УДК 517.93

О фазовых потоках в $J^n(\pi)$

В. Н. Думачев
Воронежский институт МВД России
394065, Россия, Воронеж, пр-т Патриотов, 53
E-mail: dumv@comch.ru

Получено 28 июня 2006 г.

На основе теоремы Лиувилля рассматривается обобщение механики Намбу. Показано, что пуассонова структура n-мерного мультиплектического фазового пространства индуцируется $(n-1)$ гамильтоновыми k-векторными полями, каждое из которых требует введения (k)-гамильтонианов.

Ключевые слова: теорема Лиувилля, гамильтоновы векторные поля

V. N. Dumachev

Phase flows in $J^n(\pi)$

On the basis of Liouville theorem the generalization of the Nambu mechanics is considered. Is shown, that Poisson manifolds of n-dimensional multi-symplectic phase space have inducting by $(n-1)$ Hamilton k-vectors fields, each of which requires of (k)-hamiltonians.

Keywords: Liouville theorem, Hamilton vectors fields
Mathematical Subject Classifications: 37K05, 70H05

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений как подмногообразие Σ в расслоении джетов $J^n(\pi)\colon E \to M$, определяемое уравнениями [1]

$$F(t, x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0, \tag{1}$$

где $t \in M \subset R$, $u = x_0 \in U \subset R$, $x_i \in J^i(\pi) \subset R^n$, $E = M \times U$. Выделяя из $\Sigma \subset J^n(\pi)$ уравнения, допускающие пуассонову структуру со скобкой

$$\{G, H\} = X_H \rfloor dG$$

запишем для них распределения Картана в виде

$$\theta_i = dx_i - \{x_i, H\}\, dt. \tag{2}$$

Здесь L_{X_H} — производная Ли по полю $X_H \in \Lambda^1$, Λ^n — внешняя градуированная алгебра k-поливекторных полей, $H = H(x)$ — пока неизвестная функция. Контактное векторное поле (лежащее в распределении Картана (2) и касающееся поверхности (1)) задается условием $X_H \rfloor \theta = 0$ и имеет вид

$$X_H = \frac{\partial}{\partial t} + \{x_i, H\}\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{3}$$

2. Классическая симплектическая механика на $J^2(\pi)$ допускает гамильтонову структуру, индуцированную векторным полем X_H^1. Векторное поле X_H^1 на симплектическом многообразии (M, ω) называется гамильтоновым, если соответствующая ему 1-форма $\Theta = X_H^1 \rfloor \Omega$ является замкнутой $d\Theta = 0$, а значит и точной [2] (в связном пространстве). Это позволяет найти гамильтониан H. В данном случае симплектическая форма задается в виде $\Omega = dx_1 \wedge dx_0$ и $\Theta = X_H^1 \rfloor \Omega = dH$, где

$$\mathbf{H} = \int H dt = \frac{1}{2}\int \left(x_0^2 + x_1^2\right) dt.$$

Пуассонова структура

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial x_0}\cdot\frac{\partial G}{\partial x_1} - \frac{\partial F}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial G}{\partial x_0}$$

индуцируется гамильтоновым векторным полем

$$X_H^1 = \frac{\partial H}{\partial x_0}\cdot\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial H}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial}{\partial x_0},$$

а распределение Картана (2) определяет динамические уравнения Гамильтона во вложении $J^2(\pi) \subset J^1\left(J^1(\pi)\right)$:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \{x_i, H\}$$

таким образом, что объем дифференциальных форм Картана (2)

$$I = \theta_1 \wedge \theta_2 = \Omega + X^1 \rfloor \Omega \wedge dt$$

является абсолютным интегральным инвариантом, а предсимплектическая форма $i \quad (I = di)$

$$i = x_1 \wedge dx_0 + H \wedge dt$$

дает инвариант Пуанкаре рассматриваемой динамической системы.

Согласно теореме Лиувилля любое гамильтоново поле сохраняет форму объема, т. е. производная Ли от 2-формы Ω по векторному полю X_H^1 есть нуль: $L_X\Omega = 0$. Другими словами генерируемая векторным полем X_H^1 однопараметрическая группа симплектических преобразований $\{g_t\}$ (или фазовый поток) оставляет инвариантной форму Ω, т. е. $g_t^*\Omega = 0$.

3. Обобщая предыдущие выкладки на $J^n(\pi)$ в качестве основы возьмем теорему Лиувилля. Именно, будем искать такие поливекторные поля, которые сохраняют мультиплектическую n-форму $\Omega = dx_0 \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}$ объема фазового пространства.

Теорема. *Мультиплектическая n-форма объема фазового пространства $\Omega \in \Lambda^n$ допускает существование $n-1$ поливекторных гамильтоновых полей $X^k \in \Lambda^k$.*

Доказательство. По определению

$$L_X\Omega = X\rfloor d\Omega + d\,(X\rfloor\Omega) = 0.$$

Поскольку форма объема $\Omega \in \Lambda^n$ является замкнутой $d\Omega = 0$, то из второго слагаемого

$$d\,(X\rfloor\Omega) = 0$$

по лемме Пуанкаре заключаем, что выражение $X\rfloor\Omega$ есть точная форма:

$$X\rfloor\Omega = \Theta = dH.$$

и если $\mathbf{X}_H^k \in \Lambda^k$, то $\Theta \in \Lambda^{n-k}$, $H \in \Lambda^{n-k-1}$. Для того, чтобы $H \in \Lambda^m \quad (m \geqslant 0)$, необходимо выполнение условия $(k \leqslant n-1)$.

Особенностью данной задачи является то, что $\Omega \in \Lambda^n$, где $\Lambda\,(R^n) \supset \left(\Lambda^0, \Lambda^1, \ldots, \Lambda^n\right)$ — внешняя градуированная алгебра. При условии, что фазовое пространство является связанным, из замкнутости формы Θ следует ее точность. Но факторалгебра $\Lambda\,(R^n)\,/\Lambda^n$ допускает существование $(n-1)$ точных форм: $\Theta \in \Lambda^{m=n-k} \quad (1 \leqslant m \leqslant n-1)$, в зависимости от того, принадлежит ли $X^k \in \Lambda^k \quad (n-1 \geqslant k \geqslant 1)$.

Несложно выписать несколько конкретных значений гамильтоновых поливекторных полей

$$X_H^{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\partial H}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial}{\partial x_0}\wedge\frac{\partial}{\partial x_1}\wedge\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\right]\wedge\ldots\wedge\frac{\partial}{\partial x_{n-1}},$$

$$X_H^{n-2} = \frac{1}{(n-2)!}\sum_{i<k}^{n-1}\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}-\frac{\partial H}{\partial x_k}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_0}\wedge\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial}{\partial x_k}\right]\wedge\ldots\wedge\frac{\partial}{\partial x_{n-1}},$$

$$X_H^{n-3} = \frac{1}{(n-3)!}\sum_{i<k<l}^{n-1}\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}-\frac{\partial H}{\partial x_k}+\frac{\partial H}{\partial x_l}\right)\cdot\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial}{\partial x_k}\wedge\frac{\partial}{\partial x_l}\right]\wedge\ldots\wedge\frac{\partial}{\partial x_{n-1}},$$

$$\ldots$$

для которых

$$\Theta^1 = X_H^{n-1}\rfloor\Omega = dH,$$

$$\Theta^2 = X_H^{n-2}\rfloor\Omega = \sum_{i}^{n-1} dH\wedge dx_i,$$

$$\Theta^3 = X_H^{n-3} \rfloor \Omega = \sum_{i<j}^{n-1} dH \wedge dx_i \wedge dx_j,$$

$$\Theta^4 = X_H^{n-4} \rfloor \Omega = \sum_{i<j<k}^{n-1} dH \wedge dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k,$$

$$\dots$$

$$\Theta^{n-1} = X_H^{1} \rfloor \Omega = \sum_{i<j<\ldots<k}^{n-1} dH \wedge dx_i \wedge dx_j \wedge \ldots \wedge dx_k.$$

Для любой n-формы Ω соответствующее гамильтоново векторное поле $X_H^1 \in \Lambda^1$ порождает Пуассонову структуру $X_H^1 \rfloor dx_i = \{x_i, H\}$ и контактное векторное поле типа (3)

$$X_H = \frac{\partial}{\partial t} + X_H^1$$

распределения (2).

4. Пример: $\Omega \in \Lambda^3$. В данном случае триплектическая форма объема задается в виде $\Omega = dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2$ и допускает 2 пуассоновых структуры, индуцируемые гамильтоновым векторным полем:

$$\Theta = X_H^1 \rfloor \Omega = \sum_{i=0}^{2} dH \wedge dx_i,$$

$$X_H^1 = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1} - \frac{\partial H}{\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_0} + \left(\frac{\partial H}{\partial x_2} - \frac{\partial H}{\partial x_0}\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial H}{\partial x_0} - \frac{\partial H}{\partial x_1}\right)\frac{\partial}{\partial x_2},$$

и гамильтоновым бивекторным полем:

$$\Theta = X_H^2 \rfloor \Omega = dH,$$

$$X_H^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial H}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial H}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial H}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_0} \wedge \frac{\partial}{\partial x_1}\right).$$

Для векторного поля скобка Ли-Пуассона

$$X_H^1 \rfloor dG = \{G, H\} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1} - \frac{\partial H}{\partial x_2}\right)\frac{\partial G}{\partial x_0} + \left(\frac{\partial H}{\partial x_2} - \frac{\partial H}{\partial x_0}\right)\frac{\partial G}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial H}{\partial x_0} - \frac{\partial H}{\partial x_1}\right)\frac{\partial G}{\partial x_2}$$

позволяет найти динамические уравнения Гамильтона, которые в вариационном виде можно записать как (2)

$$\theta_i = dx_i - J_{ik}\frac{\delta \mathbf{H}}{\delta x_k} dt,$$

с гамильтонианом

$$\mathbf{H} = \int H dt = \frac{1}{2}\int a_i x_i^2 dt.$$

В общем случае структурные функции пуассонова многообразия (антисимметричные матрицы $J_{ik} = -J_{ki}$) могут быть функциями координат фазового пространства: $J_{ik} = J_{ik}(x)$ и, например, если

$$J(x) = \begin{pmatrix} 0 & x_2 & -x_1 \\ -x_2 & 0 & x_0 \\ x_1 & -x_0 & 0 \end{pmatrix},$$

то динамические уравнения Гамильтона становятся уравнениями Эйлера движения твердого тела. Объем распределения Картана

$$\theta_i = dx_i - \{x_i, H\} \wedge dt$$

является абсолютным интегральным инвариантом: $I = \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3$, или

$$I = \Omega + X^1 \rfloor \Omega \wedge dt,$$

а предтриплектическая форма $i \quad (I = di)$

$$i = \omega + HdG \wedge dt$$

является инвариантом Пуанкаре рассматриваемой динамической системы. Здесь

$$\omega = x_0 dx_1 \wedge dx_2 - x_1 dx_2 \wedge dx_0 + x_2 dx_0 \wedge dx_1$$

— симплектическая форма Кириллова ($\Omega = d\omega$),

$$\mathbf{G} = \int G dx = \frac{1}{2} \int (x_0 + x_1 + x_2)\, dx.$$

Для бивекторного поля скобка Ли-Пуассона

$$X_H^2 \rfloor (dF \wedge dG) = \{F, G, H\} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial H}{\partial x_0} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial G}{\partial x_2} - \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial G}{\partial x_1} \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial H}{\partial x_1} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial G}{\partial x_0} - \frac{\partial F}{\partial x_0} \frac{\partial G}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial H}{\partial x_2} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x_0} \frac{\partial G}{\partial x_1} - \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial G}{\partial x_0} \right) \right]$$

совпадает со скобкой Намбу [3] и требует введения второго гамильтониана уравнений движения $\partial x_i / \partial t = \{x_i, G, H\}$. Абсолютный интегральный инвариант имеет вид

$$I = \Omega + X^2 \rfloor \Omega \wedge dt \wedge dG$$

с распределением Картана

$$\theta_i = dp_i - \{p_i, G, H\} \wedge dt.$$

5. Теория Намбу предполагает введение $(n-1)$ гамильтонианов для описания n-мерного фазового пространства Ω. Использование поливекторных гамильтоновых полей приводит к следующему ее обобщению:

пуассонова структура n-мерного мультиплектического пространства Ω индуцируется $(n-1)$ гамильтоновыми поливекторными $X_H^k \in \Lambda^k$ полями, каждое из которых требует ведения (k)-гамильтонианов:

$$X_H^k \rfloor (dF_1 \wedge dF_2 \wedge \ldots \wedge dF_k) = \{F_1, F_2, \ldots, F_k, H\}.$$

Список литературы

[1] Виноградов А. М., Красильщик И. С. *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики.* М.: Факториал, 1997, 464 с.

[2] Арнольд В. И. *Математические методы классической механики.* М.: Наука, 1989, 472 с.

[3] Nambu Y. *Generalized Hamiltonian dynamics* // Phys. Rev. D, 1973, V. 7, N. 8, p. 5405–5412.