УДК 530.145

# Квантовый хаос*

**Ф. Штайнер**
II. Institut für Theoretische Physik
Universität Hamburg
Luruper Chaussee 149, B-22761 Hamburg, Germany

В этой статье приводится краткий исторический обзор развития наших знаний о сложных динамических системах, в котором особое внимание уделяется эргодичности и хаосу, а также квазиклассическому квантованию интегрируемых и хаотических систем. Обсуждается использование общей формулы следа в качестве естественной математической основы для квазиклассического квантования хаоса. Представлены две гипотезы, из которых вытекает, что существуют уникальные свойства флуктуации в квантовой механике, являющиеся универсальными и, во вполне определенном смысле, максимально случайными, если соответствующая классическая система является сильно хаотической. Эти свойства представляют собой квантовомеханический аналог явления хаоса в классической механике. Таким образом, обнаружен квантовый хаос.

Ключевые слова: квантовый хаос, бильярд, интегрируемая система, тор

**F. Steiner**

## Quantum chaos

A short historical overview is given on the development of our knowledge of complex dynamical systems with special emphasis on ergodicity and chaos, and on the semiclassical quantization of integrable and chaotic systems. The general trace formula is discussed as a sound mathematical basis for the semiclassical quantization of chaos. Two conjectures are presented on the basis of which it is argued that there are unique fluctuation properties in quantum mechanics which are universal and, in a well defined sense, maximally random if the corresponding classical system is strongly chaotic. These properties constitute the quantum mechanical analogue of the phenomenon of chaos in classical mechanics. Thus quantum chaos has been found.

Keywords: quantum chaos, billiard, integrable system, torus
Mathematical Subject Classifications: 81Q50

*Статья из юбилейного сборника, опубликованного в честь 75-летия Гамбургского университета. (Invited contribution to the Festschrift *Universität Hamburg 1994: Schlaglichter der Forschung zum 75. Jahrestag* (Ed. R. Ansorge) // Dietrich Reimer Verlag, Hamburg, 1994, S. 543–564.) Пер. с англ. А. Г. Арзамасцева.

## 1. Задача Эйнштейна от 1917 года

Исследование *квантового хаоса* в сложных системах представляет собой чрезвычайно увлекательную и активную область современной физики, химии и математики. Однако не столь известно, что эта область исследований своим происхождением обязана вопросу, впервые поставленному Эйнштейном [1] во время доклада о связях между классической и квантовой механикой сильно хаотических систем, прочитанного в Берлине 11 мая 1917 года. С исторической точки зрения это кажется почти невозможным, поскольку квантовая механика еще не была изобретена и явление хаоса едва ли было знакомо физикам в 1917 году.

Сейчас, когда мы празднуем семидесятипятилетний юбилей нашей alma mater «Гамбургского университета» [2] (основан 10 мая 1919), любопытно взглянуть на физику тех дней. Большинство физиков, по-видимому, назовут это время эпохой *старой* квантовой теории, которая была создана Планком в 1900 году и затем развивалась под влиянием гениальной, но парадоксальной модели атома Бора и правил Бора-Зоммерфельда для квантования простых квантовых систем. Некоторые могут связать эти годы с величайшим вкладом Эйнштейна — созданием общей теории относительности с кульминацией в виде общековариантной формы уравнений поля для гравитации, которые были найдены Эйнштейном в 1915 году (и, независимо, математиком Гильбертом в это же время).

В своем докладе [1] в мае 1917 года Эйнштейн рассматривал условия квантования Бора-Зоммерфельда $\int p_i\, dq_i = 2\pi n_i \hbar$, $i = 1, \ldots, l$, для систем с $l$ степенями свободы, где $q_i$ — координаты, а $p_i$ — сопряженные с ними импульсы. Через $\hbar$ обозначена константа Планка, деленная на $2\pi i$, а $n_i$ — целые квантовые числа. (Эйнштейн называет эти квантовые условия «Квантовое условие Зоммерфельда-Эпштейна».) Он подчеркивает, что произведения $p_i\, dq_i$ в общем случае не являются инвариантными и поэтому эти квантовые условия не имеют инвариантного смысла, а зависят от выбора системы координат, в которой классическое движение является разделяемым (если такая существует). При исследовании простого примера двумерного движения частицы под действием притягивающей центральной силы Эйнштейн обнаружил общую координатно-инвариантную формулировку квантовых условий ($k = 1, 2, \ldots, l$)

$$I_k := \frac{1}{2\pi} \oint_{L_k} \sum_{i=1}^{l} p_i dq_i = n_i \hbar, \tag{1.1}$$

заметив, что линейные интегралы от один-формы $\sum_i p_i dq_i$, взятые по всему множеству топологически эквивалентных («нередуцируемых») замкнутых петель $L_k$, являются инвариантными. В отличие от исходной версии условий квантования нет необходимости явно выполнять разделение переменных. Действительно, нет требования, чтобы движение было сепарабельным, достаточно лишь, чтобы оно было многократно периодическим. Однако, Эйнштейн указал, что условия (1.1) могут быть выписаны только в случае очень частной системы, для которой существуют $l$ интегралов для $2l$ уравнений движения вида $R_k(p_i, q_i) = \mathrm{const}$, где $R_k$ — алгебраические функции от $p_i$ такие, что соответствующие многообразия в $2l$-мерном фазовом пространстве имеют форму $l$-мерных торов. В современной терминологии эти системы называются *интегрируемыми системами*. (Здесь и в дальнейшем мы рассматриваем только гамильтоновы системы, т. е. движение, обусловленное уравнением Ньютона без диссипации. $l$ констант $R_i$, предполагаются «достаточно гладкими» и находящимися в инволюции, т. е. их пуассоновы скобки друг с другом равны нулю. Дальнейшие пояснения см. в книгах Арнольда [3] и Лихтенберга и Либермана [4].) В результате траектории интегрируемых систем наматываются на эти $l$-мерные торы, что в свою очередь приводит к тому, что движения интегрируемых систем оказываются очень *регулярными* в том смысле, что даже долговременное поведение вполне предсказуемо. Действительно, в интегрируемых системах траектории с близкими начальными условиями расходятся друг от друга только как некоторая степень от времени.

Эйнштейн был первым физиком, осознавшим, какую важную роль играют инвариантные торы в фазовом пространстве, которые он называл “Trakte”[1]. Он писал [1]: «Необходимо разделить фазовое пространство на соответствующее число«трактов», которые составят $(l-1)$-размерные «поверхности», так что в получившихся областях можно интерпретировать $p_i$ как однозначные и (при переходах от одного тракта к другому) непрерывные функции; данную вспомогательную геометрическую конструкцию будем называть «рациональным фазовым пространством». Закон квантования должен выполняться для всех линий, заключенных в рациональном координатном пространстве».

Однако, интегрируемые системы, составляющие стандартные наборы «учебных систем», столь же предсказуемые как и часовой механизм, не являются типичными, т. е. «почти все» динамические системы являются неинтегрируемыми в том смысле, что не существует других констант движения помимо энергии и, следовательно, нет инвариантных торов в фазовом пространстве. Из эргодичности следует, что почти все траектории плотно заполняют, при отсутствии инвариантных торов, всю $(2l-1)$ -мерную энергетическую поверхность. Сегодня наши знания о классической динамике очень богаты [3, 4] и почти все ученые, работающие в области естественных наук, начинают высоко оценивать важность хаоса в сложных системах. Теперь общепринято, что обычная система выполняет очень нерегулярное, *хаотическое* движение, которое является непредсказуемым, т. е. траектории сильно зависят от начальных условий так, что близлежащие траектории в фазовом пространстве разбегаются с экспоненциальной скоростью.

Эйнштейн [1] сделал критически важное замечание, что отсутствие торов исключает формулировку квантовых условий (1.1) и, более того, что это же в точности приложимо к ситуации, встречающейся в классической статистической механике, в которой описывается движение сталкивающихся атомов и молекул в газе, «поскольку исключительно в этом случае микроканонический ансамбль эквивалентен временному ансамблю, относящемуся к системе». В своей «Nachtrag zur Korrektur» [1] он сослался в качестве примера на Пуанкаре в связи с задачей трех тел, и сделал заключение: « . . . , а квантовое условие Зоммерфельда-Эпштейна также не выполняется в приведенной здесь, несколько расширенной форме.».

В то время, когда Эйнштейн читал свой доклад, он был, вероятно, самым знаменитым из живущих физиков. Он был профессором в Берлинском университете (с правом, но не обязанностью преподавать!) членом Королевской прусской академии наук и, вскоре после этого (1 октября 1917 года) он стал директором только что основанного Института физических исследований в Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften (в настоящее время институт называется Институт физики имени Макса Планка). Таким образом, примечательным историческим фактом является то, что доклад Эйнштейна, опубликованный без задержек Немецким физическим обществом [1], не оказал никакого влияния на развитие физики во время последующих сорока лет! В знаменитой работе Бора [5] 1918 года, в которой был изложен принцип соответствия, отсутствуют ссылки на доклад Эйнштейна! «Квантование торов» по Эйнштейну для интегрируемых систем было переоткрыто математиком Джозефом Келлером только в пятидесятых [6]. Фриц Райхе (Fritz Reiche) — ассистент Планка в Берлинском университете в 1915–1918 гг., обратил внимание Келлера на доклад Эйнштейна.

Можно лишь предполагать, почему это глубокое проникновение Эйнштейном в структуру классического фазового пространства и его понимание важности последнего для квантования

[1] Trakt (нем.) — тракт, линия. — *Прим. пер.*

игнорировалось столь долгое время. Кажется вполне очевидным, что основная причина заключается в развитии квантовой механики лишь через несколько лет, начиная с матричной механики Гейзенберга летом 1925 года, волнового уравнения Шредингера весной 1926 года и вывода Гейзенбергом принципа неопределенности весной 1927 года. Уже в 1925 году, еще до открытия уравнения Шредингера, Паули в Гамбурге смог строго вычислить [7] энергетические уровни атома водорода, пользуясь квантовой механикой Гейзенберга, что рассматривалось как большой успех и решающая проверка новой теории. (Первая должность Паули в Гамбурге называлась «научный сотрудник в области теоретической физики» в Институте теоретической физики; первым руководителем кафедры теоретической физики был Вильгельм Ленц с октября 1921 года по август 1956 года; см. [2], стр. 290; 30 января 1924 года Паули получил разрешение преподавания в Высшей школе по направлению «Теоретическая физика» от математика Эрика Хеке (Erich Hecke).) В то время как Гейзенберг полностью исключил классические орбиты из своей теории, на Шредингера сильное влияние оказала классическая механика и аналогия между «хорошо известными механическими принципами, открытыми и названными в честь Гамильтона,» и «хорошо известным оптическим принципом Ферма» [8]. В своей работе [9], в которой он открыл то, что в дальнейшем стало известным под названием *когерентные состояния*, Шредингер хотел проиллюстрировать на примере «линейного осциллятора Планка», что всегда можно найти решения его «волновой механики» в виде вполне локализованных волновых пакетов, центр тяжести которых колеблется без изменения формы с периодом соответствующего классического движения и, тем самым, описывает классическую траекторию точечной частицы подобно, к примеру, кеплеровской орбите электрона в H-атоме (атоме водорода). (Подробное обсуждение работы Шредингера и ее роли при открытии Гейзенбергом принципа неопределенности см. в [10].) Четвертого октября 1926 года Шредингер выступал с докладом в Копенгагене, куда его и Гейзенберга пригласил Бор. Почти фанатические дискуссии между Бором и Шредингером очень живо описаны Гейзенбергом в его автобиографии [11]. В конце концов победа в битве досталась Бору и Гейзенбергу и нет никаких сомнений в том, что «копенгагенская интерпретация» квантовой механики является одной из основных причин, почему квантование торов Эйнштейна считалось устаревшим.

Вскоре после открытия уравнения Шредингера был разработан *квазиклассический* подход, известный как ВКБ-метод (назван в честь Венцеля, Крамерса и Брюллиена (Wentzel, Kramers, Brioullin)). В *квазиклассическом пределе* изучается поведение квантовомеханических величин, таких, как энергетические уровни, волновые функции, вероятности преодоления барьера, скорости распада или $S$-матрицы, когда константа Планка стремится к нулю. Этот предел отличен от классического предела, для которого $\hbar$ в точности равна нулю, поскольку, в общем случае, квантовые функции не являются аналитическими по $\hbar$ при $\hbar$, стремящемся к нулю, примеры такого поведения см. в уравнениях (3.5), (3.9) и (3.12), которые будут приведены ниже. В случае простых систем с разделением ВКБ-метод применяется непосредственно, если не учитывать некоторые тонкости, которые обычно возникают, если разделение выполняется не в декартовых координатах. (Эти сложности можно преодолеть, если начать с фейнмановского интеграла по пути и выполнять действия последовательно [12].) Однако, если попытаться применить ВКБ-метод к более сложным системам, то возникают более серьезные трудности, которые не были преодолены в течение первых нескольких десятилетий после открытия уравнения Шредингера. Разумеется, многие ученые вообще не осознавали, что имеются такого рода проблемы. Им достаточно было рассмотрения простейших систем, поскольку тогда еще не возникло понимания важности более сложных, не говоря уж о хаотических системах. Отражением этого служит тот факт, что даже современные учебники по классической или квантовой механике обычно не упоминают о явлении хаоса. Также, появление все более мощных компьютеров привело к распространению широко распространенного убеждения, что все проблемы можно решить численно и не следует тратить силы на мучительные аналитические исследования.

Как уже упоминалось, Келлер [6] в пятидесятых годах переоткрыл, что строгий математический вывод квазиклассического поведения квантовой механики требует подробного знания о лежащей в основе структуре классического фазового пространства. В случае *интегрируемых* систем он смог получить наиболее общее правило квазиклассического квантования, которое оказалось в точности совпадающим с квантованием торов Эйнштейна за исключением поправок, возникающих из-за *индексов Маслова*. Сегодня это условие квантования для интегрируемых систем называют ЭБК-квантованием в честь Эйнштейна, Брюллиена и Келлера.

Перед тем как перейти к более близкому изучению хаоса и квантового хаоса, я приведу краткое описание современной версии квантования торов Эйнштейна. (Подробности, в особенности о построении квазиклассических волновых функций см. в современном учебнике Гутцвиллера [13].) Как обсуждалось ранее, *интегрируемая* система с $l$ степенями свободы характеризуется существованием $l$ констант движения в инволюции, где одна из констант движения равна полной энергии $E$, которая равна классическому гамильтониану $H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = E$. (В последующем изложении $l$-мерные вектора будут обозначаться через $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_l)$.) Тогда каждая орбита динамической системы лежит на подмногообразии фазового пространства размерности $2l - l = l$, которое имеет топологию $l$-мерного тора. Теперь можно выполнить каноническое преобразование из координат $\mathbf{q}$ и сопряженных к ним импульсов $\mathbf{p}$ к новым координатам $(\mathbf{I},\mathbf{w})$, называемым *переменными действие-угол.* Углы $w_k$ меняются от 0 до $2\pi$ и интерпретируются как новые координаты, а *действия* $I_k$ отождествляются с петельными переменными Эйнштейна, определенными в (1.1) и играют роль новых сопряженных импульсов. Если $w_k$ пробегает значения от 0 до $2\pi$, она определяет замкнутую петлю $L_k$ в фазовом пространстве исходных переменных $(\mathbf{p},\mathbf{q})$, где $L_k$ — $k$-й неприводимый контур тора. Поскольку интегралы (1.1) являются инвариантными, как отметил Эйнштейн, то $I_k$ являются новыми константами движения. Более того, новый гамильтониан $\overline{H}$ является функцией только от действий $I_k$, $\overline{H} = \overline{H}(\mathbf{I})$. Тогда условия ЕВК-квантования принимают вид ($k = 1, 2, \ldots, l$)

$$I_k = (n_k + \beta_k/4)\hbar, \tag{1.2}$$

где $n_k \geqslant 0$ — целые квантовые числа, а целые числа $\beta_k \geqslant 0$ — индексы Маслова. (Движение происходит на так называемом лагранжевом многообразии и индекс Маслова, который можно рассматривать как число сопряженных точек или *индекс Морса* [14] траектории, определяется топологией лагранжева многообразия в фазовом пространстве относительно конфигурационного пространства.) Из (1.2) следует, что квазиклассическое приближение к квантовым энергетическим уровням явно задается формулой

$$E_n = \overline{H}((\mathbf{n} + \beta/\mathbf{4})\hbar) \tag{1.3}$$

ЕВК-формула (1.3) задает старший асимптотический член при $\hbar \to 0$.

Отметим, что условие Эйнштейна (1.1) верно только тогда, когда все индексы Маслова равны нулю, чего в общем случае не происходит. (Например, для гармонического осциллятора $\beta = 2$.) Естественно, что Эйнштейн не мог знать о теореме об индексах Морса, поскольку теория Морса к тому времени еще не была открыта [14]. То, что индексы Маслова очень важны для физических свойств атомных и молекулярных систем, иллюстрируется на примере иона молекулы водорода, который изучался Паули в 1919 году [15]. Исследовался вопрос, существует ли молекула однократно ионизированного водорода $\mathrm{H}_2^+$, ответ на который в то время еще не был известен. Паули вычислил энергию основного состояния путем квантования радиального движения относительно оси молекулы. В качестве основного состояния он выбрал $n_r = 1$ и, разумеется, $\beta_r = 0$ и получил положительную энергию, и основываясь не этом сделал вывод, что $H_+^2$ является лишь метастабильной. Оказалось, что правильные значения равны $n_r = 0$ и $\beta_r = 2$ и энергия основного состояния отрицательна! (Подробности см. в [13].)

До сих пор мы наблюдали за тем, как квантовое условие Эйнштейна (1.1) было переоткрыто и уточнено, что привело к общим правилам ЕВК-квантования (1.2) и (1.3) для интегрируемых систем. Вся теория основана на наблюдении Эйнштейна, что фазовое пространство интегрируемых систем расслаивается на $l$-мерные торы и что каждая орбита движется на инвариантном торе. Однако, существует второе важное наблюдение Эйнштейна, которое он упомянул в своем докладе [1], а именно, что эргодические системы не имеют инвариантных торов и, следовательно, его метод квантования не может применяться! В действительности, известно [13], что фазовое пространство сильно хаотических систем имеет два взаимно трансверсальных расслоения, каждое с $l$-мерными листьями. Каждая траектория является пересечением двух многообразий, по одному из каждого расслоения. Расстояние между двумя соседними траекториями экспоненциально растет вдоль неустойчивого многообразия и экспоненциально уменьшается вдоль устойчивого многообразия. Очевидно, ЕВК-конструкция, основанная на переменных действие-угол больше не возможна, и в этом случае нужно еще решить сложную задачу: построить метод квазиклассического квантования для хаотических систем. Потребовалось ждать еще одно десятилетие, пока Мартин Гутцвиллер [16] не открыл легкого пути к ответу на «вопрос Эйнштейна: как классическая механика может дать какие-либо указания о квантовомеханических уровнях энергии, когда классическая система является эргодической» [13]. «Вопрос Эйнштейна» или «задача Эйнштейна от 1917 года», как я назвал ее в заголовке этого параграфа, является стартовой точкой наших современных исследований квантового хаоса в сложных системах. Перед тем как перейти к обсуждению квантового хаоса, я хотел бы кратко перечислить несколько исторических фактов, связанных с развитием наших идей об эргодичности и классическом хаосе.

## 2. Эргодичность и хаос

Ранним обнаружением хаотического движения в природе в конце XIX века мы обязаны с одной стороны физикам Максвеллу, Больцману и Гиббсу и с другой — математикам Пуанкаре и Адамару. В то время как Больцман сформулировал в 1887 году [17] эргодическую гипотезу, приведшую к модели газа Больцмана-Гиббса, которая является прототипом термодинамики и статистической механики, Пуанкаре в основном занимался исследованием задачи трех тел в небесной механике, особое внимание уделяя системе Земля-Солнце-Луна [18]. Очевидно, что системы, исследованные Больцманом и Пуанкаре имеют наибольшую важность. Однако оказалось, что они являются чрезвычайно сложными и даже сейчас многие их свойства до конца не поняты. Поэтому, в развитии эргодической теории и современной теории хаоса очень важную роль сыграла динамическая система, введенная Адамаром в 1898 году [19], которая с одной стороны достаточно проста для исследования математическими методами, а с другой стороны демонстрирует типичное поведение иррегулярного движения. Его система имеет две степени свободы и представляет собой точечную частицу массы $m$, которая движется свободно, т. е. без внешних сил по заданной двумерной поверхности. (Размерность может быть больше чем два, но два — это наименьшая размерность, при которой может возникнуть хаос.) Перед изучением примера Адамара, следует сначала рассмотреть другой класс систем.

Предположим, что точечная частица движется по *плоской* поверхности и, более того, что движение ограничено компактной областью $\Omega \in \mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega$. Тогда если представить на границе $\partial\Omega$ твердые стенки, то получим *плоский биллиард*. Траектории частицы состоят из отрезков прямых с эластичными отражениями в $\partial\Omega$. Оказывается, что динамика биллиарда очень чувствительно зависит от границы $\partial\Omega$. Например, если граница является окружностью, эллипсом или квадратом, то система интегрируема, а граница в форме стадиона приводит к сильно хаотической системе, хорошо известному биллиарду стадиона [20]. Хотя гамильтониан такого планарного биллиарда является не гладким, а разрывным,

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \begin{cases} \mathbf{p}^2/2m & \mathbf{q} \in \Omega, \\ \infty & \mathbf{q} \notin \Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

изучение классической биллиардной задачи оказало значительное влияние на развитие современной эргодической теории. (Ранее изложение см. в [21].) В руках Синая [22] оно в конце концов привело к первому доказательству, полученному в 1963 году того, что модель газа Больцмана-Гиббса является эргодической.

Вместо выбора плоской поверхности Адамар в [19] рассмотрел поверхность с *отрицательной* гауссовой кривизной. Учитывая наше дальнейшее обсуждение квантового хаоса в следующих параграфах, полезно уже сейчас выбрать поверхности с *постоянной* отрицательно кривизной и без границы. Тогда мы получим компактные римановы поверхности $\mathscr{F}$ рода $g \geqslant 2$ с площадью $(\mathscr{F}) =: A = 4\pi(g-1)$ (теорема Гаусса-Бонне). (Например, для $g = 2$ частица движется свободно без трения по поверхности с топологией двойного тора.) Динамическая система Адамара описывается гладким гамильтонианом, задаваемым формулой

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{2m} p_i g^{ij}(\mathbf{q}) p_j, \quad \mathbf{q} \in \mathscr{F}, \tag{2.2}$$

где $p_i = m g_{ij} dq^j/dt$ сопряженные импульсы ($t \in \mathbb{R}$ обозначает время), $g^{ij}$ — обратная величина к метрике $g_{ij}$, которая определена линейным элементом $ds^2 = g_{ij} dq^i dq^j$. (Здесь используется соглашение Эйнштейна о суммировании $i, j = 1, 2$.) Следовательно, классические орбиты являются *геодезическими* данной поверхности $\mathscr{F}$. В эргодической теории [23] динамическая система Адамара называется *геодезическим потоком на* $\mathscr{F}$.

На первый взгляд система Адамара кажется чисто математической моделью, слишком абстрактной, чтобы иметь значение для физики. Однако, Синай в [22] свел задачу о газе Больцмана-Гиббса к изучению ставшего знаменитым в наши дни *биллиарда Синая*, который в свою очередь он смог связать в точности с моделью Адамара от 1898 года! Недавно на внутренних поверхностях в полупроводниках при помощи наборов нанометровых потенциальных ям [24] были созданы гладкие экспериментальные варианты биллиарда Синая и, тем самым, была открыта новая область мезоскопических систем [25].

Величайшее достижение Адамара заключается в том, что он смог доказать, что все траектории в его системе являются *неустойчивыми* и что близкие траектории *расходятся* по времени со скоростью $e^{\omega t}$, где $\omega = \sqrt{2E/mR^2}$ — *показатель Ляпунова*. (Здесь $R$ — масштаб, который фиксируется постоянной отрицательной кривизной, $K = -1/R^2$.) Таким образом, он первым смог показать, что *долговременное поведение* динамической системы может очень чувствительно зависеть от начальных условий и, следовательно, является *непредсказуемым*, даже когда система управляется детерминированным законом, например уравнениями Ньютона как в этой модели. Сегодня эта чувствительность к начальным данным рассматривается как наиболее поразительное свойство систем с *детерминированным хаосом*. По-видимому, Адамара следует считать истинным первооткрывателем хаоса.

Сегодня понятие хаоса очень популярно, что, очевидно, вызвано в большой степени широко распространенным неквалифицированным использованием такого красочного слова как «хаос», притягательного для необузданных умозрительных построений во многих направлениях. Даже утверждалось, что открытие теории хаоса представляет собой третью великую революцию в физике XX столетия, где первые две — это соответственно открытие теории относительности и квантовой теории. Утверждения такого рода являются абсурдными и, как мы видим, исторически ложными. Хотя верно, что большинство физиков не обращали внимания на хаос до недавнего времени, мы видим, что Адамар открыл двери к хаосу еще в конце позапрошлого столетия. (Можно лишь предполагать, что бы произошло, если бы Адамар использовал слово «хаос» для иллюстрации своих открытий уже в 1898 году.) Неоспоримым фактом является то, что «теория хаоса» в течение многих десятилетий развивалась почти исключительно как математическая теория под менее красочным названием «эргодическая теория».

Читатель может спросить, не выпала ли работе Адамара [19] та же самая судьба, что и докладу Эйнштейна [1]. Этого не произошло! Французский физик Пьер Духем (Pierre Duhem) осознал философские следствия открытия Адамара и в серии статей [26], появившихся в 1904 и 1905 г. г., он с поэтическим вдохновением описал динамическую систему Адамара. В 1906 году Духем опубликовал свои статьи в виде отдельной книги [27], которая была переведена на немецкий язык [28] уже в 1908 году с предисловием Эрнста Маха. Книга была переведена Фридрихом Адлером, близким другом Эйнштейна. (Когда Эйнштейн переехал в 1909 году в Цюрих, он жил со своей семьей в том же самом доме, что и Адлер. Было бы интересно узнать, не обсуждали ли Адлер и Эйнштейн книгу Духема и модель Адамара, поскольку работа Адамара [19] содержит много материала, связанного с геометрией Римана, которая позже стала столь важной в работе Эйнштейна по общей теории относительности. В 1916 году Эйнштейн поддерживал своего друга пацифиста Адлера, находившегося в тюрьме за то, что тот стрелял и убил графа Стюргха, премьер-министра Австрии.) Духем описывает модель Адамара, т. е. геодезический поток на $\mathscr{F}$ следующим образом [28]: «Представим себе лоб быка с возвышенностями, откуда растут рога и уши. Удлиним рога и уши таким образом, чтобы они растянулись до бесконечности. Так мы получили поверхность для изучения. Геодезические линии на этой поверхности могут выглядеть совершенно по-разному. (...) Одни непрерывно обвиваются о правый рог, другие о левое или соответственно о правое и левое ухо. (...) Можно произвольно повысить точность, с которой определяются практические задачи, можно уменьшить пятно, образующее начальное положение материальной точки, можно стянуть пучок, содержащий направление начальной скорости, но все-таки геодезическая линия, обвивающая правый рог, никогда не освободится от своих “товарищей”, которые, как и предыдущие, сначала обвившись о тот же рог, удалятся в бесконечность». Это прекрасная иллюстрация хаоса уже в 1908 году! Духем также ссылается на Пуанкаре и задачу трех тел и задает вопрос [28]: «Предположим, что у небесных тел Солнечной системы такие же положения и скорости как сегодня, тогда они все будут и дальше непрерывно вращаться вокруг Солнца? А не произойдет ли в противоположность этому то, что одно из тел отделится от группы своих спутников и удалится в бесконечность? Этот вопрос формулирует задачу *устойчивости Солнечной системы*, которая, как думал Лаплас, была решена. Но исключительную сложность этой проблемы показали усилия современных математиков, и прежде всего работы А. Пуанкаре».

В конце этого параграфа я хочу вкратце описать еще один пример сильно хаотической системы, гамильтониан которой имеет в точности форму (2.2). Эту систему называют *биллиардом Артина* в честь математика Эмиля Артина, исследовавшего данную модель в Гамбурге в 1924 году [29]. Биллиард Артина — это двумерный неевклидов биллиард, биллиардным столом которого является некомпактная риманова поверхность постоянной отрицательной гауссовой кривизны $K = -1$ с топологией сферы с дыркой (заострением) на бесконечности. (Бесконечно длинный «рог» по описанию Духема.) Эта поверхность может быть реализована на верхней полуплоскости Пуанкаре $\mathscr{H} = \{z = x + iy |\, y > 0\}$ с гиперболической метрикой $g_{ij} = \delta_{ij}/y^2$. (Координаты точечной частицы равны $q_1 = x$, $q_2 = y$, где масштаб $R$ положен равным единице.) На $\mathscr{H}$ модулярная группа $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$ действует посредством дробно-линейных преобразований, т. е. через $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$, $z \in \mathscr{H}$, $\gamma z = (az + b)/(cz + d)$. В своей работе Артин сначала исследует движение на поверхности $\Gamma \setminus \mathscr{H}$, которая может быть представлена модулярной областью $\{|z| \geqslant 1 | -1/2 \leqslant x \leqslant 1/2\} \subset \mathscr{H}$ модулярной группы с подходящими отождествлениями границ. Эта область симметрична относительно отражений относительно мнимой оси и тем самым Артин пришел к рассмотрению несимметричной системы, которую можно рассматривать как биллиард, определенный на половинной области $\mathscr{F} := \{|z| \geqslant 1 | 0 \leqslant x \leqslant 1/2\}$. Область $\mathscr{F}$ — некомпактный треугольник конечной (гиперболической) площади $\pi/6$. Процитируем Артина [29]: «Здесь мы имеем только физическую реализацию. Сначала на поверхности вращения трактрисы нужно начертить треугольник, подобный половинному модульному треугольнику (Moduldreieck). Тогда нашу механическую систему можно интерпретировать как уравновешенное движение центра масс в этом треугольнике (точка вынуждена оставаться на поверхности), центр масс будет упруго отражаться от сторон треугольника».

В своей работе [29] Артин впервые ввел важный подход в теории динамических систем, который сегодня известен как *символическая динамика*. Используя идею, которая восходит к Гауссу, Артин смог описать геодезическое движение как отображение в терминах непрерывных дробей. Это позволило ему показать, что геодезический поток на $\mathscr{F}$ является квазиэргодическим. Фактически, биллиард Артина принадлежит классу так называемых *систем Аносова*, которые представляют в иерархии хаотических систем наивысший уровень, демонстрируя наиболее хаотическое поведение, какое только возможно. Все системы Аносова являются эргодическими и обладают свойством перемешивания [23]. Эти системы называются *сильно хаотическими*. Можно показать в весьма общем случае, что геодезические потоки на компактных симметричных римановых пространствах являются системами Аносова [30].

Нет сомнений, что работа Артина [29] по эргодичности и решение Паули [7] атома водорода, которое уже упоминалось в параграфе 1, находятся среди наивысших научных результатов, полученных в Гамбургском университете за первые несколько лет его существования.

## 3. Общая квазиклассическая формула следа

В параграфе 1 я подробно описал квазиклассическое квантование торов Эйнштейна для *интегрируемых* систем, наиболее общая форма которого задается условиями ЕВК-квантования (1.2) и ЕВК-аппроксимацией (1.3) для квантовых энергетических уровней. Как показано Эйнштейном уже в 1917 году, эти квазиклассические правила квантования совершенно непригодны в случае хаотических систем, поскольку уже основное определение (1.1) не имеет смысла для эргодических систем. (В фазовом пространстве нет инвариантных торов и таким образом неприводимые замкнутые петли $L_k$, не могут быть определены.) Потребовалось больше пятидесяти лет, чтобы Мартин Гутцвиллер [16] сделал первый шаг в направлении квазиклассической теории для *хаотических* систем. Хотя в исходной *формуле следа Гутцвиллера* от 1971 года возникают серьезные проблемы с расходимостями, и поэтому она не может быть применена без неоднозначностей и неустойчивости при проведении численных расчетов, недавно было обнаружено [31], что формула может быть улучшена и преобразована к более общему виду такому, что все ряды и интегралы в ней становятся *абсолютно сходящимися*. Целью этого параграфа является описание *общей формулы следа* [31], которая формирует математически здравую основу для квазиклассического квантования хаоса.

Общей физической основой служит фейнмановская формулировка квантовой механики [32] в терминах его «сумм по предистории» или *интегралов по пути*. (Современное изложение см. в [33].) Хорошо известно, что в квазиклассическом пределе, когда $\hbar$ стремится к нулю, основной вклад в значение интеграла по пути вносят классические орбиты. При вычислении следа оператора эволюции по времени в итоговую формулу вносят вклады те классические орбиты, которые *замкнуты* в пространстве *координат*. Гутцвиллер в [16] сделал важное наблюдение, что след зависящей от энергии функции Грина (которая является преобразованием Фурье оператора эволюции по времени) вычисляется как формальная сумма по классическим орбитам, которые *замкнуты в фазовом пространстве*, т. е. по всем периодическим орбитам. Эта сумма имеет только формальный смысл, поскольку существует бесконечно много периодических орбит, число которых растет экспоненциально как функция от периода для хаотических систем и поэтому сумма в общем случае не является даже условно сходящейся для физических энергий.

В качестве иллюстрации квазиклассической теории для хаотических систем рассмотрим биллиарды на плоскости, введенные в параграфе 2. Для квантового гамильтониана $\widehat{H}$ мы получим из классического гамильтониана (2.1) $\widehat{H} = -(\hbar^2/2m)\Delta$, где $\Delta = \partial^2/\partial q_1^2 + \partial^2/\partial q_2^2$ — евклидов *лапласиан*. Твердые стенки на границе биллиарда вводятся посредством требования, что квантовые волновые функции $\psi_n(\mathbf{q})$ должны быть равны нулю на $\partial\Omega$. Тогда *уравнение Шредингера* для заданного квантового биллиарда эквивалентно следующей *задаче на собственные значения для лапласиана Дирихле*

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi_n(\mathbf{q}) = E_n\psi_n(\mathbf{q}), \quad \mathbf{q} \in \Omega, \tag{3.1}$$

$$\psi_n(\mathbf{q}) = 0, \quad \mathbf{q} \in \partial\Omega, \tag{3.2}$$

$$\int_\Omega \psi_m(\mathbf{q})\psi_n(\mathbf{q})d^2q = \delta_{mn}. \tag{3.3}$$

Следующие свойства этой задачи на собственные значения являются общеизвестными: существует только дискретный спектр, соответствующий бесконечному числу связанных состояний, энергетические уровни которых $\{E_n\}$ строго положительны, $0 < E_1 \leqslant E_2 \leqslant \ldots \leqslant E_m \to \infty$. Соответствующие волновые функции $\psi_n(\mathbf{q})$ могут быть выбраны вещественными. Более того, из (2.3) следует, что собственные значения масштабированные по $\hbar, m$ и $R$ имеют вид $E_n = (\hbar^2/2mR^2)\varepsilon_n$, где $\varepsilon_n$ — безразмерная и независящая от $\hbar$, $m$ и $R$. (Здесь $R$ обозначает произвольную, но фиксированную длину шкалы.) Из этого следует, что квазиклассический предел соответствует пределу $E_n \to \infty$, следовательно, требует исследования сильно возбужденных состояний, т. е. *высокоэнергетического состояния* квантового биллиарда. (Отметим, что квазиклассический предел тождественен *макроскопическому* пределу, $m \to \infty$, где масса отскакивающего атома становится настолько большой, что приходится иметь дело с макроскопической точечной частицей. В дальнейшем я буду использовать «естественные» единицы: $\hbar = 2m = R = 1$. Временами, однако, $\hbar$ будет вводится вновь для того, чтобы отождествить *пертурбативные* и *непертурбативные* вклады в квазиклассические выражения.)

Математическая задача, определенная уравнениями (3.1), (3.2) и (3.3) является довольно старой задачей на собственные значения *уравнения Гельмгольца*, описывающего *колеблющуюся мембрану* с закрепленными краями. Действительно, несколько задач для мембраны, соответствующие интегрируемым биллиардам, уже были решены в позапрошлом столетии: задача с прямоугольной мембраной решена Пуассоном в 1829 году, задача с мембраной в виде равностороннего треугольника решена Ламе в 1852 году, и для круговой мембраны — Клебшем в 1862 году. Однако задача оказалась очень нетривиальной в случае когда классическая задача отскакивающего шара является хаотической. Фактически, в хаотическом случае для энергетических уровней или волновых функций неизвестно ни одной явной формулы.

Недавно было осознано [34], что уравнение Шредингера (3.1) согласно уравнениям Максвелла также описывает ТМ-режимы плоского микроволнового резонатора, база которого имеет форму биллиардной области $\Omega$, если $(c/2\pi)(2mE_n/\hbar^2)^{1/2}$ отождествить с частотой $\nu_n$. (Здесь через $c$ обозначена скорость света.) В обычных экспериментах, проведенных до сего дня, это отождествление выполняется для меньших частот вплоть до 20 ГГц. Эти эксперименты можно рассматривать как *аналоговые эксперименты* для квантового хаоса, хотя они не имеют ничего общего с квантовой механикой, а скорее имеют дело с *классическими волновыми свойствами электродинамики*. Однако, поскольку две различные физические ситуации одинаково описываются математически, то по-видимому можно говорить о *волновом хаосе* по аналогии с *квантовым хаосом* в случае, когда база резонатора имеет форму хаотического биллиарда. Тогда, *универсальные сигнатуры квантового хаоса*, которые будут обсуждаться в параграфе 4, могут быть непосредственно переведены в соответствующие *универсальные сигнатуры волнового хаоса*. Я вполне уверен, что свойства волнового хаоса найдут важные практические применения в ближайшем будущем, например, в *электротехнике и физике ускорителей*.

При последующем обсуждении будем предполагать, что биллиардная область $\Omega$ выбрана таким образом, что соответствующая классическая система является *сильно хаотической*, т. е. эргодической, перемешивающей и является так называемой $K$-системой [23]. Более того, все периодические орбиты являются неустойчивыми и изолированными. Периодические орбиты характеризуются их *спектром примитивной длины* $\{l_\gamma\}$, где $l_\gamma$ обозначает *геометрическую длину* примитивной периодической орбиты (п. п. о.) $\gamma$. Многократные прохождения орбиты $\gamma$ имеют длины $kl_\gamma$, где $k = 1, 2, \ldots$ считает число повторений п.п.о. $\gamma$. Пусть $\mathbf{M}_\gamma$ — *матрица монодромии* для п.п.о. $\gamma$, где $|\operatorname{Tr}\mathbf{M}_\gamma| > 2$, поскольку все орбиты являются (прямо или обратно) *гиперболическими*. (Отсюда следует, что все показатели Ляпунова $\lambda_\gamma$ являются строго положительными. Подробности см. в [13].) Более того, свяжем с каждой п. п. о. $\gamma$ *характер* $\chi_\gamma \in \{\pm 1\}$, предполагая, что индекс Маслова для $\gamma$ является четным. ($\chi_\gamma$ зависит от фокусировки траекторий, близких к п. п. о. $\gamma$ и от граничных условий на $\partial\Omega$.) Тогда формула следа Гутцвиллера [16] для следа резольвенты $\widehat{H}$ (т. е. для следа функции Грина) имеет следующий вид

$$\operatorname{Tr}(\widehat{H} - E)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{E_n - E} \underset{(\hbar\to\infty)}{\sim} \overline{g}(E) + g_{osc}(E), \tag{3.4}$$

где $\overline{g}(E)$ обозначает так называемый «вклад для нулевой длины» который возникает из-за траекторий, идущих из $\mathbf{q}'$ в $\mathbf{q}''$, длина которых стремится к нулю если $\mathbf{q}'' \to \mathbf{q}'$. Вклад от периодических орбит определяется формальной суммой

$$g_{osc}(E) = \frac{i}{2\hbar\sqrt{E}} \sum_{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l_\gamma \chi_\gamma^k e^{ik\sqrt{E}l_\gamma/\hbar}}{|2 - \operatorname{Tr}\mathbf{M}_\gamma^k|^{1/2}}. \tag{3.5}$$

(Используются естественные единицы измерения, но сохраняется явная зависимость от $\hbar$. К энергии $E$ следует добавить малую положительную мнимую часть.)

Первая проблема с формулой следа (3.4) возникает из-за того, что оператор резольвенты $(\widehat{H} - E)^{-1}$ не из класса операторов со следом. Это непосредственно следует из *асимптотической формулы Вейля* [35], которая для двумерных плоских биллиардов с площадью $A := |\Omega|$ имеет вид:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E_n}{n} = \frac{4\pi}{A}\hbar^2. \tag{3.6}$$

Следовательно, $E_n = \mathcal{O}(n)$ при $n \to \infty$ и сумма по $n$ в (3.4) расходится. Для разрешения этой проблемы можно просто рассмотреть след *регуляризованной резольвенты*, например след $[(\widehat{H} - E)^{-1} - (\widehat{H} - E')^{-1}]$, где $E'$ произвольная, но фиксированная точка вычитания. Основные проблемы с исходной формулой следа (3.4) однако возникают из-за суммы по периодическим орбитам (3.5). Из-за экспоненциального возрастания

$$N(l) \sim \frac{e^{\tau l}}{\tau l}, \quad l \to \infty, \tag{3.7}$$

числа $N(l)$ п. п. о. $\gamma$, длина которых $l_\gamma$ меньше либо равна $l$, бесконечная сумма по $\gamma$ является в общем случае расходящейся. Поскольку проблемы с расходимостью возникают из-за экспоненциального закона (3.7) и, таким образом, из-за существования *топологической энтропии* $\tau > 0$, они имеют не просто формальную математическую природу, а скорее являются непосредственным проявлением классического хаоса в квантовой механике. Положительная энтропия $\tau$ является наиболее важным глобальным свойством сильно хаотической системы, которое выражает тот факт, что информация о системе теряется теряется экспоненциально быстро. Следовательно, мы видим, что выражение для периодических орбит (3.5) имеет только формальный смысл. Для того чтобы превратить квазиклассический подход в строгую теорию, необходимо заменить расходящуюся сумму (3.5) на обобщенную сумму для периодических орбит, которая является абсолютно сходящейся.

Перед тем как я перейду к обсуждению общей формулы следа, я хотел бы упомянуть, что расходимость (3.5) является в действительности счастливым обстоятельством, поскольку *сходимость* (3.5) привела бы к явной квазиклассической формуле для энергетических уровней, которая в общем случае оказалась бы совершенно неверной!

Первый важный момент заключается в определении подходящей переменной для дальнейшего использования. Для обсуждаемых здесь плоских биллиардов оказывается, что естественной переменной является не энергия $E$, а напротив *импульс* $p := \sqrt{E}$. Для того, чтобы вывести сходящуюся формулу следа, мы таким образом должны изучить [31] аналитическое продолжение (регуляризованного) следа резольвенты в комплексной плоскости переменной $p$. Не сложно увидеть, что регуляризованная сумма для периодических орбит является абсолютно сходящейся в верхней полуплоскости переменной $p$ пока она остается вне так называемого *энтропийного барьера* $\sigma_a := \tau - \widehat{\lambda}/2$, т. е. если $\operatorname{Im} p > \sigma_a$. Здесь $\widehat{\lambda} > 0$ обозначает некоторое асимптотическое среднее показателей Ляпунова, определенное по формуле

$$\frac{1}{N(l)} \sum_{l_\gamma \leqslant l} e^{-\lambda_\gamma l_\gamma/2} \sim e^{-\widehat{\lambda} l/2}, \quad l \to \infty. \tag{3.8}$$

Оказывается, что $\sigma_a$ строго положительна. Ясно, что при рассмотрении формулы (3.5) возникают серьезные проблемы, связанные со сходимостью.

В [31] обобщенные правила для суммы по периодическим орбитам были выведены путем рассмотрения следа весьма общей общей функции от гамильтониана $\widehat{H}$ вместо следа резольвенты, т. е. $\operatorname{Tr}(\widehat{H} - E)^{-1}$ была заменена на $\operatorname{Tr} h(\widehat{H}^{1/2})$, где $h(p)$ — подходящая *спектральная* функция. Теперь мы можем сформулировать *общую формулу следа* [31] для класса плоских биллиардов рассмотренных ранее. Пусть $h(p)$, $p \in \mathbb{C}$ — произвольная функция, которая удовлетворяет следующим трем условиям:

a) $h(p)$ четная функция, $h(-p) = h(p)$;

b) $h(p)$ аналитическая в полосе $|\operatorname{Im} p| \leqslant \sigma_a + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$;

c) $h(p) = \mathcal{O}(p^{-2-\delta})$, $|p| \to \infty$, $\delta > 0$.

Тогда старшая асимптотическая часть следа $h(\widehat{H}^{1/2})$ при $\hbar \to 0$ определяется формулой

$$\sum_{n=1}^{\infty} h(p_n) \underset{(\hbar\to 0)}{\sim} -\int_0^{\infty} dp \overline{\mathscr{N}}(p) \frac{dh(p)}{dp} + \frac{1}{\hbar} \sum_{\gamma} \sum_{k=1}^{n} \frac{l_\gamma \chi_\gamma^k g(kl_\gamma/\hbar)}{e^{k\lambda_\gamma l_\gamma/2} - \sigma_\gamma^k e^{-kl_\gamma l_\gamma/2}}, \tag{3.9}$$

где

$$g(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ipx} h(p) \tag{3.10}$$

обозначает преобразование Фурье от $h(p)$, $\sigma_\gamma$ — знак следа матрицы монодромии $\mathbf{M}_\gamma$ и $0 < p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots$ параметризуют энергетические уровни в виде $p_n := \sqrt{E_n}$. Более того, через $\overline{\mathscr{N}}(p)$ обозначена улучшенная асимптотическая формула Вейля, которая будет определена ниже. При выполнении условий a)—c) все ряды и интеграл в (3.9) сходятся *абсолютно*. (Отметим, что условия a)—c) являются достаточными условиями.)

Очевидно, что общая сумма по периодическим орбитам в (3.9) является для данной функции $h(p)$ в общем случае не аналитической по $\hbar$ при $\hbar = 0$. Таким образом, я назову это слагаемое непертурбативным вкладом в формулу следа. Остается обсудить интегральное слагаемое в (3.9), которое я назову *пертурбативным* вкладом, поскольку оно определяется функцией $\overline{\mathscr{N}}(p)$, которая определена как пертурбативный вклад в функцию, считающую собственные значения $\mathscr{N}(p) := \#\{p_n | p_n \leqslant p\}$. Для плоских биллиардов мы получаем следующее разложение Лорана по $\hbar$,

$$\overline{\mathscr{N}}(p) = \frac{Ap^2}{4\pi} \frac{1}{\hbar^2} - \frac{Lp}{4\pi} \frac{1}{\hbar} + C + \mathcal{O}(\hbar), \tag{3.11}$$

где $L = |\partial\Omega|$ обозначает полную длину границы $\partial\Omega$, а $C$ — константа, которая определяется кривизной границы, и углами в соединениях, если граница состоит из конечного числа гладких сегментов. Поскольку первое слагаемое в (3.11) эквивалентно формуле Вейля (3.6), то разложение (3.11) называют *улучшенной асимптотической формулой Вейля*. Асимптотика Вейля обсуждалась многими авторами, например Марком Кацем в его знаменитой работе [36], озаглавленной «Можно ли услышать форму барабана?». (См. обзор в [37].) При подстановке разложения (3.11) вместо интегрального члена соотношения (3.9) становится очевидно, что этот член соответствует *пертурбативному* вкладу в формулу следа.

Общая формула следа устанавливает поразительное *отношение двойственности* между квантовым энергетическим спектром $\{E_n = p_n^2\}$ и спектром длин $\{l_\gamma\}$ классических периодических орбит. Поскольку класс функций $h(p)$, удовлетворяющих вышеприведенным условиям a)-c) достаточно велик, общая формула следа представляет собой бесконечное число *правил суммирования для периодических орбит*. В настоящее время эти правила суммирования предоставляют единственную замену, подходящую для квантовых систем, классический предел которых является сильно хаотическим, правил ЕВК-квантования, применимых для интегрируемых систем.

В качестве примера рассмотрим функцию $h(p) = e^{-p^2 t}$, $t > 0$. Тогда мы получим след *ядра теплопроводности* (вновь используем естественные единицы измерения, но сохраняем зависимость от $\hbar$)

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} e^{-\widehat{H}t/\hbar} &= \operatorname{Tr} e^{(\hbar t)\Delta} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-E_n t/\hbar} \\ &\underset{(\hbar\to 0)}{\sim} \frac{A}{4\pi\hbar t} - \frac{L}{8\sqrt{\pi\hbar t}} + C + \frac{1}{\sqrt{4\pi\hbar t}} \sum_{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l_\gamma \chi_\gamma^k e^{-k^2 t_\gamma^2/4\hbar t}}{e^{k\lambda_\gamma l_\gamma/2} - \sigma_\gamma^k e^{-k\lambda_\gamma l_\gamma/2}}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Здесь требуется сделать несколько замечаний: i) Время $t$ и $\hbar$ входят только в комбинации $\hbar t$. Таким образом, квазиклассический предел эквивалентен пределу $t \to 0+$. Более того, если $\hbar t$ заменить на $\beta$, то получим *статсумму* статистической механики и таким образом, квазиклассический предел соответствует *высокотемпературному пределу* $\beta \to \infty$ в термодинамике. ii) Вклад периодических орбит в (3.12) экспоненциально убывает при $t$ стремящемся к нулю и получаем асимптотику ядра теплопроводности

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-E_n t/\hbar} \sim \frac{A}{4\pi\hbar}\frac{1}{t} - \frac{L}{8\sqrt{\pi\hbar}}\frac{1}{\sqrt{t}} + C + \mathcal{O}(\sqrt{t}) \tag{3.13}$$

при $t \to 0+$. Заметим, что коэффициенты $A$, $L$ и $C$ соотношения (3.13) тождественны коэффициентам в асимптотической формуле Вейля (3.11). Это происходит не случайно, а отражает глубокую связь между асимптотикой ядра теплопроводности и асимптотикой Вейля. В действительности, это является основой современного подхода при определении слагаемых в формуле Вейля. В современной литературе коэффициенты разложения по малому $t$ следа ядра теплопроводности иногда называют коэффициентами Сили. Они являются топологическими инвариантами $\Omega$, где $\Omega$ может быть произвольным многообразием. (Подробности см. в [36–38].) Эти результаты также могут быть обобщены на случай неограниченных «горо-образных» биллиардов [39]. Если отождествить энергии $E_n$ с частотами $\nu_n$ вибрирующей мембраны ($E_n \sim \nu_n^2$), то из (3.13) получим, что совершенное ухо может слышать площадь $A$ и длину границы $L$ мембраны, т. е. может слышать форму барабана [36]. iii) Следует отметить, что асимптотическое разложение (3.11) является тождественным для интегрируемых и неинтегрируемых систем и поэтому асимптотика Вейля не содержит никакой информации о возможных проявлениях (fingerprints) классического хаоса в квантовой механике, iv) Отметим, что формула Вейля (3.11) является одновременно асимптотическим разложением по $p$, поскольку $p$ и $\hbar$ возникают только в сочетании $p/\hbar$. Однако, из этого не следует, что поправка в непрерывной дроби $\mathcal{N}(p) - \overline{\mathcal{N}}(p)$ убывает как $\mathcal{O}(1/p)$ при $p \to \infty$. В действительности, ожидается, что эта поправка ошибки возрастает, но определение его точного порядка является чрезвычайно сложной математической задачей даже для интегрируемых систем. В качестве примера я сошлюсь на поправку в знаменитой круговой задаче, который будет упомянут в замечании iii) в конце параграфа 4.

Формула следа (3.9) представляет собой квазиклассическое приближение для плоских биллиардов. Однако, оказывается, что это в *точности* модель Адамара, т. е. геодезический поток на компактной римановой поверхности рода $g \geqslant 2$, который описывается классическим гамильтонианом (2.2), поскольку тогда она тождественна знаменитой *формуле следа Сельберга* [40]. С некоторыми модификациями можно также получить точную формулу Сельберга для биллиарда Артина [41]. По аналогии с построением биллиарда Артина, обсуждавшемся в параграфе 2 можно определить компактную риманову поверхность как $\Gamma \setminus \mathcal{H}$, где $\Gamma$ — дискретная подгруппа PSL(2,$\mathbb{R}$). На верхней полуплоскости $\mathcal{H}$, $\Gamma \setminus \mathcal{H}$ может быть реализована как фундаментальная область $\mathcal{F}$ для $\Gamma$ на $\mathcal{H}$. Для $g \geqslant 2$, $\mathcal{F}$ может быть выбрана как просто связная область, границы которой являются $4g$ отрезками геодезических. Классический гамильтониан геодезического потока на $\Gamma \setminus \mathcal{H}$ задается формулой (2.2) с гиперболической метрикой $g_{ij} = \delta_{ij}/y^2$. Тогда уравнение Шредингера имеет ту же форму, что и в (2.3), где $\Delta$ теперь — оператор Лапласа–Бельтрами, который на $\mathcal{H}$ имеет простой вид $\Delta = y^2(\partial_x^2 + \partial_y^2)$. Следует наложить периодические граничные условия $\psi(\gamma z) = \psi(z)$ для всех $\gamma \in \Gamma$ и $z \in \mathcal{H}$. Тогда энергетический спектр является дискретным, $0 = E_0 < E_1 \leqslant E_2 \leqslant \ldots$. В случае биллиарда Артина имеем то же самое уравнение Шредингера, но с граничными условиями Дирихле или Неймана соответственно на $\partial\mathcal{F}$. В первом случае спектр является дискретным, а во втором случае спектр является и непрерывным, и дискретным. (Начальное введение в гиперболическую геометрию и формулу следа Сельберга см. в [42].)

Наши тщательные исследования формулы следа Сельберга и квазиклассической формулы следа (3.9), выполненные в течение последних нескольких лет позволили нам намного лучше понимать сложные свойства квантовых систем, классический предел которых является сильно хаотическим. В этой статье я не могу привести обзор всех этих работ. Читатель может самостоятельно ознакомится с современными исследованиями, представленными в [43–49].

## 4. Универсальные признаки квантового хаоса

В параграфах 1 и 2 мы убедились, что явление хаоса в классической динамике является общим свойством сложных систем. Наиболее поразительным свойством детерминированного хаоса является чувствительная зависимость от начальных условий такая, что близкие траектории в фазовом пространстве отдаляются друг от друга с экспоненциальной скоростью. В результате долговременное поведение сильно хаотической системы непредсказуемо.

Возникает фундаментальный вопрос, проявляет ли это вполне определенное явление классического хаоса себя в квантовом мире посредством аналогичного явления, которое можно было бы назвать «квантовым хаосом». Под этим мы понимаем следующее. Дана классическая динамическая система, которая является сильно хаотической, существует ли какое либо проявление в соответствующей квантовой системе, которое выдает свой хаотический характер. По аналогии с классическим случаем первым делом по-видимому следует искать возможное хаотическое поведение для случая квантовой механики в долговременном поведении системы. Однако оказывается, что долговременный предел в квантовой механике находится под надежным контролем ввиду фундаментального факта, что оператор эволюции по времени $e^{-i\widehat{H}t/\hbar}$ является унитарным и поэтому его спектр лежит на единичной окружности. Более того, для систем с ограниченными состояниями системы спектр является дискретным, и эволюция по времени, таким образом, является почти периодической в смысле теории Гаральда Бора почти периодических функций. Здесь возникает отличие от классических систем, для которых, эволюцией по времени которых управляет оператор Лиувилля. Если классическая система является смешанной и хаотической, то спектр Лиувиллиана имеет непрерывную часть на единичной окружности [23] и, таким образом, эволюция по времени является непредсказуемой для больших промежутков времени. Это фундаментальное отличие между классической и квантовой эволюцией по времени привело к общему убеждению, что «кажется маловероятным» [13], что в квантовой механике существует что-либо сравнимое с хаотическим поведением классических динамических систем. С другой стороны, в предисловии к своей книге Гутцвиллер писал [13]: «Этот вопрос до сих пор остается открытым и все предварительные ответы наводят на мысль, что квантовая механика является более глубокой, чем полагает большинство из нас.»

В 1984 году Бохигас и др. в [50] выдвинули гипотезу, что статистические свойства флуктуации энергетических уровней хаотических систем описываются универсальными законами теории случайных матриц [51]. Однако, сегодня известно, что предсказания теории случайных матриц выполняются только для близкодействующих и среднедействующих корреляций квантового спектра, но совершенно непригодны для дальнедействующих корреляций. Это явление было исследовано Майклом Берри [52] с использованием квазиклассической формулы следа. Квазиклассические аргументы Берри позволяют предположить, что одна из обычно изучаемых спектральных статистик, так называемая спектральная жесткость $\Delta_3(L)$ Дайсона–Мехта [53], должна стабилизироваться при больших $L$ в отличие от логарифмического поведения, предсказываемого теорией случайных матриц. ($\Delta_3(L)$ измеряет среднеквадратичные флуктуации числа $\mathcal{N}(p)$ энергетических уровней в интервале энергий, содержащем в среднем $L$ уровней.) Более того, недавно обнаружили, что существует очень частный случай хаотических систем, демонстрирующих *арифметический хаос*, в котором нарушается универсальность статистик энергетических уровней даже в близкодействующем режиме. (Подробности см. в [44, 45, 49].) Таким образом, свойство спектральной жесткости по-видимому не предоставляет универсального признака классического хаоса в квантовой механике.

В последующем изложении я представлю две гипотезы, на основе которых приведу аргументы в подтверждение того, что существуют уникальные свойства флуктуаций в квантовой механике, которые являются *универсальными* и во вполне определенном смысле *максимально случайными*, если соответствующая классическая система является сильно хаотической. Я убежден, что эти свойства составляют квантовомеханический аналог явления хаоса в классической механике. Таким образом по-видимому подтверждается утверждение, что *наконец-то обнаружен квантовый хаос!*

Эти две гипотезы формулируются следующим образом:

**Гипотеза I**

(1) Пусть $\overline{\mathcal{N}}(p)$ пертурбативный вклад в общее число $\mathcal{N}(p)$ энергетических уровней $E_n = p_n^2$, $p_n \leqslant p$ для типичной квантовой системы, включающий в себя все члены ряда Лорана по $\hbar$ вплоть до $\mathcal{O}(\hbar^0)$ (асимптотическая формула (3.11) в случае двумерных биллиардов). Тогда арифметическая функция $\delta_n := n - 1/2 - \overline{\mathcal{N}}(p_n) =: \mathcal{N}_{osc}(p_n)$ колеблется около нуля с возрастанием средней амплитуды $a_n := a(p_n^2)$ в том смысле, что

$$\langle \mathcal{N}_{osc}(p) \rangle := \frac{1}{\mathcal{N}(p)} \sum_{p_n \leqslant p} \delta_n = \mathcal{O}(p^{-1}) \tag{4.1}$$

$$\langle \mathcal{N}_{osc}^2(p) \rangle := \frac{1}{\mathcal{N}(p)} \sum_{p_n \leqslant p} \delta_n^2 = \mathcal{O}(a^2(p^2)) \tag{4.2}$$

при $E = p^2 \to \infty$, где

$$a(E) = \begin{cases} E^{1/4} & \text{для интегрируемых систем} \\ (\log E)^{1/2} & \text{для обычных хаотических систем} \\ E^{1/4}(\log E)^{-1/2} & \text{для хаотических систем с арифметическим хаосом} \end{cases} \tag{4.3}$$

(2) Нормализованные флуктуации

$$\alpha_n := \delta_n / a_n,$$

рассматриваемые как случайные числа, имеют при $n$, стремящемся к бесконечности, предельное распределение $\mu(d\alpha)$, которое является вероятностным распределением на $\mathbb{R}$ и является абсолютно непрерывным относительно меры Лебега с плотностью $f(\alpha)$, такое, что для любой кусочно непрерывной ограниченной функции $\Phi(\alpha)$ на $\mathbb{R}$, следующее математическое ожидание сходится

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{\mathcal{N}(p)} \sum_{p_n \leqslant p} \Phi(\alpha_n) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha) f(\alpha)\, d\alpha \tag{4.4}$$

и задается вышеприведенным интегралом, где $f(\alpha)$ не зависит от $\Phi(\alpha)$. Более того, плотность $f(\alpha)$ удовлетворяет

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\,d\alpha = 1, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha f(\alpha)\,d\alpha = 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 f(\alpha)\,d\alpha = \sigma^2, \tag{4.5}$$

где дисперсия $\sigma^2$ строго положительна.

(3) Для сильно *хаотических* систем удовлетворяется центральная предельная теорема, т. е. функция $f(\alpha)$ является *универсальной* и задается *Гауссианом* (нормальное распределение)

$$f(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\alpha^2/2\sigma^2} \tag{4.6}$$

с нулевым математическим ожиданием и стандартной дисперсией $\sigma = 1/\sqrt{2\pi}$ или $\sigma = 1/2\pi$ в *неарифметическом* случае, соответствующем обратимым или необратимым во времени системам соответственно, и $\sigma = \sqrt{A/2\pi^2}$ в *арифметическом* случае гиперболических биллиардов с площадью $A$. В частности, существуют все старшие моменты последовательности $\{\alpha_n\}$, где нечетные моменты обращаются в нуль, а четные моменты удовлетворяют ($k \in \mathbb{N}_0$)

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{\mathcal{N}(p)} \sum_{p_n \leqslant n} \alpha_n^{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!} \sigma^{2k}, \tag{4.7}$$

(4) В отличие от вышеприведенной универсальной ситуации для хаотических систем, для *интегрируемых* систем в общем случае для флуктуаций не выполняется центральная предельная теорема и профиль плотности $f(\alpha)$ может быть совершенно различным для разных систем. Старшие моменты $\{\alpha_n\}$ могут не сходится к моментам предельного распределения и нечетные моменты могут не обращаться в нуль, так что $f(\alpha)$ обычно асимметричная и может быть как унимодальной так и мультимодальной.

**Гипотеза II**

(1) Пусть $\psi_n(\mathbf{q}), n \in \mathbb{N}$, нормированные собственные функции сильно хаотической системы. Тогда $\psi_n(\mathbf{q})$ имеют, при $n$ стремящемся к бесконечности, предельное распределение $P(\psi)$ такое, что для каждой кусочно непрерывной, ограниченной функции $\Phi(\psi)$ на $\mathbb{R}$ сходится следующий предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{A} \int\limits_{\Omega} \Phi(\psi(\mathbf{q}))\,d^2q = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(\psi)P(\psi)\,d\psi \tag{4.8}$$

и задается вышеприведенным интегралом, где $P(\psi)$ не зависит от $\Phi(\psi)$.

(2) Для сильно хаотических систем выполняется центральная предельная теорема, т. е. функция $P(\psi)$ является *универсальной* и задается *Гауссианом*

$$P(\psi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\psi^2/2\sigma^2} \tag{4.9}$$

с нулевым математическим ожиданием и стандартной дисперсией $\sigma^2 = 1/A$, где через $A$ обозначена площадь $\Omega$.

Следует сделать несколько замечаний: i) Гипотезы I и II были сформулированы для плоских биллиардов. Для гиперболических биллиардов на верхней полуплоскости $\mathscr{H}$ следует заменить $d^2q$ в формуле (4.8) на $dxdy/y^2$. При выполнении очевидных изменений можно предположить, что обе гипотезы выполняются для произвольных хаотических систем. ii) Численные проверки гипотезы I были выполнены для нескольких сильно хаотических систем, включая арифметический хаос: обычный гиперболический восьмиугольник, гиперболические треугольники и биллиард Артина для обоих классов симметрии. Полученные до сих пор результаты подтверждают гипотезу I. Подробные численные исследования будут опубликованы в другой работе. iii) Та часть гипотезы I, в которой рассматривается неуниверсальное поведение *интегрируемых* систем, обобщает строгие результаты недавно полученные Хит–Брауном [54] в знаменитой круговой задаче, а также Блехером и др. [55] в задаче о точках решетки внутри сдвинутой окружности. iv) Гипотеза, что квазиклассические волновые функции должны вести себя как гауссовы случайные функции, если лежащая в основе классическая динамика хаотическая, была выдвинута Берри [56]. Первые проверки с волновыми функциями, соответствующими нижним уровням, подтверждают эту гипотезу [57]. Недавно было проведено подробное исследование [58] для сильно возбужденных квантовых собственных состояний и было получено превосходное соответствие с гауссовым поведением (4.9). v) Для обеих гипотез важно, чтобы центральная предельная теорема предполагалась выполненной для случая сильно хаотических систем, т. е. что функции $f(\alpha)$ и $\Phi(\psi)$ являются гауссовыми распределениями с нулевым математическим ожиданием и универсальной стандартной дисперсией. Это служит выражением факта *максимальной случайности*, который в свою очередь подтверждает правильность рассмотрения этих явлений как проявлений *квантового хаоса*.

Итак, я считаю, что были найдены очевидные *признаки квантового хаоса*, которые кроме того являются *универсальными*, что выражено в двух гипотезах. Остается *вывести* эти гипотезы из общей формулы следа (3.9).

## Благодарности

Я хотел бы поблагодарить Ральфа Ауриха (Ralf Aurich) и Йенса Болте (Jens Bolte) за полезные обсуждения, а также Ральфа Ауриха, Франка Шеффлера (Frank Scheffler) и Гюнтера Штайля (Gunther Steil) за выполнение численных проверок гипотезы I. Работа выполнена при финансовой поддержке Deutsche Forschungsgemeinschaft согласно контракту №DFG-Ste 241/4-6.

## Список литературы

[1] Einstein A. *Zum Quantensatz von Sommerfeld und Epstein* // Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, 1917, B. 19, S. 82–92.

[2] Universität Hamburg 1919-1969 // Selbstverlag der Universität Hamburg, Hamburg, 1969.

[3] Arnold V. I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. New York, 1978.

[4] Lichtenberg A. J., Lieberman M. A. *Regular and Chaotic Dynamics*. 2-nd Edition. New York, 1992.

[5] Bohr N. *On the Quantum Theory of Line-Spectra* // Kgl. Vidensk. Selsk. Skrifter, Naturvidensk. og Mathem. Afd. 8. Raekke, IV, 1918, Vol. 1, p. 1–36.

[6] Keler J. B. *Corrected Bohr-Sommerfeld Quantum Conditions for Nonseparable Systems* // An. Phys. (New York), 1958, Vol. 4, p. 180–188;

Keler J. B., Rubinow S. I. *Asymptotic Solution of Eigenvalue Problems* // An. Phys. (New York), 1960, Vol. 9, p. 24–75.

[7] Pauli W. *Über das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt der neuen Quantenmechanik* // Z. Physik, 1926, B. 36, S. 336–363.

[8] Schrödinger E. *An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules* // Phys. Rev., 1926, Vol. 28, p. 1049–1070.

[9] Schrödinger E. *Der stetige Übergang von der Mikro– zur Makromechanik* // Die Naturwissenschaften, 1926, B. 14, S. 664–666.

[10] Steiner F. *Schrödinger's Discovery of Coherent States*. In: Matter Wave Interferometry. (Proc. Int. Workshop held in Viena, Austria, 1987 on the occasion of the 100-th anniversary of E. Schrödinger's birth.) Eds. G. Badurek, H. Rauch, A. Zeilinger // Amsterdam, 1988, p. 323–326. (См. также: Physica B, 1988, Vol. 151, p. 323–326.)

[11] Heisenberg W. *Der Teil und das Ganze*. München, 1969, p. 105–109.

[12] Steiner F. *Space-Time Transformations in Radial Path Integrals* // Phys. Let. A, 1984, Vol. 106, p. 356–362;

Steiner F. *Exact Path Integral Treatment of the Hydrogen Atom* // Phys. Let. A, 1984, Vol. 106, p. 363–367;

Steiner F. *Path Integrals in Polar Coordinates from eV to Gev*. In: Path Integrals from meV to MeV. Eds. M. C. Gutzwiler et. al. Singapore, 1986, p. 35–359;

Grosche G., Steiner F. *Path Integrals on Curved Manifolds* // Z. Phys., 1987, Vol. C36, p. 699–714;

Grosche G., Steiner F. *The Path Integral on the Pseudosphere* // An. Phys. (New York), 1988, Vol. 182, p. 120–156.

[13] Gutzwiler M. C. *Chaos in Clasical and Quantum Mechanics*. New York, 1990.

[14] Morse M. *The Calculus of Variations in the Large*. Providence, 1935;

Milnor J. *Morse Theory*. Princeton, 1963;

Morse M. *Variational Analysis*. New York, 1973.

[15] Pauli W. *Über das Model des Wasserstoffmolekülions* // Annalen der Physik (Leipzig) IV, 1922, B. 68, S. 177–240.

[16] Gutzwiller M. C. *Energy Spectrum According to Classical Mechanics* // J. Math. Phys., 1970, Vol. 11, p. 1791–1806.

Gutzwiller M. C. *Periodic Orbits and Classical Quantization Conditions* // J. Math. Phys., 1971, Vol. 12, p. 343–358.

[17] Boltzmann L. *Über die mechanischen Analogien des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik* // Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), 1887, B. 100, S. 201–212.

[18] Poincaré H. *Les méthodes nouvelles de la méchanique céleste*. Tome I, Paris, 1892; Tome III, Paris, 1899.

[19] Hadamard J. *Les surfaces à courbures opposés et leurs lignes géodésiques* // J. Math. Pures et Apl., 1898, Vol. 4, p. 27–73. (See also: Oeuvres Complètes de Jacques Hadamard, 1968 Paris, Vol. 2, p. 729–775.)

[20] Bunimovich L. A. *On the Ergodic Properties of Nowhere Dispersing Billiards* // Commun. Math. Phys., 1979, Vol. 65, p. 295–312;

Bunimovich L. A., Sinai Ya. G. *Markov Partitions for Dispersed Billiards* // Commun. Math. Phys., 1980, Vol. 78, p. 247–280.

[21] Birkhoff G. D. *On the Periodic Motions of Dynamical Systems* // Acta Mathematica (Uppsala), 1927, Vol. 50, p. 359–379.

[22] Sinai Ya. G. *On the Foundations of the Ergodic Hypothesis for a Dynamical System of Statistical Mechanics* // Dokl. Akad. Nauk, 1963, Vol. 153, No. 6. (Русскоязычный оригинал: Sov. Math. Dokl., 1963, T. 4, No. 6, s. 1818–1822);

Sinai Ya. G. *Dynamical Systems with Elastic Reflections* // Russian Math. Surveys, 1970, Vol. 25, No. 2, p. 137–191.

[23] Arnold V. I., Avez A. *Ergodic Problems of Classical Mechanics*. New York, 1968.

[24] Heitmann D., Kotthaus J. P. *The Spectroscopy of Quantum Dot Arrays* // Physics Today, 1993, p. 56–63.

[25] Benaker C. W. J., H. van Houten. *Quantum Transport in Semiconductor Nanostructures*. In: Solid State Physics, 1991 New York, Vol. 4;

Altshuler B. L., Lee P. A., Web R. A. (Eds.). *Mesoscopic Phenomena in Solids*. New York, 1991;

Stone A. D., Jalabert R. A., Alhasid Y. In: Transport Phenomena in Mesoscopic Systems, Springer Series in Solid-State Science, 1992 Berlin, Vol. 109.

[26] Duhem P. *La théorie physique, son objet et sa structure* // Revue de Philosophie IV–VI (1904, 1905).

[27] Duhem P. *La Théorie physique: Son Objet, Sa Structure*. Paris, 1906.

[28] Duhem P. *Ziel und Struktur der physikalischen Theorien. Übersetzt von Friedrich Adler*. Leipzig, 1908.

[29] Artin E. *Ein mechanisches System mit quasi-ergodischen Bahnen* // Abh. Math. Sem. d. Hamburgischen Universität, 1924, B. 3, S. 170–175.

[30] Mautner F. *Geodesic Flows on Symetric Riemann Spaces* // An. Math., 1957, Vol. 65, p. 416–431.

[31] Steiner F. *From Feynman's Path Integral to Quantum Chaology*. Invited Talk a the Symposium on Quantum Chaos. Copenhagen, 1988;

Sieber M., Steiner F. *Generalized Periodic-Orbit Sum Rules for Strongly Chaotic Systems* // Phys. Let. A, 1990, Vol. 144, p. 159–163.

[32] Feynman R. P. *Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics* // Rev. Mod. Phys., 1948, Vol. 20, p. 367-387.

[33] Grosche C., Steiner F. *Table of Feynman Path Integrals*. To appear in: Springer Tracts in Modern Physics.

[34] Stöckman H.-J.: *Mikrowellenbillards. Chaos in der Quantenmechanik* // Physik in unserer Zeit, 1993, B. 24, S. 200-206.

[35] Weyl H. *Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte* // Nachr. Königl. Ges. Wiss. Göttingen. Math.–phys. Klasse, 1911, S. 110-117;

Weyl H. *Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung)* // Math. Annalen, 1912, B. 71, S. 441–479.

[36] Kac M. *Can one heart the shape of a drum?* // Amer. Math. Monthly, 1966, Vol. 73, Part II, p. 1–23.

[37] Baltes H. P., Hilf E. R. *Spectra of Finite Systems*. Mannheim, 1976.

[38] McKean H. P., Singer I. M. *Curvature and the Eigenvalues of the Laplacian* // J. Diff. Geom., 1967, Vol. 1, p. 43–69;

Gilkey P. B. *The Index Theorem and the Heat Equation*. Boston, 1974.

[39] Steiner F., Trillenberg P. *Refined Asymptotic Expansion for the Partition Function of Unbounded Quantum Billiards* // J. Math. Phys., 1990, Vol. 31, p. 1670–1676.

[40] Selberg A. *Harmonic Analysis and Discontinuous Groups in Weakly Symmetric Riemannian Spaces with Application to Dirichlet Series* // J. Indian. Math. Soc., 1956, Vol. 20, p. 47–87.

[41] Venkov A. B. *Selberg's Trace Formula for the Hecke Operator Generated by an Involution, and the Eigenvalues of the Laplace-Beltrami Operator on the Fundamental Domain of the Modular Group PSL(2, $\mathbb{Z}$)* // Math. USSR Izvestiya, 1978, Vol. 12, p. 448–462.

[42] Berndt R., Steiner F. *Hyperbolische Geometrie und Anwendungen in der Physik*. Hamburger Beiträge zur Mathematik (aus dem Mathematischen Seminar) // Heft, 1989, B. 8, S. 1–138.

[43] Steiner F. *On Selberg's Zeta Function for Compact Riemann Surfaces* // Phys. Lett. B, 1987, Vol. 188, p. 447–454;

Bolte J., Steiner F. *Determinants of Laplace-like Operators on Riemann Surfaces* // Commun. Math. Phys., 1990, Vol. 130, p. 581–597;

Bolte J., Steiner F. *The Selberg Trace Formula for Bordered Riemann Surfaces* // Commun. Math. Phys., 1993, Vol. 156, p. 1–16.

[44] Aurich R., Steiner F. *On the Periodic Orbits of a Strongly Chaotic System* // Physica D, 1988, Vol. 32, p. 451–460;

Aurich R., Bogomolny E. B., Steiner F. *Periodic Orbits on the Regular Hyperbolic Octagon* // Physica D, 1991, Vol. 48, p. 91–101;

Aurich R., Steiner F. *Asymptotic Distribution of the Pseudo-Orbits and the Generalized Euler Constant $\gamma_\Delta$ for a Family of Strongly Chaotic Systems* // Phys. Rev. A, 1992, Vol. 46, p. 771-781.

[45] Aurich R., Sieber M., Steiner F. *Quantum Chaos of the Hadamard-Phys* // Phys. Rev. Let., 1988, Vol. 61, p. 483–487;

Aurich R., Steiner F. *Periodic-Orbit Sum Rules for the Hadamard Gutzwiler Model* // Physica D, 1989, Vol. 39, p. 169-193;

Aurich R., Steiner F. *Energy-Level Statistics of the Hadamard-Gutzwiler Ensemble* // Physica D, 1990, Vol. 43, p. 155–180;

Aurich R., Steiner F. *From Classical Periodic Orbits to the Quantization of Chaos* // Proc. Roy. Soc. London, 1992, Vol. A437, p. 693–714;

Aurich R., Steiner F. *Staircase Functions, Spectral Rigidity, and a Rule for Quantizing Chaos* // Phys. Rev. A, 1992, Vol. 45, p. 583–592;

[46] Sieber M., Steiner F. *Classical and Quantum Mechanics of a Strongly Chaotic Billiard System* // Physica D, 1990, Vol. 44, p. 248–266;

Sieber M., Steiner F. *Quantum Chaos in the Hyperbola Billiard* // Phys. Lett. A, 1990, Vol. 148, p. 415–420;

Sieber M., Steiner F. *Quantization of Chaos* // Phys. Rev. Lett., 1991, Vol. 67, p. 1941–1944;

Sieber M. *The Hyperbola Billiard: A Model for the Semiclassical Quantization of Chaotic Systems*. Dissertation Hamburg, 1991 // DESY report DESY 91–030 (1991), p. 1–101.

[47] Matthies C., Steiner F. *Selberg's Zeta Function and the Quantization of Chaos* // Phys. Rev. A, 1991, Vol. 44, R7877–R7880.

[48] Aurich R, Matthies C, Sieber M., Steiner F. *Novel Rule for Quantizing Chaos* // Phys. Rev. Lett., 1992, Vol. 68, p. 1629–1632;

Aurich R., Bolte J. *Quantization Rules for Strongly Chaotic Systems* // Mod. Phys. Lett. B, 1992, Vol. 6, p. 1691–1719;

Aurich R., Bolte J., Matthies C., Sieber M., Steiner F. *Crossing the Entropy Barrier of Dynamical Zeta Functions* // Physica D, 1993, Vol. 63, p. 71–86.

[49] Bogomolny B., Georgeot B., Giannoni M.-J., Schmit C. *Chaotic Billiards Generated by Arithmetic Groups* // Phys. Rev. Lett., 1992, Vol. 69, p. 1477–1480;

Bolte J., Steil G., Steiner F. *Arithmetical Chaos and Violation of Universality in Energy-Level Statistics* // Phys. Rev. Lett., 1992, Vol. 69, p. 2188–2191;

Bolte J. *Periodic Orbits in Arithmetical Chaos on Hyperbolic Surfaces* // Nonlinearity, 1993, Vol. 6, p. 935–951;

Bolte J. *Some Studies on Arithmetical Chaos in Classical and Quantum Mechanics*. Dissertation Hamburg, 1993 // Int. J. Mod. Phys. B, 1993, Vol. 7, p. 4451–4553;

Sarnak P. *Arithmetic Quantum Chaos*. Expanded Version of the Schur Lectures Tel-Aviv 1992 and Blythe the Lectures Toronto 1993. Princeton Preprint, 1993.

[50] Bohigas O., Giannoni M. J., Schmit C. *Characterization of Chaotic Quantum Spectra and Universality of Level Fluctuation Laws* // Phys. Rev. Lett., 1984, Vol. 52, p. 1-4.

[51] Mehta M. L. *Random Matrices*. Revised and enlarged 2-nd Edition // San Diego, 1991.

[52] Berry M.V. *Semiclassical Theory of Spectral Rigidity* // Proc. Roy. Soc. London, 1985, Vol. A400, p. 229–251.

[53] Dyson F. J., Mehta M. L. *Statistical Theory of Energy Levels of Complex Systems* // J. Math. Phys., 1963, Vol. 4, p. 701–712.

[54] Heath-Brown D. R. *The Distribution and Moments of the Error Termin the Dirichlet Divisor Problem* // Acta Arithmetica, 1992, Vol. LX. 4, p. 389-415.

[55] Bleher P. M. *On the Distribution of the Number of Lattice Points Inside a Family of Convex Ovals* // Duke Math. J., 1992, Vol. 67, p. 461–481;

Bleher P. M., Cheng Z., Dyson F. J., Lebowitz J. L. *Distribution of the Error Term for the Number of Lattice Points Inside a Shifted Circle* // Commun. Math. Phys., 1993, Vol. 154, p. 433–469;

Bleher P. M., Dyson F. J., Lebowitz J. L. *Non-Gaussian Energy Level Statistics for Some Integrable Systems*. Institute for Advanced Studies, Princeton, Preprint IASSNS-HEP-93/47 (August 1993).

[56] Berry M. V. *Regular and Irregular Semiclassical Wavefunctions* // J. Phys. A, 1977, Vol. 10, p. 2083–2091.

[57] McDonald S. W., Kaufmann A. M. *Wave Chaos in the Stadium: Statistical Properties of Short-Wave Solutions of the Helmholtz Equation* // Phys. Rev. A, 1988, Vol. 37, p. 3067-3086;

Aurich R., Steiner F. *Exact Theory for the Quantum Eigenstates of a Strongly Chaotic System* // Physica D, 1993, Vol. 48, p. 445-470.

[58] Aurich R., Steiner F. *Statistical Properties of Highly Excited Quantum Eigenstates of a Strongly Chaotic System* // Physica D, 1993, Vol. 64, p. 185–214;

Hejhal D. A., Rackner B. *On the Topography of Maass Waveforms for PSL(2; $\mathbb{Z}$): Experiments and Heuristics*. Supercomputer Inst. Research Rep. UMSI 92/162. University of Minnesota, 1992.