

Некоторые свойства движений $A + 1$ вихрей в двухслойной вращающейся жидкости*

М. А. Соколовский

Институт водных проблем РАН
119991, Россия, Москва, ГСП-1, ул. Губкина, 3;
Институт математики и механики УРО РАН
620219, Россия, Екатеринбург, ГСП-384, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: sokol@aqua.laser.ru

Ж. Веррон

Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels,
UMR 5519, CNRS, BP53 X, 38041, Grenoble Cedex, France
E-mail: jacques.verron@inpg.fr

Получено 7 февраля 2006 г.

Исследуются характерные свойства движений $A + 1$ погруженных в двухслойную жидкость точечных вихрей с A плоскостями симметрии. Предполагается, что центральный вихрь принадлежит верхнему слою, а равносторонняя A -гональная конфигурация вихрей равной интенсивности — нижнему. Приводится анализ теоретически возможных стационарных движений при $A \geq 2$. Для $A = 2$ методами качественного анализа осуществлена классификация произвольных движений вихревых структур, а также получены предварительные результаты по численному исследованию устойчивости симметричных конфигураций.

Ключевые слова: двухслойная жидкость, точечный вихрь, вихревые структуры, хореография, фазовый портрет.

M. A. Sokolovskiy, J. Verron

Some properties of motion of $A + 1$ vortices in a two-layer rotating fluid

The paper explores the properties of motion of $A + 1$ point vortices with A planes of symmetry immersed into a two-layer fluid. The central vortex is supposed to be in the upper layer while the other A vortices have equal intensity and form a regular A -gon configuration in the lower layer. For $A \geq 2$, we study possible stationary motions. For $A = 2$, using methods of qualitative analysis, we classify the motions of this vortical structure and obtain preliminary numerical results concerned with stability of symmetrical configurations.

Keywords: two-layer fluid, point vortex, vortex structures, choreography, phase portrait.

Mathematical Subject Classifications: 76U05, 76B47, 76E20

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 04-05-64367) и INTAS (грант 04-80-7297)

1. Введение

Теоретическое исследование возможных движений вихревых структур в океане или атмосфере с необходимостью должно проводиться в рамках моделей, учитывающих вращение среды как целого и стратификацию ее плотности [9, 13]. Имея в виду возможные геофизические приложения приведенных ниже результатов, мы используем простейшую модель, включающую эти два фактора: жидкость предполагается вращающейся и двухслойной. Как известно [13, 34, 35], даже грубая одноступенчатая аппроксимация профиля плотности позволяет учесть ряд важных вихревых механизмов в процессе перераспределения импульса и тепла. Данная работа посвящена исследованию движений $A + 1$ вихрей в предположении, что один из них расположен в верхнем слое двухслойной жидкости, а остальные A вихрей в нижнем.

Структура статьи следующая. В разделе 2 приводится постановка задачи.

Разделы 3 и 6 посвящены изучению свойств центрально-симметричных движений таких структур в случае, когда вихри нижнего слоя образуют правильный A -угольник, а вихрь верхнего слоя занимает центральное положение. В смысле постановки задачи и исследования кинематических характеристик стационарных состояний предложенная модель может трактоваться как обобщение на бароклинный случай известных результатов классической динамики вихрей (например, [2, 3, 10, 22, 24, 39, 43, 44]). Однако это не относится к проведенному в цитированных работах исследованию устойчивости вихревых структур, которое остается вне рамок нашего исследования. Исключение составляет лишь простейший случай $A = 2$, для которого мы провели частичное численное моделирование свойств устойчивости. Полученные результаты показывают существенные отличия от ситуации в однородной жидкости.

В разделах 4-5 на основе анализа фазовых портретов в трilinearных координатах дается качественная характеристика относительного движения трех вихрей в двухслойной жидкости для общего случая несимметричного их расположения. Результаты исследований свойств относительного движения в большинстве случаев иллюстрируются поведением абсолютных траекторий, ибо, как справедливо отмечено в [12], «... несмотря на красоту картин относительного движения, их следует рассматривать как фундамент для более глубокого изучения абсолютного движения ... вихрей».

В разделе 7 суммируются полученные результаты.

2. Основные уравнения. Инварианты

Рассмотрим модель вращающихся относительно вертикальной оси с угловой скоростью Ω двух горизонтальных слоев несмешивающихся идеальных несжимаемых жидкостей с постоянными значениями плотностей ρ_1, ρ_2 ($\rho_1 \leq \rho_2$) и невозмущенных глубин h_1 и h_2 для верхнего и нижнего слоев соответственно. Уравнения движения системы точечных вихрей (а, вернее, вертикальных вихревых линий конечной длины) для рассматриваемой среды впервые были выведены В. М. Гряником [4] и затем широко использовались в многочисленных работах, в частности [5, 6, 7, 8, 17, 29, 30, 34, 35, 46, 47, 48, 49, 51]. Эти уравнения при условии «твердой крышки» на внешней поверхности верхнего слоя в безразмерных переменных имеют вид

$$\dot{x}_j^\alpha = -\frac{h_j}{2\pi} \left\{ \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^{A_j} \kappa_j^\alpha \frac{y_j^\alpha - y_j^\beta}{(r_{jj}^{\alpha\beta})^2} \left[1 + \frac{h_{3-j}}{h_j} \gamma r_{jj}^{\alpha\beta} K_1(\gamma r_{jj}^{\alpha\beta}) \right] + \sum_{\beta=1}^{A_{3-j}} \kappa_{3-j}^\alpha \frac{h_{3-j}}{h_j} \frac{y_j^\alpha - y_{3-j}^\beta}{(r_{j(3-j)}^{\alpha\beta})^2} \left[1 - \gamma r_{j(3-j)}^{\alpha\beta} K_1(\gamma r_{j(3-j)}^{\alpha\beta}) \right] \right\}, \quad (2.1)$$

$$\dot{y}_j^\alpha = \frac{h_j}{2\pi} \left\{ \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^{A_j} \kappa_j^\alpha \frac{x_j^\alpha - x_j^\beta}{(r_{jj}^{\alpha\beta})^2} \left[1 + \frac{h_{3-j}}{h_j} \gamma r_{jj}^{\alpha\beta} K_1(\gamma r_{jj}^{\alpha\beta}) \right] + \sum_{\beta=1}^{A_{3-j}} \kappa_{3-j}^\alpha \frac{h_{3-j}}{h_j} \frac{x_j^\alpha - x_{3-j}^\beta}{(r_{j(3-j)}^{\alpha\beta})^2} \left[1 - \gamma r_{j(3-j)}^{\alpha\beta} K_1(\gamma r_{j(3-j)}^{\alpha\beta}) \right] \right\}, \quad (2.2)$$

$$j = 1, 2,$$

где κ_j^α и x_j^α, y_j^α — соответственно интенсивность и декартовы координаты принадлежащего j -му слою вихря с номером $\alpha = 1, 2, \dots, A^j$ — нумерация слоев (вихрей) задается нижним (верхним) индексом с помощью латинской (греческой) символики¹;

$$r_{ij}^{\alpha\beta} = \sqrt{(x_i^\alpha - x_j^\beta)^2 + (y_i^\alpha - y_j^\beta)^2}$$

определяет расстояние между вихрями с координатами (x_i^α, y_i^α) и (x_j^β, y_j^β) ; точкой сверху обозначается производная по времени; $\gamma = 1/\lambda$ — параметр стратификации, где через

$$\lambda = \sqrt{g'h_1h_2/(h_1 + h_2)}/f$$

обозначен так называемый внутренний радиус деформации Россби [9, 13], $g' = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_0$ — редуцированное ускорение силы тяжести (ρ_0 — среднее значение плотности), $f = 2\Omega$ — постоянный параметр Кориолиса; $K_n(z)$ — модифицированная функция Бесселя n -го порядка от аргумента z .

Уравнения (2.1)–(2.2) имеют первые интегралы:

$$Q = \sum_{j=1}^2 h_j \sum_{\alpha=1}^{A_j} \kappa_j^\alpha \text{ — суммарная интенсивность,}$$

$$P_x = \sum_{j=1}^2 h_j \sum_{\alpha=1}^{A_j} x_j^\alpha \kappa_j^\alpha, \quad P_y = \sum_{j=1}^2 h_j \sum_{\alpha=1}^{A_j} y_j^\alpha \kappa_j^\alpha \text{ — суммарные компоненты импульса,}$$

$$M = \sum_{j=1}^2 h_j \sum_{\alpha=1}^{A_j} \left[(x_j^\alpha)^2 + (y_j^\alpha)^2 \right] \kappa_j^\alpha \text{ — суммарный момент.} \quad (2.3)$$

Введем комбинацию интегралов

$$L = QM - (P_x)^2 - (P_y)^2, \quad (2.4)$$

которая, очевидно, также является инвариантом исходной системы и названа в [3] *моментом системы вихрей*. Интеграл (2.4) не зависит от координат вихрей, а выражается только через расстояния между ними, что позволяет использовать L при изучении свойств относительных движений вихревых структур.

Система (2.1)–(2.2) может быть записана в гамильтоновой форме

$$\dot{q}_j^\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j^\alpha} \equiv J(q_j^\alpha, \mathcal{H}), \quad \dot{p}_j^\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j^\alpha} \equiv J(p_j^\alpha, \mathcal{H}),$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, A^j; \quad j = 1, 2, \quad (2.5)$$

¹ В дальнейшем для идентификации вихря с верхним и нижним индексами α и j соответственно будем использовать обозначение $(\alpha)_j$.

где $q_j^\alpha = x_j^\alpha$ — обобщенные координаты, $p_j^\alpha = y_j^\alpha \kappa_j^\alpha / 2$ — обобщенные импульсы, и

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^2 h_j \left\{ \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^{A_j} \kappa_j^\alpha \kappa_j^\beta \left[\ln r_{jj}^{\alpha\beta} - \frac{h_{3-j}}{h_j} K_0(\gamma r_{jj}^{\alpha\beta}) \right] + \sum_{\alpha, \beta=1}^{A_j, A_{3-j}} \frac{h_{3-j}}{h_j} \kappa_j^\alpha \kappa_{3-j}^\beta \left[\ln r_{j(3-j)}^{\alpha\beta} + K_0(\gamma r_{j(3-j)}^{\alpha\beta}) \right] \right\} \quad (2.6)$$

гамильтониан, совпадающий с энергией взаимодействия вихрей, который, так же как и интеграл момента системы вихрей L , зависит только от расстояний между вихрями.

Рассмотрим семейство вихревых структур с одним вихрем интенсивности $\mu \kappa$ в верхнем слое (таким образом, $A_1 \equiv 1$) и произвольным числом $A_2 \equiv A$ одинаковых вихрей с интенсивностью κ в нижнем слое. Пусть также в начальный момент времени вихрь $\binom{1}{1}$ расположен в начале системы координат и занимает центральное положение в правильном A — угольнике, образованном вихрями $\binom{\alpha}{2}$, где, очевидно, $\alpha = 1, 2, \dots, A$. Примем также условие равенства толщин слоев ($h_1 = h_2 = 1/2$).

Учитывая начальную симметрию, будем искать решения (2.1)–(2.2) в виде [21]

$$x_1^1 = y_1^1 = 0, \quad (2.7)$$

$$(x_2^\alpha; y_2^\alpha) = r \left\{ \cos \left[\varphi + \frac{2\pi(\alpha-1)}{A} \right]; \sin \left[\varphi + \frac{2\pi(\alpha-1)}{A} \right] \right\}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, A, \quad (2.8)$$

где r и φ являются функциями времени.

Подстановка (2.7)–(2.8) в (2.1)–(2.2) дает

$$\dot{r} = -\frac{\kappa\gamma}{4\pi} \sum_{\beta=1}^{A-1} \cos \frac{\pi\beta}{A} K_1 \left(2\gamma r \sin \frac{\pi\beta}{A} \right) \equiv 0, \quad (2.9)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\kappa}{4\pi r^2} \left\{ \frac{A-1}{2} + \mu [1 - \gamma r K_1(\gamma r)] + \gamma r \sum_{\beta=1}^{A-1} \sin \frac{\pi\beta}{A} K_1 \left(2\gamma r \sin \frac{\pi\beta}{A} \right) \right\} \equiv \frac{\kappa\gamma^2}{4\pi R^2} \Omega_0 \equiv \frac{\kappa\gamma^2}{4\pi} F(A, \mu; R), \quad (2.10)$$

где $R = \gamma r$,² а через Ω_0 обозначено выражение, стоящее в фигурных скобках в (2.9).

3. Общие свойства осесимметричных решений

Функция $F(A, \mu; R)$ в (2.10) имеет следующие очевидные свойства:

- (а) $F \sim (A-1)/R^2$ при $R \rightarrow 0$;
- (б) $F \sim [(A-1)/2 + \mu]/R^2$ при $R \rightarrow \infty$,
 $F \sim -(A+1)/2R^2$ в частном случае $\mu = -A$ — нулевой суммарной интенсивности³;

²Ниже будут также использоваться аналогичные обозначения вида $(X_j^\alpha, Y_j^\alpha) = \gamma(x_j^\alpha, y_j^\alpha)$.

³Этот случай в экспериментальных условиях реализуется естественным образом, если, например, A -гональная конфигурация с центральным вихрем сформировалась в результате разрушения внешней компенсирующей оболочки неустойчивого распределенного вихря кольцевой осесимметричной формы.

(в) F — монотонно убывающая положительная функция при

$$\mu \geq (1 - A)/2 \geq -1/2; \tag{3.1}$$

(г) F меняет знак в некоторой точке R_0 и становится немонотонной, принимая минимальное значение в точке $R = R_{min}$, если

$$\mu < (1 - A)/2 < -1/2. \tag{3.2}$$

Величина R_{min} находится как решение трансцендентного уравнения

$$\begin{aligned} \Omega_{min} = 2 \left\{ \frac{A-1}{2} + \mu [1 - RK_1(R)] + R \sum_{\beta=1}^{A-1} \sin \frac{\pi\beta}{A} K_1 \left(2R \sin \frac{\pi\beta}{A} \right) \right\} + \\ R^2 \left[-\mu K_0(R) + 2 \sum_{\beta=1}^{A-1} \sin^2 \frac{\pi\beta}{A} K_0 \left(2R \sin \frac{\pi\beta}{A} \right) \right] = 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

полученного из условия $\partial F / \partial R = 0$.

Представим теперь уравнения $\Omega_0 = 0$ и $\Omega_{min} = 0$ (см. (2.10) и (3.3)) в виде

$$\Omega_0^A = \Omega_0^\mu \quad \text{и} \quad \Omega_{min}^A = \Omega_{min}^\mu, \tag{3.4}$$

собрав в левой и правой частях уравнений выражения, зависящие только от $(A; R)$ и только от $(\mu; R)$ соответственно.

Рисунки 1–2 демонстрируют свойства (а)–(г) для угловой скорости вращения вихревой структуры нижнего слоя. Так, абсциссы точек пересечения кривых Ω_0^A и Ω_0^μ на рисунке 1а, а также Ω_{min}^A и Ω_{min}^μ на рисунке 1б, для указанных значений A и μ соответствуют решениям уравнений (3.4). Рисунки 1 и 2а подтверждают, в частности, что для $\mu = -2$ условие (3.2) выполняется только для $A = 2, 3, 4$.

Таким образом, A -угольная конфигурация вихрей нижнего слоя с равными интенсивностями κ , если она устойчива, при $\mu = 0$ всегда вращается как целое в направлении, определяемом знаком κ . При $\mu \neq 0$, благодаря воздействию вихря верхнего слоя, угловая скорость вихревого многоугольника либо увеличивается по абсолютному значению, если $\mu > 0$, либо, в противном случае, уменьшается. При выполнении условий (3.4), что возможно только при $\mu < -0.5$, угловая скорость вращения вихревого многоугольника может менять знак в точке $R = R_0$. Максимальное влияние центрального вихря наблюдается при $R = R_{min} > R_0$. При всех $R > R_{min}$ его действие на вихревую структуру нижнего слоя остается преобладающим, и последняя вращается в направлении, определяемом знаком интенсивности вихря верхнего слоя. При $\mu \in [-0.5; -\infty)$ с ростом $|\mu|$ поведение величин R_0 и R_{min} описывается асимптотическими соотношениями

$$R_0 \sim 2 \sqrt{-\frac{A-1}{(3-2E)\mu}}, \quad R_{min} \sim 2 \sqrt{-\frac{A-1}{\mu}}, \tag{3.5}$$

где $E \approx 0.577$ — число Эйлера. Зависимости $R_0(\mu)$, $R_{min}(\mu)$ на интервале $\mu \in [0; -8]$ при $A = 2, 3$ представлены рисунком 3.

Оценки (3.5), рисунок 2б и таблица 1 показывают, что значения $R_0(\mu)$ и $R_{min}(\mu)$ растут с увеличением A . Вихревую A -гональную структуру одного из слоев, вращающуюся как целое относительно центрального вихря из другого слоя (в данном случае это, соответственно, нижний и

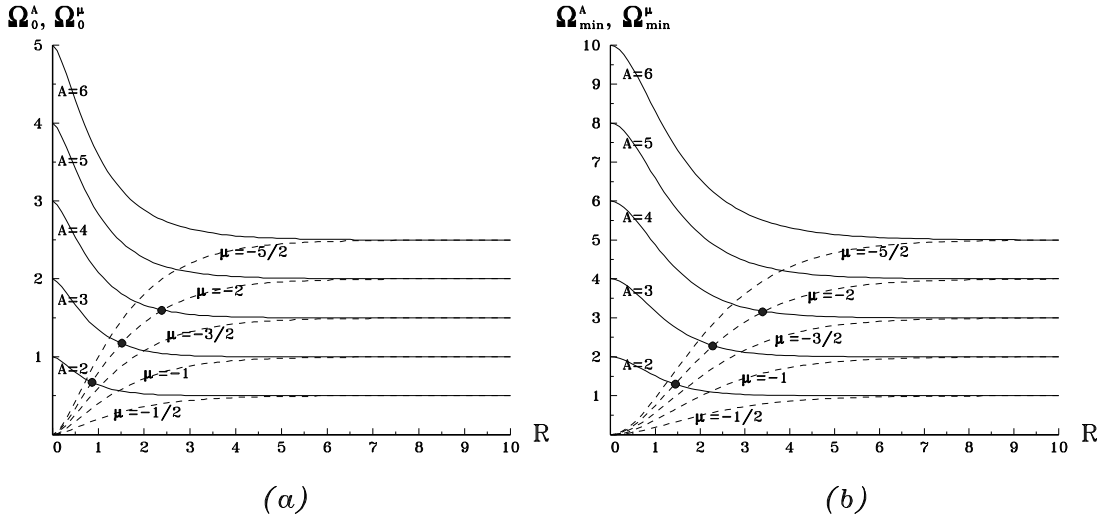


Рис. 1. Графическое решение уравнений (3.4). Сплошные линии соответствуют графикам функций с верхним индексом A , а штриховые — с индексом μ . Абсциссы точек пересечения кривых задают искомые значения R_0 — (a) и R_{min} — (b). Положениям круглых маркеров отвечают параметры решений для $\mu = -2$.

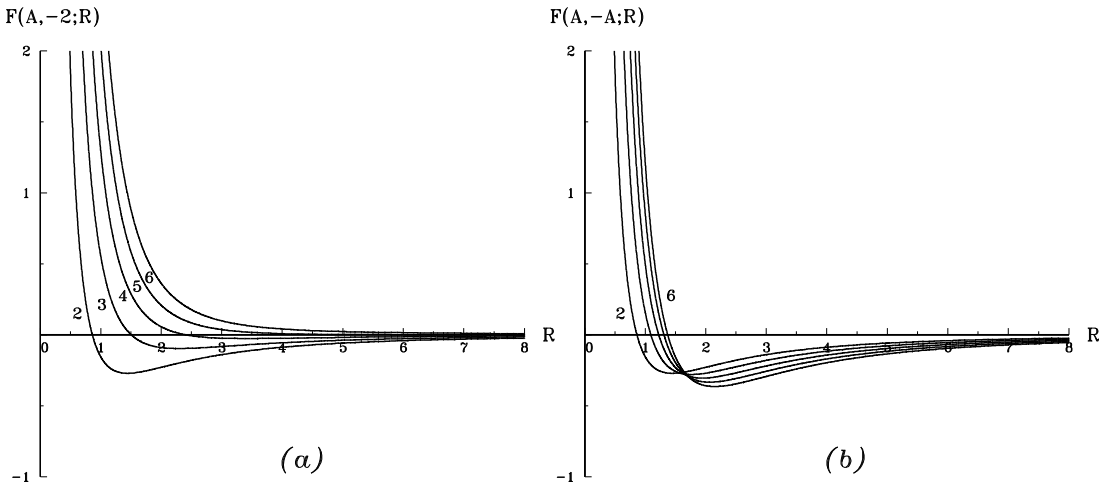


Рис. 2. (a) Кривые $F(A, \mu; R)$ при $\mu = -2$ и $A = 2, 3, \dots, 6$. Значения A указаны слева от соответствующей кривой; (b) Кривые $F(A, \mu; R)$ при $\mu = -A$ и $A = 2, 3, \dots, 6$. Значения A указаны только для крайних кривых. Расположение промежуточных — последовательное.

верхний слой), будем называть *каруселью*. Если многоугольник вращается в направлении, индуцируемом центральным вихрем, то имеем *обычную карусель*. Если же он, благодаря преобладающему внутрислойному взаимодействию, вращается в противоположном направлении, то — *инверсную карусель*⁴.

Уравнение $F = 0$ при фиксированном μ представляет собой дисперсионное соотношение между A и R , определяющее *статическое состояние* системы вихрей [12]. Эта ситуация коренным образом отличается от той, что имеет место в однородной жидкости. Действительно,

⁴Эта терминология нами была введена в [46, 48] для случая $A = 2$; здесь дается обобщение для произвольного A .

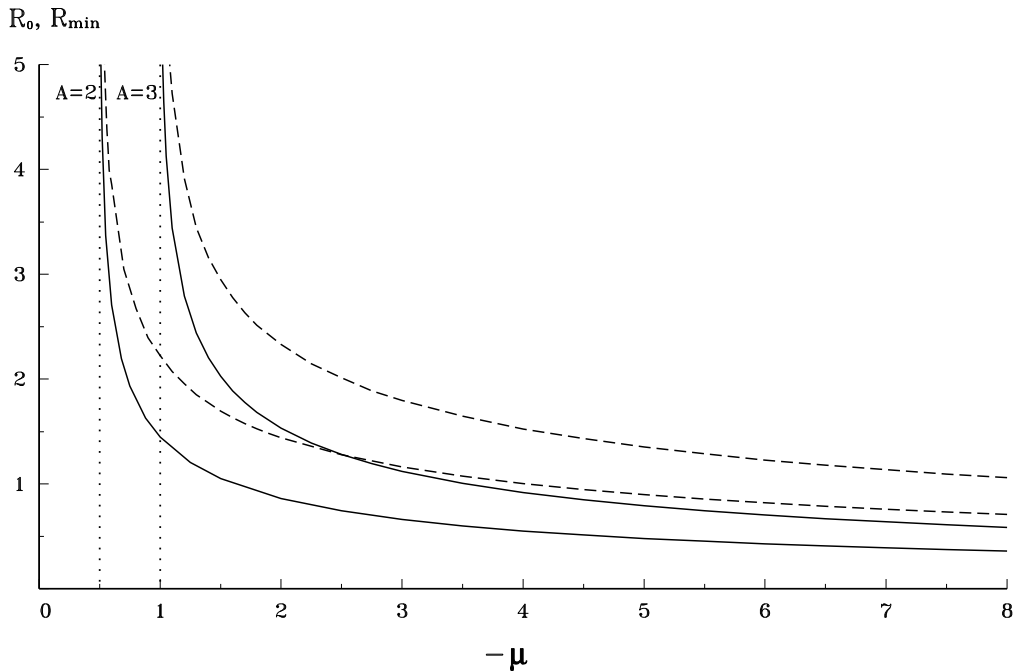


Рис. 3. Зависимости $R_0(-\mu)$ — сплошные линии и $R_{min}(-\mu)$ — штриховые линии при $A = 2$ и 3 . Вертикальные пунктирные линии представляют собой асимптоты функций при предельных минимальных значениях $|\mu|$.

в двумерной гидродинамике условия существования конфигураций, аналогичных обычной или инверсной карусели и, в частности, — статической конфигурации, для любой пары A, μ являются равномерными по R . Так, например, в однородной по плотности среде для $A = 2, 3, 4$ статические состояния определяются равенствами $\mu = -0.5, -1, -1.5$ соответственно, верными при любом R . Отметим, что статические состояния для $A = 3$, впервые указанные в [18], достаточно подробно исследованы в [12].

В случае нулевой суммарной интенсивности ($\mu = -A$) условие (г) для смены знака F выполняется при любых A , и, таким образом, для этих конфигураций всегда существуют подклассы обычных и инверсных каруселей, разделяющиеся статической конструкцией. Таблица 1 задает основные параметры таких структур.

Таблица 1. Значения R_0, R_{min} и $F^{(m)} = F(A, -A, R_{min}) < 0$ для указанных A

A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
R_0	0.860	1.090	1.221	1.307	1.369	1.416	1.452	1.482	1.506	1.526	1.543
R_{min}	1.440	1.759	1.940	2.060	2.146	2.211	2.261	2.301	2.334	2.361	2.385
$-F^{(m)}$	0.271	0.289	0.305	0.334	0.365	0.396	0.428	0.460	0.493	0.525	0.558

Дополнением к таблице может служить рисунок 2b, где показан характер поведения функции F для случая нулевой суммарной интенсивности.

Примеры, иллюстрирующие начальную стадию движения таких вихревых структур при $A = 2$ приведены на рисунке 4b. Очевидно, для любого момента времени мы имеем коллинеарную конфигурацию с симметричным расположением одноименных вихрей относительно более сильного центрального ядра с противоположной по знаку интенсивностью. Такие симметричные

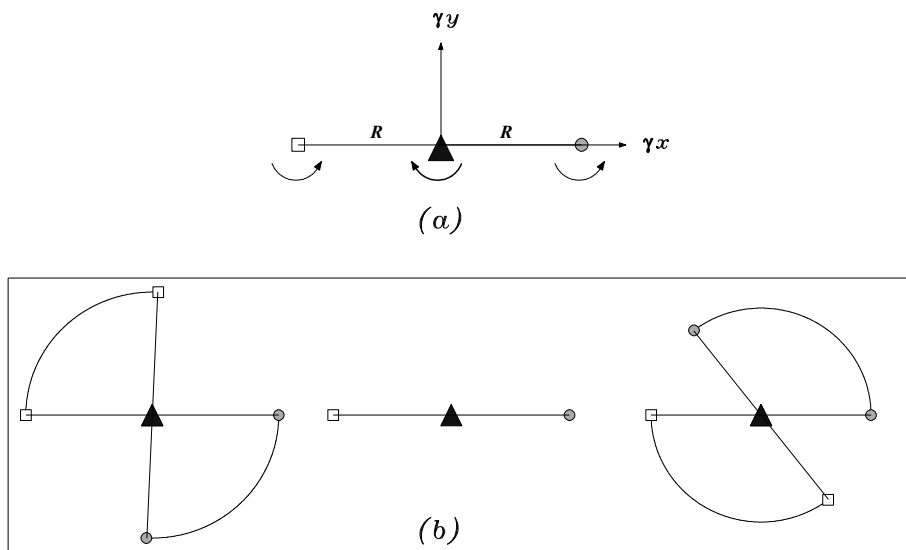


Рис. 4. Схема начального расположения вихрей при $A = 2, \kappa = 1, \mu = -2$ с указанием направлений их вращения — (а); начальные участки траекторий вихрей при $R > R_0, R = R_0$ и $R < R_0$ (слева направо) — (б). Отрезками соединены вихри в начальный и конечный (расчетный) моменты времени. На этом и последующих рисунках положение вихря верхнего слоя изображается треугольником, а вихрей нижнего — кружком и квадратом. Величина маркера пропорциональна модулю интенсивности соответствующего вихря.

вихревые структуры в однородной жидкости широко известны как *триполярные вихри* (или *триполи*) [11, 25, 26, 27, 28, 31, 32, 37, 38, 40, 42, 45, 50], вращающиеся с постоянной угловой скоростью вокруг центрального вихря в направлении, определяемом знаком его завихренности. В двухслойной жидкости — это частный случай *карусели*, которая при $R > R_0$ является *обычной*, а при $R < R_0$ — *инверсной*. Угловая скорость вращения определяется формулой (2.10). Соответствующие значения R_0 и R_{min} указаны в первом цифровом столбце таблицы 1. На рисунке 4б в левой и правой частях рисунка приведены начальные участки круговых траекторий для обычной и инверсной каруселей соответственно. В первом случае круговые движения вихрей нижнего слоя осуществляются по часовой стрелке, во втором — в противоположном направлении. В центральной части рисунка 4б изображено статическое состояние при $R = R_0$.

Безусловный интерес представляет изучение устойчивости осесимметричных конфигураций $A + 1$ вихрей в двухслойной жидкости. Оставляя эту проблему для последующего исследования, ниже мы представим некоторые результаты численного исследования устойчивости лишь простейшего частного случая $A = 2$. Для этого случая проведен также качественный анализ широкого класса несимметричных исходных вихревых конфигураций. Особое внимание уделим выявлению свойств стационарных режимов.

4. Классификация относительных движений в случае $A = 2$

Введем тройку параметров (t_1, t_2, t_3) таких, что

$$t_1 = \frac{3\kappa_2^1 \kappa_2^2 (r_{22}^{12})^2}{L}, \quad t_2 = \frac{3\kappa_1^1 \kappa_2^2 (r_{12}^{12})^2}{L}, \quad t_3 = \frac{3\kappa_1^1 \kappa_2^1 (r_{12}^{11})^2}{L} \quad (4.1)$$

и, согласно (3.5),

$$t_1 + t_2 + t_3 = 3, \quad \text{при } L \neq 0 \quad (4.2)$$

и

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0, \quad \text{при } L = 0. \quad (4.3)$$

Величины (t_1, t_2, t_3) , пропорциональные квадратам расстояний между вихрями, называются *трилинейными координатами* [20], удобными для качественного анализа произвольного движения трех вихрей. Согласно [20], трилинейные координаты произвольной точки плоскости вводятся как ориентированные (т. е. взятые с соответствующим знаком) расстояния до нее от трех осей, являющихся продолжениями сторон равностороннего треугольника с высотой, равной 3, если $L \neq 0$; либо — пересекающимися в одной точке, если $L = 0$ (см. рисунок 5).

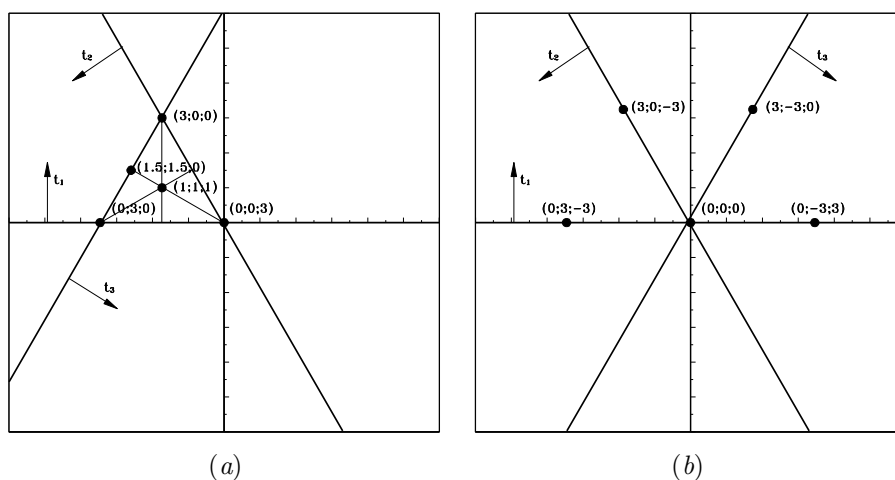


Рис. 5. Схема трилинейных координат с указанием ориентации осей и троек компонент для отмеченных точек при $L \neq 0$ — (a) и $L = 0$ — (b).

При построении фазового портрета задачи трех вихрей с интенсивностями κ_1^1, κ_2^1 и κ_2^2 предварительно необходимо определить так называемую *физическую область*, для всех точек которой выполняется неравенство треугольника. В терминах трилинейных координат это неравенство принимает вид

$$(\kappa_1^1 t_1)^2 + (\kappa_2^1 t_2)^2 + (\kappa_2^2 t_3)^2 \leq 2(\kappa_1^1 \kappa_2^1 t_1 t_2 + \kappa_1^1 \kappa_2^2 t_1 t_3 + \kappa_2^1 \kappa_2^2 t_2 t_3). \quad (4.4)$$

Множеству точек границы физической области, для которых в (4.4) выполняется знак равенства, отвечает семейство возможных коллинейных состояний трех вихрей.

При фиксированном значении инварианта L , однозначно определяемом начальными условиями⁵, в физической области на плоскости трилинейных координат (рисунки 5а и 5б) строятся изолинии гамильтониана (2.5), интерпретируемые как фазовые кривые. Движению системы вихрей отвечает перемещение изображающей точки вдоль соответствующей изолинии гамильтониана на фазовой плоскости. Если фазовая кривая замкнута, и, следовательно, расстояния между вихрями являются периодическими функциями времени, то, очевидно, всегда существует преобразование координат, в результате которого сами траектории вихрей также становятся замкнутыми кривыми. Эти же соображения касаются и тех фазовых кривых, которые начинаются

⁵В то же время, каждому значению L отвечает континуум различных начальных условий.

и кончаются на границе физической области, поскольку изображающие точки движутся по ним, периодически «отражаясь» от границы.

В теории вихрей, а еще в большей мере — в небесной механике, замкнутые траектории, которым отвечают периодические решения задачи, играют важную роль. Соответствующие траектории вихрей (или материальных тел) получили название *хореографий* [15, 16, 19, 3]. Хотя впервые решение задачи трех тел в виде замкнутой круговой траектории было получено Лагранжем еще в 1772 году [19], а затем, начиная с работ Хенона [33] и Мура [41], класс известных решений (для задач небесной механики с однородным ньютоновским потенциалом) с замкнутыми траекториями существенно расширился, само понятие *хореография* было предложено Симо [15] относительно недавно (2000).

Хореографии могут быть

- *абсолютными*, если траектории замкнуты в неподвижной системе координат;
- *относительными*, если траектории становятся замкнутыми в некоторой равномерно вращающейся вокруг центра завихренности (либо движущейся с постоянной поступательной скоростью, если центр завихренности находится на бесконечности) системе координат;
- *простыми* — когда все тела (или вихри) движутся по одной траектории;
- *сложными*, если хотя бы одно тело движется по отдельной траектории.

Понятие хореографии в динамику вихрей впервые ввели Борисов, Мамаев и Килин в работах [1, 3, 23].

Ясно, что при качественном анализе относительных вихревых движений с помощью трилинейных координат выделение семейства хореографий происходит автоматически. Отметим, что изображенные на рисунке 4b траектории вихрей представляют собой абсолютные хореографии.

В рассматриваемом нами случае, когда $\kappa_2^1 = \kappa_2^2 = \kappa$; $\kappa_1^1 = \mu\kappa$, выражение (2.5) для L можно переписать в виде

$$\frac{L}{\kappa^2} = \mu \left[\left(r_{12}^{11} \right)^2 + \left(r_{12}^{12} \right)^2 \right] + \left(r_{22}^{12} \right)^2, \quad (4.5)$$

откуда следует, что величина L может менять знак только при

$$0 > \mu = - \frac{\left(r_{22}^{12} \right)^2}{\left(r_{12}^{11} \right)^2 + \left(r_{12}^{12} \right)^2} > -2, \quad (4.6)$$

а при $\mu \leq -2$ и при $\mu \geq 0$ является знакоопределенной (отрицательна в первом случае и положительна во втором). В дальнейшем всюду будем считать $\kappa \equiv 1$.

Исключая t_1 из (4.2) или (4.3), условие (4.4) принадлежности трилинейных координат к физической области запишем в виде

$$\left[(\mu + 1)(t_2 + t_3) - 3\mu \right]^2 \leq 4t_2t_3 \quad \text{при} \quad L \neq 0 \quad (4.7)$$

или

$$(\mu + 1)^2(t_2 + t_3)^2 \leq 4t_2t_3 \quad \text{при} \quad L = 0. \quad (4.8)$$

Из (4.7) с очевидностью следует, что при $\mu > 0$ и при $\mu < -2$ все физические области являются компактными, и, следовательно, относительные движения — финитными. На интервале $\mu \in [-2; 0)$ физические области инфинитны, и некоторые траектории вихрей могут быть разбегающимися.

Наиболее простым для анализа является частный случай $L = 0$, когда, согласно (4.8) и (4.5),

- невозможно перекрытие вихрем верхнего слоя ни одного из вихрей нижнего слоя,
- при $\mu = -1$ вихри всегда располагаются в углах прямоугольного треугольника,
- при $\mu = -2$ физическая область вырождается в прямую линию $t_2 = t_3$, которой отвечает семейство симметричных конфигураций⁶;
- условие $\mu = 0$ достигается только при слиянии вихрей нижнего слоя.

Примеры фазовых портретов компактного типа для указанных значений μ и L показаны на рисунках 6–8. Физические области задаются условиями

$$(t_2 + t_3 - 5)^2 \leq \frac{16}{9}t_2t_3, \quad t_1 \leq 0; \quad t_2, t_3 \geq 0 \quad \text{при} \quad \mu = -2.5, \quad \begin{cases} \gamma^2L = -5; \\ \gamma^2L = -0.25; \end{cases} \quad (4.9)$$

для рисунка 6, а также условиями

$$\begin{aligned} (t_2 + t_3 - 4)^2 &\leq \frac{16}{9}t_2t_3, \quad t_1, t_2, t_3 \geq 0 \quad \text{при} \quad \mu = 0.5, \\ (t_2 + t_3 - \frac{3}{2})^2 &\leq t_2t_3, \quad t_1, t_2, t_3 \geq 0 \quad \text{при} \quad \mu = 1, \\ (t_2 + t_3 - 2)^2 &\leq \frac{4}{9}t_2t_3, \quad t_1, t_2, t_3 \geq 0 \quad \text{при} \quad \mu = 2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

при $\gamma^2L = 2$ на рисунке 7 и при $\gamma^2L = 8$ на рисунке 8.

Отметим, что физические области на рисунках 6 (где $\mu < 0$) расположены вне координатного треугольника, а при $\mu > 0$ — на рисунках 7 и 8 — внутри него. Поэтому в первом случае коллинеарным симметричным конфигурациям отвечают нижние полярные точки, а во втором — верхние.

Пример фазового портрета в инфинитной физической области вида

$$(t_2 + t_3 - 6)^2 \leq 4t_2t_3, \quad t_1 \leq 0; \quad t_2, t_3 \geq 0 \quad \text{при} \quad \mu = -2 \quad (4.11)$$

представлен на рисунке 9.

Рассмотрим результаты численных расчетов траекторий и соответствующих им хореографий. При выборе начальных условий в численных экспериментах, согласованных с анализом фазовых портретов, будем исходить из следующих соображений. Если фазовые кривые рассматриваемого класса движений выходят на границу физической области, и, таким образом, набор отвечающих им возможных конфигураций вихрей содержит в себе коллинеарную конструкцию, то будем предполагать, что при $t = 0$ все три вихря принадлежат оси X , вихрь (1) локализован к началу координат, а координаты вихрей (1) и (2) удовлетворяют условиям сохранения инварианта L , т. е.

$$\begin{aligned} X_1^1 = Y_1^1 = Y_2^1 = Y_2^2 = 0; \\ X_2^1 = \begin{cases} \frac{X_2^2 + \sqrt{(X_2^2)^2 [1 - (1 + \mu)^2] + \gamma^2L(1 + \mu)}}{1 + \mu} & \text{при} \quad \mu \neq -1, \\ -\frac{\gamma^2L}{2X_2^2} & \text{при} \quad \mu = -1. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.12)$$

⁶Отсюда, в частности, следует, что изображенная на рисунке 4 карусель с нулевой суммарной интенсивностью устойчива.

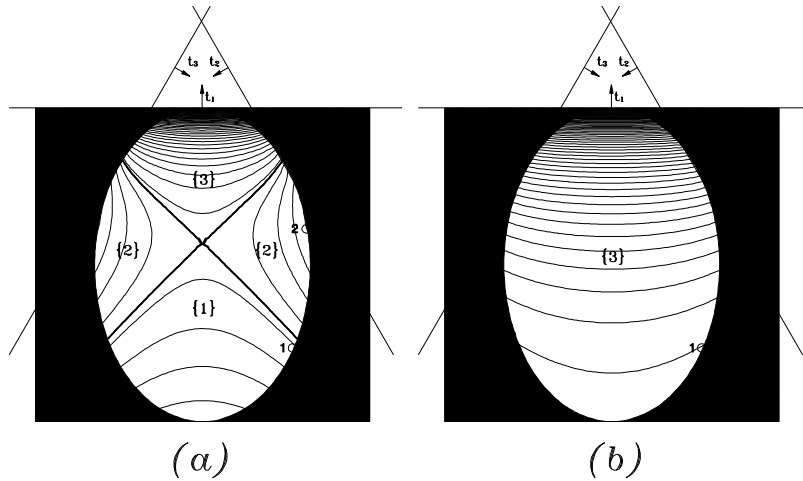


Рис. 6. Фазовые портреты — изолинии гамильтониана (2.6) — задач о трех вихрях в трилинейных координатах для физических областей, определяемых формулами (4.9): $\gamma^2 L = -5, \mu = -2.5$ — (a); $\gamma^2 L = -0.25, \mu = -2.5$ — (b). Жирные линии на фрагменте (a) представляют собой сепаратрисы, разделяющие области существования решений различных типов {1}, {2} и {3}. Цифры без скобок нумеруют отмеченные кружками граничные точки физических областей, соответствующие начальным условиям для численных экспериментов, результаты которых приведены на рисунке 10.

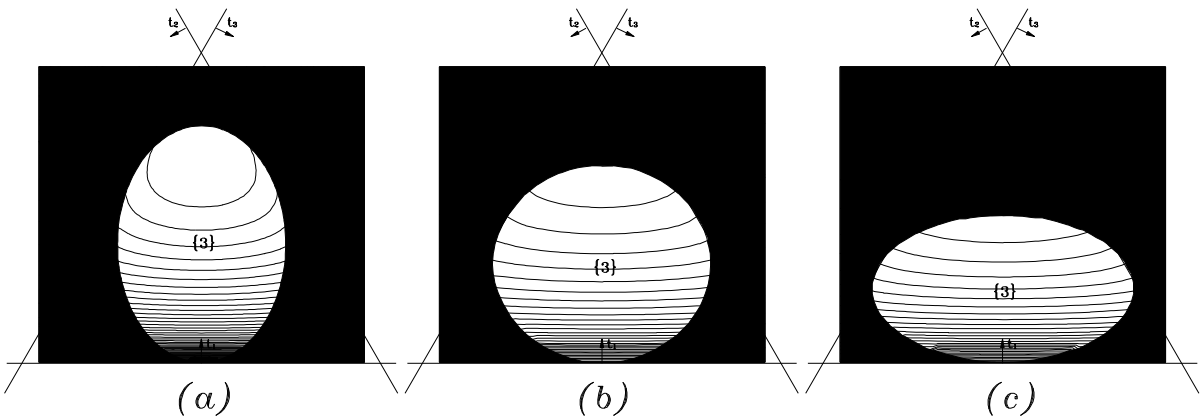


Рис. 7. Фазовые портреты задач о трех вихрях в трилинейных координатах для физических областей, определяемых формулами (4), где $\gamma^2 L = 2$ и $\mu = 0.5$ — (a); $\mu = 1$ — (b); $\mu = 2$ — (c).

Если фазовые кривые не выходят на границу, то они обязательно пересекают прямую $t_2 = t_3$, что соответствует вихревой структуре в виде равнобедренного треугольника с длиной бедра B . В этом случае начальную конфигурацию, не теряя общности, можно задавать в виде симметричного относительно оси Y треугольника, такого что:

$$\begin{aligned} X_1^1 &= Y_1^1 = 0, & X_2^1 &= -X_2^2, & Y_2^1 &= Y_2^2; \\ X_2^1 &= B \cos \varphi, & Y_2^1 &= B \sin \varphi, & B &= \sqrt{\frac{L}{2(\mu + 2 \cos^2 \varphi)}} \end{aligned} \quad (4.13)$$

где φ — угол между осью X и боковой гранью вихревого треугольника, а условие положительности подкоренного выражения в (4.13) обеспечивает существование данной конструкции. Если

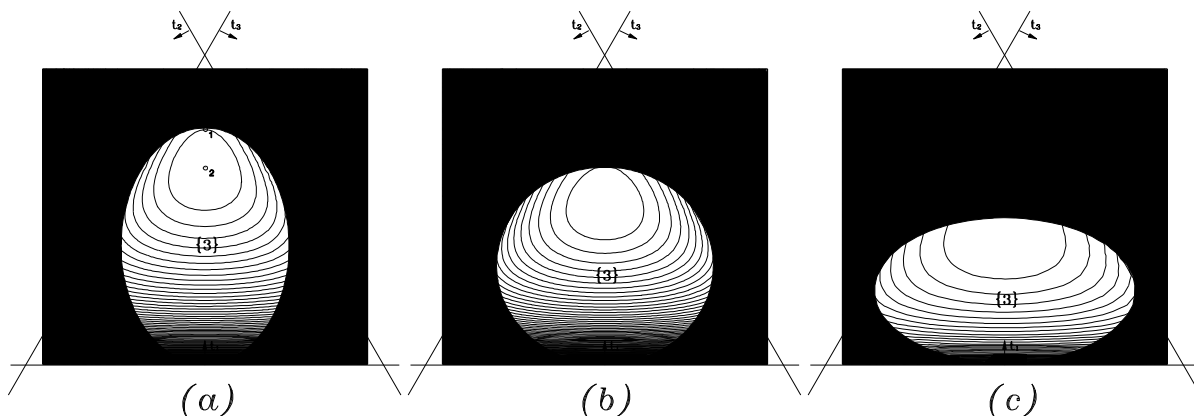


Рис. 8. То же, что на рисунке 7, но при $\gamma^2 L = 8$. Цифры на фрагменте (a) относятся к граничным точкам физических областей, соответствующих начальным условиям для численных экспериментов, результаты которых приведены на рисунке 14а, б.

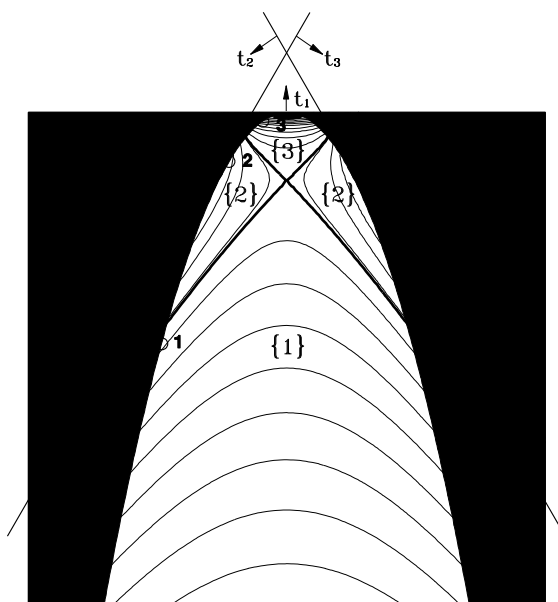


Рис. 9. Фазовый портрет задачи о трех вихрях в трилинейных координатах для физических областей, определяемых формулами (4.11): $\gamma^2 L = -2.89$, $\mu = -2$ ($Q = 0$). Жирные линии представляют собой сепаратрисы, разделяющие области существования решений различных типов {1}, {2} и {3}. Цифры относятся к граничным точкам физических областей, соответствующих начальным условиям для численных экспериментов, результаты которых приведены на рисунке 11.

$2 \cos^2 \varphi = -\mu$, то согласно (4.5) получаем $L \equiv 0$, и величина B в выражениях для X_2^1 и Y_2^1 может быть произвольной.

Имея в виду (4.12)–(4.13), в подписях к рисункам с изображением траекторий вихрей при указании параметров начального состояния помимо L будем указывать только значение координаты X_2^2 для коллинеарных начальных конфигураций и значения B, φ для треугольных. В дополнение к этому будут приводиться также начальные тройки $t = (t_1, t_2, t_3)$ трилинейных координат.

Анализ фазовых портретов на рисунках 6–9 и траекторий вихрей на рисунках 10–11 показывает, что, по крайней мере в данном (относительно широком) интервале внешних параметров, возможны три качественно различных типа движения:

- Тип {1} — двойной захват, когда все три вихря участвуют в коллективном вращательном движении в направлении, определяемом знаком их суммарной интенсивности, либо — при нулевой суммарной циркуляции — знаком интенсивности самого «сильного» вихря. Такое движение условно можно определить схемой

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

- Тип {2} — простой захват, когда один из вихрей нижнего слоя объединяется с вихрем верхнего слоя, и имеет место одна из формул:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

- Тип {3} — преобладающее значение имеет внутрислойное взаимодействие между двумя вихрями нижнего слоя, и движение системы вихрей определяется схемой

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Характерные примеры траекторий абсолютного движения всех трех типов, а также соответствующих им относительных хореографий, приведены на рисунках 10, 11, где представлены случаи $Q \neq 0$ и $Q = 0$ соответственно. Очевидно, на первом из этих рисунков хореографии построены в системе координат, равномерно вращающейся относительно центра завихренности в антициклоническом направлении, а на втором — в движущейся с постоянной поступательной скоростью в отрицательном направлении оси y .

Отметим, что на относительных хореографиях движений типов {1} и {3} вихри нижнего слоя $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ движутся по одной траектории, все время находясь на противоположных концах ее "диаметра". Однако, в соответствии с классификацией (4.14)–(4.16), в первом случае они перемещаются вдоль замкнутых траекторий в направлении часовой стрелки, индуцируемом вихрем верхнего слоя, а во втором случае — в противоположном направлении. Для движений типа {1} вихрь $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ находится внутри описываемой ими замкнутой фигуры, а для типа {3} — вне нее. Отметим, что в пределах каждой из областей {1}, {2} и {3} возможные траектории вихрей, сохраняя представленные на рисунках 10–11 свои характерные свойства, являются достаточно разнообразными по своим топологическим свойствам. В частности, как видно по имеющим место особым точкам фазовых портретов, а также по примеру на рисунке 10b, некоторые из траекторий могут соответствовать устойчивым или неустойчивым стационарным решениям.

5. Анализ стационарных состояний

Основываясь, в частности, на фазовых портретах 6–9, отметим факт наличия неподвижных *эллиптических* точек, которые могут иметь место

- в верхней и/или нижней полярных частях как финитных, так и инфинитных физических областей (рисунки 6–9);

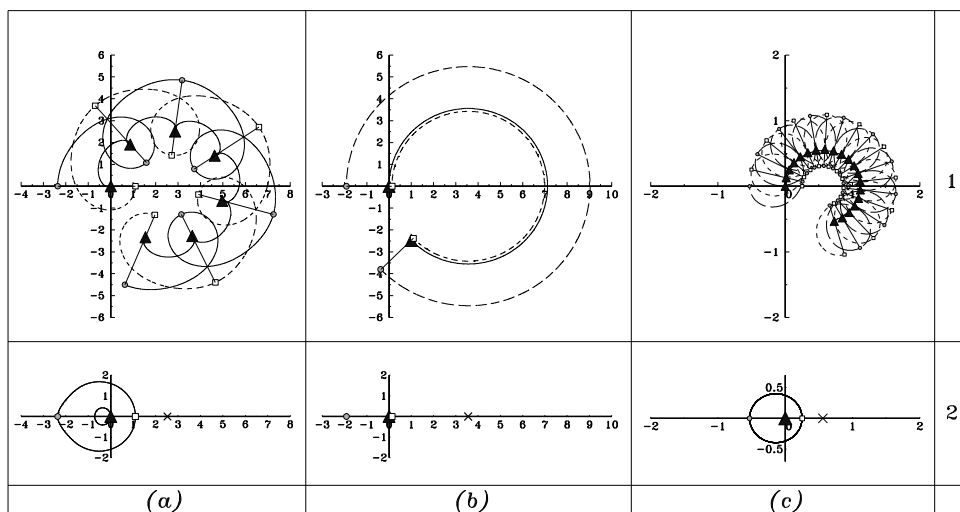


Рис. 10. Траектории абсолютного движения — 1 и соответствующие им хореографии — 2 для движений типов {1} — (a), {2} — (b), {3} — (c) при $\mu = -2.5$, $\gamma^2 L = -5$ — (a), (b) и $\gamma^2 L = -0.25$ — (c). Начальные условия заданы формулами (5.1) с $X_2^2 = 1.1$, $t = (-7.2022; 1.8150; 8.3872)$ — (a); $X_2^2 = 0.13233$, $t = (-2.5059; 0.0263; 5.4796)$ — (b), $X_2^2 = 0.25$, $t = (-7.2991; 1.8750; 8.4241)$ — (c). Сплошные линии верхней части рисунка изображают траектории вихря верхнего слоя $\binom{1}{1}$, а крупноштриховые и мелкоштриховые линии — вихрей нижнего слоя $\binom{1}{2}$ и $\binom{2}{2}$ соответственно. Маркеры на рисунках 10.1.a и 10.1.c проставлены через каждые пол периода, на рисунке 10.1.b в начальный и конечный моменты времени; соединяющие их отрезки фиксируют синхронные (коллинеарные) положения вихрей. Начальным трилинейным координатам для случаев (a), (b) отвечают точки с номерами 1 и 2 на рисунке ба, а для случая (c) — точка с номером 1 на рисунке бб. Крестики на оси X в нижней части рисунка указывают координаты центров завихренности $(X_c, 0)$.

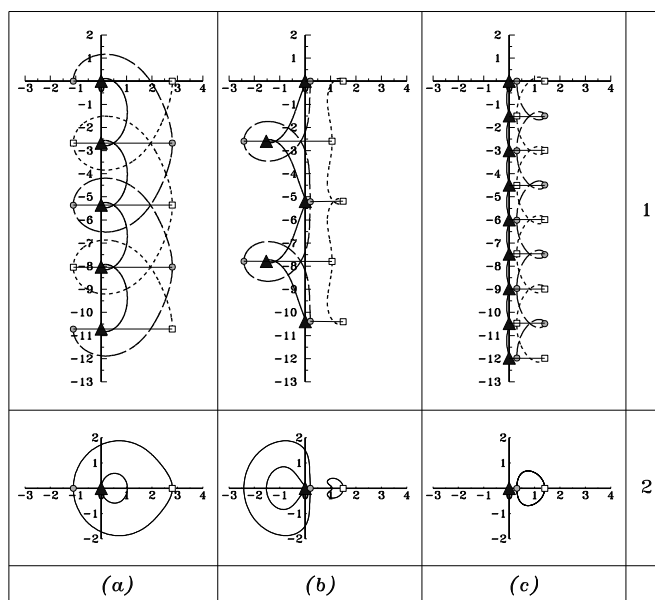


Рис. 11. То же самое, что на рисунке 10, но при $\gamma^2 L = -2.89$, $\mu = -2$ и $X_2^2 = 2.8$, $t = (-15.7889; 16.2768; 2.5121)$ — (a); $X_2^2 = 1.9$, $t = (-4.5779; 7.4948; 0.0830)$ — (b); $X_2^2 = 1.4$, $t = (-1.2561; 4.0692; 0.1869)$ — (c). Начальным трилинейным координатам для случаев (a), (b) и (c) отвечают точки с номерами 1, 2 и 3 на рисунке 9. Центр завихренности в этом случае находится на бесконечности.

- во внутренней части области {3} (рисунок 8);
- на боковых сторонах физических областей (рисунки 6а и 9);

а также особенностей *гиперболического* типа (рисунки 6а и 9) в точках самопересечения сепаратрис.

Остановимся прежде всего на анализе условий существования стационарных точек. Очевидно, внутренним эллиптическим и гиперболическим особенностям отвечают вращательные движения твердотельных конфигураций (устойчивой в первом случае и неустойчивой во втором) в виде равнобедренного треугольника, а граничным эллиптическим точкам — вращения коллинеарных конфигураций. Эти круговые движения осуществляются относительно центра завихренности вихревой структуры с координатами

$$(X_c, Y_c) = \left(\frac{\gamma P_x}{Q}, \frac{\gamma P_y}{Q} \right). \quad (5.1)$$

Если полюсная особенность имеет место при $t_1 = 0$ (как, например, верхние точки на рисунках 6 и 9 и нижние точки на рисунках 7 и 8), то ей отвечает конструкция из вихря верхнего слоя и теоретически слившихся вихрей нижнего слоя, если же для нее $t_1 \neq 0$, то ей соответствует *обычная* либо *инверсная карусель*.

Особый интерес представляет существование *боковых* эллиптических точек, являющихся фазовыми прообразами стационарного решения для несимметричной коллинеарной конфигурации, которую будем называть *эксцентричной каруселью*, поскольку ее твердотельное вращение осуществляется относительно центра завихренности, в общем случае не являющегося центром симметрии. Выражения (5.1) для эксцентричной карусели принимают вид

$$(X_c, Y_c) = \left(\frac{2(R - B)}{\mu + 2}, 0 \right). \quad (5.2)$$

Смысл переменных B, R поясняется рисунком 12а.

Очевидно, для эксцентричной карусели

$$\begin{aligned} X_c \geq 0 & \quad \text{при} \quad \mu < -2, B \geq R \quad \text{или} \quad \mu > -2, B \leq R, \\ X_c \leq 0 & \quad \text{при} \quad \mu > -2, B \geq R \quad \text{или} \quad \mu < -2, B \leq R. \end{aligned} \quad (5.3)$$

При $B \neq R$ и $\mu \rightarrow -2$ (когда суммарная интенсивность стремится к нулю) положение центра завихренности перемещается в бесконечно удаленную точку.

Используя уравнения (2.1)–(2.2), легко получить дисперсионное уравнение для стационарной конфигурации в виде равномерно вращающейся коллинеарной конструкции:

$$\begin{aligned} F(B, R; \mu) = \frac{1}{2} + \frac{2R(1 + \mu)}{B(2R - B)} + K_1(2R) - \\ - \frac{(2R + B\mu)K_1(2R - B) + [2R(1 + \mu) - B\mu]K_1(B)}{2(R - B)} = 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Видно, что F является монотонно убывающей функцией как от B , так и от R , причем

$$F \sim \begin{cases} 1/\varepsilon_1, & \text{где } \varepsilon_1 = \min(B, R) \text{ при } B, R \ll 1; \\ (1 + \mu)[1/\varepsilon_2 - K_1(\varepsilon_2)], & \text{где } \varepsilon_2 = B \ll 1 \text{ при } R \gg 1; \\ (1 + \mu)[1/\varepsilon_3 - K_1(\varepsilon_3)], & \text{где } \varepsilon_3 = 2R - B \ll 1 \text{ при } B \rightarrow 2R, R \gg 1. \end{cases} \quad (5.5)$$

Выражения, стоящие в квадратных скобках (5.5), всегда строго положительны, следовательно, достаточное условие существования решения уравнения (5.4) можно записать в виде неравенства

$$\mu < -1. \tag{5.6}$$

Таким образом, координаты центра вращения для *стационарных состояний в виде эксцентричной карусели* имеют более узкий интервал по параметру μ , нежели указанный в (5.3) для *произвольных коллинеарных конфигураций*. Именно:

$$\begin{aligned} X_c \geq 0 & \text{ при } \mu < -2, B \geq R \text{ или } -1 > \mu > -2, B \leq R, \\ X_c \leq 0 & \text{ при } -1 > \mu > -2, B \geq R \text{ или } \mu < -2, B \leq R. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Угловая скорость вращения прямолинейной вихревой конструкции относительно центра завихренности (5.7) равна

$$\omega = \frac{\gamma\kappa(\mu + 2)}{4\pi(2R + B\mu)} \left[\frac{B + 2R\mu}{2BR} - \mu K_1(B) + K_1(2R) \right]. \tag{5.8}$$

Если $R \rightarrow B$ и $\mu \neq -2$, то для компактных физических областей (когда $\mu < -2$) имеем ситуацию, при которой боковая эллиптическая точка фазовой плоскости стремится к нижней полюсной точке, а для некомпактных физических областей (при $-2 < \mu < -1$) данное условие может выполняться только при $L > 0$, и тогда боковая эллиптическая точка стремится занять место единственного полюса при $t_1 = (t_1)_{min}$. При этом в первом случае *эксцентрическая карусель* становится *обычной* или *инверсной каруселью* (в зависимости от выбранного значения инварианта L), а во втором случае — только *обычной каруселью*.

Выражение (5.8) при этом принимает форму

$$\omega = \frac{\gamma\kappa}{4\pi B^2} \left\{ \frac{1}{2} + \mu[1 - BK_1(B)] + BK_1(2B) \right\}, \tag{5.9}$$

совпадающую с (2.10) при $A = 2$.

Рисунок 12 демонстрирует характер решения уравнения (5.4) при $\mu = -2.5$ на широком интервале значений интеграла L . В частности, он констатирует отмеченное в предыдущем параграфе свойство знакопостоянства L при $\mu < -2$. Отметим, что кривая $X_c(R)$ симметрична относительно оси R , а $B(R)$ — относительно прямой $B = R$, причем с ростом R величина B асимптотически приближается к 0 или к $2R$ при $R > B$ и $R < B$ соответственно — см. (5.5). Для иллюстрации этих эффектов на рисунках пунктиром проведены вспомогательные лучи $B = R$ и $B = 2R$. Пример траекторий абсолютного движения трех вихрей, образующих эксцентрическую карусель, приведен на рисунке 10.1.b.

В случае нулевой суммарной интенсивности ($Q = 0$, когда $\mu = -2$) при $R \neq B$ угловая скорость (5.8) становится также нулевой, а положение центра вращения (5.7) перемещается в бесконечно удаленную точку. При этом имеем нетривиальное решение в виде несимметричной конфигурации трех вихрей, лежащих на одной прямой и перемещающихся с постоянной поступательной скоростью в перпендикулярном ей направлении, подобно обычному хетону (или паре вихрей). Такую структуру будем называть *тритоном*. В этом случае дисперсионное уравнение (5.4) принимает форму

$$F(B, R; -2) = \frac{B^2 - 2BR + 4B^2}{2BR(2R - B)} - K_1(B) - K_1(2R - B) - K_1(2R) = 0. \tag{5.10}$$

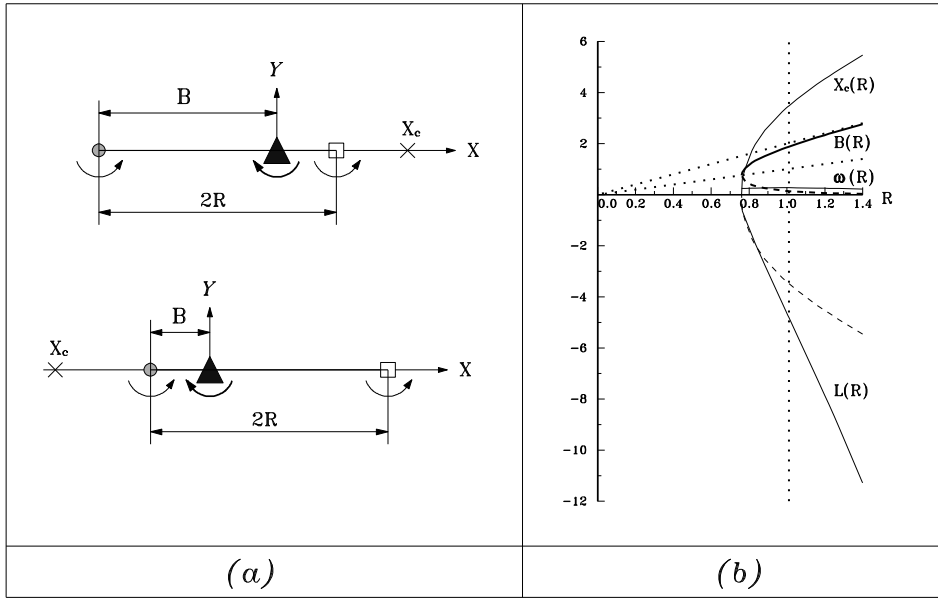


Рис. 12. (а): Схемы первоначального расположения вихрей для *эксцентричной карусели* при $B > R$ (сверху) и при $B < R$ (снизу) и центра завихренности (крестик); (b): Дисперсионная кривая $B(R)$, удовлетворяющая (5.6), положение центра завихренности $X_c(R)$, величина угловой скорости (5.10) вращения вихревой конструкции $\omega(R)$ и значение интегрального инварианта $L(R)$ (4.5) при $\mu = -2.5$. Наклонные пунктирные линии имеют уравнения $B = R$ и $B = 2R$. Ветви кривых $B(R)$ и $X_c(R)$, отвечающие случаю $B > R$, проведены сплошной линией, а случаю $B < R$ — штриховой. Точкам пересечения кривых с вертикальной пунктирной линией отвечают параметры численного эксперимента при $\gamma^2 L = -5$, представленного на рисунке 10b.

Скорость поступательного движения *тритона* равна

$$V = \frac{\kappa\gamma}{4\pi} \left[\frac{2(R - B)}{B(2R - B)} - K_1(B) + K_1(2R - B) \right]. \tag{5.11}$$

Нетривиальность данного решения состоит в том, что **прямолинейное** движение вихревой конструкции достигается при наличии **ненулевого** суммарного момента M . Это становится возможным благодаря тому, что вклад M в выражение (2.4) для L при $Q = 0$ аннулируется. При $R = B$ уравнение (5.10) имеет решение $V = 0$, и мы имеем неподвижный *тритон* или, что то же самое, статическое состояние *карусели*.

Случай $Q = 0$ представлен рисунком 13, где зависимость $B(R)$ удовлетворяет дисперсионному уравнению (5.11), а $V(R)$ представляет собой поступательную скорость *тритона* (5.11).

Аналогично могут быть получены дисперсионные уравнения для параметров вихревых конфигураций в виде равнобедренного треугольника, представляющих собой: (а) неустойчивую структуру, соответствующую гиперболической точке самопересечения сепаратрисы на фазовых портретах 6а и 7, либо (б) устойчивую конструкцию, отвечающую неподвижной точке фазового портрета (например, точка 2 на рисунке 8а).

Формула (5.1) для центра завихренности треугольной конструкции принимает вид

$$(X_c, Y_c) = \left(0, \frac{2B \sin \varphi}{\mu + 2} \right), \tag{5.12}$$

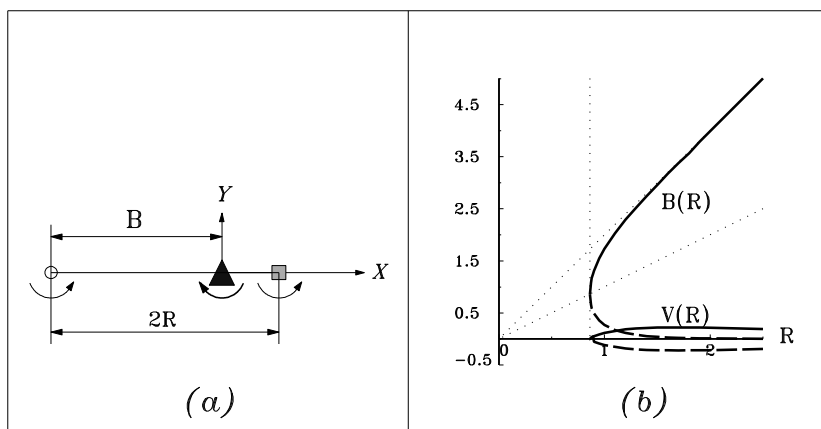


Рис. 13. То же самое, что на рисунке 12, но для коллинеарной структуры *тритон* при $\mu = -2$. Кривая $V(R)$ представляет собой распределение поступательной скорости вихревой структуры. Ветви кривых $B(R)$ и $V(R)$, отвечающие случаю $B > R$, проведены сплошной линией, а случаю $B < R$ — штриховой. Положение вертикальной пунктирной линии определяется равенством $B = R = R_0$, где R_0 — решение уравнения $\Omega_0 = 0$ из (2.10).

причем

$$\begin{aligned} Y_c &\geq 0 && \text{при } \mu > -2, \\ Y_c &\leq 0 && \text{при } \mu < -2. \end{aligned} \tag{5.13}$$

При $\mu < 0$, когда центр завихренности (5.12) лежит вне вихревого треугольника, дисперсионное уравнение, связывающее длину бокового ребра треугольника B с углом при основании φ (см. рисунок 14а), имеет вид

$$\frac{1 + 2B \cos \varphi K_1(2B \cos \varphi)}{\cos^2 \varphi} = -4(1 + \mu)[1 - BK_1(B)]. \tag{5.14}$$

Поскольку выражение, стоящее в левой части (5.14) всегда превышает единицу, а $0 < 1 - BK_1(B) < 1$, то необходимое условие существования решений дисперсионного уравнения принимает вид

$$\mu < -5/4. \tag{5.15}$$

Асимптотические свойства модифицированных функций Бесселя [14] определяют ограничения для угла при основании треугольника при $B \gg 1$:

$$\arccos \varphi < \sqrt{-\frac{1}{4(1 + \mu)}}. \tag{5.16}$$

Значения параметра μ , очевидно, должны принадлежать полупрямой (5.15), на которой подкоренное выражение в (5.16) всегда положительно.

Формула для угловой скорости вращения треугольной структуры относительно центра завихренности, координаты которого $(0, Y_c)$ определяются формулой (5.12), принимает вид

$$\omega = \frac{\gamma\kappa(2 + \mu)}{4\pi B^2} [1 - BK_1(B)]. \tag{5.17}$$

Ясно, что $\omega \leq 0$ при $\mu \leq -2$, и, в силу (5.15), $\omega \geq 0$ при $-5/4 > \mu \geq -2$.

Пример дисперсионной кривой $\varphi(B)$, а также распределений угловой скорости вращения и положений центра завихренности для случая $\mu < 0$ приведен на рисунке 14b.

При $\mu = -2$, когда $Q = 0$, угловая скорость равна нулю, и центр завихренности удаляется в бесконечность. При этом длина боковой стороны и угол при основании треугольника связаны дисперсионным уравнением

$$\frac{1 + 2B \cos \varphi K_1(2B \cos \varphi)}{\cos^2 \varphi} = 4[1 - RK_1(B)], \quad (5.18)$$

откуда легко получить предельные соотношения:

$$0 \leq \varphi \leq \pi/3, \quad \text{причем } B \rightarrow R_0 \text{ при } \varphi \rightarrow 0 \text{ и } B \rightarrow \infty \text{ при } \varphi \rightarrow \pi/3. \quad (5.19)$$

Скорость равномерного движения вихревой структуры в направлении, параллельном основанию треугольника, выражается формулой

$$V = -\frac{\kappa\gamma \sin \varphi}{4\pi B} [1 - RK_1(B)], \quad (5.20)$$

где B и φ удовлетворяют уравнению (5.18). Отметим, что выражения (5.18) и (5.20) представляют собой частные случаи более общих соотношений, полученных в [5] для условий непрерывной стратификации и с учетом дифференциального (неравномерного) вращения для треугольной конфигурации вихрей, два из которых (одного знака) расположены на одном горизонте, а третий — на другом. Если жидкость однородна, то подобному стационарному решению при $\mu = -2$ соответствует *равносторонний* треугольник с произвольной длиной стороны [50].

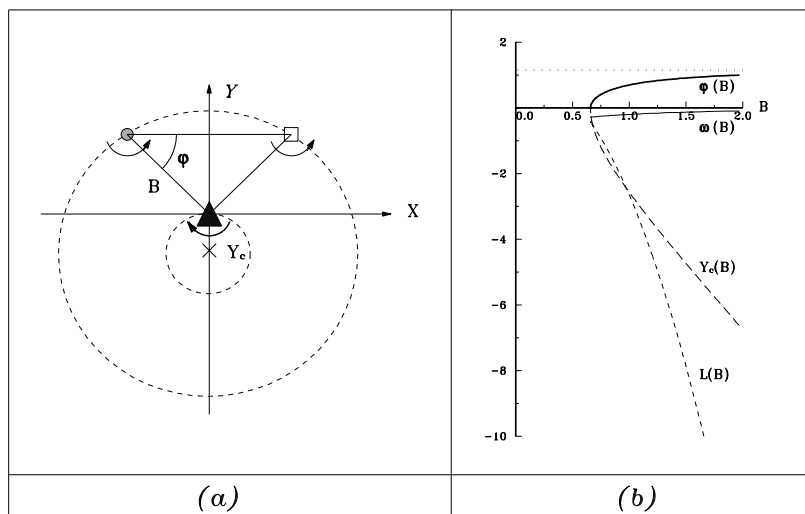


Рис. 14. Схема первоначального расположения вихрей для твердотельно вращающейся вихревой структуры в форме равностороннего треугольника при $\mu = -2.5$. Штриховые линии изображают теоретические траектории вихрей — (a). Соответствующие дисперсионная кривая $\varphi(B)$ (жирная сплошная линия), удовлетворяющая (5.14), величина угловой скорости (5.15) вращения вихревой конструкции $\omega(B)$ (тонкая сплошная линия), кривая координат центра завихренности $Y_c(B)$ (крупный штрих), и значение интегрального инварианта $L(B)$ (мелкий штрих) — (b). Горизонтальная пунктирная линия определяет асимптоту (5.16) для $\varphi(B)$.

Дисперсионные соотношения (5.14) и (5.18) для треугольных конфигураций, отвечающих гиперболическим точкам самопересечения сепаратрис на фазовых портретах при $\mu < 0$ (например, рисунки 6а и 9), определяют неустойчивые вихревые структуры. В то же время, как было отмечено выше, при $\mu > 0$ равнобедренным треугольным конфигурациям могут соответствовать также эллиптические особые точки. При этом оказывается, что дисперсионное соотношение, отвечающее твердотельному вращению такой конструкции, совпадает с уравнением (5.18) для равномерного поступательного движения вихревого треугольника с нулевой суммарной интенсивностью, а угловая скорость вращения задается выражением

$$\omega = \frac{\kappa\gamma^2(2 + \mu)}{4\pi B^2} [1 - RK_1(B)]. \quad (5.21)$$

Интересный частный случай представляет конфигурация, для которой центр завихренности совпадает с центром окружности, описанной вокруг треугольника, и, таким образом, три вихря, расположенные в вершинах равнобедренного треугольника, вращаются по одной круговой орбите. При этом должны выполняться условия

$$\mu = -2 \cos 2\varphi, \quad \frac{\pi}{3} \geq \varphi > \frac{\pi}{4}. \quad (5.22)$$

Траектории движения вихрей устойчивых триангулярных конфигураций приведены на рисунках 15b, 15c. Они представляют собой абсолютные хореографии — сложную в первом случае и простую, когда выполнены условия (5.22), — во втором. Каждая из представленных здесь конфигураций на расчетном временном интервале совершила 25 оборотов относительно центра завихренности системы. Очевидно, в системе координат, вращающейся вместе с вихрями, мы имеем три неподвижные точки (нижняя часть рисунка).

На фрагменте 15а демонстрируется эволюция *неустойчивой обычной карусели*. Действительно, на фазовом портрете (рисунок 8а) начальному состоянию отвечает точка 1, в которой соответствующая фазовая кривая практически касается границы физической области. Здесь в начальный момент времени коллинеарная конфигурация была подвержена очень слабому возмущению: вихри помещались в вершинах равнобедренного треугольника (см. рисунок 14а), такого что $\varphi = 10^{-3}$, поэтому вихревая структура в процессе движения через каждые пол периода принимает либо квазиколлинеарную симметричную форму, либо — форму равнобедренного треугольника. На рисунке изображены пять периодов обращения конфигурации вокруг центра завихренности. Этот эксперимент дает пример того, что при определенных соотношениях между μ и L карусель может быть неустойчивой относительно малых возмущений.

6. Численный анализ устойчивости каруселей

В качестве первого шага исследования устойчивости симметричных конфигураций трех вихрей приведем результаты соответствующих численных расчетов (рисунок 16). При их проведении начальное возмущение вихревой структуры задавалось внесением еще меньшего, чем выше, малого возмущения ($\varphi = 10^{-5}$). На рисунке приведен пример полученных областей устойчивости и неустойчивости каруселей в небольшой части плоскости параметров (μ, B) .

Отметим следующие характерные свойства этой диаграммы:

- все карусели являются устойчивыми при
 - (а) $B \leq R_0 \Big|_{\mu=-2} \approx 0.8602$ — независимо от μ ; это подтверждают рисунки 17а, 18а, 19а, на которых $B = 0.815$, а параметр μ принимает различные значения;
 - (б) при $\mu \leq -2$ — независимо от B ;

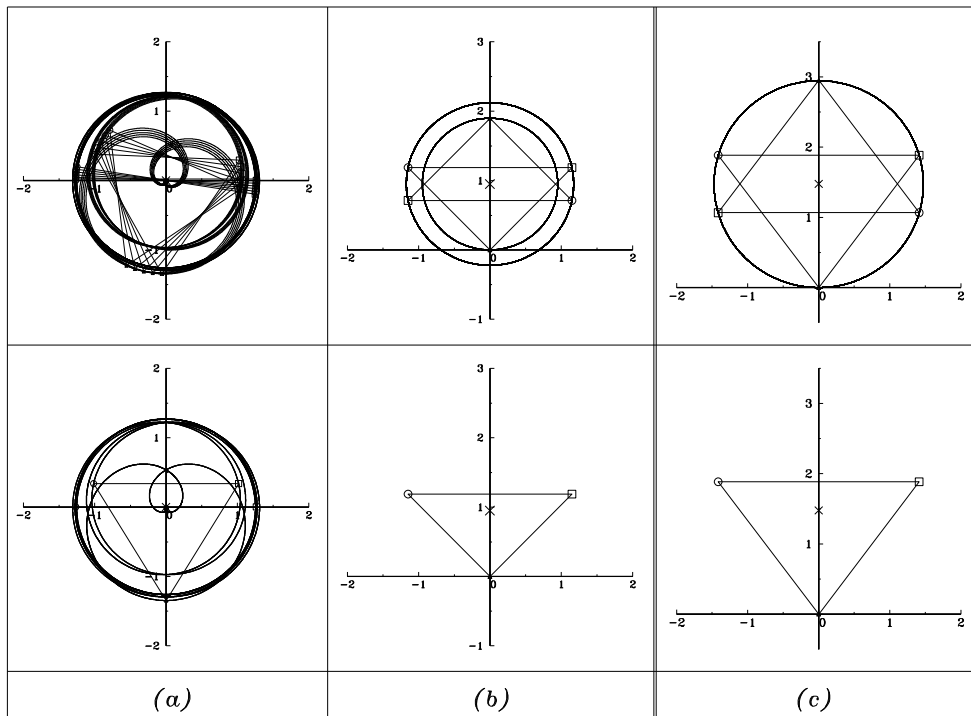


Рис. 15. Сверху: Траектории абсолютного движения для движений типа $\{3\}$ при $\gamma^2 L = 8$ и $\mu = 0.5$ — (a), (b) и $\gamma^2 L = 14.21073$ и $\mu = 0.56$ — (c). Снизу: соответствующие относительные хореографии. Начальные положения вихрей характеризуются условиями: $B = 1.264912$, $\cos \varphi = 0.999999$, $t = (1.6875; 0.6562; 0.6562)$ — точка 1 на рисунке 8a — (a), $B = 1.651011$, $\cos \varphi = 0.695499$, $t = (2.4000; 0.3000; 0.3000)$ — точка 2 на рисунке 8a — (b), $B = 2.35607$, $\cos \varphi = 0.6$, $t = (1.9778; 0.5111; 0.5111)$ — (для этого случая фазовой портрет не приведен) — (c). Крестики указывают координаты центров завихренности $(0, Y_c)$. Отрезками соединены положения вихрей через каждые пол периода.

- по крайней мере при $-2 < \mu \leq -1.5$ граница нейтральной устойчивости практически совпадает с кривой статических состояний; при $-0.5 > \mu > -1.5$ статические вихревые структуры неустойчивы;
- все симметричные коллинеарные конфигурации вихрей одного знака являются неустойчивыми при $B > R_0 \Big|_{\mu=-2}$.

Следует отметить, что результаты, представленные здесь для двухслойных каруселей, коренным образом отличаются от полученных в [24] для аналогичных вихревых структур в баротропной жидкости. В цитируемой работе утверждается, что для всех B при $-1/4 < \mu < 1/4$ имеет место устойчивость.

Четыре серии примеров устойчивых и неустойчивых решений при фиксированных μ в каждой из них и при указанных значениях B приведены на рисунках 17–20.

На рисунке 17 иллюстрируется факт существования узкой (по параметру B) области неустойчивости. Крайние фрагменты демонстрируют устойчивое поведение каруселей — инверсной на рисунке 17a и обычной на рисунке 17c. В центральной части (рисунок 17b) представлена эволюция неустойчивой конфигурации на временном интервале, равном девяти периодам относительного движения.

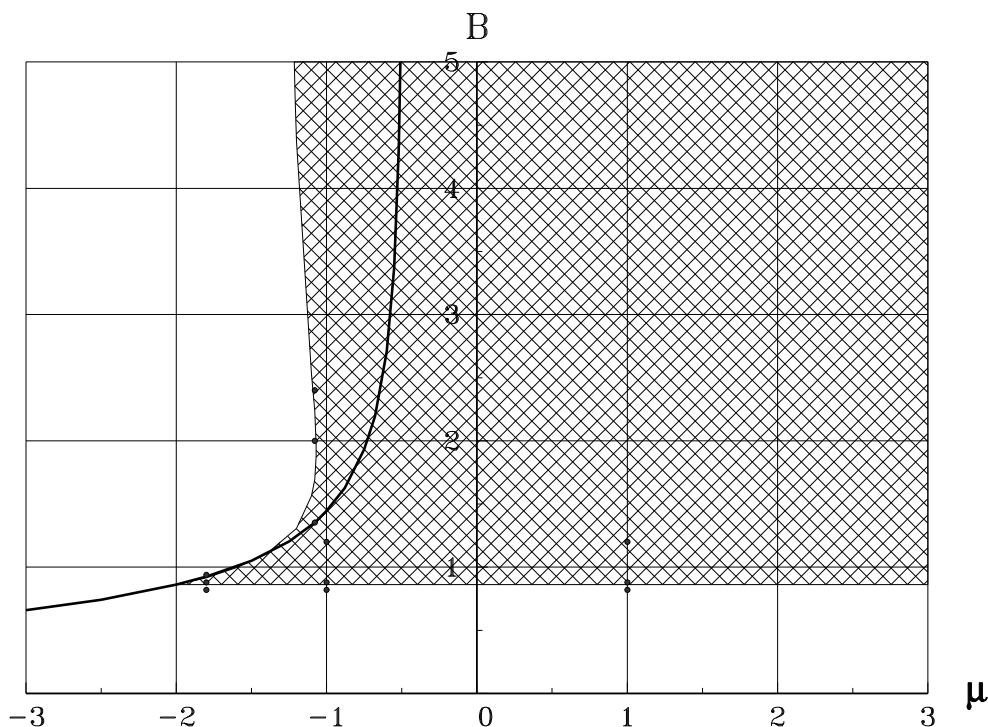


Рис. 16. Диаграмма устойчивости каруселей на плоскости параметров (μ, B) . Область неустойчивости заштрихована. Кривая в левой полуплоскости, как и на рисунке 3, описывает поведение решения $R = B = R_0$ уравнения $F = 0$ в (2.10) при $A = 2$. Положения точек соответствуют значениям (μ, B) на рисунках 17-20.

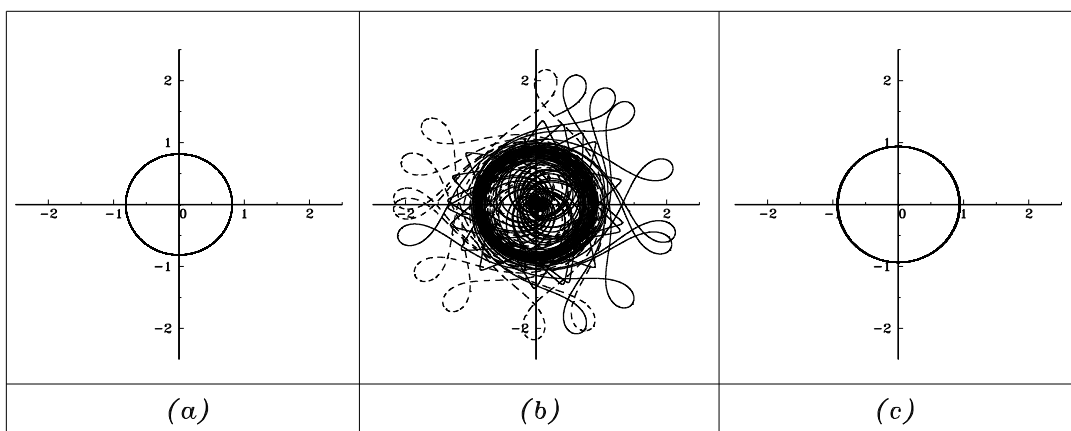


Рис. 17. Траектории вихрей, составляющих карусели при $\mu = -1.8$ и $B = 0.815$ ($L = 0.2657$) — (a); $B = 0.875$ ($L = 0.3063$) — (b); $B = 0.935$ ($L = 0.3497$) — (c). На рисунке 16 этим параметрам соответствуют точки на прямой $\mu = -1.8$.

Рисунки 18b–18c, с одной стороны, и 19b–19c и 20a, 20c — с другой, дают, соответственно, примеры инфинитных и финитных неустойчивых траекторий вихрей, первоначально составляющих очень слабо возмущенные осесимметричные вихревые структуры. Инфинитные траектории формируются убегающей парой, образованной вихрем верхнего слоя и эквивалентным ему по

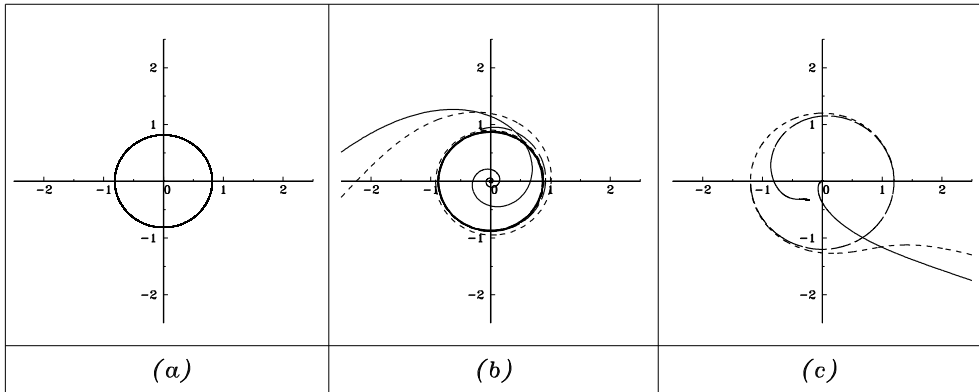


Рис. 18. То же самое, что на рисунке 17, но при $\mu = -1.0$ и $B = 0.815$ ($L = 1.3285$) — (a); $B = 0.875$ ($L = 1.5313$) — (b); $B = 1.2$ ($L = 2.8800$) — (c). На рисунке 16 этим параметрам соответствуют точки на прямой $\mu = -1.0$.

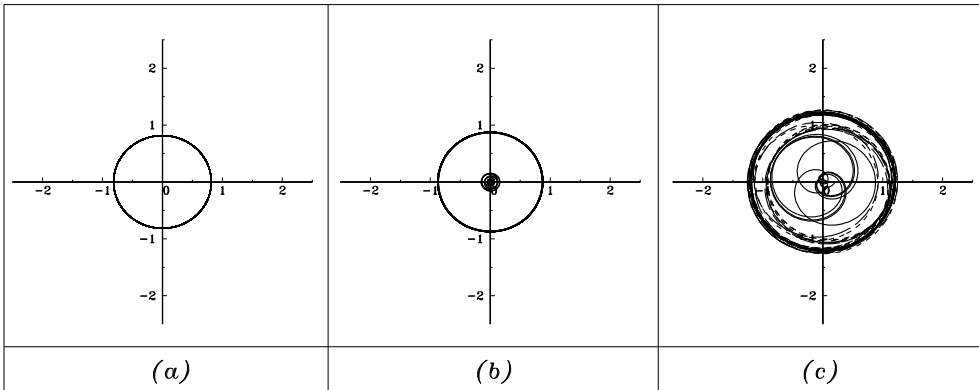


Рис. 19. То же самое, что на рисунке 17, но при $\mu = 1.0$ и $B = 0.815$ ($L = 3.98535$) — (a); $B = 0.875$ ($L = 4.59375$) — (b); $B = 1.2$ ($L = 8.64000$) — (c). На рисунке 16 этим параметрам соответствуют точки на прямой $\mu = 1.0$.

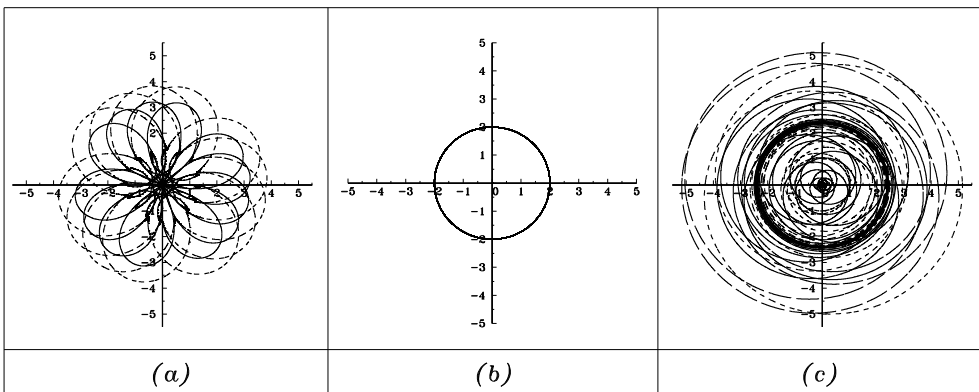


Рис. 20. То же самое, что на рисунке 17, но при $\mu = -1.08$ и $B = 1.2524$ ($L = 3.3704$) — (a); $B = 2$ ($L = 7.3600$) — (b); $B = 2.4$ ($L = 10.5984$) — (c). На рисунке 16 этим параметрам соответствуют точки на прямой $\mu = -1.08$.

интенсивности, но противоположным по знаку, одним из вихрей нижнего слоя. Асимптотически удаление пары на бесконечное расстояние сопровождается полной остановкой оставшегося вихря нижнего слоя. Вихревая структура рисунка 19b также относится к разряду неустойчивых: хотя вихри-сателлиты движутся по орбитам, близким к круговым, центральный вихрь совершает колебания с амплитудой, многократно превышающей начальное возмущение.

Последовательность рисунков 20 отражает немонотонное (по параметру B) поведение левой границы области неустойчивости: по мере роста значений B вначале (рисунок 20a) мы наблюдаем неустойчивое *статическое состояние* вихревой структуры, а затем — реализацию устойчивого и неустойчивого поведения изначально *обычных каруселей* — рисунки 20b и 20c соответственно.

7. Заключение

Отметим основные результаты данной работы.

1. Выделен следующий класс стационарных решений уравнений динамики сингулярных вихрей в двухслойной вращающейся жидкости: центрально-симметричная структура из расположенных в нижнем слое A вихрей с равными интенсивностями κ , совершает твердотельное круговое движение с постоянной угловой скоростью ω относительно расположенного в верхнем слое неподвижного центрального вихря интенсивности $\mu\kappa$. Показано, что
 - при $\mu \geq -0.5$ угловая скорость имеет тот же знак, что и κ (направление вращения A -угольника определяется внутрислойным взаимодействием составляющих его вихрей), и $|\omega|$ является монотонно убывающей функцией от радиуса окружности R , описанной вокруг A -угольника; такой вихревой структуре присваивается наименование *инверсной карусели*;
 - при $\mu < -0.5$ функция становится немонотонной, меняя знак при некотором значении $R = R_0$ (при этом вращение A -угольника нижнего слоя происходит при преобладающем влиянии вихря верхнего слоя, а вся конфигурация становится *обычной каруселью*) и принимая минимальное значение при $R = R_{min}$;
 - $R_0(\mu, A)$ и $R_{min}(\mu, A)$ являются убывающими функциями по μ и возрастающими по A .
2. Частный случай каруселей при $A = 2$ исследован численно на устойчивость относительно малых (порядка $O(10^{-5})$) возмущений координаты центрального вихря вдоль оси зеркальной симметрии. Предварительные результаты вычислений на части плоскости $(\mu, R) \in [-3; 3] \times [0; 5]$ показывают (величину R можно по-прежнему считать радиусом описанной окружности для невозмущенного состояния конфигурации), что при $R \leq R_0(-2, 2)$ для всех μ , а также при $\mu \leq 2$ для всех R карусели устойчивы, а при $R > R_0(-2, 2)$ и, по крайней мере, при $\mu \geq -1$ — неустойчивы.
3. При $A = 2$ проведено подробное исследование возможных движений трех вихрей, имеющих в начальный момент времени расположение более общего вида (не только симметричное и не обязательно коллинеарное):
 - С помощью трilinearных координат качественно исследовано относительное движение вихрей в широком диапазоне внешних параметров. Дана классификация возможных типов движений, основанная на разделении областей преобладающего внутрислойного и межслойного взаимодействий между вихрями данной структуры.

- Проведен анализ стационарных состояний, соответствующих особым точкам фазовых портретов. Для этих состояний выведены дисперсионные уравнения, связывающие геометрические характеристики вихревых структур с внешними параметрами задачи.
- Обнаружены новые типы стационарных решений: (а) устойчивая *эксцентрическая карусель* — твердотельное вращательное движение (относительно неподвижного центра завихренности) коллинеарной тройки вихрей и ее частный случай (при нулевой суммарной интенсивности) *тритон*, движущийся поступательно с постоянной скоростью; (б) устойчивые и неустойчивые структуры в виде равнобедренного треугольника; (в) отмеченные в пункте 2 устойчивые и неустойчивые симметричные *карусели*.
- Найдены семейства относительных и абсолютных *хореографий*, соответствующих чисто периодическим относительным движениям трех вихрей. Отдельно отметим впервые полученный для двухслойных вихрей класс абсолютных хореографий (пример — на рисунке 15с) с круговым вращением всех трех вихрей вдоль одной фиксированной орбиты.

Приведенные в работе результаты, несмотря на высокую степень идеализации используемой модели, могут оказаться полезными для понимания механизмов формирования квазистационарных режимов в реальных стратифицированных геофизических средах.

Авторы выражают признательность В. В. Козлову, А. В. Борисову, И. С. Мамаеву и З. И. Кизнеру за стимулирующее обсуждение промежуточных результатов данной работы.

Список литературы

- [1] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. *Абсолютные и относительные хореографии в задаче о движении точечных вихрей на плоскости* // Докл. РАН, 2005, т. 400, № 4, с. 1–6.
- [2] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике* // Ижевск: Изд. дом Удмуртский университет, 1999, 464 с.
- [3] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Математические методы динамики вихревых структур*. В сб.: *Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей* // Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, с. 17–178.
- [4] Гряник В. М. *Динамика сингулярных геострофических вихрей в двухуровневой модели атмосферы (океана)* // Изв. АН СССР. ФАО, 1983, т. 19, № 3, с. 227–240.
- [5] Гряник В. М. *Локализованные вихревые возмущения — «вихревые заряды» и «вихревые нити» в бароклинной дифференциально вращающейся жидкости* // Изв. АН СССР. ФАО, 1988, т. 24, № 12, с. 1251–1261.
- [6] Гряник В. М. Теоретические модели динамики локализованных квазигеострофических вихрей в атмосфере и океане. *Исследования вихревой динамики и энергетики атмосферы и проблемы климата* // Л.: Гидрометеониздат, 1990, с. 31–60.
- [7] Гряник В. М., Соколовский М. А., Веррон Ж. *Динамика бароклинных вихрей с нулевой суммарной интенсивностью (хетонов)*. В сб.: *Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей* // Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, с. 547–622.
- [8] Доронина Т. Н. *Структура циркуляционных ячеек интенсивных бароклинных вихрей в потоке со сдвигом скорости и адвективный перенос примеси* // Изв. АН. ФАО, 1995, т. 31, № 2, с. 223–232.

- [9] Каменкович В. М., Кошляков М. Н., Монин А. С. *Синоптические вихри в океане* // Л.: Гидрометеиздат, 1987, 512 с.
- [10] Куракин Л. Г., Юдович И. И. *Устойчивость стационарного вращения правильного вихревого многоугольника*. В сб.: *Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей* // Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, с. 238–299.
- [11] Макаров В. Г. *Численное моделирование формирования триполярных вихрей методом контурной динамики* // Изв. АН. ФАО, 1996, т. 32, № 1, с. 46–55.
- [12] Мелешко В. В., Константинов М. Ю. *Динамика вихревых структур* // Киев: Наукова Думка, 1993, 280 с.
- [13] Педлоски Дж. *Геофизическая гидродинамика*. (Пер. с англ.) // М.: Мир, 1982, т. 1, 2. 811 с.
- [14] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. *Интегралы и ряды. Специальные функции* // М.: Наука, 1983, 750 с.
- [15] Симо К. *Новые семейства решений задачи N тел*. В сб.: Симо К., Смейл С., Шенсине А. и др. *Современные проблемы хаоса и нелинейности* // Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, с. 233–251.
- [16] Симо К. *Динамические свойства восьмеркообразных решений задачи трех тел*. В сб.: Симо К., Смейл С., Шенсине А. и др. *Современные проблемы хаоса и нелинейности* // Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, с. 252–279.
- [17] Соколовский М. А., Веррон Ж. *Новые стационарные решения задачи о трех вихрях в двухслойной жидкости* // Докл. АН, 2002, т. 383, N 1, с. 61–66.
- [18] Ткаченко В. М. *О вихревых решетках* // ЖЭТФ, 1965, т. 49, вып. 6(12), с. 1875–1883.
- [19] Шенсине А., Монтгомери Р., Симо К., Джервер Дж. *Простые хореографические движения N тел: предварительное изучение*. В сб.: Симо К., Смейл С., Шенсине А. и др. *Современные проблемы хаоса и нелинейности* // Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, с. 206–232.
- [20] Aref H. *Motion of three vortices* // Phys. Fluids, 1979, V. 22, № 3, p. 393–400.
- [21] Aref H. *Point vortex motions with a center of symmetry* // Phys. Fluids, 1982, V. 25, p. 2183–2187.
- [22] Bauer L., Morikawa G. K. *Stability of rectilinear geostrophic vortices in stationary equilibrium* // Phys. Fluids, 1976, V. 19, № 7, p. 929–942.
- [23] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. *Absolute and relative choreographies in the problem of point vortices moving on a plane* // Regular & Chaotic Dyn., 2004, V. 9, № 2, p. 101–111.
- [24] Cabral H. E., Schmidt D. S. *Stability of relative equilibria in the problem on $N+1$ vortices* // SIAM J. Math. Anal., 1999, V. 31, № 2, p. 231–250.
- [25] Carnevale G. F., Kloosterziel R. C. *Emergence and evolution of triangular vortices* // J. Fluid Mech., 1994, V. 259, p. 305–331.
- [26] Carton X. *Hydrodynamical modelling of oceanic vortices* // Surveys in Geophys., 2001, V. 22, p. 179–263.
- [27] Carton X. J., Flierl G. R., Polvani L. M. *The generation of tripoles from unstable axisymmetric isolated vortex structures* // Europhys. Lett., 1989, V. 9, № 4, p. 339–344.
- [28] Carton X. J., Legras B. *The life-cycle of tripoles in two-dimensional incompressible flows* // J. Fluid Mech., 1994, V. 267, p. 51–82.
- [29] Gryanik V. M., Borth H., Olbers D. *The theory of quasigeostrophic von Karman vortex streets in two-layer fluids on beta-plane* // J. Fluid Mech., 2004, V. 505, p. 23–57.

- [30] Gryanik V. M., Doronina T. N., Olbers D., Warncke T. H. *The theory of three-dimensional hetons and vortex-dominated spreading in localized turbulent convection in a fast rotating stratified fluid* // J. Fluid Mech., 2000, V. 423, p. 71–125.
- [31] van Heijst G. J. F. *Topography effects on vortices in a rotating fluid* // Meccanica, 1994, V. 29, № 4, p. 431–451.
- [32] van Heijst G. J. F., Kloosterziel R. C. *Tripolar vortices in a rotating fluid* // Nature, 1989, V. 338, p. 569–571.
- [33] Hénon A. *Family of periodic solutions of the planar three-body problem and their stability* // Cel. Mech., 1976, V. 13, p. 267–285.
- [34] Hogg N. G., Stommel H. M. *The heton, an elementary interaction between discrete baroclinic geostrophic vortices, and its implications concerning eddy heat-flow* // Proc. R. Soc. Lond. 1985, V. A 397, p. 1–20.
- [35] Hogg N. G., Stommel H. M. *Hetonic explosions: the breakup and spread of warm pools as explained by baroclinic point vortices* // J. Atmos. Sci., 1985, V. 42, № 14, p. 1465–1476.
- [36] Hopfinger E. J., van Heijst G. J. F. *Vortices in rotating fluids* // Ann. Rev. Fluid Mech., 1993, V. 25, p. 241–289.
- [37] Kizner Z., Khvoles R. *The tripole vortex: Experimental evidence and explicit solutions* // Phys. Rev., 2004, V. E 70, p. 016307-1-016307-4.
- [38] Kloosterziel R. C., van Heijst G. J. F. *An experimental study of unstable barotropic vortices in a rotating fluid* // J. Fluid Mech., 1991, V. 223, p. 1–24.
- [39] Kurakin L. G., Yudovich V. I. *The stability of stationary rotation of a regular vortex polygon* // Chaos, 2002, V. 12, № 3, p. 574–595.
- [40] Meleshko V. V., van Heijst G. J. F. *Interaction of two-dimensional vortex structures: Point vortices, contour kinematics and stirring properties* // Chaos, Solitons & Fractals, 1994, V. 4, № 6, p. 977–1010.
- [41] Moore C. *Braids in classical dynamics* // Phys. Rev. Lett., 1993, V. 70, № 24, p. 3675–3679.
- [42] Morel Y. G., Carton X. J. *Multipolar vortices in two-dimensional incompressible flows* // J. Fluid Mech., 1994, V. 267, p. 23–51.
- [43] Morikawa G. K. *Geostrophic vortex motion* // J. Meteorol., 1960, V. 17, № 6, p. 148–158.
- [44] Morikawa G. K., Swenson E. V. *Interacting motion of rectilinear geostrophic vortices* // Phys. Fluids, 1971, V. 14, № 6, p. 1058–1073.
- [45] Orlandi P., van Heijst G. F. *Numerical simulation of tripolar vortices in 2D flow* // Fluid Dyn. Res., 1992, V. 9, p. 179–206.
- [46] Sokolovskiy M. A., Verron J. *Finite-core hetons: Stability and interactions* // J. Fluid Mech., 2000, V. 423, p. 127–154.
- [47] Sokolovskiy M. A., Verron J. *Four-vortex motion in the two layer approximation: Integrable case* // Regular & Chaotic Dyn., 2000, V. 5. № 4, p. 413–436.
- [48] Sokolovskiy M. A., Verron J. *Dynamics of the triangular two-layer vortex structures with zero total intensity* // Regular & Chaotic Dyn., 2002, V. 7. № 4, p. 435–472.
- [49] Sokolovskiy M. A., Verron J. *Dynamics of the three vortices in two-layer rotating fluid* // Regular & Chaotic Dyn., 2004, V. 9. № 4, p. 417–438.
- [50] Velasco Fuentes O. U., van Heijst G. J. F., van Lipzing N. P. M. *Unsteady behaviour of a topography-modulated tripole* // J. Fluid Mech., 1996, V. 307, p. 11–41.
- [51] Young W. R. *Some interactions between small numbers of baroclinic, geostrophic vortices* // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn., 1985, V. 33, p. 35–61.