

Взаимодействие вихрей Кирхгофа и точечных вихрей в идеальной жидкости*

А. В. Борисов, И. С. Мамаев

Институт компьютерных исследований
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, Ижевск, ул. Университетская, 1
E-mail: borisov@ics.org.ru, mamaev@ics.org.ru

Получено 27 марта 2006 г.

В работе рассматривается взаимодействие двух вихревых пятен — эллиптических вихрей Кирхгофа, которые движутся в безграничном объеме идеальной несжимаемой жидкости. В качестве модели взаимодействия принята моментная модель второго порядка. Качественно исследован случай интегрируемости вихря Кирхгофа и точечного вихря методом разделения переменных. Указан новый случай интегрируемости двух вихрей Кирхгофа. Приведена редуцированная форма уравнений двух вихрей Кирхгофа, с помощью которой проведен анализ их регулярного и хаотического поведения.

Ключевые слова: вихри Кирхгофа, интегрируемость, гамильтониан, устойчивость, точечный вихрь

A. V. Borisov, I. S. Mamaev

Interaction between Kirchhoff vortices and point vortices in an ideal fluid

We consider the interaction of two vortex patches (elliptic Kirchhoff vortices) which move in an unbounded volume of an ideal incompressible fluid. A moment second-order model is used to describe the interaction. The case of integrability of a Kirchhoff vortex and a point vortex by the variable separation method is qualitatively analyzed. A new case of integrability of two Kirchhoff vortices is found. A reduced form of equations for two Kirchhoff vortices is proposed and used to analyze their regular and chaotic behavior.

Keywords: Kirchhoff vortices, integrability, Hamiltonian, stability, point vortex
Mathematical Subject Classifications: 76M23

*Работа выполнена в рамках программы «Государственная поддержка ведущих научных школ» (грант НШ-1312.2006.1), при поддержке РФФИ (гранты 04-05-64367 и 05-01-01058), CRDF (грант RU-M1-2583-M0-04) и INTAS (грант 04-80-7297).

1. Введение

Простейший пример плоского вихревого движения идеальной жидкости, отличный от модели точечных вихрей, был указан Кирхгофом [3]. Он заметил, что вихревое пятно в форме эллипса с полуосями a , b , которое имеет внутри равномерную завихренность ω , равномерно вращается вокруг своего центра с угловой скоростью $\Omega = \frac{\omega\lambda}{(1+\lambda)^2}$, $\lambda = \frac{a}{b}$. При этом частицы жидкости имеют абсолютное движение с удвоенной угловой скоростью (Ламб, 1932). Лордом Кельвином (1880) и Ловом (1893) было показано, что вихрь Кирхгофа является нейтрально устойчивым тогда и только тогда, когда $\frac{a}{b} < 3$.

В 1899 году С. А. Чаплыгин обобщил решение Кирхгофа, добавив в безграничную жидкость, окружающую эллиптический вихрь, равномерную фоновую завихренность (это так называемое простое сдвиговое течение Куэтта (Cuette)). Он получил, что вихрь будет вращаться с переменной угловой скоростью и менять свои очертания (пульсировать) по некоторому закону, который он указал, интегрируя систему двух нелинейных дифференциальных уравнений. Он также подробно исследовал поведение давления в жидкости в зависимости от времени.

Киды (Kida) (1981) [13] и Неу (Neu) (1984) [19] обобщили решение Чаплыгина, не зная о его работе [6]. Работы Чаплыгина по многим областям механики плохо известны на Западе, в недавнем историческом обзоре [18] обсуждаются забытые работы Чаплыгина по двумерным вихревым структурам. Суперпозиция решений Киды и Неу приведена в книге [20]. Оказывается, что динамика вихря Кирхгофа во внешнем поле скоростей, которое в пространстве с координатами x , y , z можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \\ \mathbf{u}_1 &= (\gamma_1 x, -\gamma_2 y, 0), \\ \mathbf{u}_2 &= (0, 0, \gamma_3 z), \\ \mathbf{u}_3 &= (-\gamma_4 y, \gamma_4 x, 0) \end{aligned} \quad (1.1)$$

при условии $\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 = 0$, полученном из условия несжимаемости, сводится к одностепенной неавтономной гамильтоновой системе. Предполагается, что эллиптическое пятно является сечением эллиптического цилиндра плоскостью xy . Из (1.1) решение Чаплыгина получается при $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_4 \neq 0$, $\gamma_3 = 0$; решение Киды — при $\gamma_3 = 0$, $\gamma_1 = \gamma_2$; решение Неу — при $\gamma_4 = 0$. Отметим, что \mathbf{u}_1 соответствует полю однородной деформации (которое приближенно индуцируется на расстоянии одного точечного вихря [23, 8]), поле \mathbf{u}_2 соответствует растяжению вдоль оси z , поле \mathbf{u}_3 — равномерному фоновому вращению. Возникающая гамильтонова система имеет вид

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}, \quad H(\lambda, \theta) = \ln \frac{(1+\lambda)^2}{\lambda} - \frac{1}{2} \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\omega(t)} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right) \sin 2\theta, \quad (1.2)$$

где точкой обозначено дифференцирование по новому времени $\tau = \omega(t) \left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1} \right) t$, где $\omega(t) = \omega_0 e^{(\gamma_2 - \gamma_1)t}$, ω_0 — начальная завихренность в вихре Кирхгофа. При $\gamma_1 = \gamma_2$ система (1.2) является автономной и интегрируется в квадратурах, ее качественный анализ имеется в [13, 19, 23, 8].

Если коэффициенты γ_i в (1.1) являются функциями времени (например, периодическими), то (при $\gamma_1 = \gamma_2$) получается гамильтонова система с полутора степенями свободы с периодическими возмущениями. С точки зрения расщепления сепаратрис и возникновения стохастичности она была исследована в [12, 7]. Задача адвекции пассивной частицы жидкости в поле скоростей

решения Киды рассмотрена в [22]. Исследование сечения Пуанкаре приводит к заключению, что адвекция является хаотической, т. е. имеется лагранжева турбулентность. Устойчивость эллиптического вихря в поле Киды (однородной деформации) изучена [9].

Наконец, укажем, что в работе [21] получено обобщенное решение Кирхгофа, представляющее собой семейство вложенных софокусных эллиптических вихрей с соответствующим распределением завихренности. В ней также получены условия устойчивости системы из двух софокусных эллиптических вихрей, обобщающие условия Кельвина — Лова.

2. Моментная модель взаимодействия вихрей Кирхгофа (динамики вихревых пятен)

Моментная модель второго порядка [15] является следующим по сложности приближением к описанию гидродинамической завихренности, по сравнению с моделью точечных вихрей. В рамках этой модели рассматриваются эллиптические пятна с заданной величиной завихренности, движущиеся в двумерной идеальной несжимаемой жидкости. Эта теория была предложена Меландером, Забуски и Стычком (МЗС или MZS модель) в работе [15], в работе [17] анализируется вращение двух вихрей Кирхгофа при наличии центральной симметрии. Несимметричная ситуация взаимодействия двух вихревых пятен рассматривается в [16], где та же моментная модель, описывающая слияние вихрей, сравнивается с псевдоспектральной моделью (в которой решаются уравнения Эйлера со слабой диссипацией).

Опишем эту модель более подробно. В основу моментной теории второго порядка, описывающей взаимодействие вихрей Кирхгофа, положены два основных предположения:

1. в процессе эволюции расстояние между вихрями существенно превышает размер вихрей, поэтому вихри сохраняют эллиптическую форму;
2. в разложении гамильтониана можно пренебречь моментами выше второго порядка.

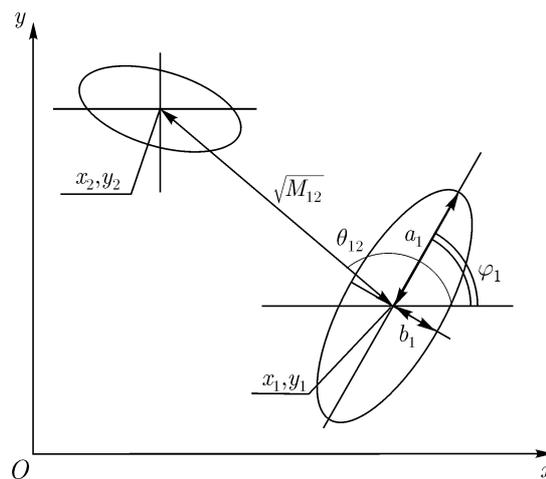


Рис. 1

При этих допущениях уравнения движения эллиптических вихрей могут быть представлены в гамильтоновом виде с нелинейной скобкой Пуассона [15]

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= \{x_k, H\}, \quad \dot{y}_k = \{y_k, H\}, \quad \dot{\varphi}_k = \{\varphi_k, H\}, \quad \dot{\lambda}_k = \{\lambda_k, H\}, \\ \{x_i, y_j\} &= \frac{1}{\Gamma_i} \delta_{ij}, \quad \{\varphi_i, \lambda_j\} = \frac{8\pi}{\Gamma_i S_i} \frac{\lambda_i^2}{1 - \lambda_i^2} \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

и гамильтонианом

$$\begin{aligned} H &= H_1 + H_2 + H_3, \\ H_1 &= -\frac{1}{8\pi} \sum_{k=1}^N \Gamma_k^2 \ln \frac{(1 + \lambda_k)^2}{4\lambda_k}, \quad H_2 = -\frac{1}{8\pi} \sum_{k,p}^N \Gamma_k \Gamma_p \ln M_{kp}, \\ H_3 &= -\frac{1}{32\pi^2} \sum_{k,p}^N \frac{\Gamma_k \Gamma_p}{M_{kp}} \left(S_p \frac{1 - \lambda_p^2}{\lambda_p} \cos(2(\theta_{kp} - \varphi_p)) + \right. \\ &\quad \left. + S_k \frac{1 - \lambda_k^2}{\lambda_k} \cos(2(\theta_{kp} - \varphi_k)) \right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где Γ_k, S_k — суммарная интенсивность и площадь эллиптического вихря с номером k ; M_{kp} — квадрат расстояния между центрами завихренности k -го и p -го вихрей ($M_{kp} = (x_k - x_p)^2 + (y_k - y_p)^2$), φ_k — угол наклона k -го эллипса к оси x ; θ_{kp} — угол между осью x и прямой, соединяющей центр k -го p -го эллипса (см. рис. 1).

Вследствие теоремы Кельвина о сохранении циркуляции в идеальной среде [2, 4], сохраняются площади каждого эллипса $S_k = \text{const}$, которые таким образом являются параметрами рассматриваемой модели.

Составляющие гамильтониана имеют следующий физический смысл:

H_1 — описывает действие эллиптического вихря на себя, см. (1.2);

H_2 — описывает взаимодействие эквивалентных точечных вихрей;

H_3 — описывает взаимодействие вихрей, обусловленное учетом моментов второго порядка.

Помимо гамильтониана H , уравнения (2.1), обладают *некоммутативным* набором первых интегралов

$$Q = \sum_k^N \Gamma_k x_k, \quad P = \sum_k^N \Gamma_k y_k, \quad I = \sum_k^N \Gamma_k \left[x_k^2 + y_k^2 + \frac{S_k}{4\pi} \frac{1 + \lambda_k^2}{\lambda_k} \right], \quad (2.3)$$

выражающими трансляционную и вращательную инвариантность системы в абсолютном пространстве.

Интегралы Q, P, I коммутируют следующим образом:

$$\{Q, P\} = \sum_{i=1}^N \Gamma_i, \quad \{P, I\} = -2Q, \quad \{Q, I\} = 2P, \quad (2.4)$$

их не хватает для интегрируемости даже системы двух вихрей Кирхгофа, далее мы редуцируем эту систему к двум степеням свободы. Однако задача о динамике одного вихря Кирхгофа и точечного вихря (система с тремя степенями свободы) является интегрируемой.

В работах Д. Дритчела и Б. Леграса [10, 11] предложена несколько более общая модель взаимодействия эллиптических вихревых пятен. В некотором смысле она является промежуточной между МЗС-моделью и точным описанием, задаваемым методом контурной динамики (в методе контурной динамики эллиптичность пятна уже не сохраняется, а при выводе модели [10, 11] отбрасывается как раз поле скоростей, ответственное за неэллиптическую часть взаимодействия). Однако эта модель является более сложной и во многих случаях достаточно пользоваться МЗС-моделью.

3. Взаимодействие вихря Кирхгофа с N точечными вихрями. Интегрируемый случай при $N = 1$

Обозначим координаты центра эллиптического вихря (x_0, y_0) , а точечных вихрей (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, N$; уравнения, описывающие динамику этой системы, также записываются в гамильтоновой форме со скобкой Пуассона и гамильтонианом вида

$$\begin{aligned} \{x_i, y_i\} &= \Gamma_i^{-1} \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \dots, N, \quad \{\varphi, \lambda\} = \frac{8\pi}{\Gamma_0 S} \frac{\lambda^2}{1 - \lambda^2}, \\ H &= H_1 + H_2 + H_3, \\ H_1 &= -\frac{1}{8\pi} \Gamma_0^2 \ln \frac{(1 + \lambda)^2}{4\lambda}, \quad H_2 = -\frac{1}{8\pi} \sum_{k,p=0}^N \Gamma_k \Gamma_p \ln M_{kp}, \\ H_3 &= -\frac{\Gamma_0 S}{16\pi^2} \sum_{k=1}^N \frac{\Gamma_k}{M_{k0}} \frac{1 - \lambda^2}{\lambda} \cos 2(\theta_k - \varphi), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где Γ_0 — интенсивность вихря Кирхгофа с отношением полуосей λ и углом φ , определяющим его ориентацию (см. рис. 1), а также площадью S , θ_k — угол между осью x и прямой, соединяющей центр вихря Кирхгофа с k -м точечным вихрем, $M_{kp} = (x_k - x_p)^2 + (y_k - y_p)^2$. В дальнейшем, без потери общности, будем полагать, что интенсивность вихря Кирхгофа положительна, $\Gamma_0 > 0$.

Интегралы движения, соответствующие группе движений плоскости $E(2)$, задаются соотношениями (2.3), в которых необходимо положить $S_0 = S$, $S_i = 0$, $i = 1, \dots, N$; их коммутационные соотношения аналогичны (2.4). Как следствие существования интегралов, получаем [14]:

Предложение. Система взаимодействующих вихрей Кирхгофа и одного точечного вихря ($N = 1$) вполне интегрируема.

Это было впервые показано в работе [14] и несколько позже независимо установлено в [24]. Мы здесь приведем геометрический анализ движения вихрей, уточняющий результаты [14].

Для явного интегрирования и качественного анализа выполним приведение к одной степени свободы; рассмотрим новые (относительные) переменные

$$\psi = 2(\theta - \varphi), \quad \rho = \frac{1}{2}c\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right), \quad z = M_{10} = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2, \tag{3.2}$$

где $c = \frac{\Gamma_0 S}{8\pi}$. Переменные (3.2) коммутируют с интегралами (2.3), т. е. являются инвариантами группы движений плоскости $E(2)$, и замкнуты относительно скобки Пуассона

$$\{\psi, \rho\} = 1, \quad \{\psi, z\} = -4(\Gamma_0^{-1} + \Gamma_1^{-1}), \quad \{\rho, z\} = 0. \tag{3.3}$$



Пуассонова структура (3.3) обладает линейной функцией Казимира

$$D = \Gamma_0 z + 4(1 + \alpha)\rho, \quad \alpha = \Gamma_0^{-1}\Gamma_1. \tag{3.4}$$

Исключая z с помощью (3.4), получим с точностью до постоянных слагаемых гамильтониан приведенной системы (с одной степенью свободы):

$$H_{\mp} = \frac{\Gamma_0^2}{8\pi} \left(-\ln(c + \rho) - 2\alpha \ln(D - 4(1 + \alpha)\rho) \mp 8\alpha \frac{\sqrt{\rho^2 - c^2}}{D - 4(1 + \alpha)\rho} \cos \psi \right), \tag{3.5}$$

причем, согласно (3.3), переменные ψ, ρ канонические.

Различные знаки в гамильтониане (3.5) возникли вследствие неоднозначности обратной замены (3.2) для $\rho(\lambda)$, которая имеет вид

$$\lambda = \begin{cases} \frac{\rho - \sqrt{\rho^2 - c^2}}{c}, & 0 < \lambda \leq 1 \\ \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 - c^2}}{c}, & \lambda > 1 \end{cases} \tag{3.6}$$

(верхний знак в (3.5) соответствует случаю $\lambda < 1$).

Аналогично выполняется редукция (на две степени свободы) при произвольном N . Новые переменные приведенной системы можно выбрать следующим образом:

$$\psi_k = 2(\theta_k - \varphi), \quad \rho = \frac{1}{2}c(\lambda + \lambda^{-1}),$$

$$M_{ik} = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2, \quad i = 0, \dots, N, \quad k = 1, \dots, N.$$

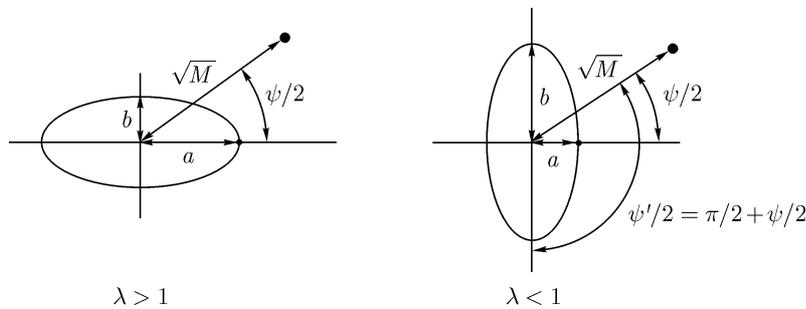


Рис. 2. Взаимное расположение эллиптического и точечного вихрей по отношению к некоторой выделенной точке на контуре эллиптического вихря в случае $\lambda < 1$ и $\lambda > 1$

Качественный анализ относительного движения при $N = 1$. Согласно (3.2), область изменения переменных ψ, ρ определяется неравенствами

$$0 \leq \psi < 4\pi, \quad c \leq \rho.$$

Причем каждой точке этой полуплоскости соответствует пара возможных взаимных расположений эллиптического и точечного вихря (3.6), соответствующих $\lambda < 1$ и $1 < \lambda$ (см. рис. 2).

Можно показать, что соотношение

$$\rho = c, \quad \text{т. е. } \lambda = 1,$$

определяет частное решение системы (3.5), соответствующее взаимодействию кругового (вихрь Рэнкина) и точечного вихря.

Траектории приведенной системы задаются линиями уровня гамильтониана (3.5), следовательно, траектории системы в областях $\lambda < 1$ и $\lambda > 1$ получаются при помощи замены

$$\psi \rightarrow \psi + \pi, \quad \rho \rightarrow \rho.$$

Кроме того, гамильтониан (3.5) 2π -периодичен по ψ . Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением линий уровня гамильтониана H_- в полуполосе

$$0 \leq \psi < 2\pi, \quad c \leq \rho.$$

Выполняя нормировку переменной и интеграла

$$\rho = c\tilde{y}, \quad D = 4c|1 + \alpha|\tilde{D} \tag{3.7}$$

и исключая в (3.5) «несущественные» константы, находим, что траектории системы определяются линиями уровня функции

$$\tilde{H}_- = -\ln(1 + \tilde{y}) - 2\alpha \ln(\tilde{D} - \tilde{y}) - \frac{2\alpha}{1 + \alpha} \frac{\sqrt{\tilde{y}^2 - 1}}{\tilde{D} - \tilde{y}} \cos \psi, \quad 1 + \alpha > 0, \tag{3.8}$$

$$\tilde{H}_- = -\ln(1 + \tilde{y}) - 2\alpha \ln(\tilde{D} + \tilde{y}) - \frac{2\alpha}{|1 + \alpha|} \frac{\sqrt{\tilde{y}^2 - 1}}{\tilde{D} + \tilde{y}} \cos \psi, \quad 1 + \alpha < 0.$$

Согласно [15], уравнения, описывающие динамику вихря Кирхгофа, взаимодействующего с точечным вихрем, справедливы лишь на достаточно большом удалении от вихря Кирхгофа. Не указывая точно область применимости получающихся результатов, приведем здесь траектории приведенной системы (3.5) и отметим область, занятую вихрем Кирхгофа. В соответствии с (3.4), (3.7) область, заполненная эллиптическим вихрем, на плоскости ψ, \tilde{y} определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \tilde{D} - \tilde{y} &\leq \frac{2}{1 + \alpha} (\tilde{y} - \sqrt{\tilde{y}^2 - 1} \cos \psi), \quad 1 + \alpha > 0, \\ \tilde{D} + \tilde{y} &\leq \frac{2}{|1 + \alpha|} (\tilde{y} - \sqrt{\tilde{y}^2 - 1} \cos \psi), \quad 1 + \alpha < 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

На рисунках, приводимых ниже, область, занятая вихрем Кирхгофа, заштрихована.

Устойчивость кругового вихря. Сделаем каноническую замену переменных

$$\tilde{y} = 1 + \frac{u^2 + v^2}{2}, \quad \psi = \arctg \frac{u}{v}. \tag{3.10}$$

Тогда гамильтониан (3.8) вблизи $\tilde{y} = 1$ запишется в виде

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \text{const} - \frac{2\sqrt{2}\alpha}{(1 + \alpha)(\tilde{D} - 1)} v - \frac{1}{2} \frac{\tilde{D} - 1 - 4\alpha}{\tilde{D} - 1} (u^2 + v^2) + \dots, \quad 1 + \alpha > 0; \\ \tilde{H} &= \text{const} + \frac{2\sqrt{2}\alpha}{(1 + \alpha)(\tilde{D} + 1)} v - \frac{1}{2} \frac{\tilde{D} + 1 + 4\alpha}{\tilde{D} + 1} (u^2 + v^2) + \dots, \quad 1 + \alpha < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, после отождествления (3.10) мы получаем, что начало координат $u = v = 0$ не является неподвижной точкой, т. е. круговой вихрь в присутствии точечного вихря локально неустойчив по отношению к эллиптическим деформациям.

Опишем качественно строение фазового портрета на плоскости ψ, \tilde{y} при различных значениях параметров α, \tilde{D} . Из (3.4) и (3.8) следует, что в зависимости от знака величины $(1 + \alpha)$ меняется фазовое пространство приведенной системы и соответствующие фазовые портреты. Рассмотрим отдельно каждый случай.

Случай $1 + \alpha > 0$ (рис. 3). В этом случае фазовым пространством является прямоугольник на плоскости ψ, \tilde{y} :

$$0 \leq \psi < 2\pi, \quad 1 \leq \tilde{y} < \tilde{D}. \quad (3.11)$$

Противоположные стороны этого прямоугольника $\psi = 0$ и $\psi = 2\pi$ отождествляются. Отрезку $\tilde{y} = 1$ соответствует случай кругового вихря Кирхгофа, а $\tilde{y} = \tilde{D}$ — случай, когда точечный вихрь находится в центре эллиптического. В обоих случаях теряет смысл определение угла ψ (т. е. эта особенность типа начала координат в полярных координатах). В этом случае фазовое пространство может быть отождествлено с двумерной сферой.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Явный вид отождествления для сферы $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$, вложенной в \mathbb{R}^3 , можно задать, например, следующим образом

$$\xi_3 = \frac{2\tilde{y} - \tilde{D} - 1}{\tilde{D} - 1}, \quad \xi_1 = \sqrt{1 - \xi_3^2} \cos \psi, \quad \xi_2 = \sqrt{1 - \xi_3^2} \sin \psi. \quad (3.12)$$

Характерный вид фазовых портретов приведен на рисунке 3, при этом выделяются три различных области параметров. Он полностью определяется критическими точками функции Гамильтона (3.8), которые, как следует из (3.8), располагаются на прямых $\psi = 0, \psi = \pi$. Это соответствует тому, что точечный вихрь располагается на продолжении главных осей эллиптического вихря Кирхгофа.

На каждой прямой $\psi = 0$ и $\psi = \pi$ (в невырожденном случае) может быть либо 0, либо 2 критические точки функции (3.8).

В области (3.11) может быть либо 2, либо 0 (невырожденных) критических точек функции (3.8), не лежащих на прямых $\tilde{y} = 1, \tilde{y} = \tilde{D}$. Обе критические точки лежат либо на прямой $x = 0$, либо на прямой $x = \pi$. Критическая точка, ближайшая к отрезку \tilde{y} , всегда соответствует устойчивой неподвижной точке приведенной системы.

В рамках рассматриваемой модели можно сформулировать критерий глобальной устойчивости вихря Кирхгофа при $1 + \alpha > 0$

если функция Гамильтона имеет критические точки в области (3.11), то вихрь Рэнкина глобально устойчив.

Действительно, как видно из рис. 3, в этом случае всегда имеется инвариантная кривая, ограничивающая величину деформации вихря Кирхгофа и препятствующая его слиянию с точечным вихрем.

Случай $1 + \alpha < 0$ (рис. 4). В этом случае область движений на плоскости ψ, \tilde{y} некомпактна:

$$0 \leq \psi < 2\pi, \quad \tilde{y} \geq \max(1, -\tilde{D}) = \tilde{y}_0.$$

Выполняя (каноническую) замену координат

$$\tilde{y} = \tilde{y}_0 + \frac{u^2 + v^2}{2}, \quad \psi = \operatorname{arctg} \frac{u}{v},$$

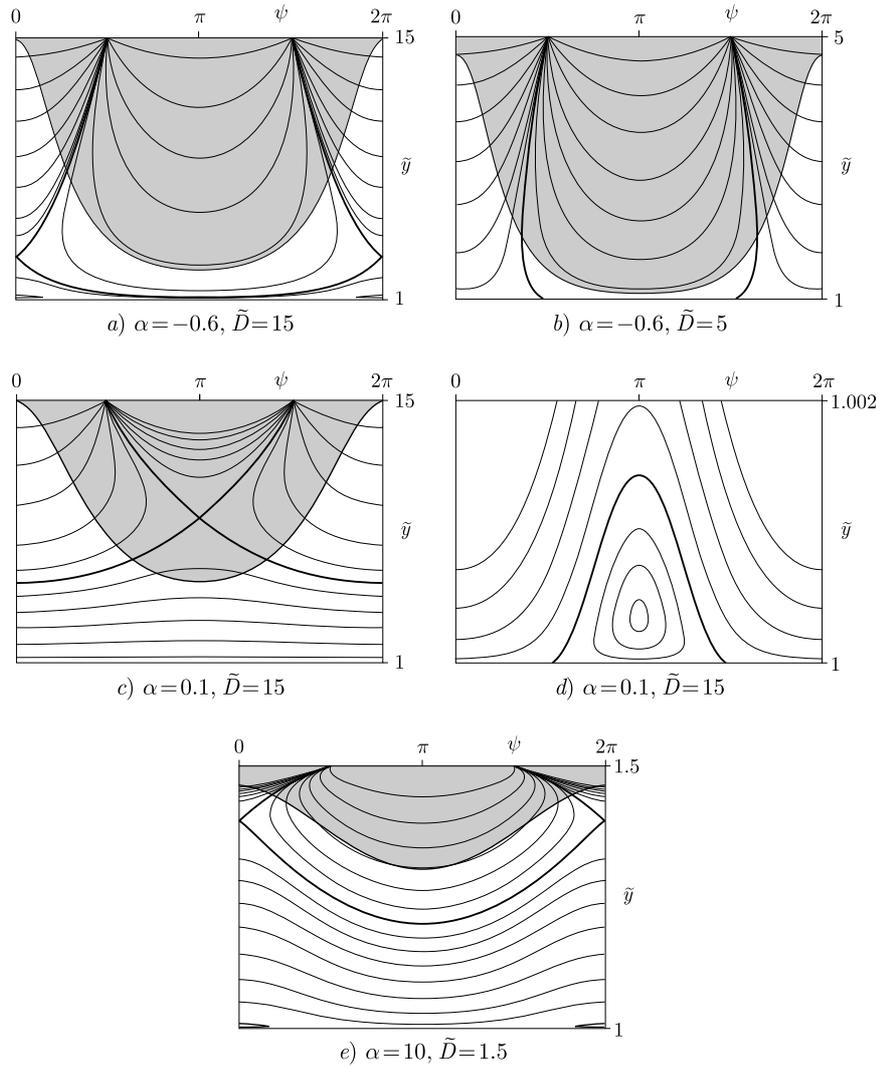


Рис. 3. Фазовые портреты при $1 + \alpha > 0$ (серым цветом отмечена область занятая вихрем Кирхгофа). Рисунок *d*) — увеличение рисунка *c*) вблизи нижнего отрезка.

получаем, что фазовым пространством является плоскость (u, v) , а прямой $\tilde{y} = \tilde{y}_0$ соответствует начало координат. Как и выше, оно является неустойчивой неподвижной точкой портрета (рис. 4*a, b*). Строение фазового портрета (вид области, занятой вихрем Кирхгофа) зависит от знака \tilde{D} .

При $\tilde{D} > 0$ на прямой $\psi = \pi$ имеется устойчивое периодическое решение (рис. 4*a*). При $\tilde{D} < 0$ имеется неустойчивое периодическое решение при $\psi = 0$ (рис. 4*b*).

Случай 1 + $\alpha = 0$ (вихревая пара). Замена (3.7) в этом случае неопределена, поэтому выполним нормировку

$$\rho = c\tilde{y}, \quad D = 4c\tilde{D} = \Gamma_0 M_{10} = \text{const}. \tag{3.13}$$

Таким образом, в этом случае расстояние между вихрями остается постоянным ($M_{10} = \text{const}$), а меняются лишь взаимное расположение вихрей и положение полуосей (ψ, \tilde{y}) . Переменные ψ, \tilde{y} определены в полуполосе

$$0 \leq \psi \leq 2\pi, \quad 1 < \tilde{y}.$$

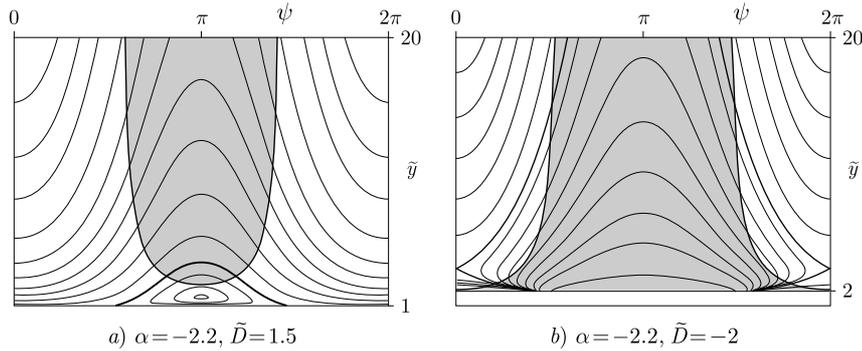


Рис. 4. Фазовые портреты при $1 + \alpha < 0$ (серым цветом закрашена область, занятая вихрем Кирхгофа).

В этом случае траектории определяются линиями уровня гамильтониана H_- в (3.5), который после исключения постоянных можно записать в виде

$$\tilde{H}_- = -\ln(1 + \tilde{y}) + \frac{2}{\tilde{D}} \sqrt{\tilde{y}^2 - 1} \cos \psi, \tag{3.14}$$

Область, занятая эллиптическим вихрем на плоскости переменных, определяется неравенством

$$\tilde{D} \geq 2(\tilde{y} - \sqrt{\tilde{y}^2 - 1} \cos \psi). \tag{3.15}$$

Отсюда следует, что при $\tilde{D} < 0$ вся плоскость (ψ, \tilde{y}) занята эллиптическим вихрем, поэтому будем полагать $\tilde{D} > 0$.

При $\tilde{D} < \tilde{D}_* = \sqrt{22 + 10\sqrt{5}}$ на фазовом портрете отсутствуют периодические решения (рис. 5 a).

При $\tilde{D} > \tilde{D}_*$ на портрете появляются два периодических решения на оси $\psi = 0$, одно из них устойчивое, а другое — нет (рис. 5 b, c)

4. Взаимодействие двух вихрей Кирхгофа

Приведение к системе с двумя степенями свободы. Динамика двух вихрей Кирхгофа описывается гамильтонианом (2.2), который можно представить в форме

$$\begin{aligned} H &= H_1 + H_2 + H_3, \\ H_1 &= -\frac{\Gamma_1^2}{8\pi} \ln \frac{(1 + \lambda_1)^2}{4\lambda_1} - \frac{\Gamma_2^2}{8\pi} \ln \frac{(1 + \lambda_2)^2}{4\lambda_2}, \\ H_2 &= -\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi} \ln M, \\ H_3 &= -\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{16\pi^2 M} \left(\frac{S_1(1 - \lambda_1^2)}{\lambda_1} \cos 2(\theta - \varphi_1) - \frac{S_2(1 - \lambda_2^2)}{\lambda_2} \cos 2(\theta - \varphi_2) \right), \\ M &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2, \quad \theta = \theta_{12} = \pi + \theta_{21} = \arctg \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Частное решение системы (4.1), при котором $\Gamma_1 = \Gamma_2$ и вихри во время движения центрально-но-симметричны относительно друг друга, указано и исследовано в [17]. В этой работе указаны

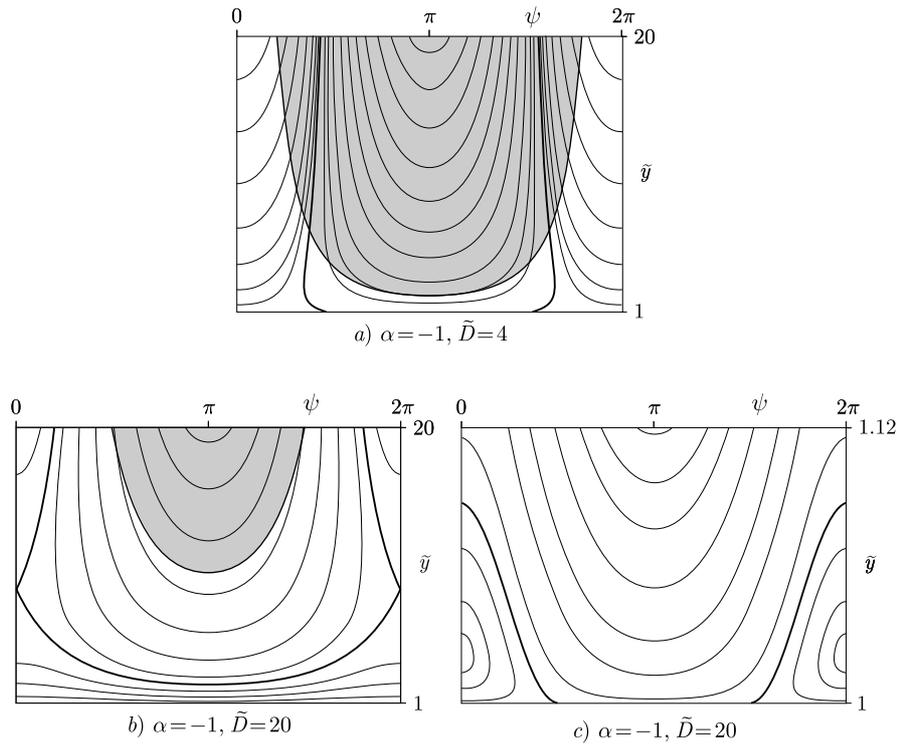


Рис. 5. Фазовый портрет при $1 + \alpha = 0$ (серым цветом закрашена область, занятая вихрем Кирхгофа). Рисунок *c* — увеличение рисунка *b* вблизи нижнего отрезка.

условия слияния двух вихревых пятен, которые, как оказывается, в рамках моментной модели, эквивалентны коллапсу двух вихрей Кирхгофа, при котором их центры начинают совпадать через конечное время.

Рассмотрим систему относительных переменных

$$\begin{aligned} \psi_i &= 2(\theta - \varphi_i), \quad \rho_i = \frac{c_i}{2} \left(\lambda_i + \frac{1}{\lambda_i} \right), \quad c_i = \frac{\Gamma_i S_i}{8\pi}, \quad i = 1, 2; \\ z &= \frac{1}{4}M. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Эти переменные коммутируют с интегралами (2.3), замкнуты относительно скобки Пуассона (2.1) и их коммутационные соотношения имеют вид

$$\{\psi_i, \rho_i\} = \delta_{ij}, \quad \{\psi_i, z\} = -(\Gamma_1^{-1} + \Gamma_2^{-1}), \quad \{\rho_i, z\} = 0, \quad i, j = 1, 2. \tag{4.3}$$

Пуассонова структура (4.3) обладает линейной функцией Казимира (интегралом движения)

$$D = z + (\Gamma_1^{-1} + \Gamma_2^{-1})(\rho_1 + \rho_2). \tag{4.4}$$

Как следует из (4.3), (4.4) в случае вихревой пары ($\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$) расстояние между центрами вихрей сохраняется.

Исключая z с помощью интеграла (4.4) и выражая гамильтониан (4.1) через переменные ψ_1, ρ_1 , получим гамильтониан приведенной канонической системы с двумя степенями свободы:

$$H = -\frac{\Gamma_1^2}{8\pi} \ln(c_1 + \rho_1) - \frac{\Gamma_2^2}{8\pi} \ln(c_2 + \rho_2) - \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{4\pi} \ln(D - (\Gamma_1^{-1} + \Gamma_2^{-1})(\rho_1 + \rho_2)) - \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{4\pi(D - (\Gamma_1^{-1} + \Gamma_2^{-1})(\rho_1 + \rho_2))} \left(\pm \frac{\sqrt{\rho_1^2 - c_1^2}}{\Gamma_1} \cos \psi_1 \mp \frac{\sqrt{\rho_2^2 - c_2^2}}{\Gamma_2} \cos \psi_2 \right), \quad (4.5)$$

где верхний знак соответствует условию $\lambda_i > 1$, а нижний $0 < \lambda_i \leq 1$, см. (3.6).

Абсолютное движение. Укажем уравнения, определяющие положения центров (x_1, y_1) и (x_2, y_2) и ориентацию φ_1, φ_2 двух вихрей Кирхгофа в неподвижном пространстве, если их относительное расположение, определяемое системой (4.5), считается известным: $\rho_i = \rho_i(t), \psi_i = \psi(t), i = 1, 2$. Непосредственными вычислениями можно показать, что углы наклона (больших) главных полуосей эллипса определяются квадратурами

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\Gamma_i c_i}{S_i} \frac{\rho_i + \sqrt{\rho_i^2 - c_i^2}}{(\rho_i + c_i + \sqrt{\rho_i^2 - c_i^2})^2} - \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{2\pi \Gamma_i M} \frac{(\rho_i + \sqrt{\rho_i^2 - c_i^2}) \rho_i \cos \psi_i}{\rho_i^2 - c_i^2 + \rho_i \sqrt{\rho_i^2 - c_i^2}}. \quad (4.6)$$

Если $\Gamma_1 + \Gamma_2 \neq 0$, то положение центров вихрей может быть найдено из системы линейных уравнений с коэффициентами, явно зависящими от времени:

$$x_1 = \frac{Q + \Gamma_2 \Delta x}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, \quad x_2 = \frac{Q - \Gamma_1 \Delta x}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, \quad y_1 = \frac{P + \Gamma_2 \Delta y}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, \quad y_2 = \frac{P - \Gamma_1 \Delta y}{\Gamma_1 + \Gamma_2};$$

$$\Delta \dot{x} = -\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{\pi^2 M^2} \left(\frac{\pi M}{2} \Delta y + \frac{S_1 \sqrt{\rho_1^2 - c_1^2}}{4c_1} (\Delta x \sin \psi_1 + \Delta y \cos \psi_1) + \frac{S_2 \sqrt{\rho_2^2 - c_2^2}}{4c_2} (\Delta x \sin \psi_2 + \Delta y \cos \psi_2) \right); \quad (4.7)$$

$$\Delta \dot{y} = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{\pi^2 M^2} \left(\frac{\pi M}{2} \Delta x + \frac{S_1 \sqrt{\rho_1^2 - c_1^2}}{4c_1} (\Delta x \cos \psi_1 - \Delta y \sin \psi_1) + \frac{S_2 \sqrt{\rho_2^2 - c_2^2}}{4c_2} (\Delta x \cos \psi_2 - \Delta y \sin \psi_2) \right)$$

где $\Delta x = x_1 - x_2, \Delta y = y_1 - y_2, Q, P$ — интегралы (2.3).

Интегрируемый случай при $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$. В случае вихревой пары $\Gamma_1 = -\Gamma_2$ гамильтониан (4.5) распадается на два независимых гамильтониана

$$H = H_1(\psi_1, \rho_1) + H_2(\psi_2, \rho_2),$$

так что система интегрируется методом разделения переменных. Таким образом, получаем новый нетривиальный интегрируемый случай в динамике вихрей. Этот случай интегрируемости впервые был указан нами в обзоре [1]. Как следует из уравнений (4.7), при этом

$$x_1 - x_2 = \text{const}, \quad y_1 - y_2 = \text{const},$$

и, следовательно, $\theta = \operatorname{arctg} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{const}$. Таким образом, отрезок, соединяющий центры вихрей, сохраняет свою длину и ориентацию во время движения (см. рис. 1).

Сечение Пуанкаре и интегрируемость. В общем случае система (4.5) является неинтегрируемой. Об этом свидетельствуют хаотические траектории, построенные при $\Gamma_1 = \Gamma_2$ с помощью сечения Пуанкаре, приведенные на рис. 6. Следует отметить, что для взаимодействия вихрей Кирхгофа существует мало возвращающихся траекторий, что обуславливает сложность численного анализа. На рис. 7 приведены построенные численно сепаратрисы гиперболической

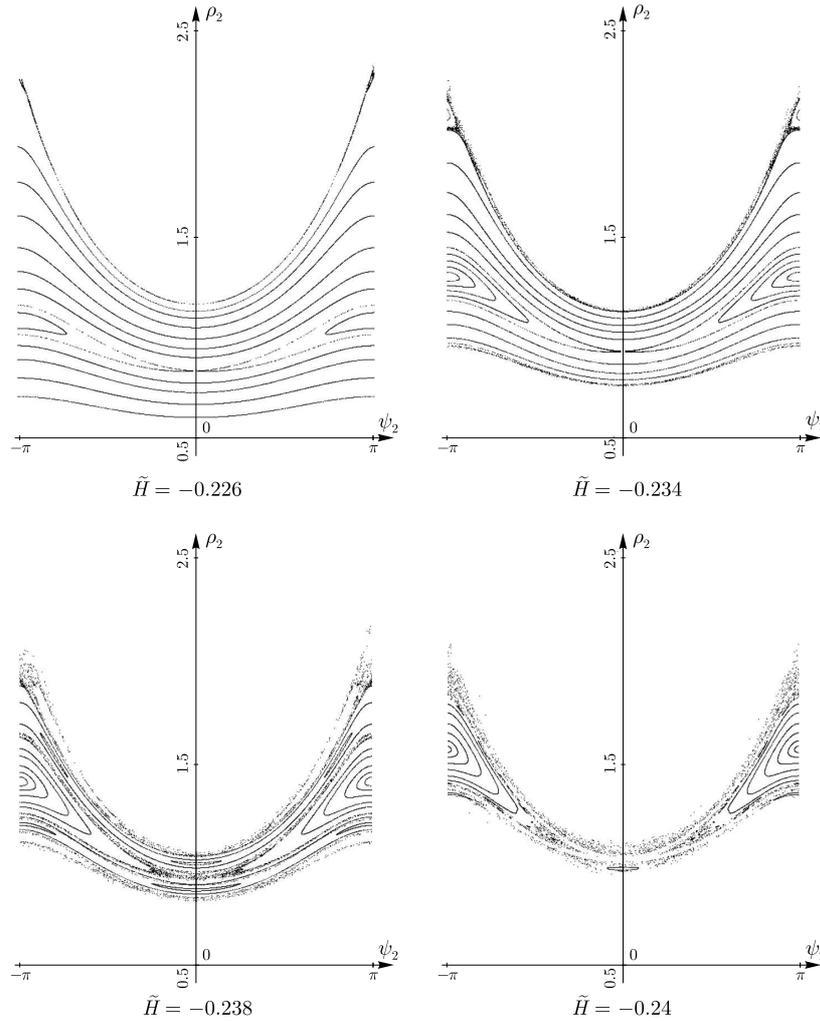


Рис. 6. Отображение Пуанкаре для приведенной системы (4.5) в задаче двух эллиптических вихрей. Выбрано сечение плоскостью $\psi_1 = 0$ при следующих значениях параметров: $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$, $S_1 = S_2 = 0.3$ и $D = 22$.

неподвижной точки отображения Пуанкаре. Их трансверсальное пересечение (устанавливаемое с помощью компьютерного анализа) свидетельствует о неинтегрируемости задачи о движении вихрей Кирхгофа, предположение о которой было высказано в [15]. Аналитически неинтегрируемость двух вихрей Кирхгофа в рамках моментной модели второго порядка пока не доказана.

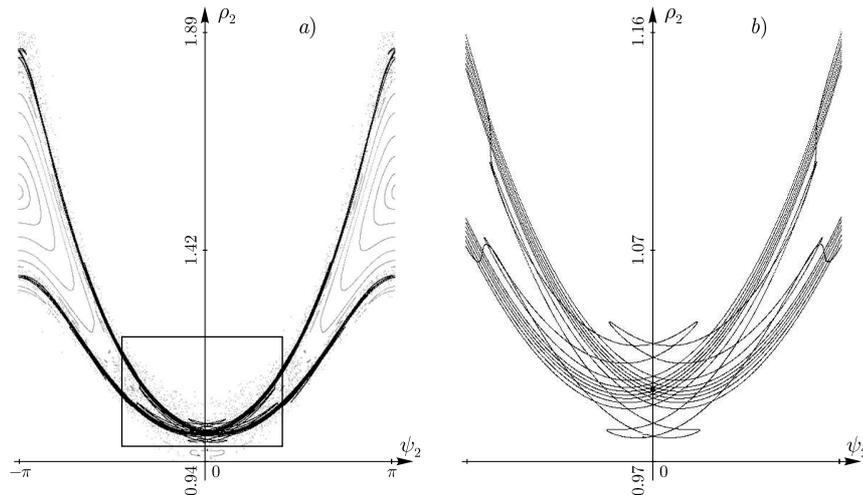


Рис. 7. Сепаратрисы для последнего фазового портрета, приведенного на рис. 6 ($\tilde{H} = -0.24$). Рисунок *b* — это увеличение центральной части рисунка *a*.

Список литературы

- [1] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Математические методы динамики вихревых структур*. В кн.: *Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей* (Под ред.: А. В. Борисова, И. С. Мамаева и М. А. Соколовского). Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, 704 с.
- [2] Вилля А. *Теория вихрей*. М.-Л.: ОНТИ, 1936. Пер. с фр.: Villat H. *Lecons sur la theorie des tourbillions*. Gauthier-Villars, 1930.
- [3] Кирхгоф Г. *Механика. Лекции по математической физике*. М.: АН СССР, 1962. Пер. с нем.: Kirchhoff G. *Vorlesungen über mathematische Physik*. Mechanik, Leipzig, 1874.
- [4] Ламб Г. *Гидродинамика*. ОГИЗ, Гостехиздат, 1947. Пер. с англ.: Lamb H. *Hydrodynamics*. Ed. 6-th., N. Y. Dover publ., 1945.
- [5] Сэффмэн Ф. Дж. *Динамика вихрей*. М.: Научный мир, 2000. Пер. с англ.: Saffman P. G. *Vortex Dynamics*. Camb. Univ. Press, 1992.
- [6] Чаплыгин С. А. *О пульсирующем цилиндрическом вихре*. Собрание сочинений. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948, с. 138–154.
- [7] Bertozzi A. L. *Heteroclinic orbits and chaotic dynamics in planar fluid flows* // SIAM J. Math. Anal., 1988, Vol. 19, No 6, p. 1271–1294.
- [8] Dhanak M. R., Marshall M. P. *Motion of an elliptical vortex under applied periodic strain* // Phys. Fluids A, 1993, Vol. 5, No 5, p. 1224–1230.
- [9] Dritschel D. G. *The stability of elliptical vortices in an external straining flow* // J. Fluid Mech., 1990, Vol. 210, p. 223–261.
- [10] Dritschel D. G., Legras B. *The elliptical model of two-dimensional vortex dynamics, I, The basic state* // Phys. Fluids A, 1991, Vol. 3, No 5, p. 845–854.
- [11] Dritschel D. G., Legras B. *The elliptical model of two-dimensional vortex dynamics, I, Disturbance equations* // Phys. Fluids A, 1991, Vol. 3, No 5, p. 855–869.

- [12] Ide K., Wiggins S. *The dynamics of elliptically shaped regions of uniform vorticity in time-periodic, linear external velocity fields* // Fluid Dyn. Res., 1995, Vol. 15, p. 205–235.
- [13] Kida S. *Motion of an elliptical vortex in a uniform shear flow* // J. Phys. Soc. Japan, 1981, Vol. 50, p. 3517–3520.
- [14] Lebedev V. G. *A qualitative analysis of a joint dynamics of Kirchhoff and a point vortices* // Reg. & Chaot. Dyn., 1999, Vol. 4, No 3, p. 70–81.
- [15] Melander M. V., Zabusky N. J., Styczek A. S. *A moment model for vortex interactions of two-dimensional Euler equation. Part I. Computational validation of hamiltonian elliptical representation* // J. Fluid. Mech., 1986, Vol. 167, p. 95–115.
- [16] Melander M. V., Zabusky N. J., McWilliams J. C. *Asymmetric vortex merger in two dimensions: which vortex is «victorious»?* // Phys. Fluids, 1987, Vol. 30, No 9, p. 2610–2612.
- [17] Melander M. V., Zabusky N. J., McWilliams J. C. *Symmetric vortex merger in two dimensions: causes and conditions* // J. Fluid. Mech., 1988, Vol. 195, p. 303–340.
- [18] Meleshko V. V., van Heijst G. J. I. *On Chaplygin's investigations of two-dimensional vortex structures in an inviscid fluid* // J. Fluid Mech., 1994, Vol. 272, p. 157–182.
- [19] Neu J. *The dynamics of columnar vortex in an imposed strain* // Phys. Fluids, 1984, Vol. 27, No 10, p. 2397–2402.
- [20] Newton P. K. *The N-Vortex problem. Analytical Techniques*. Springer, 2001.
- [21] Polvani L. M., Flierl G. R. *Generalized Kirchhoff vortices* // Phys. Fluids, 1986, Vol. 29, No 8, p. 2376–2379.
- [22] Polvani L. M., Wisdom J. *Chaotic Lagrangian trajectories around an elliptical vortex path embedded in a constant and uniform background shear flow* // Phys. Fluids A, 1990, Vol. 2, No 2, p. 123–126.
- [23] Riccardi G., Piva R. *Motion of an elliptical vortex under rotating strain: condition for asymmetric merging* // Fluid Dyn. Res., 1998, Vol. 23, p. 63–88.
- [24] Riccardi G., Piva R. *The interaction of an elliptical path with a point vortex* // Fluid Dyn. Res., 2000, Vol. 27, p. 269–289.