \mathbf{0}$, E монотонно уменьшается для катящегося твердого тела. В качестве проверки численного моделирования было использовано вышеупомянутое поведение общей энергии.

7. Моделирования

Для моделирования используем значение для реального диска Эйлера

$$k = 1, \quad R = 3.755 \text{ cm}, \quad L = 1.28 \text{ cm}, \quad m = 0.4387 \text{ kg}. \quad (7.1)$$

Следовательно,

$$h = \frac{7.51}{1.28}, \quad \chi = 0.0691712. \quad (7.2)$$

Необходимо отметить, что интервал τ , соответствующий 100, тождествен интервалу времени в 6.91712 секунд.

Для моделирования, результаты которого представлены на рис. 3–6, использовалось следующее множество коэффициентов трения:

$$\mu_s = 0.5, \quad \mu_k = 0.3, \quad \frac{k_1}{R} = 0.0001, \quad \frac{k_2}{R} = 0.0008, \quad \frac{k_3}{R} = 0.008. \quad (7.3)$$

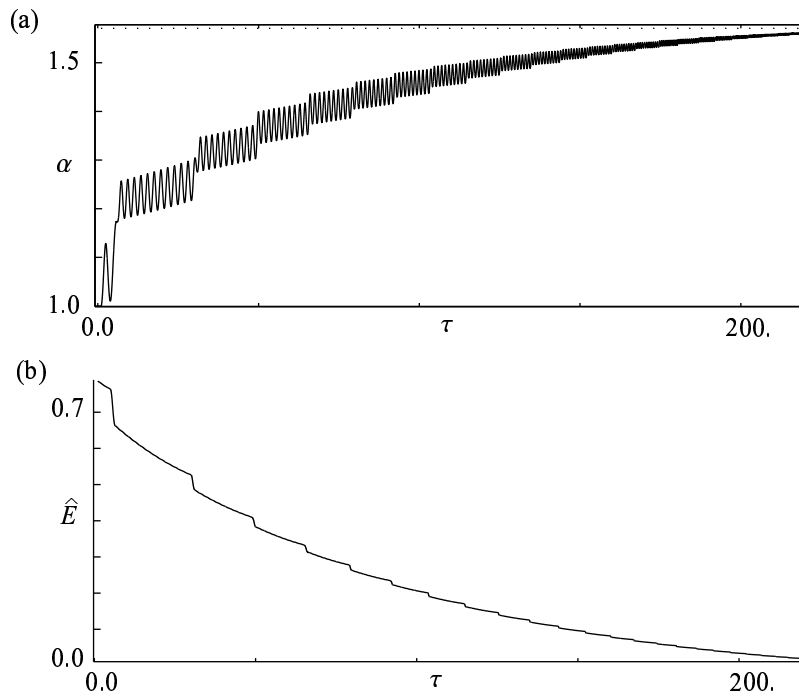


Рис. 3. (а) Вариация угла α (радианы) с безразмерным временем τ . (б) Снижение безразмерной общей энергии \hat{E} диска.

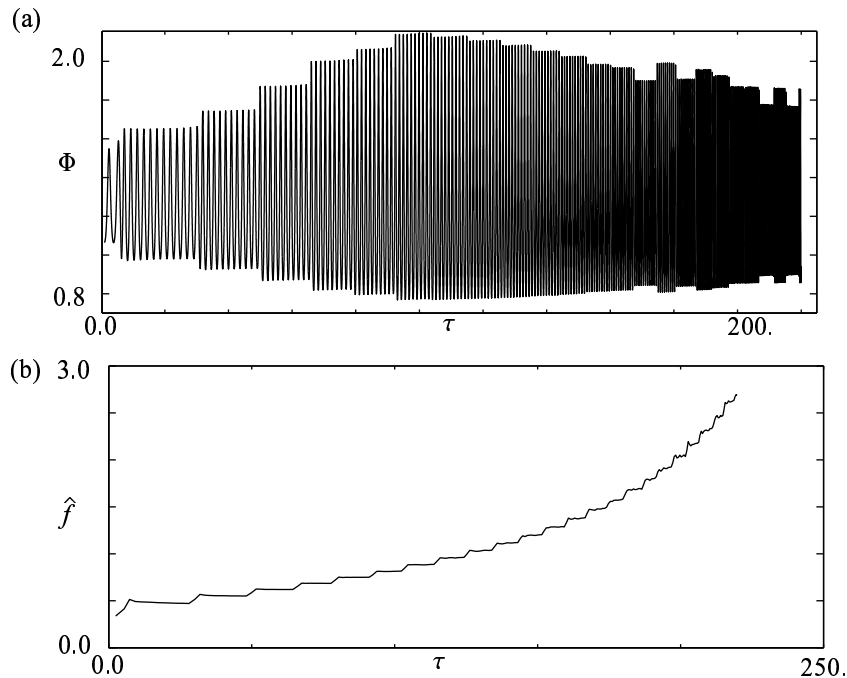


Рис. 4. (а) Вариация безразмерной обычной силы Φ с безразмерным временем τ . (б) «Частота» \hat{f} обычной силы в качестве функции безразмерного времени τ . Для диска Эйлера значение $\hat{f} = 2.5$ соответствует частоте 36 Hz.

Эти значения можно рассматривать как характерные, но возможно они отличаются от значений реального диска Эйлера.

Характерное множество начальных условий для диска Эйлера возникает, когда его наклоняют к горизонтальной плоскости и задают начальную угловую скорость около \mathbf{e}_3 . Следуя этому сценарию, в моделировании используем следующее множество начальных условий:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(t=0) &= \mathbf{0}, & \mathbf{v}_P(t=0) &= \mathbf{0}, & \hat{\omega}(t=0) &= -\mathbf{e}_3, \\ \alpha(t=0) &= 1.0, & \theta(t=0) &= 0.0, & \phi(t=0) &= 0.0. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Ссылаясь на рис. 3, видим, что угол α стремится к $\frac{\pi}{2}$, поскольку для этого моделирования время увеличивается. Соответственно общая энергия диска уменьшается. Снижение \hat{E} в сравнении с графиком τ можно использовать, чтобы выяснить, диск катится или скользит.

Отметим, что созданная нами модель для диска Эйлера не обладает сингулярностью конечного времени. Выполняя моделирование для достаточно большого периода времени, можно достигнуть конечных значений α , которые при механической точности произвольно близки $\frac{\pi}{2}$. Исходя из нескольких других моделирований, находим, что время, взятое для α , для достижения значения произвольно близкого $\frac{\pi}{2}$ зависит от значения параметров μ_d , k_1 , k_2 и k_3 (см. (7.3)). Действительно, увеличивая значение этих параметров, можно описать это время.

Действующая на диск нормальная сила Φ имеет необычное временное поведение. Как показано на рис. 4, соответствующая этой силе частота \hat{f} возрастает с приближением к нулю значения

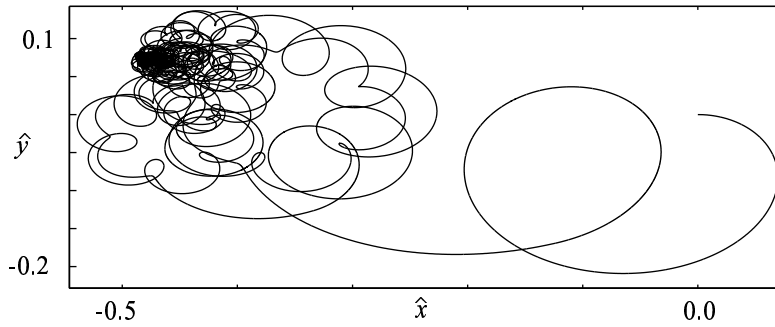


Рис. 5. Траектория центра масс диска. На этом рис. $\hat{x} = (\bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E}_1)/R$ and $\hat{y} = (\bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E}_2)/R$.

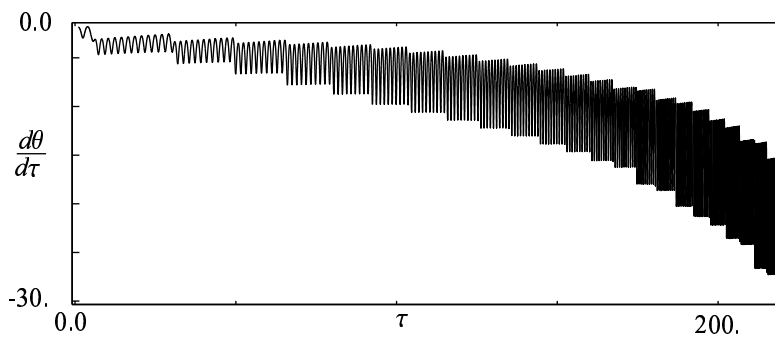


Рис. 6. Угловая скорость $\frac{d\theta}{d\tau} = \hat{\omega}_3 \sec(\alpha)$ в качестве функции безразмерного времени τ .

угла наклона диска³. В случае угловой скорости $\frac{d\theta}{d\tau}$ рисунок имеет, большей частью, идентичный вид. Увеличение \hat{f} , наблюдаемое на рис 4(b), в качественном (но не в количественном) смысле аналогично результатам для $\frac{d\theta}{d\tau}$, полученным в [8]. Из рисунка 4(a) видно, что $\Phi(\tau)$ имеет весьма насыщенный спектр. Другая интересная особенность состоит в том, что нормальная сила никогда не бывает равной нулю. Другими словами, диск не теряет контакта с поверхностью.

Определенный интерес представляет также поведение центра масс при уменьшении угла наклона диска $\frac{\pi}{2} - \alpha$. На рис. 5 показаны плоскостные элементы $\hat{\mathbf{x}}(\tau)$ при выбранных параметрах и характерных начальных условиях. Заметим, что с уменьшением угла наклона плоскостное движение центра масс диска сильно замедляется, пока не станет почти пренебрежимым. Наконец, мы также хотели бы отметить, что результаты на рис. 6 иллюстрируют существенный рост $\frac{d\theta}{d\tau}$ по мере того, как диск принимает горизонтальное положение. Особенности поведения центра масс и угловой скорости $\frac{d\theta}{d\tau}$ отмечаются также в работах с экспериментальными исследователями по диску Эйлера, инспирированных, без сомнения, статьей Моффатта [9], содержащей анализ динамики диска Эйлера.

³Частоту \hat{f} вычисляли из $\Phi(\tau)$, определяя время T между тремя последовательными пиками и положив $\hat{f} = 2/T$.

8. Заключительные замечания и гипотеза

У диска Эйлера имеются две любопытные особенности, привлекая к себе немалый интерес: первая особенность заключается в увеличении слышимой частоты диска при его падении, а вторая — в резком прекращении движения. Наша модель показывает, что частота движения увеличивается по мере падения диска. Это, однако, не является главным источником звука в системе. Звук образуется за счет вибрирования самого диска и поверхности, по которой он движется. Поскольку в качестве этих объектов мы используем модели взаимодействующих твердых тел, мы не можем учесть в них эту вибрацию. Однако мы полагаем, что мерой воздействия, испытываемого диском и поверхностью, может служить поведение нормальной силы. Это воздействие будет генерировать режимы вибрации диска и, следовательно, порождать звук. Отметим, что при исследовании вибрации диска Эйлера фирмы Tangent Toys с помощью метода конечных элементов было установлено, по меньшей мере, четыре режима вибрации в диапазоне слышимых человеком частот⁴. Мы предполагаем, что в процессе падения диска вибрации диска и поверхности приведут, в конце концов, к потере контакта между ними. В тот момент, когда это произойдет, угол наклона диска будет достаточно мал, и наступающее таким образом соударение диска и поверхности влечет резкое прекращение движения.

Для доказательства нашей гипотезы потребуется деформируемая модель как для диска, так и для поверхности. Эффективным методом для построения такой модели является метод конечных элементов, предстоящие вычисления обещают быть весьма затратными.

Благодарности

Работа О.М. О'Рейли выполнена при поддержке гранта CMS-0084808, предоставленного the U. S. National Science Foundation. Работа П. Кесслера частично поддержана а GAANN Award (the U. S. Department of Education). Авторы признательны за оказанную поддержку.

Список литературы

- [1] Appell P. *Sur l'intégration des équations du mouvement d'un corps pesant de révolution roulant par une arête circulaire sur un plan horizontal; cas particulier du cerceau* // Rend. Circ. Mat. Palermo, 1900, V. 14, p. 1–6.
- [2] Bendik J. J., Jr., Shaw L. J., Wyles R. H. *Spinning/rolling disc* // U. S. Patent No. 5863235, 1999.
- [3] Compere M. <http://marc.me.utexas.edu/animation>.
- [4] Cushman R., Hermans J., Kemppainen D. *The rolling disc* // Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. (Broer H. W., van Gils S. A., Hoveijn I. and Takens F., Edt.), 1996, V. 19, p. 21–60.
- [5] van den Engh G., Nelson P., Roach J. *Numismatic gyrations* // Nature, 2000, V. 408, p. 540.
- [6] Gillespie T. D. *Fundamentals of Vehicle Dynamics* // Warrendale, Pennsylvania, Society of Automotive Engineers, 1992.
- [7] Korteweg D. J. *Extrait d'une lettre à M. Appell* // Rend. Circ. Mat. Palermo, 1900, V. 14, p. 7–8.
- [8] McDonald A. J., McDonald K. T. *The rolling motion of a disk on a horizontal plane* // Preprint Archive, Los Alamos National Laboratory, arXiv: physics/008227, 2000.

⁴Благодарим Nathan Kinkaid за эти вычисления конечного момента. Он полагал диск изотропно упругим с модулем Юнга в 195 GPa, плотностью в 7737.27 kg/m² и отношением Пуассона 0.28. Для приближения условия контакта несколько соседних точек на боковой поверхности диска были неподвижны.

- [9] Moffatt H. K. *Euler's disk and its finite-time singularity* // Nature, 2000, V. 404, p. 833–834.
- [10] Moffatt H. K. *Reply to "Numismatic gyrations"* // Nature, 2000, V. 408, p. 540.
- [11] Neĭmark Ju. I., Fufaev N. A. *Dynamics of Nonholonomic Systems* // Providence, American Mathematical Society, 1972.
- [12] O'Reilly O. M. *The dynamics of rolling disks and sliding disks* // Nonlinear Dynam., 1996, V. 10, p. 287–305.
- [13] Pacejka H. B. *Modelling of tyre force and moment generation*. In: *Rolling Contact Phenomena* (Jacobson B. and Kalker J. J., Edt.) // Vienna and New York, Springer–Verlag, 2000, p. 277–327.
- [14] Routh E. J. *The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies*, 6th ed. // London, Macmillan, 1905.
- [15] Ruina A. *Comments on "Euler's disk and its finite-time singularity" by H. K. Moffatt*. *Unpublished notes* // Department of Theoretical and Applied Mechanics, Cornell University, 2000.
- [16] Stanislavsky A. A., Weron K. *Nonlinear oscillations in the rolling motion of Euler's disk* // Physica D, 2001, V. 156, p. 247–259.
- [17] Zhuravlev V. G. *The model of dry friction in the problem of the rolling of rigid bodies* // J. Appl. Math. Mech., 1998, V. 62, p. 705–710.