УДК 521.1

Редукция задачи двух тел на плоскости Лобачевского*

А. В. Борисов, И. С. Мамаев
Институт компьютерных исследований
Удмуртский государственный университет
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1
E-mail: borisov@ics.org.ru, mamaev@ics.org.ru

Получено 30 августа 2006 г.

В работе предложена одна из возможных процедур понижения порядка для задачи двух тел, движущихся по плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2$. Предполагается, что потенциал взаимодействия двух тел друг с другом зависит только от расстояния между телами (это заведомо выполнено для аналога ньютоновского потенциала). Ранее предложенная схема редукции использовалась для анализа задачи двух тел на сфере [3].

Ключевые слова: плоскость Лобачевского, первый интеграл, понижение порядка, потенциал взаимодействия

A. V. Borisov, I. S. Mamaev

Reduction in the two-body problem on the Lobatchevsky plane

We present a reduction-of-order procedure in the problem of motion of two bodies on the Lobatchevsky plane $\mathbb{H}^2$. The bodies interact with a potential that depends only on the distance between the bodies (this holds for an analog of the Newtonian potential). In earlier works, this reduction procedure was used to analyze the motion of two bodies on the sphere.

Keywords: Lobatchevsky plane, first integral, reduction-of-order procedure, potential of interaction

Mathematical Subject Classifications: 70F05, 70F15

*Работа выполнена в рамках программы поддержки ведущих научных школ (НШ–1312.2006.1), при поддержке РФФИ (04–05–64367, 05–01–01058), CRDF (RU–M1–2583–M0–04) и INTAS (04–80–7297).

1. Задача двух тел и первые интегралы

Рассмотрим движение двух точечных масс, которые обозначим m_a, m_b, по плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2$. Будем полагать, что внешние силы отсутствуют, а потенциал взаимодействия тел зависит лишь от взаимного расстояния (измеренного вдоль геодезической).

Пусть плоскость Лобачевского (псевдосфера) вложена в пространство Минковского $\mathbb{M}^3$ с метрикой $g = \operatorname{diag}(1, 1, -1)$, так что положение тел ограничено условием связи

$$\Phi(\boldsymbol{x}_k) = \langle \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_k \rangle + R^2 = 0, \quad k = a, b, \tag{1.1}$$

где $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum\limits_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$ — скалярное произведение в $\mathbb{M}^3$. Хорошо известно, что метрика пространства Минковского индуцирует на псевдосфере метрику Лобачевского, при этом гауссова кривизна пространства всюду постоянна и равна $-1/R^2$.

Функция Лагранжа в избыточных переменных для задачи двух тел может быть представлена в виде

$$\mathscr{L} = \frac{m_a}{2} \langle \dot{\boldsymbol{x}}_a, \dot{\boldsymbol{x}}_a \rangle + \frac{m_b}{2} \langle \dot{\boldsymbol{x}}_b, \dot{\boldsymbol{x}}_b \rangle - U\big(|\boldsymbol{x}_a - \boldsymbol{x}_b|\big), \tag{1.2}$$

где $|\boldsymbol{x}_a - \boldsymbol{x}_b| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}_a - \boldsymbol{x}_b, \boldsymbol{x}_a - \boldsymbol{x}_b \rangle}$.

Уравнения движения в избыточных переменных представляются в виде

$$\begin{aligned} m_a \ddot{\boldsymbol{x}}_a &= -V(\boldsymbol{x}_a - \boldsymbol{x}_b) - \lambda_a \boldsymbol{x}_a, \\ m_b \ddot{\boldsymbol{x}}_b &= -V(\boldsymbol{x}_b - \boldsymbol{x}_a) - \lambda_b \boldsymbol{x}_b, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $V = \dfrac{U'}{|\boldsymbol{x}_a - \boldsymbol{x}_b|}$, λ_a, λ_b — неопределенные множители Лагранжа, которые могут быть найдены дифференцированием связи (1.1). Так

$$\lambda_a = \frac{m_a \langle \dot{\boldsymbol{x}}_a, \dot{\boldsymbol{x}}_a \rangle - V \langle \boldsymbol{x}_a - \boldsymbol{x}_b, \boldsymbol{x}_a \rangle}{\langle \boldsymbol{x}_a, \boldsymbol{x}_a \rangle},$$

λ_b получается заменой $a \leftrightarrow b$. Система (1.3) имеет очевидно 4 степени свободы.

Поскольку потенциал зависит лишь от взаимного расстояния, уравнения (1.3) инвариантны относительно группы движений псевдосферы $SO(2, 1)$ и, следовательно, имеется векторный интеграл момента импульса, который может быть представлен в форме

$$\boldsymbol{M} = m_a \boldsymbol{x}_a \times \dot{\boldsymbol{x}}_a + m_b \boldsymbol{x}_b \times \dot{\boldsymbol{x}}_b, \tag{1.4}$$

где $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ — обычное векторное произведение трехмерных векторов. Любопытно, что интеграл момента, выраженный через скорости (не через импульсы), на сфере и псевдосфере имеет одинаковый вид.

Кроме того, очевидно, что сохраняется также полная энергия системы:

$$\mathscr{E} = \frac{m_a}{2} \langle \dot{\boldsymbol{x}}_a, \dot{\boldsymbol{x}}_b \rangle + \frac{m_b}{2} \langle \dot{\boldsymbol{x}}_b, \dot{\boldsymbol{x}}_b \rangle + U\big(|\boldsymbol{x}_a - \boldsymbol{x}_b|\big).$$

Несложно показать, что интегралы (1.4) неинволютивны, и их скобки Пуассона определяются алгеброй $so(3, 1)$:

$$\{M_3, M_1\} = M_2, \quad \{M_3, M_2\} = -M_1, \quad \{M_1, M_2\} = -M_3. \tag{1.5}$$

Как хорошо известно [1], для неинволютивного набора интегралов порядок системы может быть понижен на величину ранга пуассоновой структуры (1.1). Ранг пуассоновой структуры определяется максимальным числом независимых функций от первых интегралов, которые коммутируют между собой (т. е. $\{F_i(\boldsymbol{M}), F_j(\boldsymbol{M})\} = 0$). В данном случае (если не все $M_i = 0$, $i = 1, 2, 3$) имеется две такие функции, например, можно выбрать в виде

$$F_1 = M_3, \quad F_2 = M_1^2 + M_2^2.$$

Таким образом, на общем уровне интеграла момента можно выполнить редукцию на две степени свободы.

2. Явное понижение порядка. Использование метода Бура

Выполним процедуру редукции в явном виде. Прежде заметим, что впервые одну из схем явной редукции системы на две степени свободы предложена в работе [5]. Она основана на общей теории Марсдена — Вейнштейна и приводит к достаточно громоздкому виду гамильтониана. Мы здесь будем руководствоваться более элементарными соображениями и методами понижения порядка. Легко показать, что преобразование координат $\boldsymbol{x} = \mathbf{Q}\boldsymbol{x}'$, $\mathbf{Q} \in SO(2,1)$ определяет преобразование вектора момента (1.1) по формуле

$$g\boldsymbol{M} = \mathbf{Q}g\boldsymbol{M}',$$

где g — метрический тензор, $\boldsymbol{M}' = \sum\limits_{k=a,b} m_k \boldsymbol{x}_k' \times \dot{\boldsymbol{x}}_k'$. Вследствие того, что преобразование группы $SO(2,1)$ сохраняет знак скалярного квадрата любого вектора, возможны три различных случая:

1) $\langle \boldsymbol{M}, \boldsymbol{M} \rangle < 0$;

2) $\langle \boldsymbol{M}, \boldsymbol{M} \rangle > 0$;

3) $\langle \boldsymbol{M}, \boldsymbol{M} \rangle = 0$.

Рассмотрим подробно первый случай. Очевидно, что в этом случае заменой базиса можно привести вектор к виду $\boldsymbol{M}' = \big(0, 0, -\langle \boldsymbol{M}, \boldsymbol{M} \rangle\big)$. Поэтому в дальнейшем без ограничения общности будем полагать

$$\boldsymbol{M} = (0, 0, c), \quad c = \text{const}. \tag{2.1}$$

Для явного выполнения редукции в задаче двух тел на псевдосфере воспользуемся обобщением метода Бура, предложенным им первоначально для редукции задачи трех тел в $\mathbb{R}^3$. Эквивалентная система приведенных переменных может быть получен при использовании метода Радо. Переменные Бура и Радо связаны простым каноническим преобразованием. Использование метода Бура для редукции задачи двух тел на S^2 обсуждается в нашей работе [3], где имеются также более подробные комментарии и ссылки.

Определим подвижную двумерную плоскость в $\mathbb{M}^3$, образованную радиус-векторами частиц $l_{ab} = \{\boldsymbol{x} = \xi_a \boldsymbol{x}_a + \xi_b \boldsymbol{x}_b,\ \xi_a, \xi_b \in \mathbb{R}\}$. Множество этих плоскостей параметризуется двумя переменными ψ, θ, а положение тел на этой плоскости задается еще парой гиперболических углов φ_a, φ_b. При выборе этого набора переменных в качестве обобщенных координат, переменные ψ, θ можно сделать циклическими и при помощи редукции Рауса явно редуцировать систему к двум степеням свободы.

Дадим строгие формулировки и доказательства.

Предложение 1. *Положение двух тел на псевдосфере* $\mathbb{H}^2$ (1.1) *может быть параметризовано обобщенными переменными* θ, ψ, φ_a, φ_b *следующим образом*

$$\boldsymbol{x}_a = \mathbf{Q}_0^{-1}\begin{pmatrix} R\operatorname{sh}\varphi_a \\ 0 \\ R\operatorname{ch}\varphi_a \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_b = \mathbf{Q}_0^{-1}\begin{pmatrix} R\operatorname{sh}\varphi_b \\ 0 \\ R\operatorname{ch}\varphi_b \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_\theta\mathbf{Q}_\psi \in SO(2,1)$, *а матрицы* $\mathbf{Q}_\theta$ *и* $\mathbf{Q}_\psi$ *имеют вид*

$$\mathbf{Q}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta \\ 0 & \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

(*При этом координаты* θ, ψ *параметризуют плоскость* l_{ab}.)

Доказательство. Запишем уравнение плоскости $l_{ab} \subset \mathbb{M}^3$ в форме

$$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{x} \rangle = 0,$$

где $\boldsymbol{A}$ — нормаль к плоскости (в смысле метрики Минковского), причем без ограничения общности можно полагать $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \rangle = 1$. (Заметим, что в данном случае нормаль и радиус-векторы точек плоскости Лобачевского (1.1) лежат по разные стороны от конуса, заданного уравнением $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$.)

Параметризуем нормаль псевдосферическими координатами

$$\boldsymbol{A} = (\operatorname{ch}\theta\sin\psi, -\operatorname{ch}\theta\cos\psi, \operatorname{sh}\theta),$$

причем как несложно показать для преобразования (2.2), (2.3) выполняются соотношения

$$\mathbf{Q}_0\boldsymbol{A} = (0, -1, 0).$$

Следовательно, после замены координат $\boldsymbol{x}' = \mathbf{Q}_0\boldsymbol{x}$ получим

$$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \boldsymbol{A}, \mathbf{Q}_0^{-1}\boldsymbol{x}' \rangle = \langle \mathbf{Q}_0\boldsymbol{A}, \boldsymbol{x}' \rangle = -\boldsymbol{x}' = 0.$$

Таким образом, имеем

$$\mathbf{Q}_0\boldsymbol{x}_a = (x_a^{1\prime}, 0, x_a^{3\prime}), \quad \mathbf{Q}_0\boldsymbol{x}_b = (x_b^{1\prime}, 0, x_b^{3\prime}).$$

Вследствие сохранения нормы преобразованием Q_0 получим

$$(x_a^{1\prime})^2 - (x_a^{3\prime})^2 = (x_b^{1\prime})^2 - (x_b^{3\prime})^2 = -R^2.$$

Параметризуя эти кривые гиперболическими углами

$$x_{a,b}^{1}{}' = R\operatorname{sh}\varphi_{a,b}, \quad x_{a,b}^{3}{}' = R\operatorname{ch}\varphi_{a,b},$$

получим (2.2). ■

Запишем теперь функцию Лагранжа системы (1.2) в переменных θ, ψ, φ_a, φ_b. Для сокращения записи введем обозначения

$$\begin{gathered} K = m_a \operatorname{sh}^2 \varphi_a + m_b \operatorname{sh}^2 \varphi_b, \quad L = m_a \operatorname{ch}^2 \varphi_a + m_b \operatorname{ch}^2 \varphi_b, \\ J = m_a \operatorname{sh} \varphi_a \operatorname{ch} \varphi_a + m_b \operatorname{sh} \varphi_b \operatorname{ch} \varphi_b, \end{gathered} \tag{2.4}$$

при этом справедливы простые соотношения $L - K = m_a + m_b$, $KL - J^2 = m_a m_b \operatorname{sh}^2(\varphi_a - \varphi_b)$. Получаем

$$\begin{aligned} \mathscr{L} = \frac{1}{2}(m_a\dot\varphi_a^2 + m_b\dot\varphi_b^2) + \operatorname{sh}\theta(m_a\dot\varphi_a + m_b\dot\varphi_b)\dot\psi + \\ + \frac{1}{2}L\dot\theta^2 + \frac{1}{2}(L\operatorname{ch}^2\theta - m_a - m_b)\dot\psi^2 - J\operatorname{ch}\theta\dot\theta\dot\psi - U(\varphi_a - \varphi_b). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Прямыми вычислениями можно показать, что

$$\begin{gathered} \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = M_3, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = M_2 \sin\psi + M_1 \cos\psi, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = \dot\psi(M_2\cos\psi - M_1\sin\psi), \end{gathered} \tag{2.6}$$

и кроме того $\dfrac{\partial L}{\partial \psi} = 0$.

Отсюда заключаем, что переменная ψ — циклическая, и на инвариантном интегральном многообразии, определяемом соотношениями $M_1 = M_2 = 0$, переменная θ — также циклическая. Таким образом, выполняя редукцию Рауса, получим

Предложение 2. *Уравнения, описывающие эволюцию переменных φ_a, φ_b на многообразии $M_c \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$, определяемом соотношениями $M_1 = M_2 = 0$, $M_3 = c$, могут быть представлены в виде*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{R}}{\partial \dot\varphi_a}\right) - \frac{\partial \mathscr{R}}{\partial \varphi_a} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{R}}{\partial \dot\varphi_b}\right) - \frac{\partial \mathscr{R}}{\partial \varphi_b} = 0, \tag{2.7}$$

где $\mathscr{R}$ — функция Рауса, которая имеет вид

$$\begin{aligned} \mathscr{R} = (\mathscr{L} - c\dot\psi)\big|_{M_c} = \\ = \frac{1}{2}(m_a\dot\varphi_a^2 + m_b\dot\varphi_b^2) - \frac{1}{2}\frac{L}{L^2 - J^2}(m_a\dot\varphi_a + m_b\dot\varphi_b)^2 - \frac{1}{2}\frac{L}{LK - J^2}c^2 - U(\varphi_a - \varphi_b). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Доказательство. Согласно (2.6), инвариантное многообразие M_c определяется соотношениями

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = 0. \tag{2.9}$$

Разрешая эти соотношения относительно $\dot\theta$, $\dot\psi$, θ, находим

$$\begin{gathered} \operatorname{sh}\theta = \frac{LK - J^2}{J^2 - L^2}\frac{m_a\dot\varphi_a + m_b\dot\varphi_b}{c}, \\ \dot\psi = \frac{Lc}{LK - J^2}, \quad \dot\theta = \frac{Jc}{LK - J^2}\operatorname{ch}\theta. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Пусть $\widehat{\mathscr{L}} = \mathscr{L}\big|_{M_c}$ — функция Лагранжа (2.5), ограниченная на M_c, тогда имеем следующие равенства

$$\frac{\partial \mathscr{R}}{\partial \dot\varphi_k} = \frac{\partial \widehat{\mathscr{L}}}{\partial \dot\varphi_k} - c\frac{\partial \dot\psi\big|_{M_c}}{\partial \dot\varphi_k} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot\varphi_k} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi}\frac{\partial \dot\psi\big|_{M_c}}{\partial \dot\varphi_k} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot\theta}\frac{\partial \dot\theta\big|_{M_c}}{\partial \dot\theta} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta}\frac{\partial \theta\big|_{M_c}}{\partial \dot\varphi_k} - c\frac{\partial \dot\psi\big|_{M_c}}{\partial \dot\varphi_k}.$$

Используя (2.9), получим, что всюду на M_c выполняется равенство $\frac{\partial \mathscr{R}}{\partial \dot\varphi_k} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot\varphi_k}$, и аналогично $\frac{\partial \mathscr{R}}{\partial \varphi_k} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_k}$, $k = a, b$.

Явный вид функции Рауса (2.8) получается прямым вычислением из соотношений (2.10).

■

Для случая 2 (т. е. $\langle \boldsymbol{M}, \boldsymbol{M}\rangle > 0$), как несложно показать можно выбрать

$$\boldsymbol{M} = (c, 0, 0), \tag{2.11}$$

при этом в параметризации (2.2) необходимо поменять местами $\mathbf{Q}_\theta$ и $\mathbf{Q}_\psi$, так что $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_\psi\mathbf{Q}_\theta$. В этом случае будут выполнены соотношения

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot\theta} = M_1, \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta} = 0,$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot\psi} = M_3 \operatorname{ch}\theta - M_2 \operatorname{sh}\theta, \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi} = \dot\theta(M_3 \operatorname{sh}\theta - M_2 \operatorname{ch}\theta).$$

Функция Рауса редуцированной системы, описывающая эволюцию переменных φ_a, φ_b на интегральном многообразии (2.11) может быть записана в форме

$$\mathscr{R} = (\mathscr{L} - c\dot\theta)_{M_c} = \frac{1}{2}(m_a\dot\varphi_a^2 + m_b\dot\varphi_b^2) + \\ + \frac{1}{2}\frac{K}{J^2 - K^2}(m_a\dot\varphi_a + m_b\dot\varphi_b)^2 - \frac{1}{2}\frac{K}{LK - J^2}c^2 - U(\varphi_a - \varphi_b). \tag{2.12}$$

Из (2.12) несложно получить функцию Гамильтона. Случай $\langle \boldsymbol{M}, \boldsymbol{M}\rangle = 0$ является особым и требует отдельного рассмотрения. Пока мы не имеем ясности в этом вопросе. Отметим также, что с помощью указанной редукции можно выполнить бифуркационный анализ задачи двух тел на псевдосфере, аналогично сферическому случаю в [3]. Интересно исследовать различные частные решения — относительные равновесия, хореографии и пр. В связи с общими вопросами укажем также на возможность применения соображений изложенных в этой работе для пространственной редукции задачи двух тел на трехмерных сферах S^3 и псевдосферах $\mathbb{H}^3$. Как уже указывалось, другим более формальным методом понижение порядка выполнено в [5]. Однако, приведенная система в [5] очень громоздка, а ее применение затруднительно. Интересно, что необходимость отдельного анализа ситуаций $\langle \boldsymbol{M}, \boldsymbol{M}\rangle \gtrless 0$ или $\langle \boldsymbol{M}, \boldsymbol{M}\rangle = 0$ не возникает в этой схеме редукции.

Укажем недавнюю работу [4], в которой для S^2 и $\mathbb{H}^2$ было доказано отсутствие дополнительного мероморфного первого интеграла в задаче двух тел (с применением редукции [5]). Однако эти результаты имеют большее значение для развития аналитической теории дифференциальных уравнений, чем для динамики. Аналогичное замечание сделал А. Уинтнер [2] в связи с доказательством Брунса алгебраической неинтегрируемости задачи трех тел.

Список литературы

[1] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике*. Ижевск: РХД, 1999, 464 с.

[2] Уинтнер А. *Аналитические основы небесной механики*. М.: Наука, 1967, 524 с. Пер. с англ.: Wintner A. *The analytical foundations of celestial mechanics*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press. London: Humphrey Milford. Oxford University Press, 1941, 524 p.

[3] Borisov A. V., Mamaev I. S. *Two-body problem on a sphere. Reduction, stochasticity, periodic orbits* // Reg. & Chaot. Dyn., 2004, V. 9, № 3, p. 265–279.

[4] Schepetilov A. V. *Nonintegrability of the two-body problem in constant curvature spaces* // J. Phys. A, Mat. Gen., 2006, V. 39, p. 5787–5806.

[5] Shchepetilov A. V. *Reduction of the two-body problem with central interaction on simply connected spaces of constant sectional curvature* // J. Phys. A, 1998, p. 6279–6291.