

Детерминированный хаос в системе генератор-пьезокерамический излучатель

Т. С. Краснопольская

Институт гидромеханики Национальной Академии Наук
03057, Украина, Киев, ул. Желябова, 8/4
E-mail: kras@ihm.kiev.ua

А. Ю. Швец

НТУУ Киевский политехнический институт
03057, Украина, Киев, пр. Победы, 37
E-mail: shvets@imath.kiev.ua

Получено 9 декабря 2005 г.

Строится новая модель и исследуются свойства пьезоэлектрического излучателя при взаимодействии с задающим генератором ограниченной мощности. Особое внимание уделяется исследованию возникновения и развития детерминированного хаоса в данной системе. Показано, что системе присуще большое разнообразие эффектов типичных для задач хаотической динамики. Установлено наличие нескольких типов хаотических аттракторов, в том числе, обнаружено существование гиперхаоса. Исследованы различные сценарии перехода от регулярных режимов к хаотическим. Подробно изучены фазовые портреты, сечения и отображения Пуанкаре хаотических аттракторов. Получены и исследованы их спектральные плотности и распределения инвариантных мер.

Ключевые слова: ограниченное возбуждение, пьезоэффект, хаотический аттрактор.

T. S. Krasnopolskaya, A. Yu. Shvets

Deterministic Chaos in Generator–Piezoceramic Transducer System

We propose a new model and study the properties of a piezoceramic transducer interacting with an excitation device of limited power-supply. A special attention is given to the examination of the origin and stages of development of deterministic chaos in this system. It is shown that a great variety of effects typical for problems of chaotic dynamics is inherent in the system. The presence of several types of chaotic attractors is established, and moreover the existence of hyper-chaos is revealed. Various scenarios of transition from regular regimes to chaotic ones are explored. The phase portraits, Poincaré surfaces of section and maps of some chaotic attractors are investigated. For some of the chaotic attractors, the spectral densities and distributions of invariant measures are obtained and explored.

Keywords: limited excitation, piezo-effect, chaotic attractor

Mathematical Subject Classifications: 37D45, 37G35, 37L30, 74B20.

1. Введение

Функционирование многих важных и ответственных элементов различных технических устройств, в том числе и преобразователей, основано на эффекте связанности механического и электрического полей в пьезокерамических средах [2, 3, 9, 10, 12, 25]. В связи с этим, создание общей математической теории описывающей сопряженные электроупругие процессы, протекающие в таких средах, при самых общих условиях механического и электрического нагружения является важным как в научном, так и прикладном аспектах. Такая теория для разнообразных пьезокерамических элементов конструкций создана в работах Улитко А.Ф. и его школы [2, 3, 9, 10, 25]. Однако и в этой теории, и в других публикациях задачи о поведении электроупругих тел рассматриваются в постановке о вынужденных и свободных колебаниях, когда пьезокерамика находится под действием силовых и электрических полей заданного вида. При этом вопрос о влиянии диссипации и излучения энергии при колебаниях тел на режимы работы устройства, создающего указанное воздействие, остаётся вне рассмотрения. Если электроупругое тело нагружено на среду с сопротивлением, как это имеет место при работе излучателей звука в гидроакустике, то излучение энергии вовне вызовет изменение электрического поля в создающем генераторе по сравнению со случаем, когда потерь не происходит. Это изменение может быть существенным и приводить к неожиданным динамическим режимам или являться пренебрежимо малым в зависимости от того, какова мощность задающего генератора по сравнению с излучаемой мощностью. Исследование новых эффектов как в динамике пьезокерамических тел, так и в функционировании задающего генератора, которые обусловлены «чувствительностью» совокупной системы к излучению энергии, представляет несомненный научный интерес. Это случай, так называемого, ограниченного или неидеального возбуждения [4, 23, 24], когда мощность источника является сравнимой по величине с потребляемой нагрузкой. В данном случае рассматривается электрогенератор ограниченной мощности, т.е. мощности, сравнимой с мощностью, излучаемой или потребляемой пьезокерамическими телами при их деформациях. Настоящая статья посвящена анализу эффектов взаимодействия, в совокупности названных эффектом Зоммерфельда—Кононенко [4, 5, 6, 18, 19, 20, 21, 23, 24], колебаний пьезокерамического излучателя и механизма возбуждения этих колебаний — генератора электрического тока, имеющего ограниченную мощность. С этой целью строится новая математическая модель, описывающая процесс взаимодействия пьезокерамического излучателя, нагруженного на гидросреду с сопротивлением, и генератора. Связанность процессов в преобразователе и источнике энергии — генераторе приводит к таким качественно новым эффектам в их динамике, которые нельзя выявить, исследуя задачу в постановке идеального возбуждения. Речь идет, прежде всего, о возможности возникновения хаотических режимов, которые теоретически невозможны при рассмотрении задачи в идеальной постановке. Это объясняется тем, что соответствующие математические модели такой задачи имеют размерность фазового пространства равную двум, что исключает возможность возникновения динамического хаоса.

2. Построение математической модели

В качестве модельной задачи рассматривается стержневой пьезокерамический преобразователь, к электродам которого прикладывается электрическое напряжение, возбуждаемое LC -генератором (рис. 1). Выбор генератора указанного вида обусловлен наблюдаемым сейчас ренессансом использования ламповых генераторов в современной технике. Это связано с тем, что электроламповые (аналоговые) устройства обеспечивают более высокие метрологические характеристики по сравнению с цифровыми устройствами. Через поверхности S_- и S_+ стержня,

которые перпендикулярны его оси oz (с началом координат в срединном сечении), происходит излучение звуковых сигналов в жидкость. Исследовать будем продольные колебания круглого стержня длины $2h$, имеющего площадь сечения S , поляризованного вдоль оси (продольный пьезоэффект).

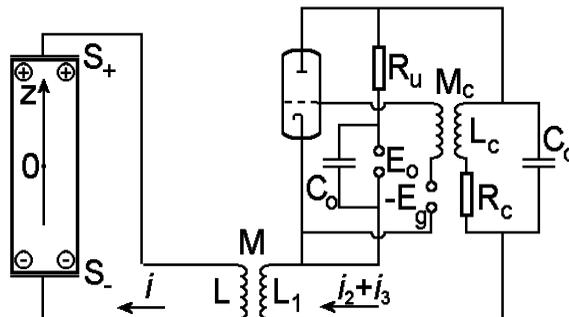


Рис. 1. Схема рассматриваемой системы

Согласно теории продольных деформаций [3, 10] уравнения состояния имеют вид

$$\epsilon_z = s_{33}\sigma_z + d_{33}E_z; \quad D_z = \epsilon_{33}E_z + d_{33}\sigma_z \tag{2.1}$$

где ϵ_z — продольная деформация; σ_z — механическое напряжение; E_z — напряженность электрического поля; D_z — индукция поля; s_{33} — упругая податливость; d_{33} — пьезоэлектрическая постоянная; ϵ_{33} — диэлектрическая проницаемость.

Ограничиваясь акустическим диапазоном частот, используем уравнения вынужденной электростатики, которые применительно к рассматриваемой задаче получают форму

$$\frac{\partial D_z}{\partial z} = 0; \quad E_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z} \tag{2.2}$$

где Ψ — электрический потенциал.

Уравнения (2.1)–(2.2) дополним соотношением Коши $\epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z}$ и уравнением колебаний стержня

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{2.3}$$

где $u = u(z, t)$ — продольные перемещения стержня, ρ — его плотность.

Кроме того, учтем граничные условия при колебаниях стержня в среде с импедансом η_0

$$\sigma_z = -\eta_0 \frac{\partial u}{\partial t}; \quad \Psi = \pm V(t); \quad z = \pm h \tag{2.4}$$

Здесь $2V(t)$ — разность потенциалов, которая реализуется на электродах, расположенных на поверхностях S_- и S_+ стержня, и является неизвестной функцией времени, зависящей от колебаний стержня и тока генератора. $2V(t)$ является разностью потенциалов в реальной электрической цепи, где ток

$$i = -\frac{\partial(SD_z)}{\partial t}$$

течет по стержню. Ток i преобразователя со стержнем связан с током генератора $i_2 + i_3$ согласно дифференциальному уравнению

$$2V + L \frac{di}{dt} = M \frac{d(i_2 + i_3)}{dt} \quad (2.5)$$

Для сравнения отметим, что это соотношение в отсутствие стержня имеет вид

$$L \frac{di}{dt} = M \frac{d(i_2 + i_3)}{dt}$$

Таким образом, наличие стержня изменяет распределение напряжения в цепи. Добавление стержня эквивалентно добавлению некоторой ёмкости (входной электрической импеданс стержневого преобразователя может быть рассчитан по так называемой геометрической ёмкости) [12]. Величина тока i в цепи с преобразователем отличается от величины тока в цепи без него. Если величина тока i мала и $2V \gg L \frac{di}{dt}$ (в этом случае $2V \approx M \frac{d(i_2 + i_3)}{dt}$), то реализуются условия идеального возбуждения преобразователя. Когда же величина $2V$ является сравнимой с $L \frac{di}{dt}$, не выполняется условие о заданной величине $2V(t)$, так как i также будет влиять на режимы работы генератора через цепь преобразователя (i влияет на величину тока $i_2 + i_3$).

Ламповый генератор является классическим примером автоколебательной системы [8]. Запишем уравнения Кирхгофа для каждой ветви тока генератора [5, 6]. Прежде всего предположим, что генератор работает в мягком режиме, т. е.

$$i_a = I_0 + I_1(e_g + De_a) - I_3(e_g + De_a)^3, \quad (2.6)$$

здесь i_a — анодный ток, e_g — напряжение на сетке; e_a — напряжение на аноде; D — проницаемость лампы; I_0, I_1, I_3 — постоянные параметры лампы.

Уравнения токов генератора имеют вид

$$\begin{aligned} i_a &= i_1 + i_2 + i_3; \\ e_a - E_a + R_a i_1 &= 0; \\ e_g + E_g - M_c \frac{di_2}{dt} &= 0 \\ L_c \frac{di_2}{dt} + R_c i_2 &= \frac{1}{C_c} \int i_3 dt; \\ e_a + L_c \frac{di_2}{dt} + R_c i_2 + L_1 \frac{d(i_2 + i_3)}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Система уравнений (2.6)–(2.7) описывает внутренние процессы в ламповом генераторе. Эти уравнения являются нелинейными относительно e_g (обычно D есть малой величиной), поэтому целесообразно оставить в качестве основной переменной e_g . Вводя новую переменную

$$\phi(t) = \int_0^t (e_g - E_g) dt \quad (2.8)$$

(где $-E_g$ — постоянная составляющая e_g), мы получим следующее нелинейное уравнение относительно ϕ

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \omega_0^2\phi = a_1\frac{d\phi}{dt} + a_2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 - a_3\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^3 \quad (2.9)$$

где

$$a_1 = \frac{M_c}{L_c C_c} \left[I_1 - \frac{R_c R_a C_c - L_c}{R_a (M_c - D L_c)} + \frac{R_c L_1}{R_a^2 M_c} - 3 I_3 (E_g)^2 \right]; a_2 = 3 \frac{M_c I_3 E_g}{L_c C_c}; a_3 = \frac{M_c I_3}{L_c C_c}.$$

Кроме того, $\omega_0^2 = \frac{R_a + R_k}{R_a L_k C_k}$ и ω_0 является частотой генератора в линейной теории.

Если генератор связан с электрической цепью преобразователя, то последнее уравнение системы (2.7) изменяется на следующее

$$e_a + L_c \frac{di_2}{dt} + R_c i_2 + L_1 \frac{d(i_2 + i_3)}{dt} = M \frac{di}{dt} \quad (2.10)$$

Теперь для внутренних процессов в генераторе должно выполняться уравнение вида

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2 \phi = a_0 \dot{\phi} + a_2 \dot{\phi}^2 - a_3 \dot{\phi}^3 - a_4 V(t) \quad (2.11)$$

где $a_0 = a_1 - \frac{M^2 R_c}{L_c C_c L R_a^2}$; $a_4 = \frac{2 M M_c}{L R_a L_c C_c}$.

Таким образом, функционирование генератора и создание напряжения $2V(t)$ описываются не уравнением (2.9), а системой уравнений (2.11) и (2.5), где величина i зависит от механических деформаций, происходящих в пьезокерамическом стержне.

Для этих деформаций и электрического поля имеем систему уравнений вида

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{k^2}{d_{33}(1 - k^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2.12)$$

где $c = [\rho s_{33}(1 - k^2)]^{-1/2}$ скорость продольных сопряженных волн в стержне; $k = d_{33}(\epsilon_{33} s_{33})^{-1/2}$.

Представим продольные колебания стержня в виде суммы по собственным модам колебаний, а именно [22]

$$u(z, t) = \sum_{i=1}^N f_i(t) \sin \mu_i z \quad (2.13)$$

здесь μ_i есть корень уравнения $\mu_i h \cos \mu_i h - k^2 \sin \mu_i h = 0$.

Для напряжения Ψ в этом случае мы будем иметь [12]

$$\Psi(z, t) = f(t)z + \frac{k^2}{d_{33}(1 - k^2)} \sum_{i=1}^N f_i(t) \sin \mu_i z \quad (2.14)$$

Ток i , протекающий через стержень при этом равен

$$i = -\frac{\partial(SD_z)}{\partial t} = S\epsilon_{33}(1 - k^2)\dot{f} = S\epsilon_{33}\frac{(1 - k^2)}{h} \left[\dot{V} - \frac{k^2}{d_{33}(1 - k^2)} \sum_{i=1}^N \dot{f}_i \sin \mu_i h \right] \quad (2.15)$$

Используя граничные условия (2.4), получаем следующие соотношения для собственных мод колебаний

$$-\frac{s_{33}h\eta_0}{d_{33}} \sum_{i=1}^N f_i(t) \sin \mu_i h = V(t) \quad (2.16)$$

и

$$i = \frac{S\epsilon_{33}(1-k^2)}{h} \dot{V}(t) + \frac{\epsilon_{33}k^2}{h^2\eta_0} V(t) \quad (2.17)$$

Подставляя эти выражения в (2.5), находим что напряжение $2V(t)$, прикладываемое на электроды преобразователя должно быть определено как решение системы уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + \omega_0^2 \phi &= a_1 \dot{\phi} + a_2 \dot{\phi}^2 - a_3 \dot{\phi}^3 - a_4 V(t); \\ \ddot{V}(t) + \omega_1^2 V(t) &= a_5 \phi + a_6 \dot{\phi} - a_7 \dot{V}(t) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Здесь

$$\omega_1^2 = \frac{2h}{LS\epsilon_{33}(1-k^2)}; a_5 = -\frac{M\omega_1^2 R_c(R_a + R_c)}{2M_c R_a L_c}; a_6 = -\frac{M\omega_1^2 R_c}{2M_c R_a}; a_7 = \frac{k^2}{\eta_0 h S(1-k^2)}.$$

После нахождения $V(t)$, продольные колебания стержня $u(t) = \sum_{i=1}^N f_i(t) \sin \mu_i z$ определяются из уравнения вида equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{d_{33}}{s_{33}h\rho} V(t) \delta(z-h) + \frac{d_{33}}{s_{33}h\rho} V(t) \delta(z+h) \quad (2.19)$$

Где $\delta(z)$ — функция Дирака.

Если пренебречь обратным влиянием колебаний преобразователя (механических и электрических) на функционирование генератора ($a_4 = 0$), другими словами, если пренебречь эффектом Зоммерфельда–Кононенко, система уравнений (2.18) распадается на два уравнения, каждое из которых имеет размерность фазового пространства равную двум. Первое из них является автоколебательным и может быть решено независимо от второго. Второе уравнение, описывающее колебательные процессы в стержне, является линейным. В этом случае возможные аттракторы системы уравнений (2.18) всегда будут регулярными. Поэтому, и функционирование генератора, и излучение волн преобразователем в акустическую среду будут соответствовать регулярным (возможно достаточно сложным) процессам.

Если же $a_4 \neq 0$, то размерность фазового пространства системы уравнений (2.18) будет равна четырем. В этом случае в системе могут существовать как регулярные, так и хаотические аттракторы [7, 8]. Таким образом, принципиальная возможность существования хаотических режимов в генераторе и возбуждения хаотических волн в акустической среде обусловлена эффектом Зоммерфельда–Кононенко.

3. Исследование установившихся режимов взаимодействия

Для определения возможных установившихся режимов взаимодействия в системе (2.18) введем безразмерные переменные

$$\xi = \frac{\phi\omega_0}{E_g}; \quad \frac{d\xi}{d\tau} = \zeta; \quad \beta = \frac{V}{E_g}; \quad \frac{d\beta}{d\tau} = \gamma; \quad \tau = \omega_0 t \quad (3.1)$$

Тогда система уравнений (2.18) запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= \zeta; & \frac{d\zeta}{d\tau} &= -\xi + \alpha_1\zeta + \alpha_2\zeta^2 - \alpha_3\zeta^3 + \alpha_4\beta; \\ \frac{d\beta}{d\tau} &= \gamma; & \frac{d\gamma}{d\tau} &= \alpha_5\xi + \alpha_6\zeta - \alpha_0\beta - \alpha_7\gamma; \end{aligned} \quad (3.2)$$

где коэффициенты равны

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}; & \alpha_1 &= \frac{a_0}{\omega_0}; & \alpha_2 &= \frac{a_2 E_g}{\omega_0}; & \alpha_3 &= \frac{a_3 E_g^2}{\omega_0}; \\ \alpha_4 &= -\frac{a_4}{\omega_0}; & \alpha_5 &= \frac{a_5}{\omega_0^3}; & \alpha_6 &= \frac{a_6}{\omega_0^2}; & \alpha_7 &= \frac{a_7}{\omega_0}. \end{aligned}$$

Первоначально исследуем положения равновесия системы (3.2). Все они определяются как решения нелинейной алгебраической системы уравнений

$$\begin{aligned} \zeta &= 0; & -\xi + \alpha_1\zeta + \alpha_2\zeta^2 - \alpha_3\zeta^3 + \alpha_4\beta &= 0; \\ \gamma &= 0; & \alpha_5\xi + \alpha_6\zeta - \alpha_0\beta - \alpha_7\gamma &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

При выполнении условия $\alpha_0 = \alpha_4\alpha_5$ эта система имеет бесконечное множество решений, которые определяются по формулам

$$\zeta = 0; \quad \xi = \alpha_4\beta; \quad \gamma = 0; \quad \beta = k,$$

где k — произвольное действительное число, не равное нулю. При выполнении условия

$$\alpha_0 \neq \alpha_4\alpha_5 \quad (3.4)$$

система (3.3) имеет единственное тривиальное решение $\xi = 0, \zeta = 0, \beta = 0, \gamma = 0$. Этому решению соответствует нулевое положение равновесия, которое при выполнении условия (3.4) будет единственным положением равновесия системы.

В силу критерия Гурвица, достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия можно записать в виде

$$\alpha_7 - \alpha_1 > 0 \quad (3.5)$$

$$1 + \alpha_0 - \alpha_1\alpha_7 > 0 \quad (3.6)$$

$$\alpha_7 - \alpha_4\alpha_6 - \alpha_0\alpha_1 > 0 \quad (3.7)$$

$$\alpha_6 - \alpha_4\alpha_5 > 0 \quad (3.8)$$

$$(\alpha_7 - \alpha_1)(1 + \alpha_0 - \alpha_1\alpha_7)(\alpha_7 - \alpha_4\alpha_6 - \alpha_0\alpha_1) - (\alpha_7 - \alpha_4\alpha_6 - \alpha_0\alpha_1)^2 - (\alpha_7 - \alpha_1)^2(\alpha_6 - \alpha_4\alpha_5) > 0 \quad (3.9)$$

Таким образом, при выполнении условия (3.4) и не выполнении хотя бы одного из неравенств (3.5)–(3.9) единственное положение равновесия системы (3.2) будет неустойчивым. В этом случае все траектории системы, стартующие из окрестности начала координат фазового пространства, с течением времени покидают эту окрестность и, в силу диссипативности системы, стремятся к некоторым предельным множествам, аттракторам, которые, как мы увидим в дальнейшем, могут быть, как регулярными, так и хаотическими.

Так как система уравнений (3.2) является нелинейной системой дифференциальных уравнений четвертого порядка, то все ее дальнейшие исследования проводились при помощи численных методов. Основным расчетным методом нахождения решений системы (3.2) являлся метод Рунге–Кутты четвертого порядка с применением корректирующей процедуры Дормана–Принса [11], которая обеспечивает точность проводимых вычислений порядка $O(10^{-12})$ – $O(10^{-15})$. При построении фазовых портретов установившихся режимов особое внимание уделялось на недопущение их искажения траекториями переходных процессов. Для построения спектра ляпуновских характеристических показателей (ЛХП) аттракторов применялся алгоритм Бенеттина и др. [13, 7, 8]. Для построения сечений и отображений Пуанкаре аттракторов системы применялся метод Ено [17, 7]. Наконец для получения распределений спектральных плотностей применялся метод Файлона [16].

В пространстве параметров системы (3.2) был проведен большой комплекс численных расчетов, при которых полагалось, что генератор работает, имея следующие параметры:

$$\begin{aligned} E_c &= 700V; E_a = 2000V; I_1 = 6.5 \times 10^{-5} A/V; I_3 = 5.184 \times X \times 10^{-9} A/V^3 \\ D &= 0.015; R_a = 160\Omega; R_c = 10\Omega; L_c = 0.094H; \\ C_c &= 1.0465mmF; M_c = 0.275H; M = 1H; L = 100H, \end{aligned} \quad (3.10)$$

здесь X является безразмерным переменным множителем.

В таком случае коэффициенты системы (3.2) равны

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0.995; \alpha_1 = 0.0535; \alpha_2 = 0.63 \times X; \alpha_3 = 0.21 \times X; \alpha_4 = -0.103; \alpha_5 = -0.0604; \\ \alpha_6 &= -0.12; \alpha_7 = 0.01. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Особо подчеркнем, что значения параметров в формулах (3.10)–(3.11) соответствуют реальным характеристикам LC–генераторов и пьезокерамических излучателей [12, 25]. При так выбранных параметрах системы (3.2) у нее существует единственное нулевое положение равновесия, которое является неустойчивым по Ляпунову.

Определим дивергенцию системы (3.2), обозначив ее через $\operatorname{div} F$. Очевидно, что она может быть найдена по формуле

$$\operatorname{div} F = \alpha_1 + 2\alpha_2\zeta - 3\alpha_3\zeta^2 - \alpha_7. \quad (3.12)$$

Как видно из формулы (3.12), в общем случае дивергенция будет знакопеременной. Учитывая, что параметры системы выбираются в соответствии с формулами (3.11) выражение для дивергенции системы можно записать в виде

$$\operatorname{div} F = 0.63X\zeta(2 - \zeta) + 0.0435. \quad (3.13)$$

Если параметр X будет положительным то, с точностью до 0.0435, дивергенция системы будет положительной в те моменты времени, когда фазовая переменная ζ удовлетворяет неравенству $2 > \zeta > 0$. Поэтому, в отличие от систем с постоянной отрицательной дивергенцией вопрос об локальном изменении с течением времени фазового объема системы вблизи частного решения системы (3.2) требует дополнительного разъяснения. Как известно [1], данный фазовый объем во времени изменяется в соответствие с выражением

$$A(t) = A(t_0)e^{(\overline{\operatorname{div} F})t} = A(t_0)e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)t}, \quad (3.14)$$

где $A(t)$ — фазовый объем, λ_i — ляпуновские характеристические показатели аттрактора, а в выражении $\overline{\operatorname{div} F}$ чертой обозначено усреднение по времени. Как показали проведенные в

дальнейшем расчеты сумма ляпуновских характеристических показателей для всех, приведенных далее в статье, регулярных и хаотических аттракторов системы (3.2) будет отрицательной. Следовательно отрицательной будет усредненная по времени дивергенция системы, хотя при некоторых значениях времени она может быть положительной. Это означает, что все аттракторы системы (3.2) имеют нулевые предельные объемы.

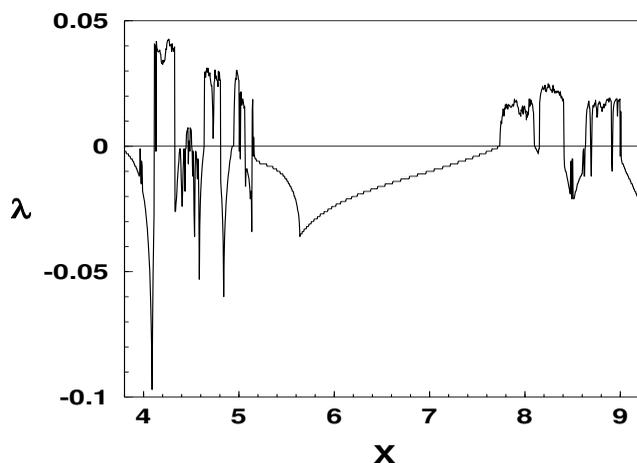


Рис. 2. Зависимость старшего ляпуновского характеристического показателя λ от значений параметра X

Рассмотрим изменения установившихся динамических режимов, которые имеют место в системе (3.2), при изменении параметра X . При этом, особое внимание уделим возникновению хаотических аттракторов, их подробному описанию и сценариям переходов от регулярных режимов к хаотическим. Как известно, основным практическим критерием существования хаотического аттрактора является наличие в спектре ЛХП хотя бы одного положительного показателя [8, 7]. На рис. 2 приведена зависимость старшего, отличного от нуля, ляпуновского характеристического показателя от параметра X . Как видно из рисунка, существует ряд интервалов значений X , в которых величина старшего ляпуновского показателя будет положительной. Следовательно, в этих интервалах существуют хаотические аттракторы системы (3.2). Точки пересечения этого графика с горизонтальной координатной осью соответствуют бифуркационным значениям параметра X .

На рис. 3 приведена фазопараметрическая характеристика системы, так называемое бифуркационное дерево. Эта характеристика построена относительно координаты ξ . Фазопараметрические характеристики относительно других координат системы качественно подобны приведенной на рис. 3. Светлым участкам «кроны», этого дерева соответствуют периодические режимы установившихся колебаний системы (3.2), а густо затемненным — хаотические. Четко видны точки бифуркации при прохождении которых происходит смена регулярного, периодического, режима на нерегулярный, хаотический.

Рассмотрим эти смены режимов более детально. При изменении значения параметра X на сегменте $9.3 \geq X \geq 9.01$ в системе существует устойчивый предельный цикл сигнатура спектра ЛХП которого имеет вид (“0”, “-”, “-”, “-”). То есть, старший ляпуновский показатель цикла нулевой, а три остальные — отрицательные. Трехмерная проекция фазового портрета этого цикла, его сечение Пуанкаре плоскостью $\beta = 0$ и распределение спектральной плотности, построенной в логарифмической шкале, приведены, соответственно, на рис. 4 а–б, 5 а. Данные рисунки построены при значении $X = 9.01$. Как сечение Пуанкаре, так и спектральная плот-

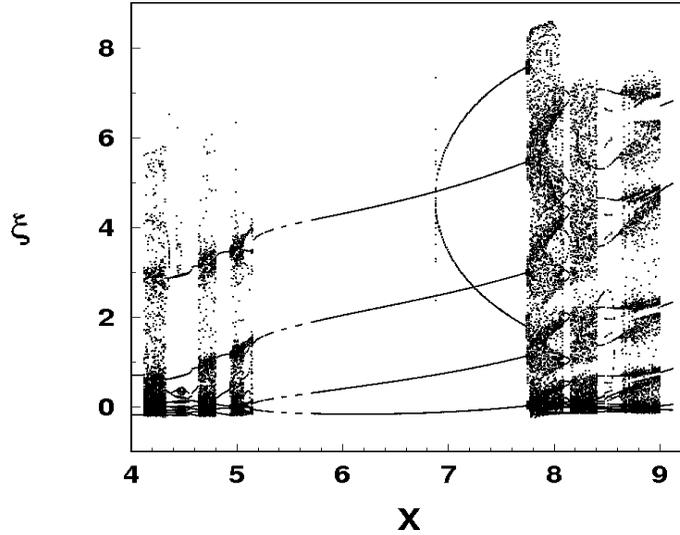


Рис. 3. Фазопараметрическая характеристика системы.

ность имеют структуру типичную для регулярных режимов. Заметим, что фазовые портреты, сечения Пуанкаре и спектральные плотности, построенные при других значениях X из сегмента $9.3 \geq X \geq 9.01$ практически не отличаются от приведенных на рис.4 а–б, 5 а. Совпадают также и сигнатуры спектров ЛХП предельных циклов из данного сегмента изменения параметра X . Сигнал, посылаемый излучателем во внешнюю среду, в этом случае будет периодическим.

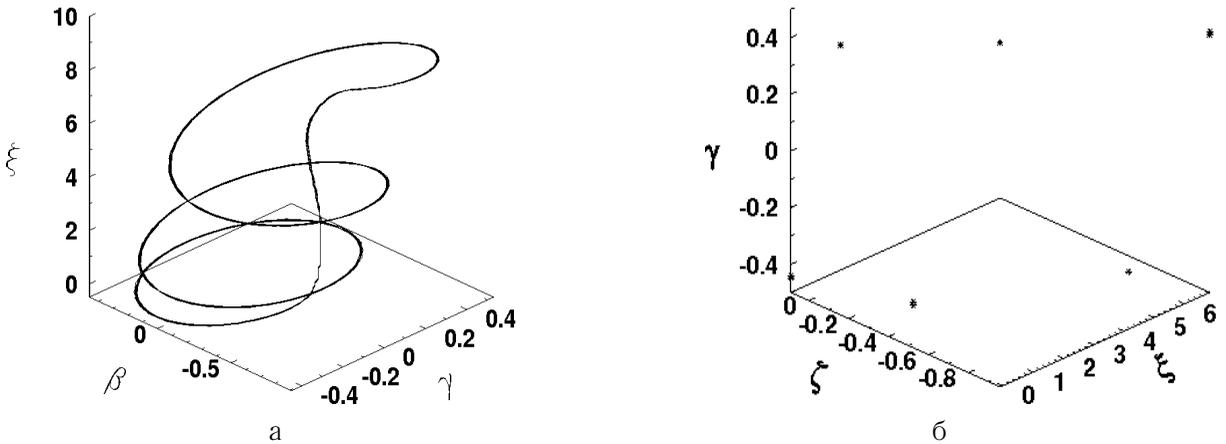


Рис. 4. Проекция фазового портрета (а) и сечение Пуанкаре плоскостью $\beta = 0$ (б) при $X = 9.01$

При $X = 9.005$ вместо исчезающего в результате седло-узловой или касательной бифуркации предельного цикла в системе возникает хаотический аттрактор. В сигнатуре спектра ЛХП аттрактора появляется положительный старший показатель и она принимает вид : (“+”, “0”, “-”, “-”). На рис. 5 б, 6 а–б, 7 а приведены, соответственно, трехмерная проекция фазового портрета хаотического аттрактора, его сечение и отображение Пуанкаре и распределение спектральной плотности (Фурье–спектр) построенные при значении $X = 8.955$. Переход от регулярного аттрактора к хаотическому осуществляется через перемежаемость первого типа по Помо–Манневиллю [14]. Когда мы движемся к точке бифуркации, к устойчивому предельному циклу приближается неустойчивый. В точке бифуркации оба цикла сливаются и исчезают.

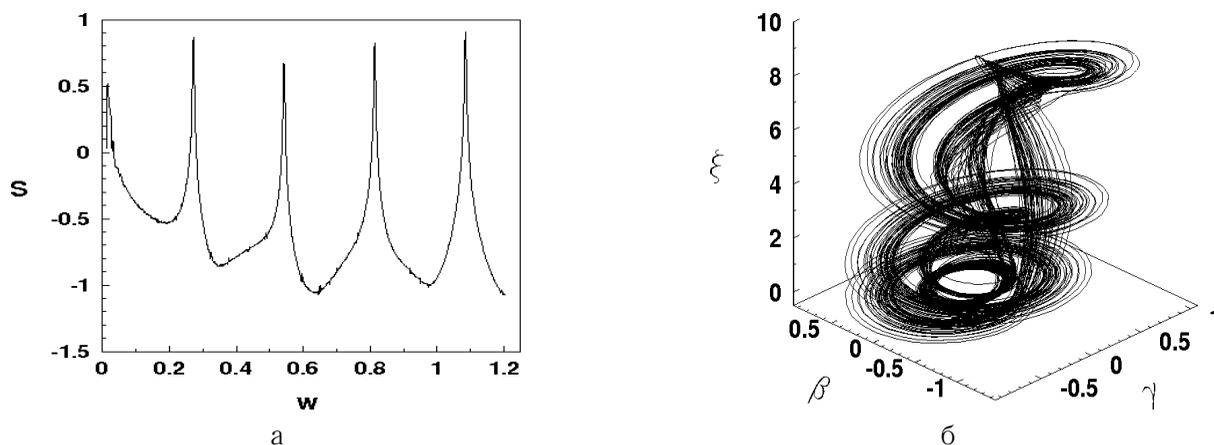


Рис. 5. Спектральная плотность при $X = 9.01$ (а) и проекция фазового портрета при $X = 8.955$ (б)

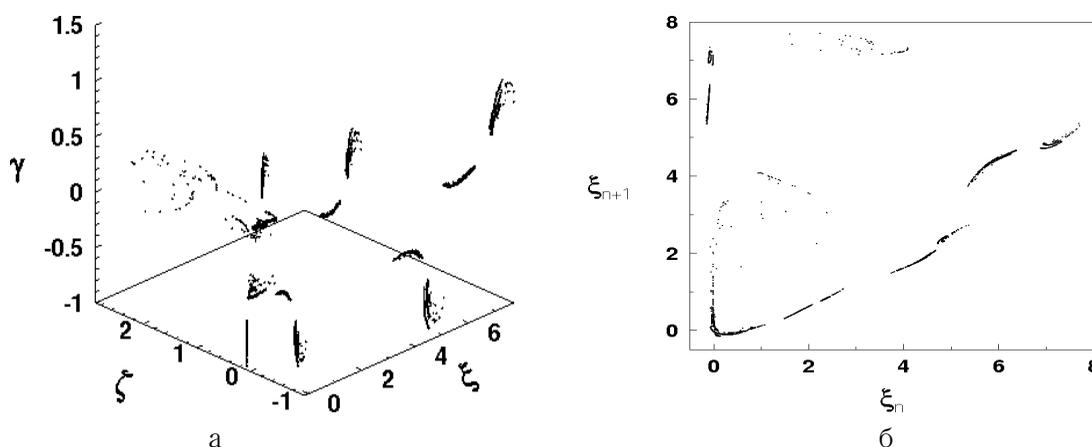


Рис. 6. Сечение Пуанкаре плоскостью $\beta = 0$ (а) и отображение Пуанкаре (б) при $X = 8.955$

Траектории системы уходят в отдаленные области фазового пространства. Затем, вследствие того, что система (3.2) устойчива по Лагранжу (в силу ее диссипативности) и по Пуассону (так как режим установившийся) и неустойчива по Ляпунову (имеется положительный ляпуновский показатель), происходит процесс реинжекции, то есть возвращения траекторий в область исчезнувшего предельного цикла, затем вновь уход и возвращение и т.д. Ламинарной фазой этой перемежаемости является движение в достаточно малой окрестности исчезнувшего предельного цикла, а турбулентной - непредсказуемые наперед раскрутки вокруг витков спирали хаотического аттрактора (см. рис. 5б). О переходе к хаосу через перемежаемость свидетельствует также структура бифуркационного дерева в окрестности точки $X = 9.01$.

Сечение и отображение Пуанкаре представляют собой некоторые хаотические множества точек, которые группируются внутри нескольких областей, имеющих квазиленточную структуру. Вид отображения Пуанкаре показывает, что система (3.2) может быть, правда достаточно грубо, аппроксимирована при помощи одномерного отображения, что существенно упростит ее исследование. Вид этого отображения, которое может быть заменено набором одномерных параболических и подковообразных линий является еще одним доказательством того, что система находится в хаотическом режиме [7]. Спектр аттрактора сплошной, но с достаточно четко просматриваемыми пиками. Непрерывность Фурье-спектра также свидетельствует о хаотично-

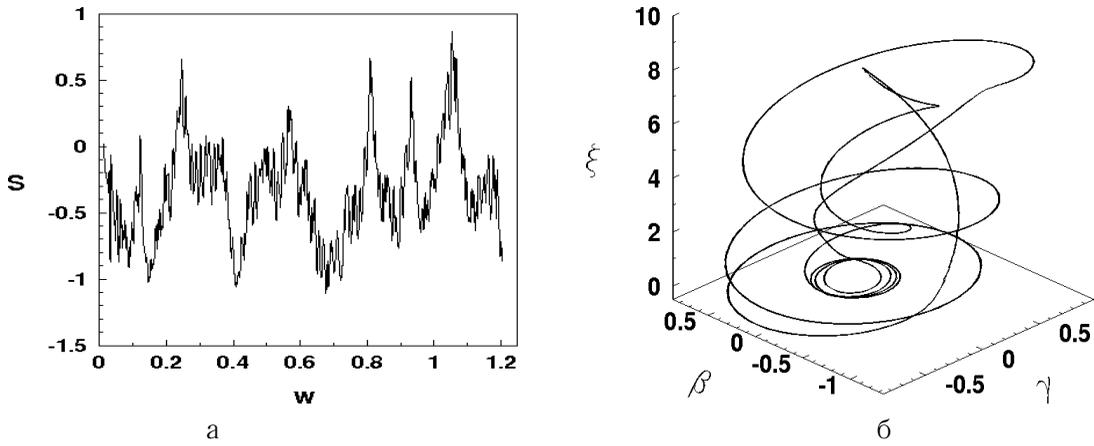


Рис. 7. Спектральная плотность при $X = 8.955$ (а) и проекция фазового портрета при $X = 8.41$ (б)

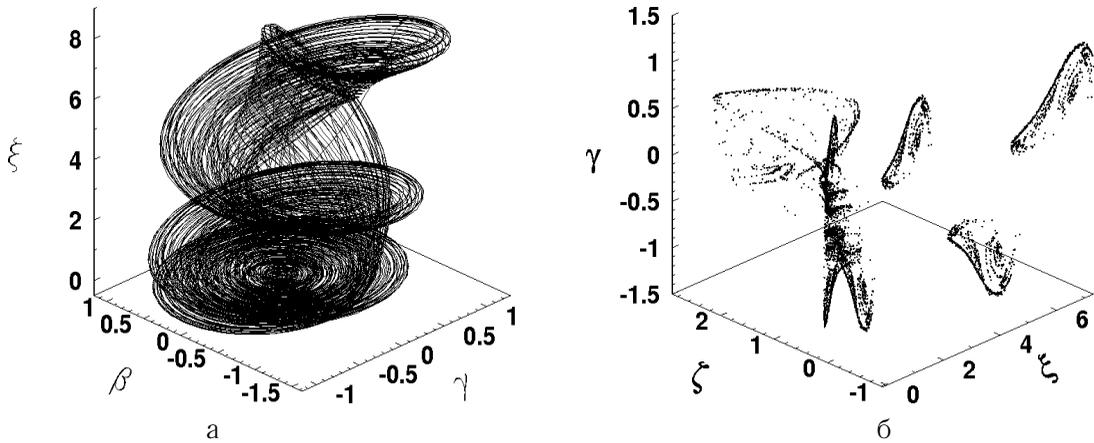


Рис. 8. Проекция фазового портрета (а) и сечение Пуанкаре плоскостью $\beta = 0$ (б) при $X = 8.25$

сти данного аттрактора. Хаотические аттракторы такого типа существуют в системе (3.2) при $9.005 \geq X \geq 8.645$. Сигнал, генерируемый излучателем во внешнюю среду, при таких значениях X будет хаотическим.

Далее остановимся еще на нескольких типах аттракторов, существующих в системе (3.2). При $8.645 > X \geq 8.41$ в системе существует устойчивый предельный цикл. Проекция фазового портрета такого цикла приведена на рис.7 б. Этот цикл имеет более сложную структуру, чем цикл приведенный на рис.4 а. Кроме того, он имеет приблизительно в шесть раз больший период, чем цикл, приведенный на рис.4.а. При значении $X \simeq 8.405$ этот цикл исчезает, вследствие касательной бифуркации, и в системе рождается хаотический аттрактор нового типа, проекция фазового портрета которого, построенная при значении $X=8.25$, приведена на рис.8 а. Переход от регулярного аттрактора к хаотическому, как и ранее, осуществляется через перемежаемость первого типа по Помо–Манневиллю по выше описаному сценарию. Однако, в отличие от ранее рассмотренного хаотического аттрактора (рис.5 б), здесь мы имеем более сплошное покрытие турбулентными всплесками траекторий аттрактора его фазового объема. Сигнатура спектра ЛХП данного хаотического аттрактора имеет вид: (“+”, “0”, “-”, “-”).

На рис.8 б приведен вид сечения Пуанкаре данного аттрактора. Оно, по прежнему, представляет собой хаотическое множество точек число которых постоянно возрастает с увеличени-

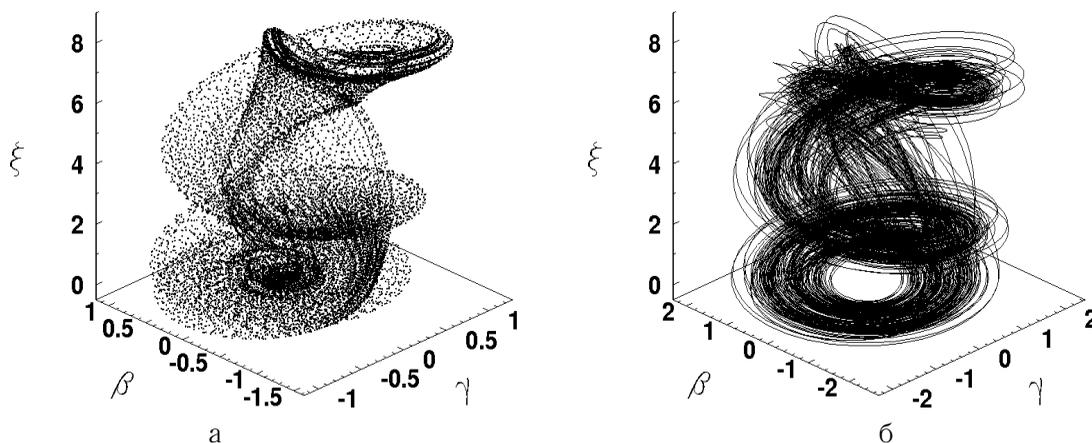


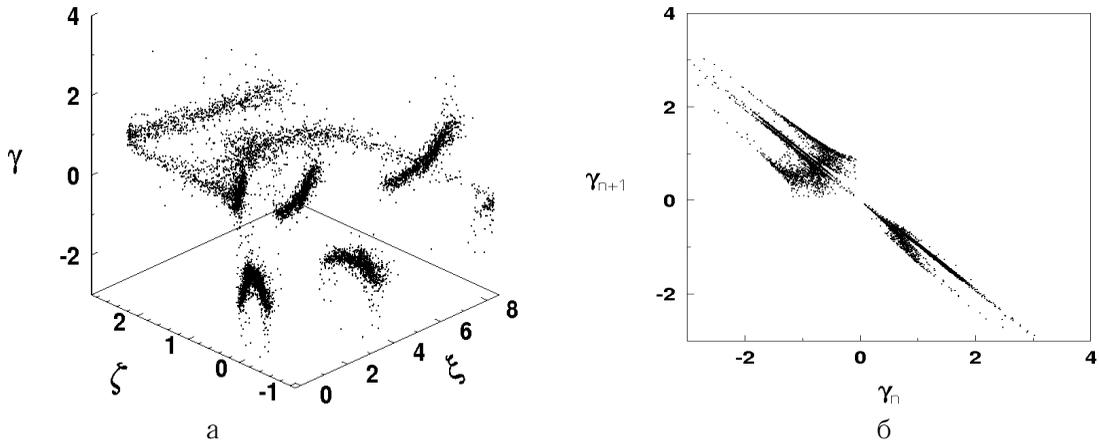
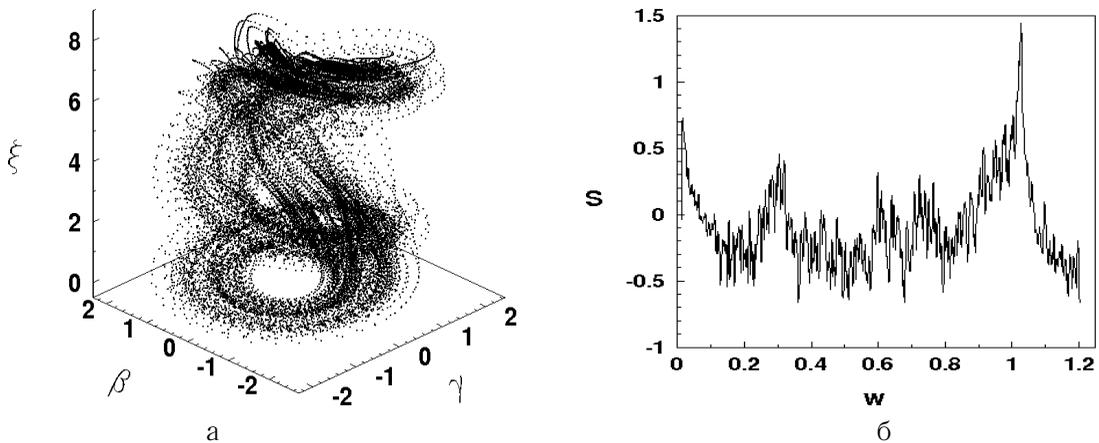
Рис. 9. Распределение инвариантной меры при $X = 8.25(a)$ и проекция фазового портрета при $X = 7.85(b)$

ем времени численного интегрирования системы. Однако для этого типа хаотических аттракторов сечение Пуанкаре утрачивает квазиленточную структуру.

На рис.9 а приведена еще одна важная характеристика хаотических аттракторов — распределение инвариантной меры Крылова–Боголюбова по фазовому портрету аттрактора. Данный рисунок выполнен в, так называемой, технике кодирования оттенками серого цвета изложенной в [7]. Инвариантная мера является количественной характеристикой времени пребывания изображающей точки траекторий аттрактора в заданной области фазового объема. Более темные части рисунка соответствуют областям, в которых изображающая точка траекторий проводит большую часть времени. Как видно из рис.9.а, наибольшую часть времени траектории проводят в окрестности исчезнувшего предельного цикла, что является свидетельством большей длительности ламинарных фаз по сравнению с турбулентными. Кроме того, этот рисунок является еще одним подтверждением реализации сценария перемежаемости при переходе от регулярного режима к хаотическому.

При значении $X = 7.86$ в системе происходит чрезвычайно интересная бифуркация типа «хаос–хаос», когда в результате сложных механизмов взаимодействия хаотического аттрактора с седловыми предельными циклами, существующими в бассейне его притяжения, в системе (3.2) возникает аттрактор сигнатура спектра которого имеет вид: (“+”, “+”, “0”, “-”). Этот аттрактор имеет два положительных ляпуновских показателя. Такие аттракторы называются гиперхаотическими [7]. Они существуют только в динамических системах, размерность фазового пространства которых более или равна четырем, и характеризуются наличием в спектре ЛХП не менее двух положительных ляпуновских показателей. Наличие двух положительных показателей свидетельствует о существовании в фазовом пространстве двух направлений по которым разбегаются близкие фазовые траектории аттрактора. У всех ранее рассмотренных хаотических аттракторов существовало только одно направление разбегания близких фазовых траекторий. На рис. 9 б приведена проекция фазового портрета гиперхаотического аттрактора, построенного для значения $X = 7.85$. Фазовый портрет такого аттрактора имеет четко просматриваемую «дыру» в нижнем кольце его спиралей.

На рис. 10 а–б приведены соответственно сечение и отображение Пуанкаре гиперхаотического аттрактора. Наблюдается еще большее усложнение структуры данных хаотических точечных множеств по сравнению с ранее рассмотренными (рис. 6 а–б и рис 8.б). Не может быть и речи об одномерной аппроксимации отображения Пуанкаре. Далее на рис. 11 а–б приведе-

Рис. 10. Сечение Пуанкаре плоскостью $\beta = 0$ (а) и отображение Пуанкаре (б) при $X = 7.85$ Рис. 11. Распределение инвариантной меры (а) и спектральная плотность (б) при $X = 7.85$

ны, соответственно, распределение инвариантной меры Крылова–Боголюбова и распределение спектральной плотности гиперхаотического аттрактора. Как видно из рис. 11 а, гиперхаотический аттрактор обладает более равномерным распределением инвариантной меры, чем аттрактор, существующий при $X = 8.25$. Распределение спектральной плотности гиперхаотического аттрактора, по-прежнему, сплошное, однако в нем практически исчезают отдельные пики. Гиперхаотические аттракторы существуют в сравнительно небольшом интервале изменения параметра X , а именно, $7.86 \geq X \geq 7.745$. При дальнейшем уменьшении X они исчезают и в системе вновь возникает устойчивый предельный цикл.

Как видно из рис. 2, существует еще несколько интервалов изменения параметра X , в которых у системы (3.2) существуют хаотические аттракторы. Дальнейшие исследования позволили проследить еще несколько переходов от регулярных движений к хаотическим через перемежаемость. Кроме того, были обнаружены переходы к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода [15].

Остановимся еще на одном типе хаотического аттрактора, обнаруженного в системе (3.2). Аттракторы такого типа существуют в системе при $4.325 \geq X \geq 4.115$. Переход от регулярного режима к хаотическому здесь, как и в нескольких ранее рассмотренных случаях, осуществляется по сценарию перемежаемости первого типа. Сигнатура спектра ЛХП данного аттрактора

имеет вид: (“+”, “0”, “-”, “-”). На рис.12 а–б, 13 а–б приведены соответственно, построенные при значении $X = 4.255$ трехмерная проекция фазового портрета аттрактора, его сечение Пуанкаре плоскостью $\beta = 0$, отображение Пуанкаре и распределение спектральной плотности. Как видно из этих рисунков, заметно изменился фазовый портрет хаотического аттрактора, на котором произошло слияние колец его спиралей. Уменьшились амплитуды колебаний фазовых переменных и, следовательно, занимаемый аттрактором фазовый объем. В то же время, как видно из рис. 2, старший ляпуновский характеристический показатель для этого аттрактора приблизительно в два раза превышает по величине соответствующие показатели ранее рассмотренных хаотических аттракторов. Это свидетельствует о значительно большей скорости разбегания близких фазовых траекторий. Значительно изменилось расположение точек в сечении Пуанкаре, хотя оно по-прежнему является некоторым хаотическим множеством точек. Отображение Пуанкаре по координате ξ отдаленно напоминает соответствующее отображение, приведенное на рис. 6 б, однако, расположение точек отображения, приведенного на рис. 13 а, свидетельствует о невозможности какой-либо одномерной аппроксимации в данном случае. Фурье–спектр аттрактора (рис. 13 б) имеет сплошную структуру и характеризуется отсутствием пиков.

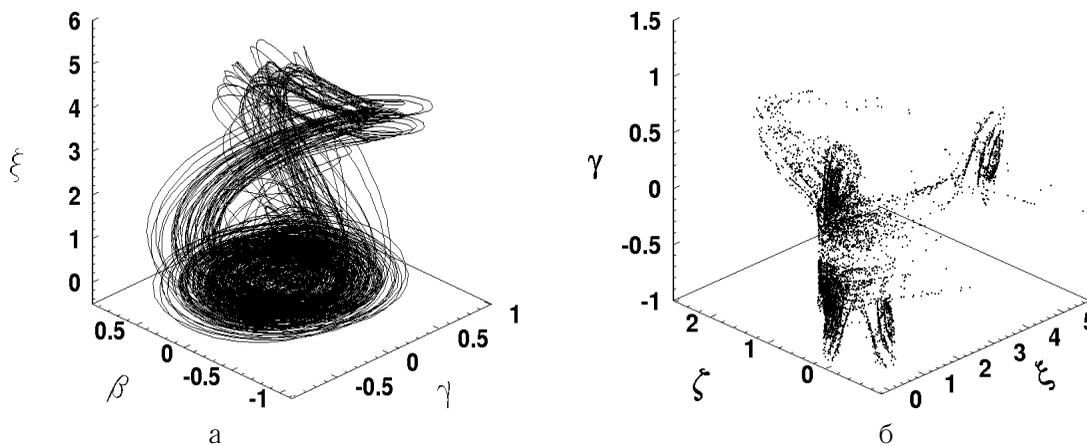


Рис. 12. Проекция фазового портрета (а) и сечение Пуанкаре плоскостью $\beta = 0$ (б) при $X = 4.255$

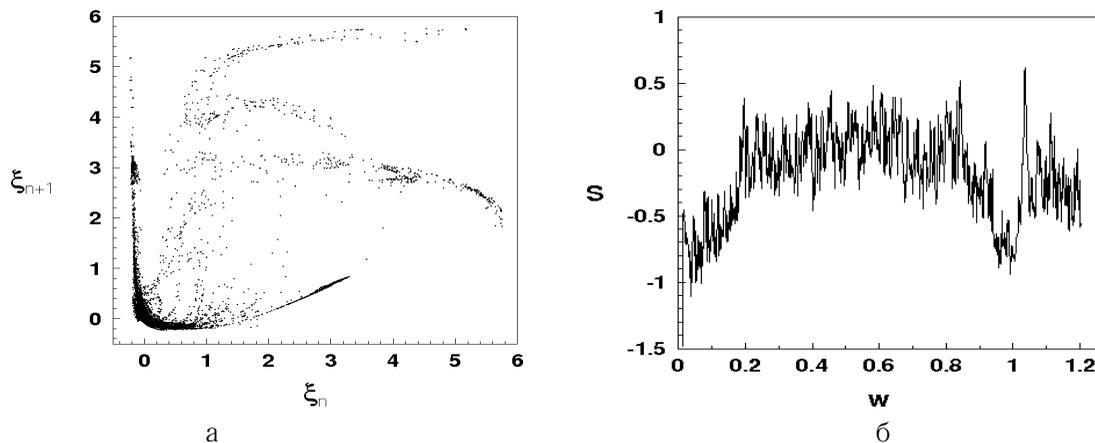


Рис. 13. отображение Пуанкаре (а) и спектральная плотность (б) при $X = 4.255$

Значительный интерес вызывает сравнительный анализ поведения системы «генератор–излучатель», в случае идеального возбуждения, когда мы пренебрегаем влиянием излучателя на функционирование генератора. Этому случаю соответствует равенство нулю коэффициента α_4 в системе уравнений (3.2). На рис. 14 а–б приведены фазовые портреты аттракторов системы (3.2), построенные при $\alpha_4 = 0$, $X = 8.25$ (рис. 14 а) и $\alpha_4 = 0$, $X = 7.85$ (рис. 14 б). В обоих случаях аттракторы системы являются предельными циклами. В то время, как при учете неидеальности возбуждения, которая всегда имеет место в силу закона сохранения энергии, система будет находиться в хаотическом (при $X = 8.25$) или в гиперхаотическом (при $X = 7.85$) режимах. Кроме того, случай идеального возбуждения характеризуется заметным уменьшением амплитуд колебаний фазовых переменных, особенно по переменным β , γ , которые описывают колебания излучателя. Таким образом, пренебрежение неидеальностью возбуждения приводит к значительным ошибкам в описании процесса взаимодействия излучателя и генератора, как количественным, так и, что является более существенным, качественным. Например, вместо ожидаемого периодического режима взаимодействия система фактически будет находиться в гиперхаотическом режиме.

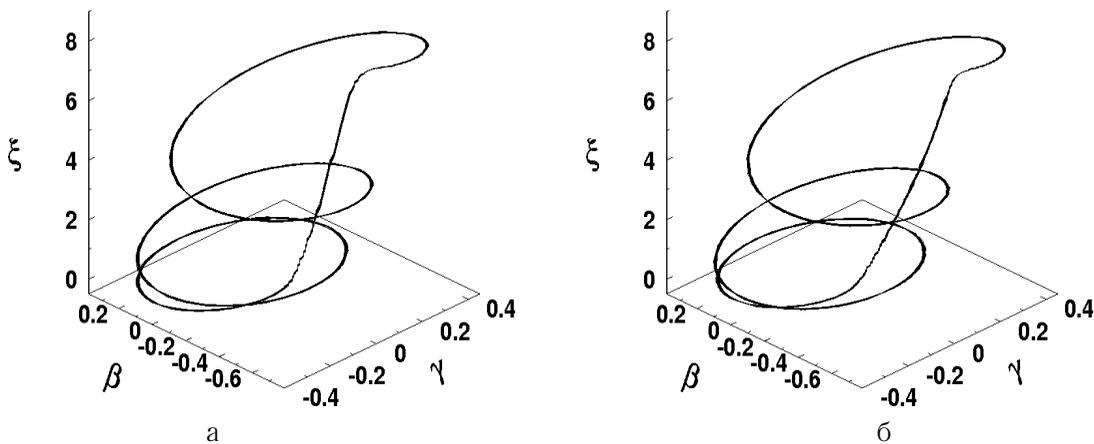


Рис. 14. Проекция фазового портрета при $X = 8.25$, $\alpha_4 = 0$ (а) и проекция фазового портрета при $X = 7.85$, $\alpha_4 = 0$ (б)

Далее было проведено исследование бифуркаций, имеющих место в системе (3.2) при изменении параметра α_4 , который, как только что было отмечено, характеризует взаимосвязь между излучателем и генератором. При проведении компьютерных экспериментов значения параметров системы определялись по формулам (3.11) за исключением параметра α_4 , который принимался за бифуркационный и был переменным. Для параметра X полагалось, что $X = 7.82$. Такое значение параметра X ранее соответствовало случаю гиперхаоса системы.

На рис. 15 приведена зависимость старшего, отличного от нуля, ляпуновского характеристического показателя системы λ от значения α_4 . Как видно из рисунка, существуют интервалы изменения α_4 , в которых значения λ будут положительными. В этих интервалах система имеет хаотические аттракторы. При $\alpha_4 = 0$ у системы (3.2) существует предельный цикл, фазовый портрет которого практически совпадает с фазовым портретом цикла приведенным на рис. 14 б. Однако уже при очень малом уменьшении значения α_4 , а именно при $\alpha_4 = -0.004$, старший ляпуновский характеристический показатель системы становится положительным, что свидетельствует о возникновении в системе хаотического аттрактора. Как видим, даже очень малое взаимодействие между подсистемами, генератором и излучателем, приводит к появлению хаоса.

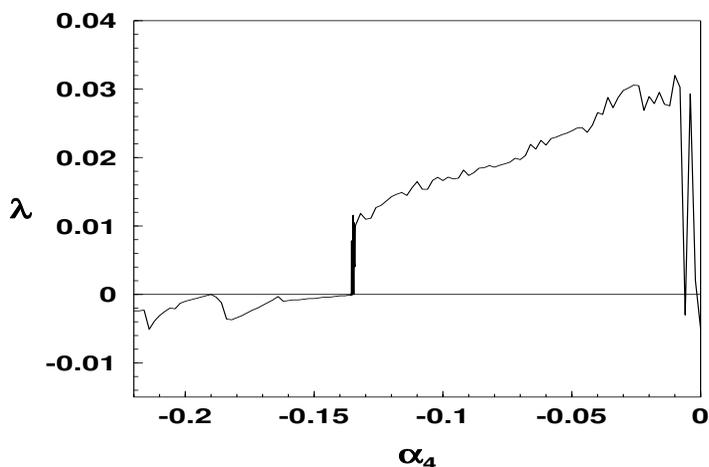


Рис. 15. Зависимость старшего ляпуновского характеристического показателя λ от значений параметра α_4

Рассмотрим бифуркации, происходящие в системе (3.2) при возрастании параметра α_4 . При $\alpha_4 = -0.138$ в системе существует устойчивый предельный цикл. Далее, при увеличении значения α_4 , на очень небольшом интервале $(-0.138, -0.13515)$ в системе происходит каскад бифуркаций удвоения периода, который заканчивается возникновением хаотического аттрактора при $\alpha_4 = -0.1351$. Проекция фазового портрета этого аттрактора (для иного чем у ранее приведенных фазовых портретов набора фазовых переменных), его сечение и отображение Пуанкаре, а также распределение спектральной плотности, построенные при $\alpha_4 = -0.135$, приведены соответственно на рис. 16 а–б, 17 а–б.

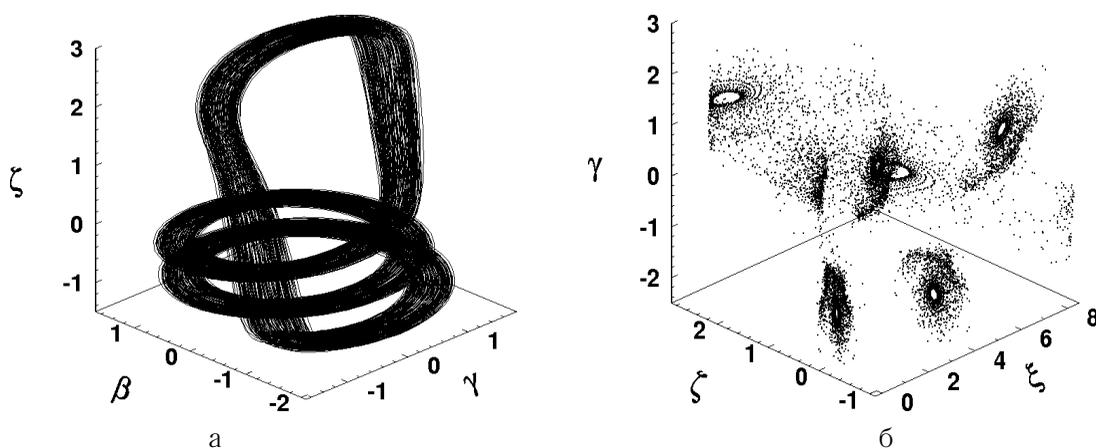
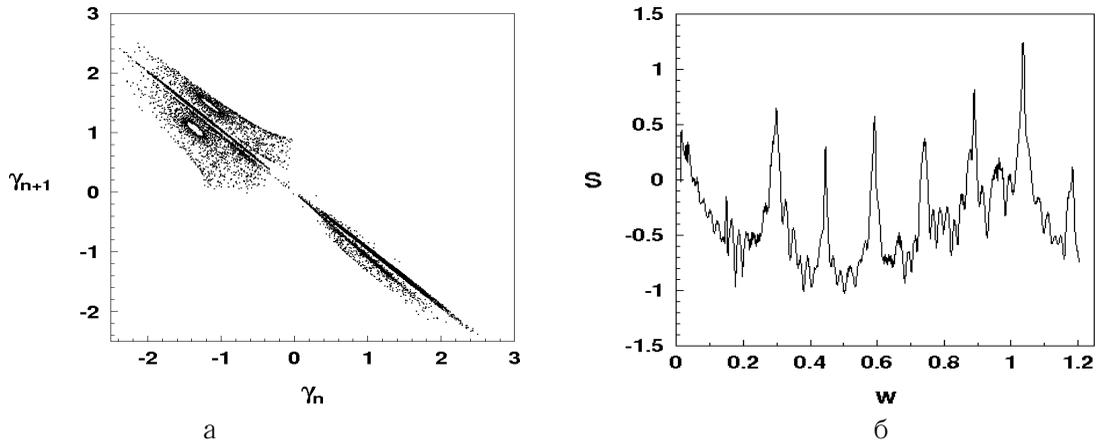
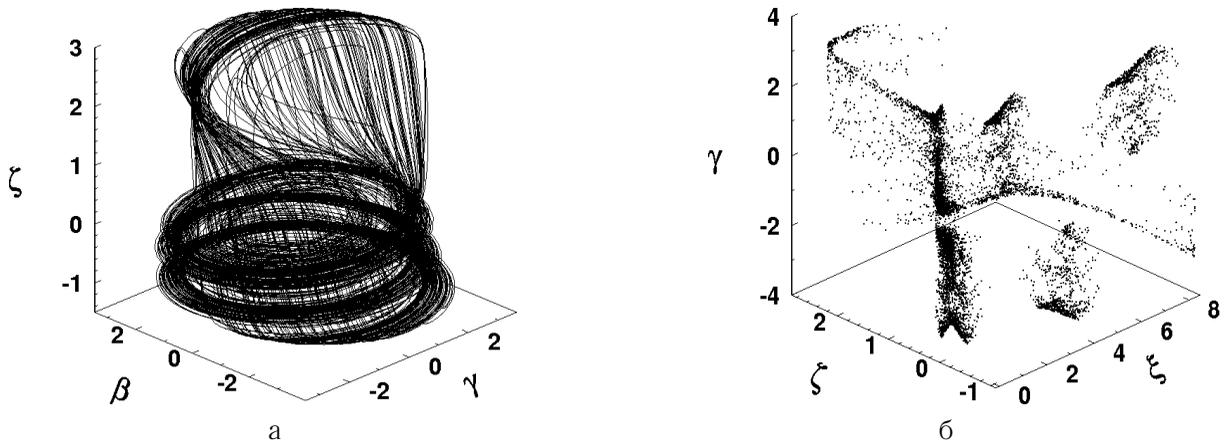


Рис. 16. Проекция фазового портрета (а) и сечение Пуанкаре плоскостью $\beta = 0$ (б) при $\alpha_4 = -0.135$

Переход от регулярного режима к хаотическому здесь осуществляется в соответствие со сценарием Фейгенбаума [15]. Заметим, что этот аттрактор является гиперхаотическим, так как

Рис. 17. Отображение Пуанкаре(*а*) и спектральная плотность(*б*) при $\alpha_4 = -0.135$ Рис. 18. Проекция фазового портрета(*а*) и сечение Пуанкаре плоскостью $\beta = 0$ (*б*) при $\alpha_4 = -0.025$

он имеет два положительных ляпуновских характеристических показателя. Фазовый портрет этого аттрактора заметно отличается от ранее рассмотренного гиперхаотического аттрактора. Что касается сечения и отображения Пуанкаре, то они обладают некоторым качественным подобием с ранее рассмотренным случаем гиперхаоса (рис. 10 а–б). Существенными являются отличия и в Фурье–спектре данного аттрактора. Он является сплошным, но, в то же время, в спектре четко заметны пики — «воспоминания», о гармониках исчезнувших предельных циклов. Данный гиперхаотический аттрактор существует в системе на очень небольшом интервале $(-0.1351, -0.1348)$ изменения параметра α_4 . Затем в системе имеется «окно периодичности», которое вновь сменяется гиперхаотическим аттрактором при $\alpha_4 = -0.1344$. Возникающий аттрактор качественно подобен гиперхаотическому аттрактору, приведенному на рис. 9 б. Далее, при увеличении значения α_4 , наблюдается бифуркация «гиперхаос–хаос» в результате которой, при $\alpha_4 = -0.058$, в системе возникает хаотический аттрактор с сигнатурой спектра ЛХП вида: (“+”, “0”, “–”, “–”). На рис. 18 а–б приведены, соответственно, проекция фазового портрета и сечение Пуанкаре аттракторов этого типа построенные при значении $\alpha_4 = -0.025$. Хаотические аттракторы подобные приведенному на рис.18 существуют в системе (3.2) при $-0.058 \leq \alpha_4 \leq -0.004$. Затем, при $\alpha_4 > -0.004$, в системе вновь возникает регулярный аттрактор — предельный цикл.

4. Заключение

Таким образом, в настоящей работе был обнаружен ряд новых эффектов, обусловленных процессом взаимодействия колебательных режимов пьезокерамического излучателя и задающего электрогенератора, полученных на основе построенной новой математической модели.

В данной детерминированной системе было обнаружено несколько типов хаотических аттракторов, в том числе и гиперхаотические. Показано, что система обладает значительным разнообразием существующих в ней установившихся режимов взаимодействия, их свойств, а также сценариев перехода от регулярных режимов к хаотическим.

Установлено, что существование детерминированного хаоса в системе объясняется только взаимодействием между подсистемами (генератором и излучателем), а не их автономными свойствами.

Полученные в данной работе результаты являются применимыми при анализе регулярных и хаотических режимов работы электродинамических, электромагнитных и пьезокерамических вибраторов с ограниченным возбуждением.

Список литературы

- [1] Анищенко В. С. *Сложные колебания в простых системах* // М.: Наука, 1990.
- [2] Баженов В. М., Улитко А. Ф. *Исследование динамического поведения пьезокерамического слоя при мгновенном электрическом нагружении* // Прикл. мех., 1975, т. 11, № 1, с. 22–27.
- [3] Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. *Электроупругость* // Киев: Наук. думка, 1989.
- [4] Кононенко В. О. *Колебательные системы с ограниченным возбуждением* // М.: Наука, 1964.
- [5] Кононенко В. О., Краснопольская Т. С. *Ламповый генератор в системе возбуждения механических колебаний* // Вибротехника, 1977, т. 28, № 4, с. 105–120.
- [6] Краснопольская Т. С. *Автономное возбуждение механических колебаний электродинамическим вибратором* // Прикл. мех., 1977, т. 13, № 2, с. 108–113.
- [7] Кузнецов С. П. *Динамический хаос* // М.: Физматлит, 2001.
- [8] Неймарк Ю. И., Ланда П. С. *Стохастические и хаотические колебания* // М.: Наука, 1987.
- [9] Улитко А. Ф. *Сопряженные волновые процессы в пьезокерамических телах при электрическом разряде* // Акустичний вісник, 1999, т. 2, № 1, с. 60–73.
- [10] Улитко А. Ф. *Векторное разложение в пространственной теории упругости* // Киев: Академперіодика, 2002.
- [11] Хайрер Е., Нерсетт С. П., Ваннер Г. *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи* // М.: Мир, 1990.
- [12] Auld B. A. *Acoustic Fields and Waves in Solids* // New York: John Wiley & Sons, 1973.
- [13] Benettin G., Galgani L., Strelcyn J. M. *Kolmogorov entropy and numerical experiments* // Phys. Rev. A., 1976, V. 14, № 6, p. 2338–2342.
- [14] Berge P., Pomeau Y., Vidal C. H. *Order within chaos* // New York: John Wiley & Sons, 1984.
- [15] Feigenbaum M. J. *Quantitative universality for a class of nonlinear transformations* // J. Stat. Phys., 1978, V. 19, № 1, p. 25–52.
- [16] Filon L. N. G. *On a quadrature formula for trigonometric integrals* // Proc. R. Soc. Edinburgh, 1929, V. 49, p. 38–47.

- [17] Henon M. *On the numerical computation of Poincare maps* // Physica D, 1982, V. 5, № 2, p. 412–415.
- [18] Krasnopol'skaya T. S., Shvets A. Yu. *Chaos in dynamics of machines with a limited power-supply*. 8-th World Congr. on the Theory of Machines and Mechanisms. Eds. M. Okrolnick, L. Pust: Vol. 1 // Prague: Czechoslovak Acad. Sci, 1991, p. 181–184.
- [19] Krasnopol'skaya T. S., Shvets A. Yu. *Chaos in vibrating systems with limited power-supply* // Chaos, 1993, V. 3, № 3, p. 387–395.
- [20] Krasnopol'skaya T. S., Shvets A. Yu. *Chaotic surface waves in limited power-supply cylindrical tank vibrations* // J. Fluids & Structures, 1994, V. 8, № 1, p. 1–18.
- [21] Krasnopol'skaya T. S. *Acoustic chaos caused by Sommerfeld effect* // J. Fluids & Structures, 1994, V. 8, № 5, p. 803–815.
- [22] Rayleigh. *Theory of Sound* // London: Macmillan, 1877.
- [23] Sommerfeld A. *Beitrage zum dynamischen Ausbau der Festigkeitslehre* // Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, 1902, V. 46, p. 391–394.
- [24] Timoshenko S. *Vibration Problems in Engineering* // New York: Van Nostrand Co., 1928.
- [25] Zharii O. Yu. *Normal mode expansions in dynamic electroelasticity and their application to electromechanical energy conversion* // J. Acoust. Soc. Am., 1992, V. 91, № 1, p. 57–68.