

О бифуркациях и устойчивости резонансных периодических движений гамильтоновых систем с одной степенью свободы при вырождении гамильтониана*

О. В. Холостова

Московский авиационный институт
(государственный технический университет)
125871, Россия, Москва, Волоколамское ш., 4
E-mail: markeev@ipmnet.ru

Получено 26 декабря 2005 г.

Рассматриваются движения неавтономной периодической по времени гамильтоновой системы с одной степенью свободы, функция Гамильтона которой содержит малый параметр. Начало координат фазового пространства является положением равновесия невозмущенной или полной системы, устойчивым в линейном приближении. Предполагается, что в невозмущенном гамильтониане имеет место вырождение при учете членов не выше четвертой степени (частота малых нелинейных колебаний не зависит от амплитуды) и при этом в системе реализуется один из резонансов до шестого порядка включительно. Для каждого резонансного случая построены модельные гамильтонианы и проведено качественное исследование движений модельной системы. При помощи теории периодических движений Пуанкаре и КАМ-теории дано строгое решение задачи о существовании, бифуркациях и устойчивости периодических движений исходной системы, являющихся аналитическими по дробным (при резонансах до четвертого порядка включительно) или целым (при резонансах пятого и шестого порядков) степеням малого параметра. В качестве приложений исследованы резонансные периодические движения (в случае рассматриваемого вырождения) сферического маятника и волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса.

Ключевые слова: гамильтонова система, устойчивость, резонанс, теория периодических движений Пуанкаре, КАМ-теория.

O. V. Kholostova

On bifurcations and stability of resonance periodic motions of hamiltonian systems with one degree of freedom caused by degeneration of the hamiltonian

Motions of a non-autonomous time-periodic Hamiltonian system with one degree of freedom are considered. The Hamiltonian of the system contains a small parameter. The origin of the phase space is a linearly stable equilibrium of the unperturbed or complete system. It is supposed that the degeneration takes place in the unperturbed system with regard for terms of order less than five (the frequency of small nonlinear oscillations does not depend on the amplitude), and a resonance (up to the sixth order inclusively) occurs. For each resonance case a model Hamiltonian is constructed, and a qualitative investigation of motion of the model system is carried out. Using Poincaré's theory of periodic motions and КАМ-theory we solve rigorously the problem of existence, bifurcations and stability of periodic motions of the initial system. The motions we study are analytical with respect to fractional (for resonances up to the fourth order inclusively) or integer (resonances of fifth and sixth orders) degrees of the small parameter. As an illustration, we analyze resonance periodic motions of a spherical pendulum and a Lagrange top with a vibrating point of suspension in the presence of the degeneration considered.

Keywords: Hamiltonian system, stability, resonance, Poincaré's theory of periodical motions, КАМ-theory.

Mathematical Subject Classifications: 70H08, 70H14, 70K45

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00386) и гранта Президента Российской Федерации (НШ-1477.2003.1).

1. Введение

Рассмотрим движения неавтономной 2π -периодической по времени гамильтоновой системы с одной степенью свободы, функция Гамильтона $H(x, p_x, t)$ которой содержит малый параметр ε . Начало координат $x = p_x = 0$ фазового пространства является положением равновесия либо невозмущенной (при $\varepsilon = 0$), либо полной (при $\varepsilon \neq 0$) системы, устойчивым в линейном приближении, и в его окрестности функция H аналитична.

Ранее в цикле работ [3–6], [9–12] построена теория нелинейных колебаний гамильтоновых систем с одной степенью свободы при наличии резонансов до четвертого порядка включительно; в частности, дано строгое решение вопроса о существовании, бифуркациях и устойчивости периодических (с периодом, кратным периоду внешнего возмущения) движений таких систем, аналитических по дробным или целым степеням малого параметра. Полученные результаты верны в предположении, что в невозмущенном гамильтониане отсутствует вырождение в членах до четвертого порядка включительно относительно x и p_x . Это означает, что в нормализованном до членов четвертого порядка невозмущенном гамильтониане, имеющем вид

$$\frac{1}{2}\omega(x^2 + p_x^2) + \frac{1}{4}c_2(x^2 + p_x^2)^2 + \dots$$

коэффициент c_2 отличен от нуля. В этом случае полную функцию Гамильтона достаточно нормализовать также до членов четвертого порядка с учетом имеющегося резонанса и затем, изучив свойства приближенной (модельной) системы, получить выводы о движениях полной системы.

При решении конкретных задач, однако, возникают ситуации, когда в системе имеет место резонанс и при этом для определенных значений параметров задачи или соотношений между ними величина c_2 равна или близка к нулю. Тогда частота малых нелинейных колебаний системы не зависит от амплитуды при учете в гамильтониане членов до четвертого порядка включительно. Такой вырожденный случай приводит к качественно новой ситуации и требует особого рассмотрения.

При исследовании системы в случае вырождения в функции Гамильтона необходим учет членов до шестого порядка включительно относительно x и p_x . Получаемые в результате нормализации модельные гамильтонианы (в случаях резонансов до четвертого порядка) обладают качественно новыми свойствами и не сводятся к известным. Кроме того, дополнительно возникает необходимость исследования случаев резонансов пятого и шестого порядков, которые в случае рассматриваемого вырождения могут оказать существенное влияние на поведение системы.

Целью работы является строгое решение задачи о существовании, бифуркациях и устойчивости периодических движений системы для каждого резонансного случая до шестого порядка включительно при наличии вырождения невозмущенного гамильтониана. Предполагается, что рассматриваемая гамильтонова система (кроме случая резонанса шестого порядка) близка к автономной. Начало координат $x = p_x = 0$ является положением равновесия невозмущенной (в случае резонанса в вынужденных колебаниях) или полной (в остальных резонансных случаях) системы, в окрестности которого функция Гамильтона аналитична и представляется в виде

$$H(x, p_x, t; \varepsilon) = H^{(0)}(x, p_x) + \varepsilon H^{(1)}(x, p_x, t) + \varepsilon^2 H^{(2)}(x, p_x, t) + \dots \quad (1.1)$$

$$H^{(0)}(x, p_x) = H_2^{(0)} + H_3^{(0)} + H_4^{(0)} + \dots$$

$$H^{(k)}(x, p_x, t) = H_1^{(k)} + H_2^{(k)} + H_3^{(k)} + H_4^{(k)} + \dots$$

где $H_l^{(k)}$ — формы l -й степени относительно x и p_x с постоянными (при $k = 0$) или 2π -периодическими по времени (при $k \geq 1$) коэффициентами. Формы $H_1^{(k)}$ ($k \geq 1$) первой степени

присутствуют в последнем соотношении (1.1) только в случае резонанса в вынужденных колебаниях, в остальных резонансных случаях $H_1^{(k)} \equiv 0$.

Будем считать, что невозмущенный гамильтониан $H^{(0)}$ уже приведен к нормальной форме до членов шестого порядка включительно относительно x и p_x и имеет вид

$$H^{(0)} = \frac{1}{2}\omega(x^2 + p_x^2) + \frac{1}{4}c_2(x^2 + p_x^2)^2 + \frac{1}{8}c_3(x^2 + p_x^2)^3 + \dots \quad (1.2)$$

причем предполагается, что $c_2 \simeq 0$, а $c_3 \neq 0$.

Для системы с гамильтонианом (1.1), (1.2) рассматриваются следующие резонансные случаи: случай резонанса в вынужденных колебаниях, когда собственная частота ω малых колебаний невозмущенной системы близка к целому числу; случай параметрического резонанса, когда величина 2ω близка к целому нечетному числу; случаи резонансов третьего, четвертого или пятого порядков, когда линейаризованная в окрестности начала координат система устойчива по Ляпунову, ее характеристические показатели $\pm i\lambda$ чисто мнимые и при этом одна из величин 3λ , 4λ или 5λ близка к целому числу (и отсутствуют резонансы более низких порядков).

При исследовании случая резонанса шестого порядка будем рассматривать неавтономную периодическую по времени гамильтонову систему с одной степенью свободы, функция Гамильтона которой в окрестности начала координат записывается в виде

$$H(x, p_x, t) = H_2 + H_3 + H_4 + H_5 + H_6 + \dots \quad (1.3)$$

где $H_k(x, p_x, t)$ — формы k -й степени относительно x и p_x с 2π -периодическими по t коэффициентами. Предполагаем, что линейаризованная система устойчива по Ляпунову, ее характеристические показатели $\pm i\lambda$ чисто мнимые, а величина 6λ близка к целому числу (и нет резонансов до пятого порядка включительно). При этом в системе имеется вырождение, когда в нормализованном гамильтониане коэффициент c_2 в членах четвертой степени близок к нулю.

Для каждого описанного резонансного случая исследуются нелинейные колебания системы в достаточно малой окрестности начала координат (величина которой зависит от порядка резонанса). В разделе 2 при помощи ряда канонических замен переменных проводится преобразование функции Гамильтона и приведение ее к виду, характерному для рассматриваемого резонанса; выделяется модельная часть гамильтониана. В разделе 3 проводится качественное исследование модельных систем: описываются положения равновесия, строятся фазовые портреты. В разделе 4 при помощи теории периодических движений Пуанкаре и КАМ-теории исследуется вопрос о существовании, бифуркациях и устойчивости периодических движений полной системы, аналитических по дробным (при резонансах до четвертого порядка включительно) или целым (при резонансах пятого и шестого порядков) степеням малого параметра. В разделе 5 в качестве приложений исследуются резонансные периодические движения (при наличии рассматриваемого вырождения) сферического маятника и волчка Лагранжа, точки подвеса которых совершают вертикальные гармонические колебания малой амплитуды.

2. Преобразование гамильтониана

2.1. Случай резонанса в вынужденных колебаниях

Пусть частота ω в невозмущенном гамильтониане (1.2) близка к целому числу N . Сделаем в полном гамильтониане (1.1), (1.2) каноническую замену переменных $x = \varepsilon^{1/5}\xi$, $p_x = \varepsilon^{1/5}\eta$ (с валентностью $\varepsilon^{-2/5}$). В новых переменных функция Гамильтона запишется в виде

$$H = \frac{1}{2}\omega(\xi^2 + \eta^2) + \frac{1}{4}\varepsilon^{2/5}c_2(\xi^2 + \eta^2)^2 + \frac{1}{8}\varepsilon^{4/5}c_3(\xi^2 + \eta^2)^3 + \varepsilon^{4/5}h_1^{(1)}(\xi, \eta, t) + O(\varepsilon),$$

где $h_1^{(1)}(\xi, \eta, t)$ — это форма $H_1^{(1)}(x, p_x, t)$ из (1.1), в которой величины x и p_x заменены на ξ и η .

Перейдем к «полярным» координатам φ, r по формулам $\xi = \sqrt{2r} \sin \varphi, \eta = \sqrt{2r} \cos \varphi$. Функция $h_1^{(1)}$ приобретет вид $\tilde{h}_1^{(1)} = \sqrt{r}(a(t) \cos \varphi + b(t) \sin \varphi)$, где $a(t)$ и $b(t)$ — 2π -периодические функции времени. Представим последние в виде рядов Фурье. Далее при помощи близкой к тождественной, 2π -периодической по t замены переменных $\varphi = \tilde{\varphi} + O(\varepsilon^{4/5}), r = \tilde{r} + O(\varepsilon^{4/5})$ уничтожим в части $\tilde{h}_1^{(1)}$ полного гамильтониана все слагаемые с нерезонансными гармониками и преобразуем его к виду

$$\tilde{H} = \omega \tilde{r} + \varepsilon^{2/5} c_2 \tilde{r}^2 + \varepsilon^{4/5} c_3 \tilde{r}^3 + \varepsilon^{4/5} \kappa_1 \sqrt{\tilde{r}} \cos(\tilde{\varphi} - Nt + \varphi_0) + O(\varepsilon). \quad (2.1)$$

Резонансный коэффициент κ_1 считаем положительным, этого всегда можно добиться сдвигом по $\tilde{\varphi}$.

Положим $c_2 = \varepsilon^{2/5} a_2, \omega = N - \varepsilon^{4/5} \beta$ и сделаем замену переменных $\tilde{r} = \hat{r}, \tilde{\varphi} - Nt + \varphi_0 = \hat{\varphi}$. При этом в главной части гамильтониана порядки слагаемых выравниваются:

$$\hat{H} = \varepsilon^{4/5} (-\beta \hat{r} + a_2 \hat{r}^2 + c_3 \hat{r}^3 + \kappa_1 \sqrt{\hat{r}} \cos \hat{\varphi}) + O(\varepsilon).$$

Сделаем еще одну замену $\hat{\varphi} = \sigma\theta + (1-\sigma)\pi/2$ ($\sigma = \text{sign } c_3$), $\hat{r} = k_1 \varrho, k_1 = (\kappa_1/|c_3|)^{2/5}$, перейдем к новой независимой переменной $\tau = \varepsilon^{4/5} (\kappa_1^4 |c_3|)^{1/5} t$ и введем параметры $\mu = \sigma\beta(\kappa_1^4 |c_3|)^{-1/5}$ и $\nu = \sigma a_2 (\kappa_1^2 |c_3|^3)^{-1/5}$. Функция Гамильтона примет следующий окончательный вид

$$\Gamma^{(1)} = \gamma_0^{(1)}(\theta, \varrho) + \varepsilon^{1/5} \gamma_1^{(1)}(\theta, \varrho^{1/2}, \tau; \varepsilon^{1/5}), \quad (2.2)$$

$$\gamma_0^{(1)}(\theta, \varrho) = -\mu \varrho + \nu \varrho^2 + \varrho^3 + \varrho^{1/2} \cos \theta. \quad (2.3)$$

Гамильтониан (2.3) является модельным для рассматриваемого случая резонанса в вынужденных колебаниях при вырождении невозмущенного гамильтониана; параметры μ и ν могут принимать произвольные значения. Функция $\gamma_1^{(1)}$ в соотношении (2.2) 2π -периодична по θ , периодична по τ с периодом $T \sim \varepsilon^{4/5}$ и в области $0 < \varrho \ll 1$ аналитична по всем переменным.

Соответствующие гамильтониану (2.2) дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\mu + 2\nu\varrho + 3\varrho^2 + \frac{\cos \theta}{2\sqrt{\varrho}} + O(\varepsilon^{1/5}), \quad \frac{d\varrho}{d\tau} = \varrho^{1/2} \sin \theta + O(\varepsilon^{1/5}). \quad (2.4)$$

2.2. Случай параметрического резонанса

Пусть теперь величина 2ω в гамильтониане (1.2) близка к целому нечетному числу N , т. е. в системе имеет место параметрический резонанс. Сделаем в гамильтониане (1.1), (1.2) (при $H_1^{(k)} \equiv 0$) замену переменных $x = \varepsilon^{1/4} \xi, p_x = \varepsilon^{1/4} \eta$. Затем упростим члены второй степени по ξ и η с учетом имеющегося резонанса; остаются слагаемые с резонансными гармониками, а коэффициент ω в квадратичной части невозмущенного гамильтониана получает «поправку» порядка ε . В «полярных» координатах φ, r ($\xi = \sqrt{2r} \sin \varphi, \eta = \sqrt{2r} \cos \varphi$) гамильтониан системы преобразуется к виду

$$H = \lambda r + \varepsilon^{1/2} c_2 r^2 + \varepsilon c_3 r^3 + \varepsilon \kappa_2 r \cos(2\varphi - Nt + 2\varphi_0) + O(\varepsilon^{5/4}), \kappa_2 > 0. \quad (2.5)$$

Здесь и далее в нормализованных гамильтонианах, кроме случая резонанса шестого порядка, $\lambda = \omega + O(\varepsilon) = \text{const}$.

Положим $c_2 = \varepsilon^{1/2} a_2, \lambda = N/2 - \varepsilon\beta$ и сделаем замену $2\varphi - Nt + 2\varphi_0 = 2\tilde{\varphi}, r = \tilde{r}$, тогда из (2.5) получим

$$\tilde{H} = \varepsilon(-\beta \tilde{r} + a_2 \tilde{r}^2 + c_3 \tilde{r}^3 + \kappa_2 \tilde{r} \cos 2\tilde{\varphi}) + O(\varepsilon^{5/4}).$$

Наконец, сделаем еще замену $\tilde{\varphi} = \sigma\theta + (1 - \sigma)\pi/4$ ($\sigma = \text{sign } c_3$), $\tilde{r} = k_2\rho$, $k_2 = \sqrt{\kappa_2/|c_3|}$, перейдем к новой независимой переменной $\tau = \varepsilon\kappa_2 t$ и введем параметры $\mu = \sigma\beta/\kappa_2$ и $\nu = \sigma a_2/\sqrt{\kappa_2|c_3|}$. Функция Гамильтона примет следующий вид

$$\Gamma^{(2)} = \gamma_0^{(2)}(\theta, \rho) + \varepsilon^{1/4}\gamma_1^{(2)}(\theta, \rho^{1/2}, \tau; \varepsilon^{1/4}), \quad (2.6)$$

$$\gamma_0^{(2)}(\theta, \rho) = -\mu\rho + \nu\rho^2 + \rho^3 + \rho \cos 2\theta. \quad (2.7)$$

Гамильтониан (2.7) является модельным для рассматриваемого резонансного случая при вырождении невозмущенного гамильтониана. Ранее в работе [1] гамильтониан, аналогичный (2.7), и большая часть отвечающих ему фазовых портретов, приведенных ниже в разделе 3, получены при рассмотрении частной задачи — исследовании параметрически возбуждаемых волновых движений жидкости в случае глубин сосуда, близких к критическим.

Функция $\gamma_1^{(2)}$ в (2.6) 2π -периодична по θ , периодична по τ с периодом $T \sim \varepsilon$ и в области $0 < \rho \ll 1$ аналитична по всем переменным. Дифференциальные уравнения движения системы с гамильтонианом (2.6) имеют вид

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\mu + 2\nu\rho + 3\rho^2 + \cos 2\theta + O(\varepsilon^{1/4}), \quad \frac{d\rho}{d\tau} = 2\rho \sin 2\theta + O(\varepsilon^{1/4}). \quad (2.8)$$

2.3. Случаи резонансов третьего, четвертого и пятого порядков

В случае резонанса третьего порядка ($3\lambda \sim N$) сделаем в гамильтониане (1.1), (1.2) (при $H_1^{(k)} \equiv 0$) замену переменных $x = \varepsilon^{1/3}\xi$, $p_x = \varepsilon^{1/3}\eta$, упростим члены второй и третьей степеней по ξ и η с учетом имеющегося резонанса. При этом члены третьей степени уничтожаются, кроме слагаемых с резонансными гармониками, а гамильтониан системы в «полярных» координатах φ, r запишется в виде

$$H = \lambda r + \varepsilon^{2/3}c_2r^2 + \varepsilon^{4/3}c_3r^3 + \varepsilon^{4/3}\kappa_3r^{3/2} \cos(3\varphi - Nt + 3\varphi_0) + O(\varepsilon^{5/3}), \kappa_3 > 0. \quad (2.9)$$

Положим в (2.9) $c_2 = \varepsilon^{2/3}a_2$, $\lambda = N/3 - \varepsilon^{4/3}\beta$ и сделаем две замены переменных

$$3\varphi - Nt + 3\varphi_0 = 3\tilde{\varphi}, r = \tilde{r},$$

$$\tilde{\varphi} = \sigma\theta + (1 - \sigma)\pi/6, \tilde{r} = k_3\rho, \sigma = \text{sign } c_3, k_3 = (\kappa_3/|c_3|)^{2/3}.$$

Перейдем к новой независимой переменной $\tau = \varepsilon^{4/3}\kappa_3^{4/3}|c_3|^{-1/3}t$ и введем параметры $\mu = \beta c_3^{1/3}/\kappa_3^{4/3}$ и $\nu = a_2/(\kappa_3^{2/3}c_3^{1/3})$. Гамильтониан примет следующий вид

$$\Gamma^{(3)} = \gamma_0^{(3)}(\theta, \rho) + \varepsilon^{1/3}\gamma_1^{(3)}(\theta, \rho^{1/2}, \tau; \varepsilon^{1/3}), \quad (2.10)$$

$$\gamma_0^{(3)}(\theta, \rho) = -\mu\rho + \nu\rho^2 + \rho^3 + \rho^{3/2} \cos 3\theta. \quad (2.11)$$

В случае резонанса четвертого порядка ($4\lambda \sim N$) положим в исходном гамильтониане $x = \varepsilon^{1/2}\xi$, $p_x = \varepsilon^{1/2}\eta$ и упростим члены второй, третьей и четвертой степеней по ξ и η с учетом имеющегося резонанса. В «полярных» координатах φ, r преобразованный гамильтониан примет вид

$$H = \lambda r + \varepsilon c_2r^2 + \varepsilon^2 c_3r^3 + \varepsilon^2 \kappa_4r^2 \cos(4\varphi - Nt + 4\varphi_0) + O(\varepsilon^{5/2}), \kappa_4 > 0. \quad (2.12)$$

Если теперь положить в (2.12) $c_2 = \varepsilon a_2$, $\lambda = N/4 - \varepsilon^2 \beta$, сделать две замены переменных

$$\begin{aligned} 4\varphi - Nt + 4\varphi_0 &= 4\tilde{\varphi}, r = \tilde{r}, \\ \tilde{\varphi} &= \sigma\theta + (1 - \sigma)\pi/8, \tilde{r} = k_4 \varrho, \quad \sigma = \text{sign } c_3, k_4 = \kappa_4/|c_3|, \end{aligned}$$

перейти к новой независимой переменной $\tau = \varepsilon^2 \kappa_4^2 / |c_3| t$ и ввести параметры $\mu = \beta c_3 / \kappa_4^2$ и $\nu = \sigma a_2 / \kappa_4$, то гамильтониан преобразуется к виду

$$\Gamma^{(4)} = \gamma_0^{(4)}(\theta, \varrho) + \varepsilon^{1/2} \gamma_1^{(4)}(\theta, \varrho^{1/2}, \tau; \varepsilon^{1/2}), \quad (2.13)$$

$$\gamma_0^{(4)}(\theta, \varrho) = -\mu \varrho + \nu \varrho^2 + \varrho^3 + \varrho^2 \cos 4\theta. \quad (2.14)$$

В случае резонанса пятого порядка ($5\lambda \sim N$) сделаем в исходном гамильтониане замену переменных $x = \varepsilon \xi$, $p_x = \varepsilon \eta$, тогда с учетом рассматриваемого резонанса функция Гамильтона может быть преобразована к виду

$$H = \lambda r + \varepsilon^2 c_2 r^2 + \varepsilon^4 c_3 r^3 + \varepsilon^4 \kappa_5 r^{5/2} \cos(5\varphi - Nt + 5\varphi_0) + O(\varepsilon^5), \quad \kappa_5 > 0. \quad (2.15)$$

Положим в (2.15) $c_2 = \varepsilon^2 a_2$, $\lambda = N/5 - \varepsilon^4 \beta$, сделаем две замены переменных

$$\begin{aligned} 5\varphi - Nt + 5\varphi_0 &= 5\tilde{\varphi}, r = \tilde{r}, \\ \tilde{\varphi} &= \sigma\theta + (1 - \sigma)\pi/10, \tilde{r} = k_5 \varrho, \sigma = \text{sign } c_3, k_5 = (\kappa_5/|c_3|)^2. \end{aligned}$$

Перейдем далее к новой независимой переменной $\tau = \varepsilon^4 \kappa_5^4 |c_3|^{-3} t$ и введем параметры $\mu = \beta c_3^3 / \kappa_5^4$ и $\nu = a_2 c_3 / \kappa_5^2$. Гамильтониан примет следующий вид

$$\Gamma^{(5)} = \gamma_0^{(5)}(\theta, \varrho) + \varepsilon \gamma_1^{(5)}(\theta, \varrho^{1/2}, \tau; \varepsilon), \quad (2.16)$$

$$\gamma_0^{(5)}(\theta, \varrho) = -\mu \varrho + \nu \varrho^2 + \varrho^3 + \varrho^{5/2} \cos 5\theta. \quad (2.17)$$

Функции $\gamma_0^{(k)}$ ($k = 3, 4, 5$) в (2.11), (2.14), (2.17) представляют собою модельные гамильтонианы для соответствующих резонансных случаев при вырождении невозмущенного гамильтониана. Функции $\gamma_1^{(k)}$ в (2.10), (2.13), (2.16) 2π -периодичны по θ , периодичны по τ с периодами порядка $\varepsilon^{4/3}$, ε^2 , ε^4 соответственно и в области $0 < \varrho \ll 1$ аналитичны по всем переменным.

Соответствующие гамильтонианам (2.10), (2.13), (2.16) дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\mu + 2\nu \varrho + 3\varrho^2 + \frac{3}{2} \varrho^{1/2} \cos 3\theta + O(\varepsilon^{1/3}), \quad \frac{d\varrho}{d\tau} = 3\varrho^{3/2} \sin 3\theta + O(\varepsilon^{1/3}), \quad (2.18)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\mu + 2\nu \varrho + 3\varrho^2 + 2\varrho \cos 4\theta + O(\varepsilon^{1/2}), \quad \frac{d\varrho}{d\tau} = 4\varrho^2 \sin 4\theta + O(\varepsilon^{1/2}), \quad (2.19)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\mu + 2\nu \varrho + 3\varrho^2 + \frac{5}{2} \varrho^{3/2} \cos 5\theta + O(\varepsilon), \quad \frac{d\varrho}{d\tau} = 5\varrho^{5/2} \sin 5\theta + O(\varepsilon). \quad (2.20)$$

2.4. Случай резонанса шестого порядка

В случае резонанса шестого порядка ($6\lambda \sim N$) сделаем в функции Гамильтона (1.3) замену переменных $x = \varepsilon \xi$, $p_x = \varepsilon \eta$ ($0 < \varepsilon \ll 1$) и с учетом имеющегося резонанса преобразуем ее к виду

$$H = \lambda r + \varepsilon^2 c_2 r^2 + \varepsilon^4 c_3 r^3 + \varepsilon^4 \kappa_6 r^3 \cos(6\varphi - Nt + 6\varphi_0) + O(\varepsilon^5), \quad \kappa_6 > 0. \quad (2.21)$$

Положим в (2.21) $c_2 = \varepsilon^2 a_2$, $\lambda = N/6 - \varepsilon^4 \beta$ и сделаем две замены переменных

$$\begin{aligned} 6\varphi - Nt + 6\varphi_0 &= 6\tilde{\varphi}, r = \tilde{r}, \\ \tilde{\varphi} &= \sigma\theta + (1 - \sigma)\pi/12, \tilde{r} = k_6 \varrho, \sigma = \text{sign } c_3. \end{aligned}$$

где $k_6 = 1/\sqrt{\kappa_6}$ при $\beta = 0$ и $k_6 = \sqrt{|\beta|/\kappa_6}$ при $\beta \neq 0$. Далее в случае $\beta = 0$ введем новую независимую переменную $\tau = \varepsilon^4 t$ и параметры $\nu = a_2 \sigma / \sqrt{\kappa_6}$ и $\kappa_0 = |c_3|/\kappa_6$, а в случае $\beta \neq 0$ — новую независимую переменную $\tau = \varepsilon^4 |\beta| t$ и параметры $\nu = a_2 \sigma / \sqrt{|\beta| \kappa_6}$ и $\kappa_0 = |c_3|/\kappa_6$. Тогда функция Гамильтона может быть записана в виде

$$\Gamma^{(6)} = \gamma_0^{(6)}(\theta, \varrho) + \varepsilon \gamma_1^{(6)}(\theta, \varrho^{1/2}, \tau; \varepsilon), \tag{2.22}$$

$$\gamma_0^{(6)}(\theta, \varrho) = -\mu \varrho + \nu \varrho^2 + (\kappa_0 + \cos 6\theta) \varrho^3. \tag{2.23}$$

Параметр μ в модельном гамильтониане (2.23) может принимать три значения 0, 1 и -1 , соответствующие случаям $\beta = 0$, $\beta/\sigma > 0$ и $\beta/\sigma < 0$. Параметр ν принимает произвольные значения, параметр κ_0 положителен. Функция $\gamma_1^{(6)}$ в (2.22) 2π -периодична по θ , периодична по τ с периодом порядка ε^4 и в области $0 < \varrho \ll 1$ аналитична по всем переменным.

Дифференциальные уравнения движения системы с гамильтонианом (2.22) имеют вид

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\mu + 2\nu\varrho + 3\varrho^2(\kappa_0 + \cos 6\theta) + O(\varepsilon), \quad \frac{d\varrho}{d\tau} = 6\varrho^3 \sin 6\theta + O(\varepsilon). \tag{2.24}$$

3. Исследование модельных систем

Проведем качественное исследование движений систем, описываемых модельными гамильтонианами (2.3), (2.7), (2.11), (2.14), (2.17), (2.23).

3.1. Положения равновесия

3.1.1. В случае резонанса в вынужденных колебаниях положения равновесия системы с гамильтонианом (2.3) определяются из соотношений

$$\sin \theta = 0, \quad f_1(r) = 6r^5 + 4\nu r^3 - 2\mu r + \cos \theta = 0 \quad (r = \sqrt{\varrho} \geq 0).$$

Несложный анализ функции $f_1(r)$ при $\theta = 0$ или $\theta = \pi$ показывает, что число нулей этой функции меняется при переходе через такие значения параметров ν и μ , для которых выполняются условия $f_1|_{\theta=0} = f'_{1r} = 0$ или $f_1|_{\theta=\pi} = f'_{1r} = 0$. Эти условия реализуются для значений параметров ν, μ , принадлежащих кривым, показанным на рис. 1, *e* сплошными линиями и разделяющим плоскость параметров задачи на четыре области I–IV. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 пересечения этих кривых с осями координат и друг с другом имеют координаты $(-5/4 \cdot 2^{1/5}; 0)$, $(0; 5/8 \cdot 24^{1/5})$, $(-5/4 \cdot 2^{2/5}; -5/16 \cdot 2^{4/5})$, $(-2.776 \dots; -2.055 \dots)$ соответственно.

В областях I и IV на рис. 1, *e* модельная система имеет три положения равновесия — два устойчивых и одно неустойчивое, в области III — пять положений равновесия (три устойчивых и два неустойчивых) и в области II — одно устойчивое положение равновесия.

3.1.2. В случае параметрического резонанса система с гамильтонианом (2.7) имеет положение равновесия $\varrho = 0$ в начале координат, устойчивое при $|\mu| > 1$ и неустойчивое при $|\mu| < 1$. При $\mu = 1$ это положение равновесия устойчиво при $\nu < 0$ и неустойчиво при $\nu \geq 0$, а при $\mu = -1$ устойчиво при $\nu \geq 0$ и неустойчиво при $\nu < 0$.



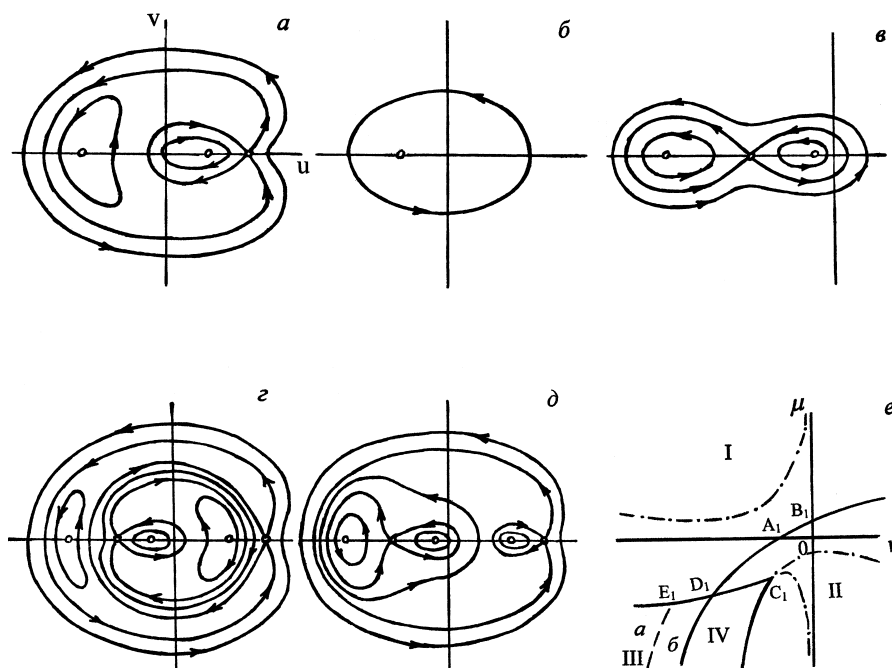


Рис. 1

Другие положения равновесия системы определяются из соотношений

$$\sin 2\theta = 0, \quad f_2(\varrho) = 3\varrho^2 + 2\nu\varrho + (\cos 2\theta - \mu) = 0.$$

В плоскости параметров ν, μ выделим области I—VI (рис. 2, u), границами которых служат прямые $\mu = 1$ и $\mu = -1$, а также части парабол $\mu = 1 - \nu^2/3$ и $\mu = -1 - \nu^2/3$ при $\nu \leq 0$. В области I уравнение $f_2(\varrho) = 0$ имеет одно решение $\varrho = \varrho_4$ при $\cos 2\theta = -1$, в области II — два решения $\varrho = \varrho_1$ и $\varrho = \varrho_2$ при $\cos 2\theta = 1$ и одно решение $\varrho = \varrho_4$ при $\cos 2\theta = -1$, в области III — два решения $\varrho = \varrho_1$ и $\varrho = \varrho_2$ при $\cos 2\theta = 1$ и два решения $\varrho = \varrho_3$ и $\varrho = \varrho_4$ при $\cos 2\theta = -1$, в области IV — два решения $\varrho = \varrho_3$ и $\varrho = \varrho_4$ при $\cos 2\theta = -1$, в области V — одно решение $\varrho = \varrho_4$ при $\cos 2\theta = -1$, в области VI уравнение $f_2(\varrho) = 0$ не имеет положительных решений. Здесь введены обозначения

$$\varrho_{1,2} = \frac{-\nu \pm \sqrt{3\mu + \nu^2 - 3}}{3} (\varrho_2 \geq \varrho_1), \quad \varrho_{3,4} = \frac{-\nu \pm \sqrt{3\mu + \nu^2 + 3}}{3} (\varrho_4 \geq \varrho_3).$$

Равновесным значениям $\varrho = \varrho_1$ и $\varrho = \varrho_4$ отвечают устойчивые, а $\varrho = \varrho_2$ и $\varrho = \varrho_3$ — неустойчивые положения равновесия системы.

3.1.3. При резонансе третьего порядка система с гамильтонианом (2.11) имеет положение равновесия $\varrho = 0$, устойчивое при $\mu \neq 0$ и неустойчивое при $\mu = 0$. Другие положения равновесия задаются уравнениями

$$\sin 3\theta = 0, \quad f_3(r) = 3r^4 + 2\nu r^2 + 3/2 r \cos 3\theta - \mu = 0 (r = \varrho^{1/2} \geq 0).$$

Число положений равновесия модельной системы меняется при переходе через такие значения параметров ν и μ , для которых выполняются условия $f_3|_{\cos 3\theta=1} = f'_{3r}|_{\cos 3\theta=1} = 0$ или

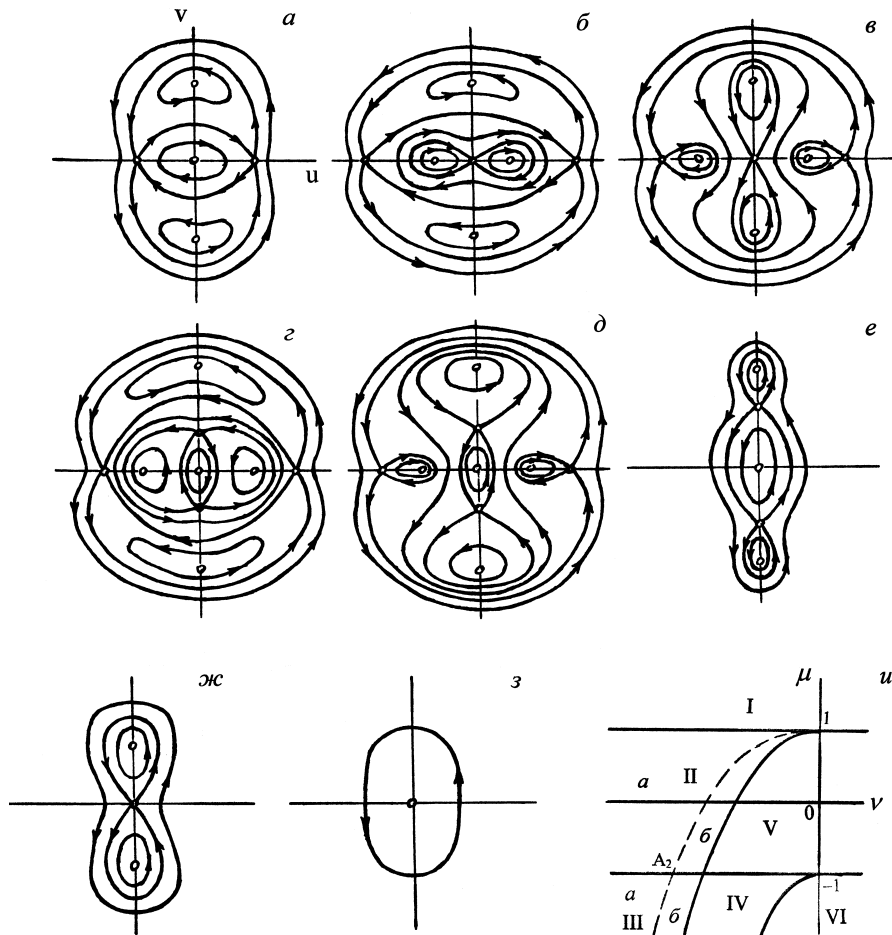


Рис. 2

$f_3|_{\cos 3\theta=-1} = f'_{3r}|_{\cos 3\theta=-1} = 0$. Отвечающие этим условиям кривые (показанные на рис. 3, л сплошными линиями), а также прямая $\mu = 0$ делят плоскость параметров ν, μ на области I–V. Точки A_3, B_3, C_3 на рис. 3, л имеют координаты $(-9/8 \cdot 2^{2/3}; 0)$, $(0; -9/16)$, $(-9/8 \cdot 2^{1/3}; 9/64 \cdot 2^{2/3})$ соответственно.

В области I уравнение $f_3(r) = 0$ имеет одно решение при $\cos 3\theta = 1$ и одно решение при $\cos 3\theta = -1$, которым соответствуют неустойчивые и устойчивые положения равновесия модельной системы. В области II это уравнение имеет три решения $r = r_1, r_2, r_3$ ($r_1 < r_2 < r_3$) при $\cos 3\theta = 1$ и одно решение $r = r_4$ при $\cos 3\theta = -1$; решениям $r = r_1, r_3$ отвечают неустойчивые, а решениям $r = r_2, r_4$ — устойчивые положения равновесия. В области III уравнение $f_3(r) = 0$ имеет два решения $r = r_1, r_2$ ($r_1 < r_2$) при $\cos 3\theta = 1$ и два решения $r = r_3, r_4$ ($r_3 < r_4$) при $\cos 3\theta = -1$; решениям $r = r_1$ и $r = r_4$ соответствуют устойчивые, а решениям $r = r_2$ и $r = r_3$ — неустойчивые положения равновесия системы. В области IV уравнение $f_3(r) = 0$ имеет два решения $r = r_1$ и $r = r_2$ ($r_1 < r_2$) при $\cos 3\theta = -1$, которым отвечают неустойчивые и устойчивые положения равновесия системы. В области V уравнение не имеет решений при $\cos 3\theta = \pm 1$.

3.1.4. В случае резонанса четвертого порядка система с гамильтонианом (2.14) имеет положение равновесия $\varrho = 0$, неустойчивое при $\mu = 0$ и $-1 \leq \nu < 1$ и устойчивое в остальных случаях.

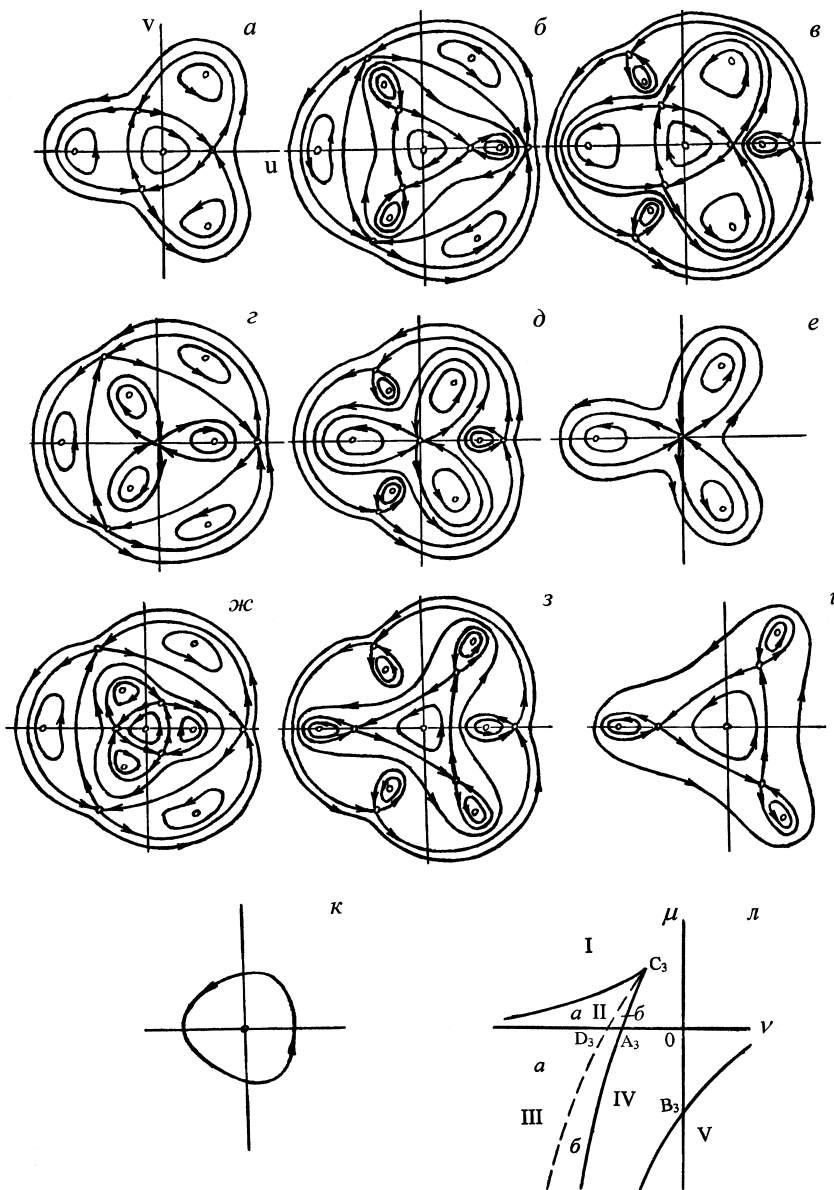


Рис. 3

В плоскости параметров ν, μ выделим области I–IV (рис. 4, ж), границами которых служат прямая $\mu = 0$ и части парабол $\mu = -1/3(\nu + 1)^2$ (при $\nu \leq -1$) и $\mu = -1/3(\nu - 1)^2$ (при $\nu \leq 1$). Кроме положения равновесия $\varrho = 0$, в области I система имеет также положения равновесия при $\varrho = \varrho_1, \varrho_2$ и $\cos 4\theta = 1$ и положения равновесия при $\varrho = \varrho_3, \varrho_4$ и $\cos 4\theta = -1$, где

$$\varrho_{1,2} = \frac{-(\nu + 1) \pm \sqrt{(\nu + 1)^2 + 3\mu}}{3} (\varrho_2 \geq \varrho_1), \varrho_{3,4} = \frac{-(\nu - 1) \pm \sqrt{(\nu - 1)^2 + 3\mu}}{3} (\varrho_4 \geq \varrho_3),$$

причем $\varrho_3 < \varrho_1 \leq \varrho_2 < \varrho_4$. В области II система имеет положения равновесия при $\varrho = \varrho_3, \varrho_4$ и $\cos 4\theta = -1$. В области III система имеет положения равновесия при $\varrho = \varrho_2$ и $\cos 4\theta = 1$ и положения равновесия при $\varrho = \varrho_4$ и $\cos 4\theta = -1$. В области IV система не имеет положений

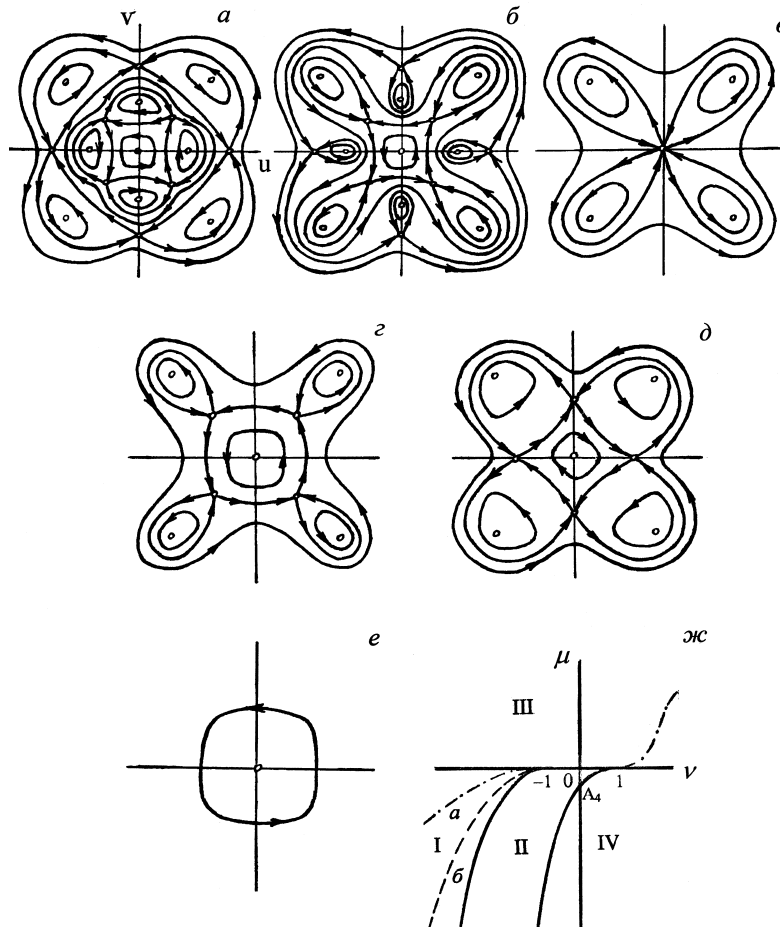


Рис. 4

равновесия, отличных от $\varrho = 0$. Равновесным значениям $\varrho = \varrho_1$ и $\varrho = \varrho_4$ отвечают устойчивые, а $\varrho = \varrho_2$ и $\varrho = \varrho_3$ — неустойчивые положения равновесия модельной системы.

3.1.5. При резонансе пятого порядка положение равновесия $\varrho = 0$ системы с гамильтонианом (2.17) неустойчиво при $\nu = \mu = 0$ и устойчиво в остальных случаях. Другие положения равновесия задаются уравнениями

$$\sin 5\theta = 0, \quad f_5(r) = 3r^4 + \frac{5}{2}r^3 \cos 5\theta + 2\nu r^2 - \mu = 0 \quad (r = \varrho^{1/2} \geq 0).$$

В плоскости параметров ν, μ выделим области I–V (рис. 5, *u*), ограниченные прямой $\mu = 0$ и кривыми, для точек (ν, μ) которых выполняются условия $f_5|_{\cos 5\theta=1} = f'_{5r}|_{\cos 5\theta=1} = 0$ или $f_5|_{\cos 5\theta=-1} = f'_{5r}|_{\cos 5\theta=-1} = 0$. Точки A_5, B_5, C_5 на рис. 5, *u* имеют координаты $(25/96; 0)$, $(0; -625/4096)$, $(75/256; 625/65536)$ соответственно.

В области I уравнение $f_5(r) = 0$ имеет одно решение при $\cos 5\theta = 1$ и одно решение при $\cos 5\theta = -1$, которым отвечают неустойчивые и устойчивые положения равновесия модельной системы. В области II это уравнение имеет одно решение $r = r_1$ при $\cos 5\theta = 1$ и три решения $r = r_2, r_3, r_4$ ($r_2 < r_3 < r_4$) при $\cos 5\theta = -1$; решениям $r = r_1$ и $r = r_3$ соответствуют неустойчивые, а решениям $r = r_2$ и $r = r_4$ — устойчивые положения равновесия. В области III уравнение

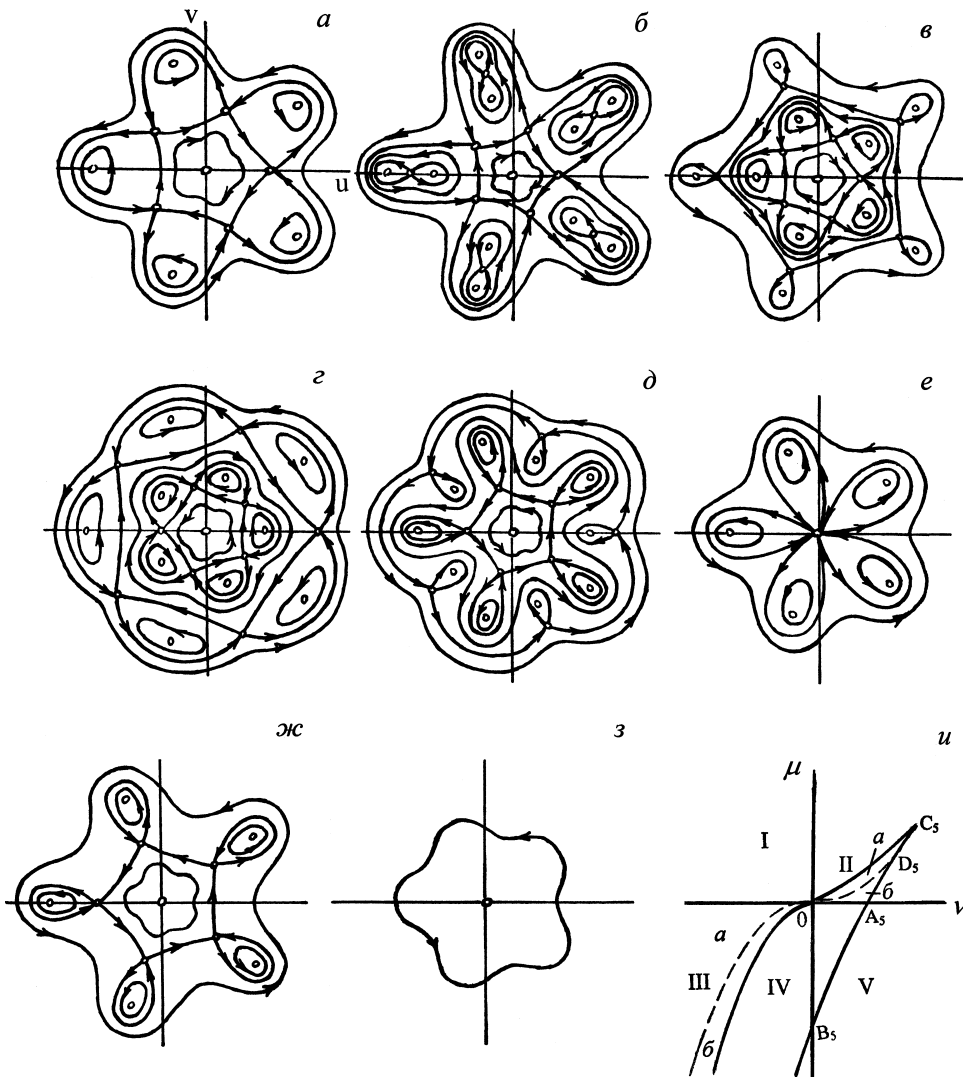


Рис. 5

$f_5(r) = 0$ имеет два решения $r = r_1, r_2$ ($r_1 < r_2$) при $\cos 5\theta = 1$ и два решения $r = r_3, r_4$ ($r_3 < r_4$) при $\cos 5\theta = -1$; решениям $r = r_1$ и $r = r_4$ отвечают устойчивые, а решениям $r = r_2$ и $r = r_3$ — неустойчивые положения равновесия. В области IV уравнение $f_5(r) = 0$ имеет два решения $r = r_1$ и $r = r_2$ ($r_1 < r_2$) при $\cos 5\theta = -1$, которым соответствуют неустойчивые и устойчивые положения равновесия. В области V уравнение $f_5(r) = 0$ не имеет положительных решений при $\cos 5\theta = \pm 1$.

3.1.6. В случае резонанса шестого порядка положение равновесия $\varrho = 0$ системы с гамильтонианом (2.23) при $\mu = 0$ неустойчиво при одновременном выполнении условий $\nu = 0$ и $0 < \kappa_0 \leq 1$ и устойчиво в остальных случаях. При $\mu = \pm 1$ это положение равновесия устойчиво для всех допустимых значений параметров ν и κ_0 .

При $\mu = 0$ в плоскости (ν, κ_0) выделяются области I–IV (рис. 6, н), границами которых являются прямые $\kappa_0 = 1$ и $\nu = 0$. В области I система имеет неустойчивые положения равновесия при $\varrho = \varrho_1 = -2\nu/(3(\kappa_0 + 1))$ и $\cos 6\theta = 1$ и устойчивые положения равновесия при $\varrho = \varrho_2 =$

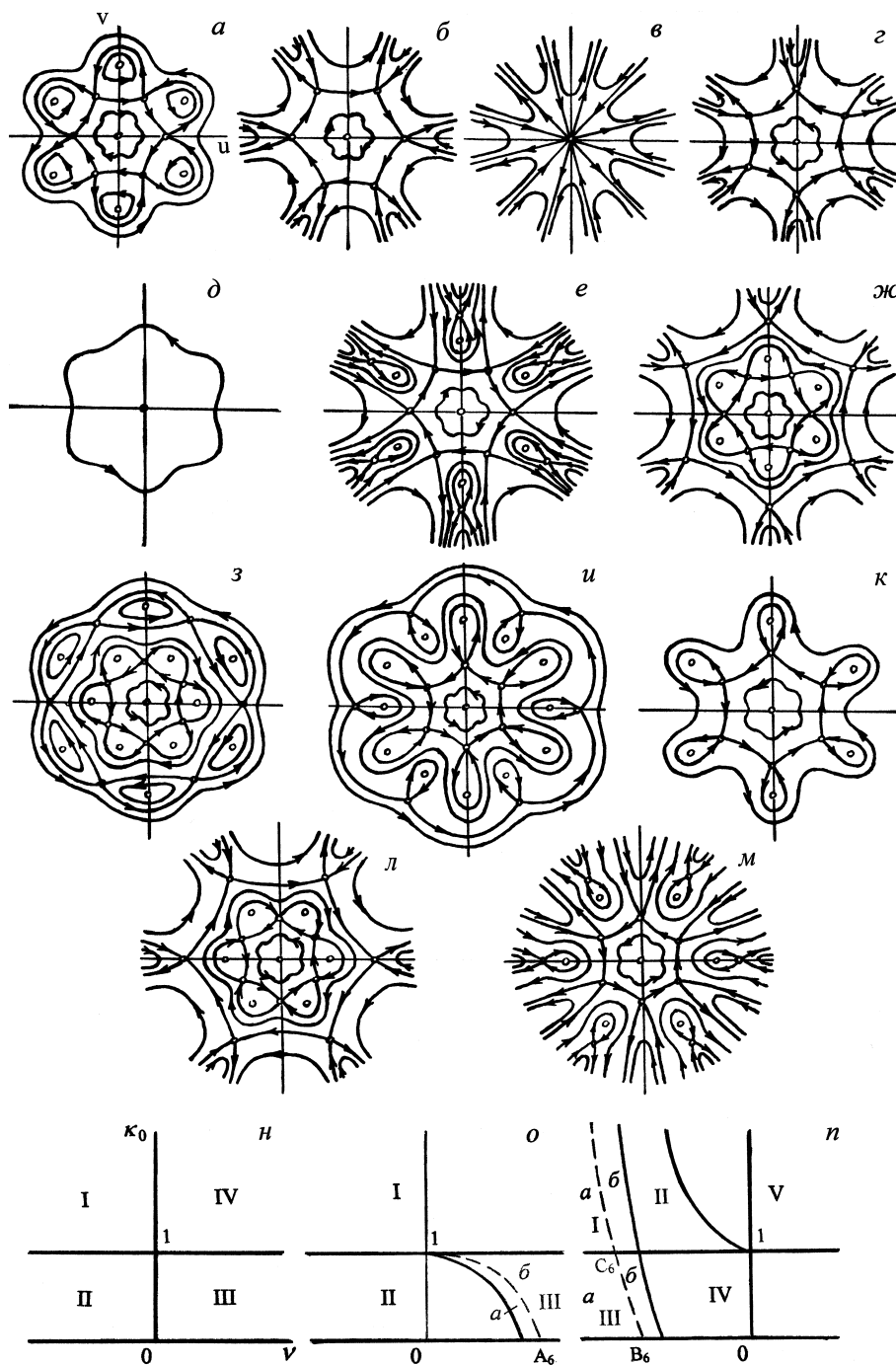


Рис. 6

$= 2\nu/(3(1 - \kappa_0))$ и $\cos 6\theta = -1$. В области II система имеет неустойчивые положения равновесия при $\varrho = \varrho_1$ и $\cos 6\theta = 1$, в области III — неустойчивые положения равновесия при $\varrho = \varrho_2$ и $\cos 6\theta = -1$. В области IV система не имеет положений равновесия, отличных от $\varrho = 0$.

При $\mu = 1$ в плоскости (ν, κ_0) выделены области I–III (рис. 6, о), ограниченные прямой $\kappa_0 = 1$ и частью параболы $\kappa_0 = 1 - \nu^2/3$ при $0 \leq \nu < \sqrt{3}$. В областях I–III система имеет

неустойчивые положения равновесия при

$$\varrho = \frac{-\nu + \sqrt{\nu^2 + 3(1 + \kappa_0)}}{3(1 + \kappa_0)}, \quad \cos 6\theta = 1$$

в областях I и III — устойчивые положения равновесия при

$$\varrho = \frac{-\nu + \sqrt{\nu^2 + 3(\kappa_0 - 1)}}{3(\kappa_0 - 1)}, \quad \cos 6\theta = -1$$

и в области III — устойчивые положения равновесия при

$$\varrho = \frac{\nu + \sqrt{\nu^2 - 3(1 - \kappa_0)}}{3(1 - \kappa_0)}, \quad \cos 6\theta = -1.$$

При $\mu = -1$ в плоскости (ν, κ_0) выделены области I–V (рис. 6, *n*), ограниченные прямой $\kappa_0 = 1$ и частями парабол $\kappa_0 = \nu^2/3 - 1$ (при $\nu < \sqrt{3}$) и $\kappa_0 = \nu^2/3 + 1$ (при $\nu \leq 0$). В областях I и III система имеет устойчивые положения равновесия при $\varrho = \varrho_1$ и $\cos 6\theta = 1$ и неустойчивые положения равновесия при $\varrho = \varrho_2$ и $\cos 6\theta = 1$; в областях I–IV система имеет неустойчивые положения равновесия при $\varrho = \varrho_3$ и $\cos 6\theta = -1$, в областях I и II система имеет устойчивые положения равновесия при $\varrho = \varrho_4$ и $\cos 6\theta = -1$. Здесь введены обозначения

$$\varrho_{1,2} = \frac{-\nu \pm \sqrt{\nu^2 - 3(1 + \kappa_0)}}{3(1 + \kappa_0)} (\varrho_1 < \varrho_2), \quad \varrho_{3,4} = \frac{-\nu \pm \sqrt{\nu^2 - 3(\kappa_0 - 1)}}{3(\kappa_0 - 1)} (\varrho_3 < \varrho_4).$$

В области V система не имеет положений равновесия, отличных от $\varrho = 0$.

3.2. Фазовые портреты

Фазовые портреты модельных систем с гамильтонианами (2.3), (2.7), (2.11), (2.14), (2.17), (2.23) показаны соответственно на рис. 1–6 в плоскости переменных $u = \sqrt{2\varrho} \cos \theta$, $v = \sqrt{2\varrho} \sin \theta$. При резонансе j -го порядка ($j=1-6$) фазовые портреты переходят в себя при повороте плоскости вокруг начала координат на угол, кратный π/j .

Устойчивым положениям равновесия модельных систем отвечают на рис. 1–6 особые точки типа «центр», неустойчивым — седловые особые точки. На криволинейных границах областей происходит слияние двух равновесных точек системы — устойчивой и неустойчивой — в одну неустойчивую сложную особую точку, которая при переходе через кривую исчезает; соответствующие фазовые портреты не приводятся. Через неустойчивые особые точки проходят сепаратрисы, разделяющие области с различным характером движений системы. Каждая из областей, в которых имеется два типа неустойчивых особых точек (а значит, две сепаратрисы на фазовых портретах), разделяется на две подобласти, помеченные буквами *a* и *b*, с различным видом сепаратрис. Перестройка фазовых портретов, когда две сепаратрисы сливаются в одну, происходит на кривых, показанных на рис. 1, *e*, 2, *u*, 3, *л*, 4, *ж*, 5, *u*, 6, *o*, *n* штриховыми линиями (соответствующие фазовые портреты не приведены). Точки $E_1, A_2, D_3, D_5, A_6, B_6, C_6$ пересечения этих кривых с границами областей имеют координаты $(-3.485 \dots; -2.237 \dots)$, $(-2\sqrt{2}; -1)$, $(-1.89 \dots, 0)$, $(0.283 \dots; 0.007 \dots)$, $(12^{1/4}, 0)$, $(-12^{1/4}; 0)$, $(-3\sqrt{3}/2; 1)$ соответственно. Другим траекториям модельной системы отвечают либо колебания в окрестности устойчивых положений равновесия, либо вращения — замкнутые траектории на рис. 1–6, охватывающие сепаратрисы. Фазовые портреты на прямолинейных границах областей показаны только в тех случаях, когда они качественно отличаются от фазовых портретов в примыкающих к ним областях.

Рис. 1, *a–d* отвечает случаю резонанса в вынужденных колебаниях и областям I, II, IV, III *a*, III *б* на рис. 1, *e*.

Рис. 2, *a–з* соответствует случаю параметрического резонанса и областям I, II *a*, II *б*, III *a*, III *б*, IV, V, VI на рис. 2, *и*.

На рис. 3 представлены фазовые портреты модельной системы при резонансе третьего порядка. Рис.3, *a–в* отвечают областям I, II *a*, II *б*, рис. 3, *г–е* — участкам прямой $\mu = 0$ при $\nu < -1.89\dots, -1.89\dots < \nu < -9/8 \cdot 2^{2/3}, \nu > -9/8 \cdot 2^{2/3}$, рис. 3, *ж–к* — областям III *a*, III *б*, IV, V (см. рис. 3, *л*).

Фазовые портреты модельной системы при резонансе четвертого порядка, изображенные на рис. 4, *a–е*, соответствуют областям I *a*, I *б*, участку $-1 \leq \nu < 1$ прямой $\mu = 0$, областям II, III, IV на рис. 4, *ж*.

Рис. 5, *a–з* отвечает случаю резонанса пятого порядка и областям I, II *a*, II *б*, III *a*, III *б*, точке O, областям IV, V на рис. 5, *и*.

На рис. 6 изображены фазовые портреты модельной системы при резонансе шестого порядка. Рис.6, *a–д* отвечают случаю $\mu = 0$ и областям I, II, отрезку прямой $\nu = 0$ при $0 < \kappa_0 \leq 1$, областям III, IV на рис. 6, *н*. В случае $\mu = 1$ фазовые портреты в областях I и II на рис. 6, *о* качественно такие же, как на рис. 6, *a* и 6, *б*. Фазовые портреты в областях III *a* и III *б* показаны на рис. 6, *е* и 6, *ж*. Рис.6, *з–м* отвечают случаю $\mu = -1$ и областям I *a*, I *б*, II, III *a*, III *б* на рис. 6, *п*. Фазовые портреты в областях IV и V качественно такие же, как на рис. 6, *г* и 6, *д*.

4. Периодические движения

Вернемся теперь к рассмотрению полных систем (2.4), (2.8), (2.18)–(2.20), (2.24). В окрестности каждого не совпадающего с началом координат положения равновесия $\theta = \theta_*, \varrho = \varrho_*$ модельной системы (исключаем из рассмотрения неустойчивые сложные особые точки на границах областей) полную систему при резонансе *j*-го порядка можно рассматривать как квазилинейную систему с возмущениями порядка ε^{s_j} , имеющими по τ период $T \sim \varepsilon^{4s_j}$, где $s_j = (6 - j)^{-1}$ при $j = 1 - 5$ и $s_6 = 1$ (см. раздел 2). Согласно теории периодических движений Пуанкаре [2], из каждого положения равновесия $\theta = \theta_*, \varrho = \varrho_*$ модельной системы рождается единственное, T -периодическое по τ , аналитическое по ε^{s_j} решение полной системы, имеющее вид

$$\theta = \tilde{\theta}(\tau) = \theta_* + O(\varepsilon^{s_j}), \quad \varrho = \tilde{\varrho}(\tau) = \varrho_* + O(\varepsilon^{s_j}).$$

В исходной системе ему соответствует решение, аналитическое по ε^{s_j} , $2\pi j$ -периодическое по времени, и имеющее вид

$$\begin{aligned} x &= \varepsilon^{s_j} \sqrt{2k_j \varrho_*} \sin \psi_j + O(\varepsilon^{2s_j}), & p_x &= \varepsilon^{s_j} \sqrt{2k_j \varrho_*} \cos \psi_j + O(\varepsilon^{2s_j}), \\ \psi_j &= Nt/j + \sigma\theta_* + (1 - \sigma)\pi/(2j) - \varphi_0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Заметим, что из положений равновесия, отвечающих одним и тем же значениям ϱ_* и разным (отличающимся на $2\pi/j, j \geq 2$) значениям θ_* , рождаются решения вида (4.1), переходящие одно в другое при сдвиге по t на $2\pi, 4\pi, \dots, 2(j - 1)\pi$ и соответствующие одному и тому же движению исходной системы.

Рассмотрим вопрос об устойчивости этих решений. Периодические решения, рождающиеся из неустойчивых положений равновесия модельной системы, неустойчивы, что следует из непрерывности по ε характеристических показателей соответствующих линейных уравнений возмущенного движения.

Вопрос об устойчивости периодических решений, рождающихся из устойчивых положений равновесия модельной системы, можно решить, проведя нормализацию полных гамильтонианов в окрестности этих решений. Положим в полном гамильтониане $\theta = \tilde{\theta}(\tau) + q$, $\varrho = \tilde{\varrho}(\tau) + p$ и затем при помощи канонического преобразования $q, p \rightarrow \tilde{q}, \tilde{p}$ приведем гамильтониан к нормальной форме до членов четвертого порядка включительно

$$\tilde{\Gamma} = \frac{1}{2}(\omega_* + O(\varepsilon^{sj}))(\tilde{q}^2 + \tilde{p}^2) + \frac{1}{4}(c_* + O(\varepsilon^{sj}))(\tilde{q}^2 + \tilde{p}^2)^2 + O_5. \quad (4.2)$$

Коэффициенты $\omega_* + O(\varepsilon^{sj})$ и $c_* + O(\varepsilon^{sj})$ в членах второй и четвертой степеней в гамильтониане (4.2) — постоянные величины. Если коэффициент c_* отличен от нуля, то при достаточно малых значениях ε рассматриваемое периодическое решение устойчиво на основании теоремы Арнольда–Мозера [8].

Расчеты показывают, что условие этой теоремы нарушается (коэффициент c_* обращается в нуль) только в случаях резонанса в вынужденных колебаниях и резонанса четвертого порядка для значений параметров ν, μ , принадлежащих кривым, показанным на рис. 1, *e* и рис. 4, *ж* штрих-пунктирными линиями. На рис. 1, *e* кривая из области I отвечает периодическому решению, рождающемуся из устойчивого положения равновесия $\theta_* = 0$, $\varrho = \varrho_*$ (см. рис. 1, *a*); две кривые из области II отвечают периодическому решению, рождающемуся из единственного в этой области устойчивого положения равновесия $\theta_* = \pi$, $\varrho = \varrho_*$ (см. рис. 1, *b*). На рис. 4, *ж* кривая из области I *a* соответствует периодическому движению, рождающемуся из устойчивого положения равновесия при $\varrho = \varrho_1$ и $\cos 4\theta = 1$ (см. рис. 4, *a*), а кривая из области III — периодическому движению, рождающемуся из устойчивого положения равновесия при $\varrho = \varrho_4$ и $\cos 4\theta = -1$ (см. рис. 4, *d*).

Вне указанных кривых для этих периодических решений, а также для всех возможных значений параметров остальных периодических решений, рождающихся из устойчивых положений равновесия модельной системы двух указанных и всех остальных резонансных случаев, соответствующий коэффициент c_* нормальной формы возмущенного гамильтониана сохраняет постоянный знак, и, следовательно, периодические решения устойчивы.

5. Приложения

5.1. Сферический маятник с вибрирующей точкой подвеса

Рассмотрим движения сферического маятника массы m и длины ℓ , точка подвеса которого совершает вертикальные гармонические колебания малой амплитуды по закону $\varepsilon \ell \cos \Omega t$ ($0 < \varepsilon \ll 1$) относительно некоторой фиксированной точки пространства. Положение маятника будем описывать при помощи сферических координат θ, φ , соответствующие им импульсы обозначим через p_θ, p_φ .

Движения маятника описываются каноническими уравнениями с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2m\ell^2} \left[(p_\theta - \varepsilon m \ell^2 \Omega \sin \Omega t \sin \theta)^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right] - mg\ell \cos \theta.$$

Координата φ циклическая, поэтому $p_\varphi = \text{const}$. Положим $p_\varphi = m\ell^2 \sin^2 \theta_0 \omega_0$, где θ_0, ω_0 — постоянные, причем $\theta_0 = \arccos(g/(\omega_0^2 \ell))$, а $\omega_0 > 0$. Сделаем каноническую замену переменных

$$\theta = q, p_\theta = m\ell^2 \omega_0 (p + \varepsilon \hat{\Omega} \sin \Omega t \sin q), \hat{\Omega} = \Omega/\omega_0$$

и перейдем к безразмерному «времени» $\tau = \omega_0 t$. Функция Гамильтона приведенной системы с одной степенью свободы примет вид

$$H = \frac{1}{2} \left(p^2 + \frac{\sin^4 \theta_0}{\sin^2 q} \right) - (\cos \theta_0 + \varepsilon \hat{\Omega}^2 \cos \hat{\Omega} \tau) \cos q.$$

Сделаем еще одну замену переменных $q, p \rightarrow u, v$ по формулам $u = \cos q, p = -v \sin q$ и запишем гамильтониан в алгебраической форме

$$H = H_0 + \varepsilon H_1, \tag{5.1}$$

$$H_0 = \frac{1}{2} (1 - u^2) v^2 + \frac{1}{2} \frac{(1 - u_0^2)^2}{1 - u^2} - u_0 u, \quad H_1 = -\hat{\Omega}^2 \cos \hat{\Omega} \tau u, \quad u_0 = \cos \theta_0.$$

Система с невозмущенным гамильтонианом H_0 соответствует маятнику с неподвижной точкой подвеса. Она имеет единственное положение равновесия $u = u_0, v = 0$, которому отвечает коническое движение маятника, когда маятник отклонен от вертикали на угол θ_0 и вращается вокруг нее с постоянной угловой скоростью ω_0 .

В статье [7] для случая вертикальных высокочастотных гармонических вибраций точки подвеса малой амплитуды исследованы высокочастотные колебания маятника вблизи его конического движения.

Положим в H_0

$$u = u_0 + \sqrt{\frac{1 - u_0^2}{\omega}} \xi, \quad v = \sqrt{\frac{\omega}{1 - u_0^2}} \eta, \quad \omega = \sqrt{1 + 3u_0^2}.$$

Затем при помощи близкой к тождественной замены переменных $\xi = x + \dots, \eta = p_x + \dots$ преобразуем функцию H_0 к нормальной форме вида (1.2), где

$$c_2 = -\frac{3u_0^4 + 15u_0^2 - 2}{4(1 + 3u_0^2)^2},$$

$$c_3 = \frac{40 + 1648u_0^2 + 5573u_0^4 + 37100u_0^6 + 52966u_0^8 + 34620u_0^{10} + 7317u_0^{12}}{48\omega^9(1 - u_0^2)^2}.$$

Коэффициент c_2 обращается в нуль в точке $u_0 = u_0^* = \sqrt{6\sqrt{249} - 90}/6 = 0.3605\dots$, что соответствует отклонению маятника от вертикали на угол $\theta_0 = \theta_0^* = 68.895\dots^\circ$. Для этого значения u_0 имеем $c_3 = c_3^* = 2.791\dots$

Построим периодические движения маятника с вибрирующей точкой подвеса в окрестности его конического движения в невозмущенной задаче, считая, что $c_2 \sim 0$, а $\hat{\Omega} \sim j\omega$ ($j = 1-5$); резонансные эффекты при резонансе шестого порядка в данной постановке задачи не обнаруживаются. При резонансе j -го порядка ($j = 1-5$) следует считать (см. раздел 2.1), что $c_2 \sim \varepsilon^{2s_j}$, а резонансная расстройка имеет порядок ε^{4s_j} . Условию $c_2 = 0$ и точному резонансу $\hat{\Omega} = \omega$ (при $j = 1$) или $\hat{\Omega} = j\lambda$ (при $j=2-5$) отвечают в плоскости параметров $u_0, \hat{\Omega}$ задачи прямая $u_0 = u_0^*$ и часть кривой $\hat{\Omega} = \hat{\Omega}(u_0)$ при $u_0 \in (-1; 1)$, где $\hat{\Omega}(u_0) = \omega(u_0) = \sqrt{1 + 3u_0^2}$ при $j = 1$ или $\hat{\Omega}(u_0) = j\lambda(u_0)$ ($\lambda(u_0) = \omega(u_0) + O(\varepsilon^2)$) при $j=2-5$. Рассмотрим окрестность точки $(u_0^*, \hat{\Omega}(u_0^*))$ их пересечения (рис. 7), состоящую из точек, удаленных от прямой $u_0 = u_0^*$ на расстояние $\sim \varepsilon^{2s_j}$ и от кривой $\hat{\Omega} = \hat{\Omega}(u_0)$ на расстояние $\sim \varepsilon^{4s_j}$ и представляющую собой криволинейный четырехугольник. Для произвольной точки $(u_0, \hat{\Omega})$ этой окрестности в случае резонанса в вынужденных

колебаниях ($j = 1$) положим в (5.1) $u = u_0 + \tilde{u}$, $v = \tilde{v}$, в остальных резонансных случаях — $u = \hat{u}(\tau) + \tilde{u}$, $v = \hat{v}(\tau) + \tilde{v}$, где

$$\hat{u}(\tau) = u_0 + \frac{\varepsilon(1 - u_0^2)\hat{\Omega}^2}{\omega^2 - \hat{\Omega}^2} \cos \hat{\Omega}\tau + O(\varepsilon^2), \quad \hat{v}(\tau) = -\frac{\varepsilon\hat{\Omega}^3}{\omega^2 - \hat{\Omega}^2} \sin \hat{\Omega}\tau + O(\varepsilon^2). \quad (5.2)$$

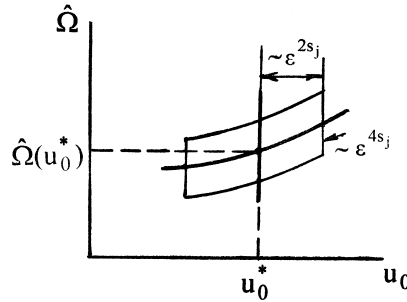


Рис. 7

Соотношения (5.2) описывают 2π -периодические по τ нерезонансные вынужденные колебания приведенной системы с гамильтонианом (5.1), рождающиеся при $\varepsilon \neq 0$ из положения равновесия $u = u_0$, $v = 0$ невозмущенной системы.

Проводя далее для каждого резонансного случая преобразование гамильтониана, аналогичные описанным в разделе 2.1, получим функцию Гамильтона в виде (2.1), (2.5), (2.9), (2.12) или (2.15), где нужно положить $N = 1$, $t = \hat{\Omega}\tau$, $\lambda = \omega + O(\varepsilon^2)$, а также, как показывают расчеты, $\varphi_0 = \pi/2$, $\kappa_1 = 0.844 \dots$ (в ф. (2.1)); $\varphi_0 = 0$, $\kappa_2 = 0.532 \dots$ (в ф. 2.5)); $\varphi_0 = -\pi/6$, $\kappa_3 = 0.141 \dots$ (в (2.9)); $\varphi_0 = 0$, $\kappa_4 = 0.951 \dots$ (в (2.12)); $\varphi_0 = -\pi/10$, $\kappa_5 = 1.556 \dots$ (в (2.15)).

Введем параметры ν и μ и перейдем к рассмотрению системы с гамильтонианом (2.2), (2.6), (2.10), (2.13) или (2.16). Из результатов раздела 2.1 следует, что координаты $(u_0, \hat{\Omega})$ рассматриваемой точки связаны с параметрами ν и μ соответствующей модельной системы соотношениями вида ($\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ — постоянные)

$$u_0 = u_0^* + \varepsilon^{2s_j} \alpha_j \nu + \dots, \quad \hat{\Omega} = \hat{\Omega}(u_0^*) + \varepsilon^{2s_j} \beta_j \nu + \varepsilon^{4s_j} \gamma_j \mu + \dots \quad (5.3)$$

Формулы (5.3) задают преобразование плоскости параметров ν, μ модельной системы в изучаемую окрестность точки $(u_0^*, \hat{\Omega}(u_0^*))$ в плоскости параметров $u_0, \hat{\Omega}$. В результате такого преобразования области на рис. 1, *e*; 2, *u*; 3, *л*; 4, *ж*; 5, *u* перейдут в соответствующие области изучаемой окрестности, и при надлежащем выборе точки $(u_0, \hat{\Omega})$ может быть реализован любой из описанных в разделах 3, 4 случаев.

Для заданной точки $(u_0, \hat{\Omega})$ из соотношений (5.3) вычисляются значения параметров ν и μ и определяются положения равновесия $\varrho = \varrho_*$, $\theta = \theta_*$ модельной системы; затем строятся периодические движения системы с гамильтонианом (5.1) и делаются выводы об их устойчивости. Эти периодические движения имеют вид (см. раздел 4)

$$u(\tau) = \hat{u}_0 + \varepsilon^{s_j} \sqrt{2j(1 - u_0^{*2})k_j \varrho_*} \sin(\hat{\Omega}\tau/j + \theta_* - \varphi_0) + O(\varepsilon^{2s_j}), \quad (5.4)$$

где $\hat{u}_0 = u_0$ при $j = 1$, $\hat{u}_0 = \hat{u}(\tau)$ при $j=2-5$, а величины k_j определены в разделе 2.1.

Соотношение (5.4) описывает изменение косинуса угла наклона маятника к вертикали; при этом угловая скорость вращения маятника вокруг вертикали задается соотношением

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1 - u_0^2}{1 - u^2(\tau)}. \quad (5.5)$$

Формулы (5.4), (5.5) определяют резонансные периодические движения маятника в окрестности его конического движения в случае вырождения невозмущенного гамильтониана.

5.2. Волчок Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса

Построим теперь периодические движения волчка Лагранжа, точка закрепления (подвеса) O которого совершает вертикальные гармонические колебания малой амплитуды по закону $a_* \cos \Omega t$. Положение волчка будем определять при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ , задающих ориентацию связанной с телом системы координат $Oxyz$ (оси которой совпадают с главными осями инерции тела для точки O , причем Oz является осью динамической симметрии) относительно движущейся поступательно системы координат $OXYZ$ (ось OZ направлена вертикально вверх). Центр масс волчка лежит на положительной полуоси Oz , обозначим $OG = z_G$. Динамика волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса исследована в работах [13, 14].

Координаты ψ и φ циклические, поэтому изучение движения волчка сводится к рассмотрению приведенной системы с одной степенью свободы и обобщенной координатой θ . Введем безразмерные импульсы α, β, p при помощи соотношений $p_\psi = A\Omega\alpha, p_\varphi = A\Omega\beta$ ($\alpha, \beta = \text{const}$), $p_\theta = A\Omega p$, где A — экваториальный момент инерции волчка. Положим $a_* = \varepsilon\ell$ ($0 < \varepsilon \ll 1$), $\ell = A/(mz_G)$ — приведенная длина тела как физического маятника (при $\alpha = \beta = 0$), m — масса тела; введем безразмерное "время" $\tau = \Omega t$. Функция Гамильтона приведенной системы будет иметь вид [13]

$$H = \frac{(\alpha - \beta \cos \theta)^2}{2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{2}(p - \varepsilon \sin \tau \sin \theta)^2 + \gamma \cos \theta, \quad \gamma = \frac{g}{\ell \Omega^2}. \quad (5.6)$$

Угловые скорости прецессии и собственного вращения волчка определяются соотношениями (штрих означает дифференцирование по τ)

$$\psi' = \frac{\alpha - \beta \cos \theta}{\sin^2 \theta}, \quad \varphi' = \frac{A}{C}\beta - \frac{(\alpha - \beta \cos \theta) \cos \theta}{\sin^2 \theta}, \quad (5.7)$$

где C — осевой момент инерции волчка.

Случай $\varepsilon = 0$ отвечает классическому волчку Лагранжа с неподвижной точкой, при этом частное решение $\theta = \theta_0 = \text{const}, p = 0$ невозмущенной задачи соответствует регулярной прецессии волчка. Величина θ_0 удовлетворяет уравнению

$$f(\theta) = -\gamma, \quad f(\theta) = \frac{(\alpha - \beta \cos \theta)(\alpha \cos \theta - \beta)}{\sin^4 \theta}. \quad (5.8)$$

Положим в невозмущенном гамильтониане $\theta = \theta_0 + \tilde{q}/\sqrt{\omega}, p = \sqrt{\omega}\tilde{p}$, где частота ω малых колебаний линеаризованной системы определяется из соотношения [13]

$$\omega^2 = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)(1 + 3 \cos^2 \theta_0) - 2\alpha\beta \cos \theta_0(3 + \cos^2 \theta_0)}{\sin^4 \theta_0}. \quad (5.9)$$

При помощи близкой к тождественной замены переменных $\tilde{q} = x + \dots$, $\tilde{p} = p_x + \dots$ невозмущенный гамильтониан можно привести к нормальной форме вида (1.2), где

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{3}{2}b_4 - \frac{15}{4}\frac{b_3^2}{\omega}, & c_3 &= \frac{5}{2}b_6 - \frac{35}{2}\frac{b_3b_5}{\omega} - \frac{17}{4}\frac{b_4^2}{\omega} + \frac{225}{4}\frac{b_3^2b_4}{\omega^2} - \frac{705}{16}\frac{b_3^4}{\omega^3}, \\ b_3 &= \frac{1}{6\omega^{3/2}}[-f''(\theta_0) + \gamma \sin \theta_0], & b_4 &= \frac{1}{24\omega^2}[-f'''(\theta_0) + \gamma \cos \theta_0], \\ b_5 &= -\frac{1}{120\omega^{5/2}}[f^{IV}(\theta_0) + \gamma \sin \theta_0], & b_6 &= -\frac{1}{720\omega^3}[f^V(\theta_0) + \gamma \cos \theta_0]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Подробное исследование условия вырождения $c_2 = 0$ и резонансных соотношений $j\omega = N$ ($j = 1 - 6$, N — целое число) проведено ранее [13,14]; в пространстве параметров α, β, γ задачи этим уравнениям отвечают некоторые поверхности, описание которых здесь не приводим. Анализ выражений (5.9) и (5.10) при учете соотношения (5.8) показывает, что одновременное выполнение условий $c_2 = 0$ и $j\omega = N$ имеет место на четырех кривых $\Gamma_{j,N}^i$, $i=1-4$, являющихся результатом пересечения упомянутых поверхностей и определяемых параметрически соотношениями $\alpha = \alpha_i(u_0)$, $\beta = \beta_i(u_0)$, $\gamma = \gamma_i(u_0)$, где $u_0 = \cos \theta_0$, а

$$\begin{aligned} \gamma_i(u_0) &= \gamma^*(u_0) = \frac{2N^2}{j^2(U - 6u_0)}, & i &= 1 - 4, \\ \alpha_{1,2}(u_0) &= \frac{\delta_1 \pm \delta_2}{2}, & \beta_{1,2}(u_0) &= \frac{\delta_1 \mp \delta_2}{2}, \\ \alpha_{3,4}(u_0) &= \frac{-\delta_1 \pm \delta_2}{2}, & \beta_{3,4}(u_0) &= \frac{-\delta_1 \mp \delta_2}{2}, \\ \delta_{1,2} &= \frac{N}{j}(1 \pm u_0)\sqrt{\frac{U \pm 2(2 \mp u_0)}{U - 6u_0}}, & U &= \sqrt{6(u_0^2 + 5)}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Параметром служит величина u_0 , меняющаяся в пределах от -1 до 1 .

Кривые $\Gamma_{j,N}^1$ и $\Gamma_{j,N}^3$ выходят из общей точки $(N/(j\sqrt{3}); -N/(j\sqrt{3}); N^2/(6j^2))$, а кривые $\Gamma_{j,N}^2$ и $\Gamma_{j,N}^4$ из общей точки $(-N/(j\sqrt{3}); -N/(j\sqrt{3}); N^2/(6j^2))$ при $u_0 = -1$. При $u_0 \rightarrow 1$ пары кривых $\Gamma_{j,N}^1$, $\Gamma_{j,N}^2$ и $\Gamma_{j,N}^3$, $\Gamma_{j,N}^4$ неограниченно приближаются друг к другу, при этом $\alpha_{1,2} \rightarrow +\infty$, $\beta_{1,2} \rightarrow +\infty$, $\alpha_{3,4} \rightarrow -\infty$, $\beta_{3,4} \rightarrow -\infty$, $\gamma_i \rightarrow +\infty$ ($i = 1 - 4$).

Найдем периодические движения возмущенной системы для значений параметров α, β, γ из малой окрестности кривых $\Gamma_{j,N}^i$. Ограничимся случаем $N = 1$, при котором резонансные эффекты проявляются уже в членах наименьшего порядка по ε . В случае резонанса в вынужденных колебаниях ($\omega \sim 1$) периодические движения будем строить в окрестности положения равновесия $\theta = \theta_0$, $p = 0$ невозмущенной системы, в остальных резонансных случаях до пятого порядка включительно — в окрестности 2π -периодического по τ движения [13, 14]

$$\tilde{\theta}(\tau) = \theta_0 - \frac{\varepsilon \sin \theta_0 \cos \tau}{\omega^2 - 1} + O(\varepsilon^2), \quad \tilde{p}(\tau) = \frac{\varepsilon \omega^2 \sin \theta_0 \sin \tau}{\omega^2 - 1} + O(\varepsilon^2), \quad (5.12)$$

рождающегося при $\varepsilon \neq 0$ из положения равновесия невозмущенной системы и описывающего нерезонансные вынужденные колебания оси волчка при колебаниях точки подвеса малой амплитуды. Резонансные эффекты в случае резонанса шестого порядка в данной постановке задачи не проявляются.

Полагая в гамильтониане (5.6) $\theta = \theta_0 + q$, $p = p$ в случае $\omega \sim 1$ или $\theta = \tilde{\theta}(\tau) + q$, $p = \tilde{p}(\tau) + p^*$ в случаях $j\omega_0 \sim 1$ ($j=2-5$), приведем функцию Гамильтона к виду (2.1), (2.5), (2.9), (2.12) или (2.15). В этих формулах следует положить $N = 1$, $t = \tau$, $\lambda = \omega + O(\varepsilon^2)$, $\varphi_0 = \pi/2$.

Коэффициенты c_3 вычисляются по второй формуле (5.10) вдоль кривых $\Gamma_{j,1}^i$; при фиксированном значении j эти коэффициенты одинаковы при всех $i = 1 - 4$. Расчеты показывают, что в каждом резонансном случае функция $c_3(u_0)$ вдоль рассматриваемых кривых монотонно возрастает на интервале $u_0 \in (-1; 1)$ от $-\infty$ до $+\infty$ и обращается в нуль в точке $u_0 = -0.6930552 \dots$ (рис. 8). Каждый резонансный коэффициент κ_j также имеет одинаковый вид на всех кривых $\Gamma_{j,1}^i$ при $i = 1 - 4$, причем [14]

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \sin \theta_0 / \sqrt{2} > 0, \quad \kappa_2 = 4\gamma^*(u_0)(1 - u_0^2) > 0, \\ \kappa_3 &= \frac{\sqrt{3}}{320 \sin \theta_0} [11664(1 - u_0^2)^2 \gamma^{*2}(u_0) - 108u_0(1 - u_0^2)\gamma^*(u_0) + (20 - 5u_0^2)] > 0, \end{aligned}$$

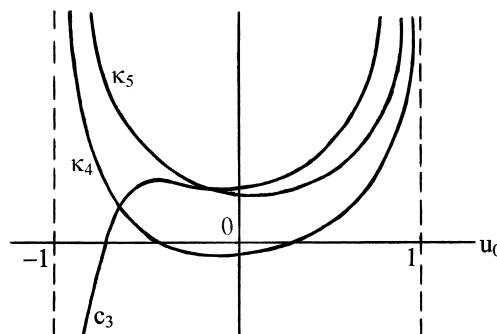


Рис. 8

Явный вид коэффициентов κ_4 и κ_5 на кривых $\Gamma_{4,1}^i$ и $\Gamma_{5,1}^i$ в силу громоздкости здесь не приводим. Графики зависимостей $\kappa_4(u_0)$ и $\kappa_5(u_0)$ на указанных кривых показаны на рис. 8. Функция $\kappa_4(u_0)$ имеет нули в точках $u_1 = -0.423498 \dots$ и $u_2 = 0.281682 \dots$; функция $\kappa_5(u_0)$ строго положительна при $u_0 \in (-1; 1)$.

Рассмотрим окрестность одной из кривых $\Gamma_{j,1}^i$, представляющую собой "трубку", состоящую из точек, удаленных от поверхности $c_2 = 0$ на расстояние $\sim \varepsilon^{2s_j}$ и от поверхности $\omega = 1$ (при $j = 1$) или $j\lambda = 1$ (при $j = 2 - 5$) на расстояние $\sim \varepsilon^{4s_j}$. Выберем произвольную точку (α, β, γ) внутри "трубки" и проведем через нее нормальную плоскость к кривой $\Gamma_{j,1}^i$, пересекающую кривую в точке с координатами $(\alpha_*, \beta_*, \gamma_*)$. Этой точке кривой отвечает значение $u_0 = u_0^*$ параметра u_0 , определяемое из соотношений (5.11). Разложим далее функции $\omega(\alpha, \beta, \gamma, u_0)$ (или $\lambda(\alpha, \beta, \gamma, u_0)$) и $c_2(\alpha, \beta, \gamma, u_0)$ в ряд, полагая $u_0 = u_0^* = \text{const}$, и используем соотношения раздела 2.1. Координаты (α, β, γ) рассматриваемой точки связаны с параметрами ν и μ соответствующей модельной системы уравнениями вида

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_* + \varepsilon^{2s_j} a_1 \nu + \varepsilon^{4s_j} a_2 \mu + \dots, \quad \beta = \beta_* + \varepsilon^{2s_j} b_1 \nu + \varepsilon^{4s_j} b_2 \mu + \dots \\ \gamma &= \gamma_* + \varepsilon^{2s_j} d_1 \nu + \varepsilon^{4s_j} d_2 \mu + \dots \end{aligned}$$

где a_k, b_k, d_k ($k = 1, 2$) — постоянные.

Эти соотношения задают преобразование плоскости параметров ν, μ в исследуемое сечение «трубки» нормальной плоскостью к кривой $\Gamma_{j,1}^i$. Области на рис. 1, *e*; 2, *u*; 3, *l*; 4, *ж*; 5, *u* перейдут в соответствующие области данного сечения. Рассматривая совокупность всех таких сечений, можно в окрестности кривой $\Gamma_{j,1}^i$ построить поверхности, разделяющие эту окрестность на области с различным числом периодических движений приведенной системы.

Эти периодические движения имеют вид (ср. с ф. (4.1))

$$\theta(\tau) = \hat{\theta}_0 + \varepsilon^{s_j} \sqrt{2jk_j \varrho_*} \sin[\tau/j + \sigma\theta_* + \pi(1 - \sigma - j)/(2j)] + O(\varepsilon^{2s_j}), \quad (5.14)$$

где $\hat{\theta}_0 = \theta_0$ при $j = 1$, $\hat{\theta}_0 = \tilde{\theta}(\tau)$ при $j = 2 - 5$, $\theta_0 = \arccos u_0^*$, а величины k_j определены в разделе 2.1.

Соотношение (5.14) вместе с уравнениями (5.7), в которые сделана подстановка $\theta = \theta(\tau)$ из (5.14), задают резонансные периодические движения волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса в окрестности его регулярной прецессии в случае вырождения невозмущенного гамильтониана приведенной системы.

Список литературы

- [1] Бордаков Г. А., Карпов И. И., Леонов В. В., Секерж-Зенькович С. Я., Шингарева И. К. *Приближенное решение задачи о параметрическом возбуждении поверхностных волн при глубине жидкости близкой к критической* // М.: Препринт Ин-та проблем механики РАН, 1993, № 526, 28 с.
- [2] Малкин И. Г. *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний* // М.: Гостехиздат, 1956, 492 с.
- [3] Маркеев А. П. *Резонанс третьего порядка в гамильтоновой системе с одной степенью свободы* // ПММ, 1994, т. 58, вып. 5, с. 37–48.
- [4] Маркеев А. П. *О поведении нелинейной гамильтоновой системы с одной степенью свободы на границе области параметрического резонанса* // ПММ, 1995, т. 59, вып. 4, с. 569–580.
- [5] Маркеев А. П. *Параметрический резонанс и нелинейные колебания тяжелого твердого тела в окрестности его плоских вращений* // Изв. РАН. Механика твердого тела, 1995, № 5, с. 34–44.
- [6] Маркеев А. П. *О критическом случае резонанса четвертого порядка в гамильтоновой системе с одной степенью свободы* // ПММ, 1997, т. 61, вып. 3, с. 369–376.
- [7] Маркеев А. П. *О динамике сферического маятника с вибрирующим подвесом* // ПММ, 1999, т. 63, вып. 2, с. 213–219.
- [8] Мозер Ю. *Лекции о гамильтоновых системах* // М.: Мир, 1973, 168 с.
- [9] Холостова О. В. *О движении гамильтоновой системы с одной степенью свободы при резонансе в вынужденных колебаниях* // Изв. РАН. Механика твердого тела, 1996, № 3, с. 167–175.
- [10] Холостова О. В. *Параметрический резонанс в задаче о нелинейных колебаниях спутника на эллиптической орбите* // Космич. исследования, 1996, т. 34, вып. 3, с. 312–316.
- [11] Холостова О. В. *О нелинейных колебаниях спутника при резонансе третьего порядка* // ПММ, 1997, т. 61, вып. 4, с. 556–565.
- [12] Холостова О. В. *О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы с одной степенью свободы при резонансе четвертого порядка* // ПММ, 1998, т. 62, вып. 6, с. 957–967.
- [13] Холостова О. В. *Динамика волчка Лагранжа с неподвижной и вибрирующей точкой подвеса. Учебное пособие* // М.: Изд-во МАИ, 2000, 84 с.
- [14] Холостова О. В. *О периодических движениях волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса* // Изв. РАН. Механика твердого тела, 2002, № 1, с. 34–48.