

# О феноменах, сопровождающих переход к режиму синхронного хаоса в связанных неавтономных осцилляторах, представленных уравнениями для комплексных амплитуд\*

**П. В. Купцов**

Кафедра информатики ГОУ ВПО СГАП  
410056, Саратов, ул. Чернышевского, 104  
E-mail: kupav@mail.ru

**С. П. Кузнецов**

Институт радиотехники и электроники РАН, Саратовский филиал  
410019, Саратов, ул. Зеленая, 38

*Получено 19 июля 2006 г.*

Выводятся амплитудные уравнения для системы двух неавтономных осцилляторов Ван-дер-Поля, которая была предложена недавно в качестве простого и допускающего реализацию в физическом эксперименте примера системы с гиперболическим хаотическим аттрактором. Показано, что при переходе к приближенному описанию в терминах амплитудных уравнений основные характеристики гиперболической динамики сохраняются. Для двух связанных элементов, каждый из которых имеет гиперболический хаотический аттрактор, исследуется переход к режиму синхронного хаоса при увеличении параметра диссипативной связи. Обнаружено, что характерные для перехода к хаотической синхронизации эффекты, такие как изрешечивание бассейна симметричного аттрактора (riddling) и «пузырящийся» аттрактор (bubbling), проявляются в данном случае специфическим образом и присутствуют в узкой области параметра связи. Обсуждается также устройство многомерного аттрактора рассматриваемой системы в области до порога синхронизации.

Ключевые слова: гиперболический хаос, странный аттрактор Смейла-Вильямса, хаотическая синхронизация, амплитудные уравнения.

**P. V. Kuptsov, S. P. Kuznetsov**

## Transition to a synchronous chaos regime in a system of coupled non-autonomous oscillators presented in terms of amplitude equations

Amplitude equations are obtained for a system of two coupled van der Pol oscillators that has been recently suggested as a simple system with hyperbolic chaotic attractor allowing physical realization. We demonstrate that an approximate model based on the amplitude equations preserves basic features of a hyperbolic dynamics of the initial system. For two coupled amplitude equations models having the hyperbolic attractors a transition to synchronous chaos is studied. Phenomena typically accompanying this transition, as riddling and bubbling, are shown to manifest themselves in a specific way and can be observed only in a small vicinity of a critical point. Also, a structure of many-dimensional attractor of the system is described in a region below the synchronization point.

Keywords: hyperbolic chaos, strange Smale-Williams attractor, chaotic synchronization, amplitude equations.

Mathematical Subject Classifications: 37D45

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №06-02-16619).

## Введение

Одним из интересных и перспективных направлений в нелинейной динамике остается проработка вопроса о физических приложениях гиперболической теории, основы которой были заложены Смейлом, Аносовым и другими математиками.

Под гиперболической траекторией в фазовом пространстве динамической системы понимают траекторию, в точках которой касательное пространство (линейное векторное пространство векторов возмущений) допускает представление в виде прямой суммы подпространств устойчивых и неустойчивых возмущений, остающееся инвариантным вдоль траектории. Аттракторы диссипативных систем, у которых все траектории гиперболические, отвечают динамике с сильными хаотическими свойствами и допускают далеко идущий математический анализ. В учебниках и монографиях по нелинейной динамике примеры однородно гиперболических аттракторов ограничиваются искусственными математическими конструкциями, такими, как аттрактор Плыкина и соленоид Смейла – Вильямса [10, 11, 18, 3, 13, 4]. Известные модели реалистичных физических систем, для которых присутствие хаоса можно считать математически обоснованным (например, система Лоренца), не относятся к классу однородно гиперболических систем, для которых были бы применимы без оговорок все положения гиперболической теории.

В недавней работе одного из авторов [20] была предложена идея реализации аттрактора типа Смейла – Вильямса в системе двух связанных неавтономных осцилляторов Ван-дер-Поля, в которых при отношении рабочих частот 1:2 осуществляется попеременная генерация подсистем благодаря принудительной относительно медленной вариации параметра, а возбуждение по очереди передается от одного осциллятора к другому. Аналогичная система реализована в виде радиотехнического устройства и исследована в эксперименте [6]. Предположение о гиперболической природе аттрактора основывалось на том, что фаза колебаний одного из осцилляторов на последовательных стадиях возбуждения подчиняется отображению Бернулли (как в случае аттрактора Смейла – Вильямса), а также на наблюдаемом в численных расчетах свойстве грубости, проявляющемся в том, что канторова поперечная структура аттрактора и величина имеющегося положительного показателя Ляпунова нечувствительны по отношению к вариации параметров или функций в уравнениях. Согласно результатам дальнейшего анализа [5], в четырехмерном фазовом пространстве отображения Пуанкаре, описывающего изменение состояния системы за период воздействия, имеется поглощающая область в форме тороида (прямое произведение окружности и трехмерного шара), которая отображается внутрь себя, воспроизводя конструкцию Смейла – Вильямса. В этой области, как установлено на основании численных расчетов, выполнены условия теоремы, гарантирующей гиперболичность аттрактора, которые сформулированы в терминах расширяющихся и сжимающихся конусов в касательном пространстве. Тем самым гиперболичность аттрактора можно считать обоснованной (хотя и не в классическом стиле математического доказательства, а с привлечением результатов компьютерных вычислений).

Идею попеременного возбуждения двух систем-осцилляторов, поочередно передающих возбуждение друг другу, можно применить также к укороченным уравнениям, которые выводятся из уравнений Ван-дер-Поля в рамках метода медленно меняющихся амплитуд. На самом деле такого рода уравнения возникают в более широком контексте, нежели приближенное решение уравнения Ван-дер-Поля, поскольку отвечают по сути дела нормальной форме для бифуркации рождения предельного цикла Андронова-Хопфа. Амплитудные уравнения привлекались, например, в теории турбулентности Ландау [8, 9].

Рассуждая в духе теории Ландау, можно вообразить ситуацию, когда в некоторой распределенной системе имеются две моды с отношением частот 1:2, которые на фоне присутствующей

дополнительно медленной периодической составляющей движения поочередно выходят за порог возбуждения, и за счет нелинейного взаимодействия передают возбуждение по очереди друг другу. Тогда, в соответствии с идеей [20], имеют место условия для реализации гиперболического аттрактора типа Смейла – Вильямса.

В этом аспекте интересно обратиться к моделям в виде решеток или цепочек, составленных из элементов с хаотической динамикой. Следует упомянуть работы Бунимовича и Синая [15, 16], исследовавших решетки, в которых в качестве точечных элементов фигурировали одномерные растягивающие отображения или системы с хаотическим гиперболическим аттрактором. Было показано, что сильные хаотические свойства (в частности, присутствие инвариантной меры, отвечающей обобщению так называемых SRB-мер) сохраняются для связанных систем, по крайней мере, пока параметр связи не слишком велик. Эти результаты становятся актуальными теперь, когда мы имеем в руках конкретный пример физически реализуемой системы с гиперболическим аттрактором.

В качестве первоначального шага, естественно взять ситуацию, когда присутствует минимальное число связанных подсистем с гиперболическим хаосом, а именно, две. Исследование такой модели, в которой в качестве индивидуальной подсистемы фигурирует пара связанных неавтономных амплитудных уравнений, составляет основную цель данной работы. В частности, будут рассмотрены феномены, сопровождающие переход системы из двух идентичных элементов к режиму полной хаотической синхронизации [1] при включении диссипативной связи. (Под диссипативной мы понимаем связь такого типа, присутствие которой способствуют выравниванию мгновенных состояний взаимодействующих подсистем [23].)

Один из характерных феноменов — перемежаемость On-Off [24, 19]. Вблизи порога синхронизации симметричное состояние (служащее аттрактором в режиме синхронизации), оказывается слабо неустойчивым относительно возмущений, разрушающих симметрию (трансверсальные, или поперечные возмущения). Система, попадая в окрестность этого состояния, очень медленно удаляется от него, что интерпретируется как «ламинарная фаза». Затем в действие вступает нелинейность, и система демонстрирует всплеск нерегулярных колебаний — «турбулентную фазу».

В ситуации, когда динамика на симметричном аттракторе хаотическая, среди принадлежащих ему траекторий присутствуют различные инвариантные подмножества, к которым относятся, в частности, неустойчивые периодические орбиты — циклы. Степень устойчивости для них по отношению к трансверсальным возмущениям может отличаться от присущей собственно аттрактору (т. е. типичной траектории на аттракторе). Если, например, вблизи порога синхронизации при увеличении параметра диссипативной связи некоторые подмножества уже обрели поперечную устойчивость, но симметричный режим еще неустойчив (в том смысле, что в большинстве отвечающие ему траектории остаются неустойчивыми), то говорят о слабой неустойчивости по Милнору [21]. Проходя вблизи поперечно-устойчивого множества, орбита притягивается к нему и может долго оставаться в его окрестности. В присутствии шума система может быть выведена случайным воздействием из устойчивой области фазового пространства в неустойчивую. Переменная, характеризующая близость системы к симметричному аттрактору, будет вести себя качественно так же, как при On-Off перемежаемости — «спокойные» интервалы будут чередоваться с хаотическими всплесками. Тем не менее, происхождение этого эффекта иное, притом в численных расчетах его обычно трудно обнаружить на фоне On-Off перемежаемости.

При наличии синхронизации недалеко от порога ее возникновения возможна ситуация, когда вложенные инвариантные множества сохраняют поперечную неустойчивость, в то время как аттрактор, как таковой, устойчив к трансверсальным возмущениям. В этом случае имеет место так называемая слабая устойчивость [21]. Бассейн притяжения симметричного аттрактора ока-

зывается изрешеченным (riddling), т. е. в окрестности любой точки бассейна присутствуют точки, ему не принадлежащие, при старте из которых траектория не попадает на симметричный аттрактор [1].

Еще одним проявлением слабой устойчивости является эффект «пузырящегося» аттрактора (bubbling) [1], возникающий при наличии воздействующего на систему шума. Если в отсутствие шума система могла бы оставаться на симметричном аттракторе сколь угодно долго, то при наличии даже малого шума возможен переборс состояния в окрестность вложенного в аттрактор трансверсально неустойчивого множества. Это влечет всплеск колебаний переменной, характеризующей отклонение от симметричного состояния. При отсутствии других аттракторов, система вскоре вновь возвращается к симметричному аттрактору, и цикл повторяется.

Присутствие вложенных в хаотический аттрактор инвариантных множеств, степень устойчивости которых сильно отличается от таковой для аттрактора в целом, характерно для систем с негиперболическими аттракторами. Поэтому анализ указанных эффектов в контексте связанных систем, имеющих однородно гиперболический аттрактор, представляет принципиальный интерес. Как можно полагать, должна существовать определенная специфика явлений, сопровождающих переход к синхронизации в таких системах, что давало бы в руки исследователя своеобразный дополнительный тест на гиперболичность. Как мы увидим, за исключением On-Off перемежаемости, которая не связана с существованием вложенных инвариантных множеств, остальные названные эффекты в рассматриваемой нами модели оказываются выраженными очень слабо и присутствуют только в узкой области параметров вблизи порога полной синхронизации.

## 1. Гиперболический хаос в системе двух осцилляторов с попеременным возбуждением

Обсудим сначала систему, которая будет далее использована в качестве элементарной ячейки при построении моделей в виде связанных подсистем.

Рассмотрим два связанных неавтономных осциллятора Ван-дер-Поля [20]

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (A \cos 2\pi\tau/P - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x &= \varepsilon y \cos \omega_0\tau, \\ \ddot{y} - (-A \cos 2\pi\tau/P - y^2)\dot{y} + 4\omega_0^2 y &= \varepsilon x^2,\end{aligned}\quad (1.1)$$

имеющих характерные частоты, соответственно,  $\omega_0$  и  $2\omega_0$ . Для каждого осциллятора параметр, отвечающий за бифуркацию рождения предельного цикла, медленно изменяется во времени принудительно с периодом  $P$  и амплитудой  $A$ . Вариация параметра происходит для двух подсистем в противофазе, поэтому они возбуждаются поочередно. Предполагается, что изменение надкритичности происходит достаточно медленно, т. е. период  $P$  существенно больше собственных периодов колебаний. Между генераторами установлена связь, интенсивность которой управляется параметром  $\varepsilon$ .

Применим к этой системе метод медленно меняющихся амплитуд. Следуя стандартной схеме, будем искать решения для первой и второй подсистем в виде колебаний на частотах  $\omega_0$  и  $2\omega_0$  с медленно меняющимися во времени комплексными амплитудами:

$$\begin{aligned}x(\tau) &= a(\tau)e^{i\omega_0\tau} + a^*(\tau)e^{-i\omega_0\tau}, \\ y(\tau) &= b(\tau)e^{2i\omega_0\tau} + b^*(\tau)e^{-2i\omega_0\tau},\end{aligned}\quad (1.2)$$

где звездочка обозначает комплексное сопряжение. Вычислим первую и вторую производные  $x$

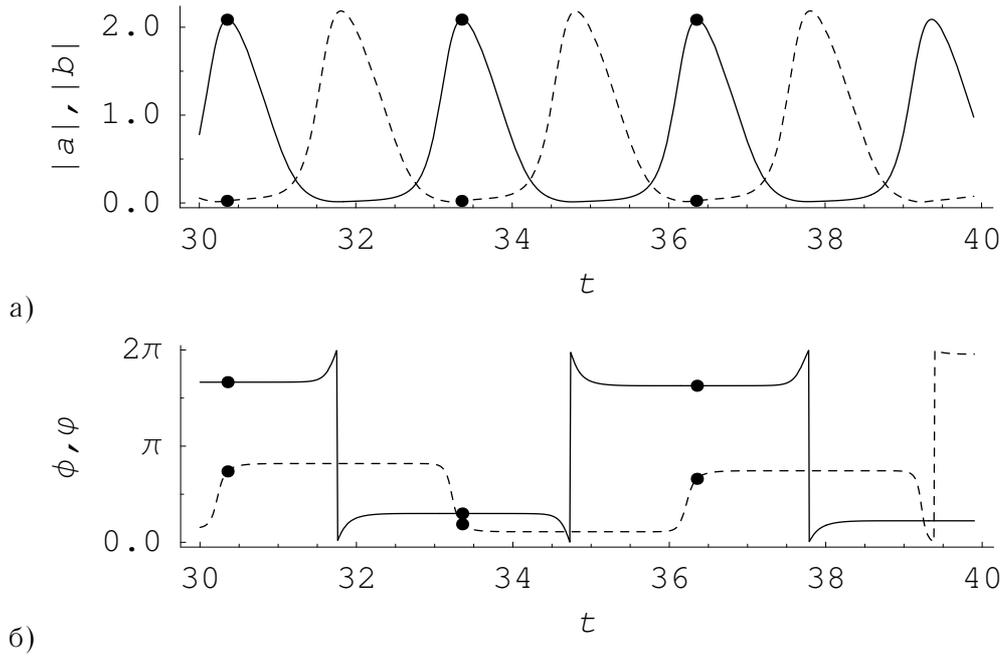


Рис. 1. Зависимость от времени амплитуды (а) и фазы (б) переменных  $a$  (сплошная линия) и  $b$  (пунктирная) системы (1.6). Точки на кривых отмечают моменты времени, когда  $|a|$  достигает максимума. Рисунки построены при  $T = 3$ ,  $A = 6$ ,  $\epsilon = 0.05$ .

и  $y$ , накладывая на функции комплексных амплитуд следующие дополнительные условия:

$$\begin{aligned} \dot{a}e^{i\omega_0\tau} + \dot{a}^*e^{-i\omega_0\tau} &= 0, \\ \dot{b}e^{2i\omega_0\tau} + \dot{b}^*e^{-2i\omega_0\tau} &= 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Подставив значения переменных и их производных в уравнения (1.1), выполним усреднение каждого из уравнений системы за период собственных колебаний. Учитывая, что период внешнего воздействия существенно больше, чем периоды собственных колебаний, в итоге получим уравнения для комплексных амплитуд

$$\begin{aligned} \dot{a} &= (A/2)a \cos 2\pi\tau/P - |a|^2a/2 - i\epsilon b/(4\omega_0), \\ \dot{b} &= -(A/2)b \cos 2\pi\tau/P - |b|^2b/2 - i\epsilon a^2/(4\omega_0). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Для приведения к более удобной форме, введем обозначения

$$t = \tau/2, \quad T = P/2, \quad \epsilon = \epsilon/2\omega_0, \tag{1.5}$$

так что уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{a} &= Aa \cos 2\pi t/T - |a|^2a - i\epsilon b, \\ \dot{b} &= -Ab \cos 2\pi t/T - |b|^2b - i\epsilon a^2. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Для численного решения уравнений использовался метод Рунге-Кутты 5-ого порядка с контролем точности. Описание метода и его реализацию в виде программы на языке С можно найти,

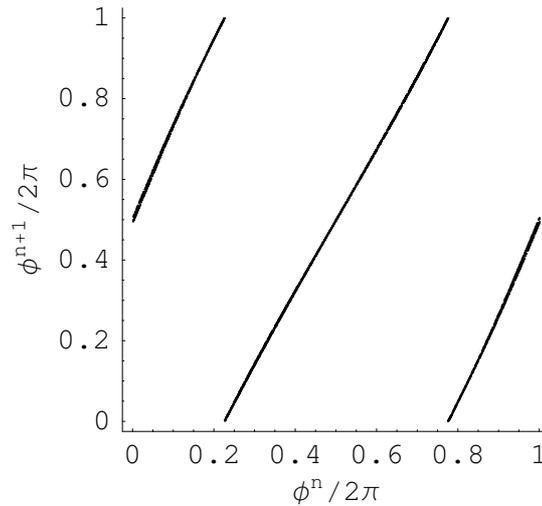


Рис. 2. Найденное численно отображение для фазы  $\phi^n = \arg a(nT)$  фиксируемой с шагом по времени  $T$ .  $A = 8$ ,  $T = 2$ ,  $\epsilon = 0.05$ .

например, в книге [25]. Фазы комплексных переменных будем вычислять таким образом, чтобы они принадлежали интервалу  $[0, 2\pi)$ :  $\phi = \arg a$ ,  $\varphi = \arg b$ .

На рис. 1 показаны графики зависимости от времени амплитуд и фаз двух осцилляторов. Когда амплитуда  $|a|$  достигает максимума (отмечен жирной точкой), амплитуда  $|b|$  исчезающе мала. Коэффициенты уравнений каждой из подсистем вещественные, поэтому если одна из компонент,  $a$  или  $b$ , обращается в нуль, то фаза второй не изменяется. Изменение фаз может происходить только за счет взаимного влияния подсистем друг на друга. Следовательно, когда компонента  $a$  возбуждена, ее фаза остается практически постоянной, так как влияние  $b$  пренебрежимо мало. В то же время фаза компоненты  $b$  быстро меняется под действием  $a$ . На рис. 1б таким ситуациям соответствуют окрестности точек, отмечающих максимумы  $|a|$ . К моменту выхода компоненты  $a$  на порог торможения компонента  $b$  унаследует ее удвоенную фазу (со сдвигом на  $-\pi/2$ , поскольку отвечающий за связь член в уравнении содержит множитель  $i$ ). Теперь подсистемы меняются ролями, и компонента  $b$  передает свою фазу компоненте  $a$  (также со сдвигом на  $-\pi/2$ ). Таким образом, последовательность значений фазы  $\phi^n = \arg a(nT)$ , фиксируемых с шагом по времени  $T$ , подчиняется соотношению

$$\phi^{n+1} = 2\phi^n - \pi \pmod{2\pi}, \quad (1.7)$$

Это известно в литературе отображение Бернулли или «зуб пилы» [12, 4]. Известно, что оно демонстрирует хаотическую динамику, причем хаос является однородным в том смысле, что скорость экспоненциального разбегания двух близких траекторий одинакова во всех точках и характеризуется показателем Ляпунова  $\ln 2$ .

На рис. 2 показана зависимость  $\phi^{n+1} = \arg a(nT + T)$  от  $\phi^n = \arg a(nT)$ , полученная при численном решении уравнений (1.6). Вид графика хорошо согласуется с найденной из качественных рассуждений зависимостью (1.7) и, что самое главное, построенное эмпирически отображение принадлежит с очевидностью к тому же топологическому классу, что и отображение Бернулли.

При аккуратном описании динамики комплексных амплитуд за период медленного воздействия следует использовать отображение Пуанкаре, определенное в четырехмерном пространстве состояний  $\{\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a, \operatorname{Re} b, \operatorname{Im} b\}$ . При этом имеет место растяжение фазового объема по одному направлению, отвечающему фазовой переменной в рамках рассмотренного выше при-

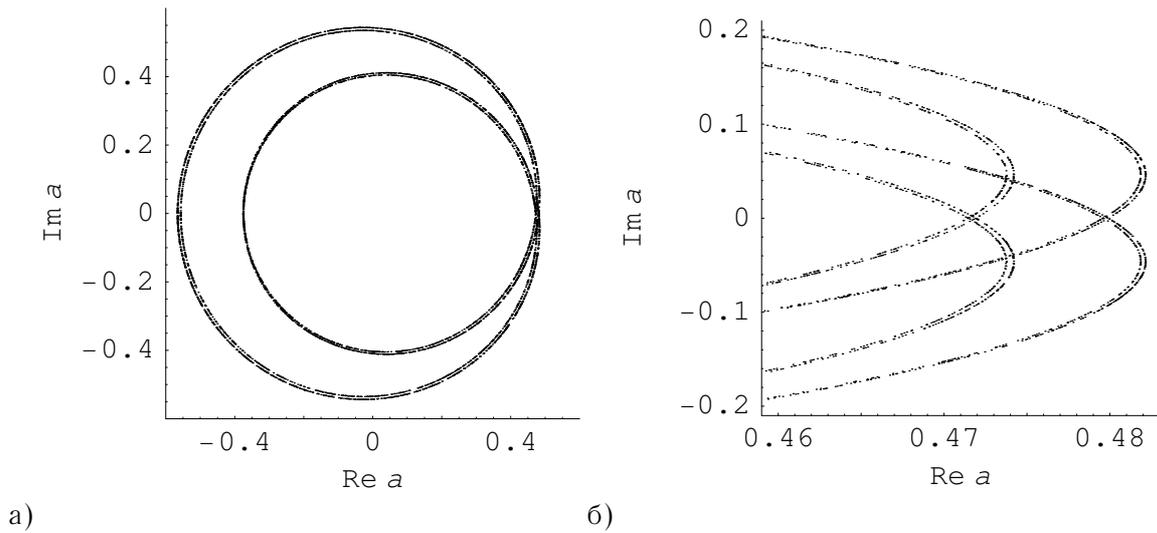


Рис. 3. (а) Проекция четырехмерного аттрактора отображения Пуанкаре системы (1.6) на плоскость компоненты  $a$ . (б) Увеличенный фрагмент аттрактора вблизи его правой границы.  $A = 8, T = 2, \epsilon = 0.05$ .

ближенного описания. По трем оставшимся направлениям динамика является сжимающей, так что соответствующие показатели Ляпунова отрицательные. Учитывая цикличность по фазовой переменной, можно представить себе, что в четырехмерном пространстве имеется некоторая тороидальная область, которая за период воздействия претерпевает трансформацию, аналогичную предлагаемой в конструкции Смейла – Вильямса. А именно, тороид растягивается вдвое в продольном направлении, сжимается в поперечном, складывается, как двойная петля, и вкладывается в исходный объем [20, 6]. Такое построение приводит к возникновению хаотического аттрактора, обладающего свойством гиперболичности [20, 6].

Полная размерность расширенного фазового пространства неавтономной системы (1.6) равна пяти. Однако, в силу того, что компоненты  $a$  и  $b$  возбуждаются и тормозятся в противофазе, аттрактор состоит из двух хорошо выраженных лепестков, каждый из которых отвечает преимущественному возбуждению  $a$  или  $b$ . Аттрактор вытянут вдоль направлений, соответствующих одной и другой возбужденной компоненте, и сплюснен по двум другим направлениям. При этом проекция аттрактора на фазовую плоскость одной из парциальных систем содержит достаточно полную информацию о структуре аттрактора в целом. На рис. 3 построена проекция сечения Пуанкаре аттрактора на плоскость комплексной переменной  $a$ . Из рис. 3а видно, что аттрактор обладает качественными признаками аттрактора Смейла – Вильямса. Рис. 3б демонстрирует фрактальную поперечную структуру аттрактора.

Вычислим показатели Ляпунова для системы (1.6), используя алгоритм Бенеттина [14, 17, 22]. Будем искать совместное решение уравнений (1.6) и четырех комплектов линеаризованных уравнений для возмущений:

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{x}}_a &= A \cos(2\pi t/T) \tilde{x}_a - (3x_a^2 + y_a^2) \tilde{x}_a - 2x_a y_a \tilde{y}_a + \epsilon \tilde{y}_b, \\
 \dot{\tilde{y}}_a &= A \cos(2\pi t/T) \tilde{y}_a - (x_a^2 + 3y_a^2) \tilde{y}_a - 2x_a y_a \tilde{x}_a - \epsilon \tilde{x}_b, \\
 \dot{\tilde{x}}_b &= -A \cos(2\pi t/T) \tilde{x}_b - (3x_b^2 + y_b^2) \tilde{x}_b - 2x_b y_b \tilde{y}_b + 2\epsilon(x_a \tilde{y}_a + y_a \tilde{x}_a), \\
 \dot{\tilde{y}}_b &= -A \cos(2\pi t/T) \tilde{y}_b - (x_b^2 + 3y_b^2) \tilde{y}_b - 2x_b y_b \tilde{x}_b - 2\epsilon(x_a \tilde{x}_a - y_a \tilde{y}_a),
 \end{aligned}
 \tag{1.8}$$

где  $x_a = \text{Re } a, y_a = \text{Im } a, x_b = \text{Re } b, y_b = \text{Im } b$ , а соответствующие символы с тильдой обо-

значают малые возмущения этих величин. Перед началом счета инициализируем каждый из четырех комплектов уравнений (1.8) единичным вектором, так что эти вектора образуют ортогональную систему. По ходу решения выполняем с интервалом времени  $T$  ортогонализацию Грама-Шмидта [22] системы векторов возмущений, накапливаем суммы логарифмов норм этих векторов и нормируем вектора для предотвращения переполнения. В результате четыре показателя Ляпунова  $\lambda_k$  получаются как усредненные по времени логарифмы норм векторов возмущения. Они связаны с показателями Ляпунова отображения Пуанкаре соотношением  $\Lambda_k = T\lambda_k$ .

На рис. 4 построена зависимость показателей  $\Lambda_k$  от параметра  $A$ . Старший показатель Ляпунова является положительным в широком диапазоне изменения параметра, что свидетельствует о хаотическом характере динамики. Остальные три показателя отрицательные. Например, при  $A = 3$  имеем:  $\Lambda_1 \approx 0.691$ ,  $\Lambda_2 \approx -4.06$ ,  $\Lambda_3 \approx -6.48$ ,  $\Lambda_4 \approx -9.06$ . Отметим отсутствие нулевого показателя, что естественно для отображений и неавтономных систем с непрерывным временем. Величина старшего показателя близка к  $\ln 2$ , что соответствует представленным выше качественным рассуждениям о том, что динамика фазы переменной  $a$  подчиняется в определенном приближении отображению Бернулли (1.7). При изменении параметра  $A$  старший показатель сохраняет почти постоянное значение, а остальные три изменяются плавно, без провалов и скачков. Как можно полагать, наблюдаемый хаотический режим является грубым, т.е. качественный характер колебаний не чувствителен к изменению параметров системы в определенных пределах. Это свидетельствует в пользу предположения о гиперболической природе анализируемого аттрактора<sup>1</sup>.

Описанное поведение показателей Ляпунова хорошо согласуется с наблюдаемым для исходной системы двух попеременно возбуждаемых автогенераторов (1.1) [20, 6]. На рис. 4 пунктирными линиями показана зависимость от параметра  $A$  показателей Ляпунова, вычисленных для системы генераторов Ван-дер-Поля (1.1). Параметры подобраны таким образом, что, с учетом замены (1.5), они отвечают параметрам системы (1.6). Видно, что значения старших показателей практически совпадают. Неплохое соответствие имеет место и для остальных трех показателей. Тот факт, что приближенное описание в рамках метода медленных амплитуд хорошо согласуется с исходными уравнениями (несмотря на хаотический характер режима) можно рассматривать как дополнительное свидетельство грубости имеющей место ситуации, что связано с гиперболической природой аттрактора.

## 2. Синхронизация систем с гиперболическим хаосом

### 2.1. Уравнения и качественное обсуждение динамики

Обратимся к случаю, когда имеются две связанные системы (1.6):

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= Aa_1 \cos 2\pi t/T - |a_k|^2 a_1 - i\epsilon b_1 + d(a_2 - a_1), \\ \dot{b}_1 &= -Ab_1 \cos 2\pi t/T - |b_k|^2 b_1 - i\epsilon a_1^2 + d(b_2 - b_1), \\ \dot{a}_2 &= Aa_2 \cos 2\pi t/T - |a_k|^2 a_2 - i\epsilon b_2 + d(a_1 - a_2), \\ \dot{b}_2 &= -Ab_2 \cos 2\pi t/T - |b_k|^2 b_2 - i\epsilon a_2^2 + d(b_1 - b_2), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $d$  — вещественный неотрицательный параметр связи.

<sup>1</sup>Нами проведены расчеты по проверке достаточных условий гиперболичности аттрактора, например, для значений параметров  $T = 5$ ,  $A = 3$ ,  $\epsilon = 0.05$ . В четырехмерном фазовом пространстве отображения Пуанкаре указана поглощающая область в форме тороида. В точках этой области определены расширяющиеся и сжимающиеся конуса в касательном пространстве (пространстве векторов малых возмущений состояния системы) и обеспечено их надлежащее расположение, гарантирующее согласно известной теореме гиперболическую природу аттрактора, принадлежащего поглощающей области [7].

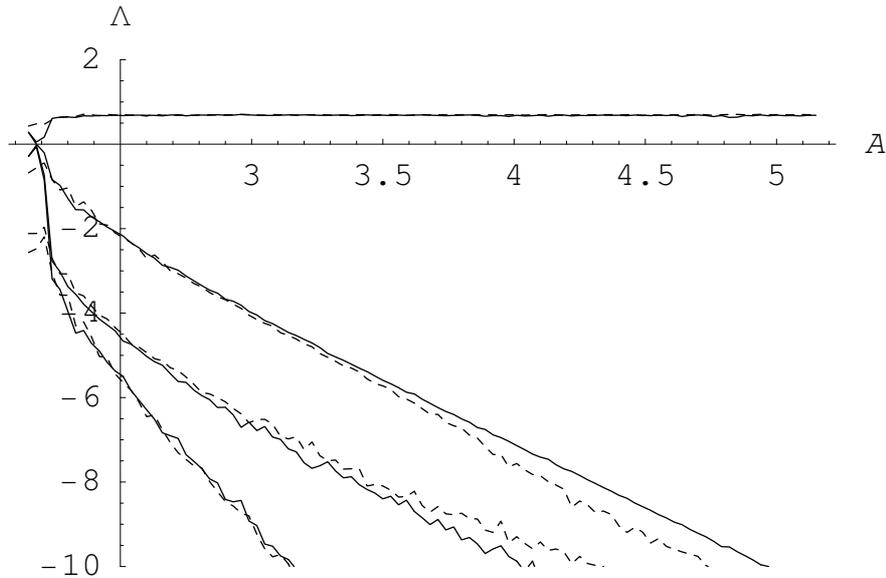


Рис. 4. Зависимость показателей Ляпунова отображения Пуанкаре системы (1.6) от параметра  $A$  при  $T = 5$ ,  $\epsilon = 0.05$ . Для сравнения представлены результаты для системы (1.1) при  $P = 10$ ,  $\omega_0 = 2\pi$  и  $\epsilon = 0.2\pi$  (пунктирные линии)

Связь между подсистемами, как она введена в представленных уравнениях, имеет диссипативный характер в том смысле, что ее присутствие способствует выравниванию мгновенных состояний подсистем. Связь устроена таким образом, что члены, отвечающие за взаимодействие подсистем, исчезают при совпадении их состояний, т. е. при  $a_1 = a_2$  и  $b_1 = b_2$ . В фазовом пространстве всей системы эти условия определяют многообразие симметричных движений. Этому многообразию принадлежит инвариантное множество, идентичное по своей структуре аттрактору парциальной системы (1.6). При нулевом или малом  $d$  симметричное инвариантное множество неустойчиво по отношению к поперечным возмущениям, разрушающим симметрию. Однако при достижении параметром  $d$  порогового значения, которое будем обозначать  $d_{syn}$ , поперечные возмущения оказываются затухающими, и симметричное инвариантное множество становится аттрактором. Мы будем называть этот аттрактор симметричным. Динамика на нем отвечает полной синхронизации между первой и второй подсистемами [1]. Движение подсистем остается нерегулярным во времени, однако их мгновенные состояния точно совпадают в каждый момент.

Рисунок 5 иллюстрирует поведение системы (2.1) до порога синхронизации. На панели (а) показана зависимость от времени амплитуд  $|a_1|$  и  $|a_2|$ , а панель (б) демонстрирует поведение соответствующих фаз  $\phi_1$  и  $\phi_2$ . Как и раньше, фазы определены так, что они принадлежат интервалу  $[0, 2\pi)$ . Чтобы продемонстрировать степень близости одной и другой фазы, на панели (б) построена также зависимость от времени величины  $\psi$

$$\psi = \min\{|\phi_1 - \phi_2|, 2\pi - |\phi_1 - \phi_2|\}, \tag{2.2}$$

Геометрически  $\psi$  есть угол между двумя радиус-векторами на комплексной плоскости, измеренный по кратчайшей дуге.

Когда компоненты  $a_1$  и  $a_2$  возбуждены, то находящиеся на стадии торможения компоненты  $b_1$  и  $b_2$  малы и пренебрежимо слабо влияют на  $a$ . Напротив, существенное влияние на  $a_1$  и  $a_2$  оказывает связь между первой и второй подсистемами, за которую отвечает параметр  $d$ . Как видно

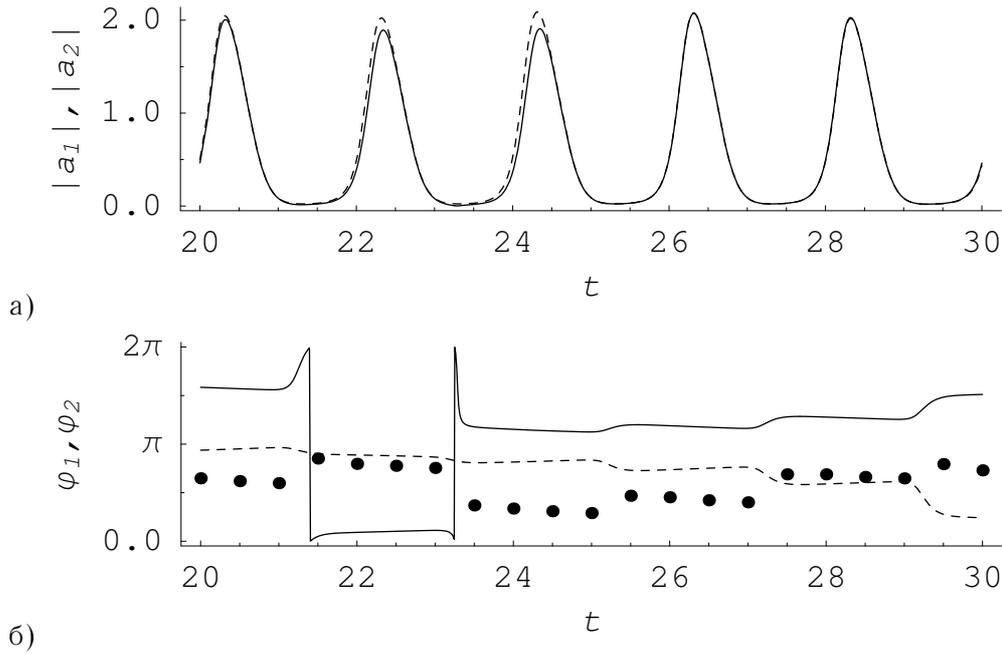


Рис. 5. Зависимость от времени амплитуд (а) и фаз (б) компонент  $a_1$  (сплошная линия) и  $a_2$  (пунктирная). Жирные точки показывают величину  $\psi$ , см. (2.2).  $T = 2$ ,  $A = 8$ ,  $\epsilon = 0.05$ ,  $d = 0.1$ .

из рис. 5, при этом модули комплексных переменных практически совпадают, а фазы сближаются. На этапе торможения  $a$ , амплитуды  $|a_1|$  и  $|a_2|$  малы, а фазы претерпевают воздействие со стороны возбужденных компонент  $b$ . Как видно из рис. 5б, это приводит к скачкообразному изменению разности фаз  $\psi$ . Этот скачок происходит относительно быстро, а продолжительность этапа сближения подсистем по фазе отвечает почти полному периоду  $T$ .

## 2.2. Отображение для фаз

Опираясь на приведенные выше рассуждения, можно в явном виде найти приближенное отображение для фаз двух подсистем (2.1). Примем, что процесс сближения фаз длится в течение времени  $T$ , и влиянием на него компонент  $b$  можно пренебречь. Представим  $a_1$  и  $a_2$  как  $a_k = R_k e^{i\phi_k}$ ,  $k = 1, 2$ . При обсуждении рис. 5 мы видели, что амплитуды выравниваются значительно быстрее фаз. Поэтому будем считать, что  $R_1/R_2 = 1$ . Это предположение с очевидностью работает тем точнее, чем ближе система находится к точке синхронизации. В итоге получим систему уравнений для  $\phi_1$  и  $\phi_2$ , описывающую эволюцию фаз первой и второй компонент  $a$  за время  $T$ :

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_1 &= d \sin(\phi_2 - \phi_1), \\ \dot{\phi}_2 &= -d \sin(\phi_2 - \phi_1).\end{aligned}\quad (2.3)$$

Из этих уравнений следует, что сумма фаз не зависит от времени, а разность  $\psi = \phi_2 - \phi_1$  подчиняется уравнению  $\dot{\psi} = -2d \sin \psi$ , решение которого можно найти в явном виде. Обозначив разность фаз при  $t = t_0$  через  $\psi$ , а при  $t = t_0 + T$  через  $\psi'$ , запишем решение следующим образом:

$$\cos \psi' = \frac{1 + \cos \psi - \tau(1 - \cos \psi)}{1 + \cos \psi + \tau(1 - \cos \psi)} \equiv Z(\psi), \quad (2.4)$$

где  $\tau = e^{-4dT}$ . Как нетрудно видеть, имеет место равенство  $Z(\pm\psi) = Z(2\pi \pm \psi) = Z(\psi)$ . Таким образом, если учесть, что функция  $\arccos$  возвращает значения в диапазоне от 0 до  $\pi$ , то из уравнения (2.4) мы получим разность фаз

$$\psi' = \arccos Z(\psi), \tag{2.5}$$

которая вычислена по кратчайшей дуге и взята по абсолютной величине. Это совпадает с определением использовавшейся нами ранее величины  $\psi$ , см. (2.2).

Полученные соотношения позволяют естественным образом ввести симметричную и антисимметричную переменные, описывающие, соответственно, движение на симметричном аттракторе и поперечные возмущения, нарушающие симметрию. Симметричная переменная выражается через фазы подсистем как  $\phi = (\phi_1 + \phi_2)/2$ . Выше мы выяснили, что она сохраняется, когда происходит сближение фаз. За изменение симметричной переменной отвечает только описанный выше механизм, связанный с поочередным возбуждением компонент  $a$  и  $b$ . Поэтому она, также как и фаза парциальной системы (1.6), подчиняется отображению Бернулли (1.7).

В качестве антисимметричной переменной удобно взять величину  $\psi$ . Ее изменение за период внешнего воздействия происходит в два этапа. Сначала, при передаче возбуждения от  $b$  к  $a$ , она удваивается, а затем наступает этап синхронизации, описываемый формулой (2.4). Таким образом, имеем:

$$\psi^{n+1} = \arccos Z(2\psi^n), \tag{2.6}$$

где  $\psi^n$  обозначает разность фаз в момент времени  $t = nT$ , вычисленную между  $a_1$  и  $a_2$  по кратчайшей дуге и взятую по абсолютной величине.

На рис. 6 построен график этого отображения. Ниже порога синхронизации оно топологически эквивалентно отображению «тент», которое, как известно [12, 4], порождает хаотическую динамику. Точки показывают фактическую зависимость  $\psi^{n+1}$  от  $\psi^n$ , найденную численно. Видно, что отображение (2.6) лучше всего моделирует поведение разности фаз вблизи нуля, т.е. наиболее точно описывает систему (2.1) вблизи порога синхронизации.

Ситуация, изображенная на рис. 6, соответствует режиму On-Off перемежаемости. Наклон графика эмпирического отображения  $\psi^{n+1}(\psi^n)$  вблизи начала координат в среднем чуть больше единицы. Поэтому система остается вблизи симметричного аттрактора достаточно длительное время, а потом быстро удаляется от него, что сопровождается всплеском колебаний поперечной переменной  $\psi$ . Рисунок 7 иллюстрирует этот эффект. Здесь построена полученная численно зависимость  $\psi^n$  от дискретного времени  $n$ . Видно, что хотя спокойные интервалы могут быть достаточно длительными, но на их протяжении система все-таки медленно удаляется от симметричного инвариантного множества.

Линеаризуя отображение (2.6) вблизи нуля, получим:

$$\psi^{n+1} = 2\sqrt{\tau}\psi^n. \tag{2.7}$$

Условием возникновения синхронизации является соотношение  $2\sqrt{\tau} = 1$ . Отсюда следует, что поперечный показатель Ляпунова, который характеризует устойчивость симметричного инвариантного множества по отношению к возмущениям, нарушающим симметрию, выражается формулой

$$\Lambda^\perp = \ln 2 - 2dT. \tag{2.8}$$

Согласно этому выражению, величина  $\Lambda^\perp$  линейно убывает в зависимости от параметра связи  $d$ . Критическое значение  $d$ , при котором возникает синхронизация, таково:

$$d_{\text{syn}} = \ln 2 / (2T). \tag{2.9}$$

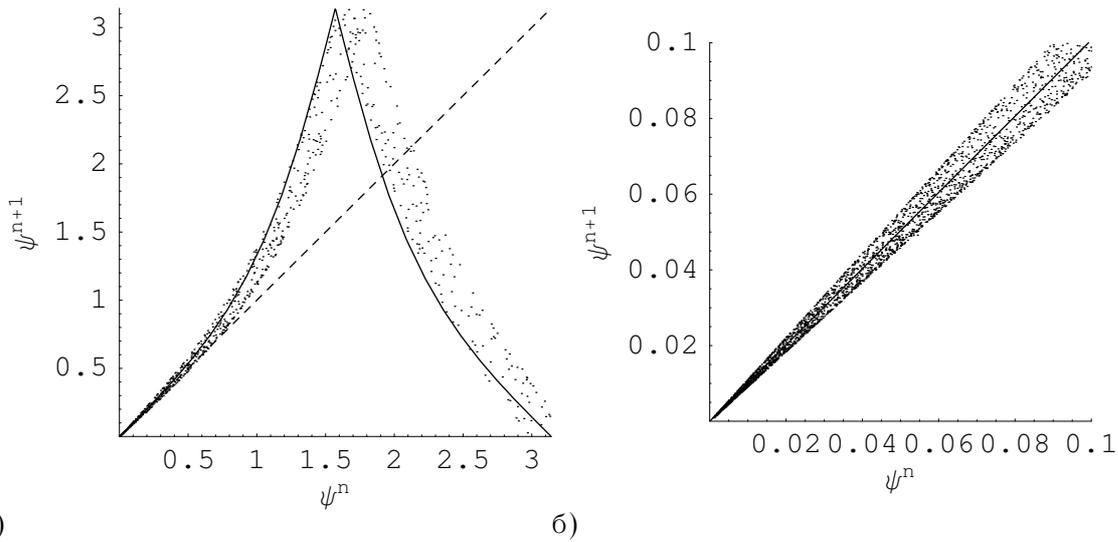


Рис. 6. (а) Сплошная линия — график отображения (2.6). Точки показывают зависимость  $\psi^{n+1}$  от  $\psi^n$ , полученную в результате численного решения системы (2.1). Пунктирная прямая — диагональ  $\psi^{n+1} = \psi^n$ , определяющая порог синхронизации. (б) Увеличенный фрагмент рисунка вблизи начала координат. Сплошная линия есть график отображения (2.6). Диагональ не показана из-за близости к графику. Она должна проходить чуть ниже сплошной линии.  $A = 3, T = 5, \epsilon = 0.05, d = 0.069$ .

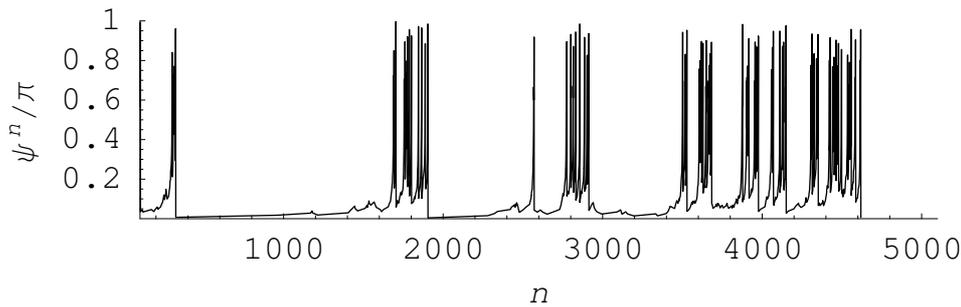


Рис. 7. Оп-Офф перемежаемость вблизи порога синхронизации. По вертикальной оси отложена разность фаз (2.2), найденная численно.  $T = 5, A = 3, \epsilon = 0.05, d = 0.069$

### 2.3. Поперечные показатели Ляпунова

Сопоставим соотношение (2.8) с результатом прямого вычисления показателей Ляпунова для системы (2.1). Как и в случае парциальной системы (1.6), будем искать показатели применительно к отображению Пуанкаре, связанные с показателями Ляпунова потоковой системы (2.1) формулой  $\Lambda_k = T\lambda_k$ . Для вычислений снова применим алгоритм Бенеттина.

На рис. 8 показана зависимость показателей Ляпунова от параметра связи  $d$ . При  $d = 0$  два старших показателя равны и близки к  $\ln 2$ . С увеличением  $d$  один из показателей убывает и при  $d \approx 0.178$  проходит через ноль. Это значение достаточно хорошо совпадает с рассчитанной по формуле (2.9) величиной  $d_{syn} = 0.173\dots$

За порогом синхронизации четыре показателя не зависят от  $d$  и равны показателям парциальной системы. Они отвечают невозмущенному движению на симметричном аттракторе. Четыре других, соответствующие поперечным возмущениям, линейно убывают. Такое поведение

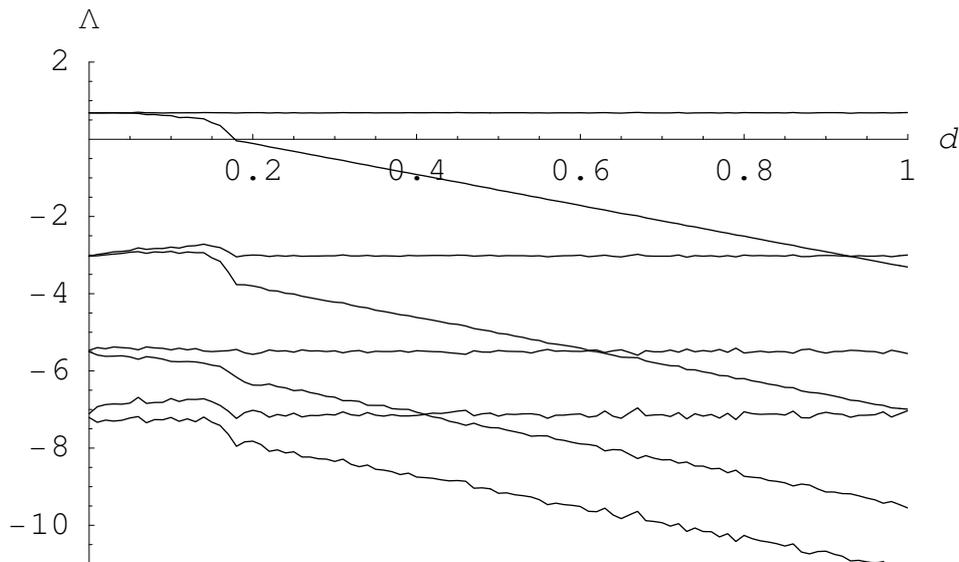


Рис. 8. Ляпуновские показатели отображения Пуанкаре системы (2.1) в зависимости от параметра связи  $d$ . Второй показатель проходит через ноль при  $d \approx 0.178$ .  $T = 2$ ,  $A = 8$ ,  $\epsilon = 0.05$ .

поперечных показателей Ляпунова в режиме синхронизации обусловлено диссипативным характером связи в уравнениях (2.1), которая способствует выравниванию мгновенных состояний подсистем [23].

Чтобы это продемонстрировать, перейдем в уравнениях (2.1) к новым переменным

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2)/2 = a, & \quad (a_1 - a_2)/2 = \tilde{x}_a + i\tilde{y}_a, \\ (b_1 + b_2)/2 = b, & \quad (b_1 - b_2)/2 = \tilde{x}_b + i\tilde{y}_b, \end{aligned} \tag{2.10}$$

где  $a$  и  $b$  описывают движение на симметричном аттракторе, а переменные  $\tilde{x}_{a,b}$  и  $\tilde{y}_{a,b}$  соответствуют поперечным возмущениям. Когда возмущения малы, продольные переменные подчиняются уравнениям парциальной системы (1.6), а сами возмущения описываются системой линейных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_a &= A \cos(2\pi t/T) \tilde{x}_a - (3x_a^2 + y_a^2) \tilde{x}_a - 2x_a y_a \tilde{y}_a + \epsilon \tilde{y}_b - 2d \tilde{x}_a, \\ \dot{\tilde{y}}_a &= A \cos(2\pi t/T) \tilde{y}_a - (x_a^2 + 3y_a^2) \tilde{y}_a - 2x_a y_a \tilde{x}_a - \epsilon \tilde{x}_b - 2d \tilde{y}_a, \\ \dot{\tilde{x}}_b &= -A \cos(2\pi t/T) \tilde{x}_b - (3x_b^2 + y_b^2) \tilde{x}_b - 2x_b y_b \tilde{y}_b + 2\epsilon(x_a \tilde{y}_a + y_a \tilde{x}_a) - 2d \tilde{x}_b, \\ \dot{\tilde{y}}_b &= -A \cos(2\pi t/T) \tilde{y}_b - (x_b^2 + 3y_b^2) \tilde{y}_b - 2x_b y_b \tilde{x}_b - 2\epsilon(x_a \tilde{x}_a - y_a \tilde{y}_a) - 2d \tilde{y}_b. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Как нетрудно видеть, сделав замену каждой из переменных по правилу  $\tilde{x}_a \rightarrow \tilde{x}_a e^{-2dt}$ , приходим к уравнениям для малых возмущений траектории парциальной системы (1.8) [23]. Это означает, что поперечные показатели Ляпунова  $\lambda_k^\perp$  можно выразить через показатели Ляпунова парциальной системы  $\lambda_k$  и параметр связи. Применительно к отображению Пуанкаре эта зависимость выглядит как

$$\Lambda_k^\perp = \Lambda_k - 2dT. \tag{2.12}$$

При выводе формулы (2.12) не делалось никаких специальных предположений о структуре инвариантного множества, устойчивость которого изучается. Поэтому она справедлива также,

например, для циклов, вложенных в симметричный аттрактор, что будет обсуждаться ниже. Из (2.12) следует, что поперечные показатели Ляпунова линейно убывают с ростом  $d$ . Это согласуется с полученными численно результатами, которые представлены на рис. 8. Отметим также, что, полагая  $\Lambda_1 = \ln 2$ , получим формулу (2.8).

#### 2.4. Изрешечивание бассейна симметричного аттрактора и эффект «пузырящегося» аттрактора

В симметричный аттрактор изучаемой системы (2.1) вложены инвариантные множества, к которым относятся, в частности, неустойчивые предельные циклы. Степень устойчивости этих множеств по отношению к возмущениям, разрушающим симметрию, вообще говоря, отличается от устойчивости аттрактора. Вблизи порога синхронизации это приводит к изрешечиванию бассейна притяжения симметричного аттрактора и к возникновению эффекта «пузырящегося» аттрактора.

Для изучения этих эффектов первым делом отыщем некоторые из циклов. Точки цикла периода  $pT$  являются неустойчивыми неподвижными точками  $p$ -кратного отображения Пуанкаре парциальной системы (1.6). Чтобы найти этот цикл, зададим переменным случайные начальные значения и будем сначала выполнять  $p$  шагов отображения, а затем корректировать фазу переменной  $a$  по следующей формуле:

$$(\phi^p)' = \phi^0 + (\phi^0 - \phi^p) (1 - C)/(2^p - 1). \quad (2.13)$$

Здесь  $\phi^0$  и  $\phi^p$  — фазы комплексной величины  $a$ , соответственно, перед и сразу после выполнения  $p$  шагов, а  $(\phi^p)'$  — скорректированное значение фазы, которое надо присвоить переменной  $a$ , не меняя ее абсолютную величину. Смысл формулы (2.13) в том, чтобы сделать отображение для фазы сжимающим, сохранив его неподвижные точки. Описанная итерационная процедура сходится к точкам искомых циклов. Скорость сходимости регулируется выбором константы  $C \in (0, 1)$ . В наших вычислениях  $C = 0.25$ .

Зная циклы, можно найти отвечающие им мультипликаторы Флоке и характеристические показатели [2]. Для этого инициализируем четыре комплекта уравнений для малых возмущений (1.8) столбцами единичной матрицы  $4 \times 4$ , и проводим решение уравнений вдоль соответствующей циклу траектории. Полученные в результате векторы служат столбцами матрицы, собственные числа которой суть мультипликаторы  $\mu_{1,2,3,4}$ . Характеристические показатели цикла связаны с мультипликаторами формулой  $(\Lambda_{\text{cyc}})_k = p^{-1} \ln |\mu_k|$ . Эти показатели описывают устойчивость цикла относительно возмущений, не нарушающих симметрию. Согласно результатам расчетов, один показатель всегда оказывается положительным, а остальные три отрицательными.

Что касается возмущений, нарушающих симметрию, то по отношению к ним устойчивость или неустойчивость определяются поперечными характеристическими показателями  $\Lambda_{\text{cyc}}^\perp$ , которые для рассматриваемого нами типа связи выражаются через  $(\Lambda_{\text{cyc}})_k$  посредством соотношений (2.12). На рис. 9 построены графики зависимости  $\Lambda_{\text{cyc}}^\perp$  от  $d$  для циклов с периодами от 1 до 7. Видно, что с ростом параметра связи часть циклов становятся поперечно устойчивыми раньше, чем это случится для симметричного инвариантного множества (в смысле типичной принадлежности ему траектории), тогда как другие приобретают устойчивость уже за порогом синхронизации.

В области за порогом синхронизации при наличии поперечно неустойчивых вложенных циклов бассейн притяжения симметричного аттрактора становится изрешеченным (riddled basin) [1]. Для иллюстрации этого построим сечение бассейна плоскостью, на которой отметим точки не

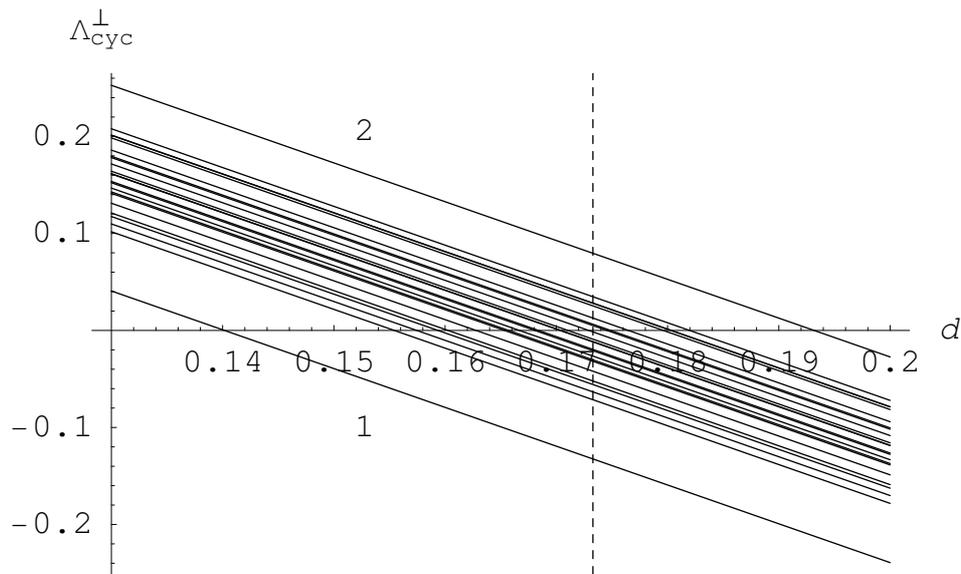


Рис. 9. Старшие поперечные характеристические показатели циклов с периодами от 1 до 7. Числа 1 и 2 обозначают линии циклов соответствующих периодов. Пунктирная линия отмечает точку синхронизации симметричного аттрактора.  $A = 8, T = 2, \epsilon = 0.05$ .

принадлежащие бассейну. Один из возможных вариантов получить такое сечение состоит в том, чтобы изменять в некотором диапазоне переменные  $\text{Re } a_1$  и  $\text{Re } a_2$ , а всем остальным присвоить координаты произвольной точки на симметричном аттракторе. В этом случае диагональ этой плоскости  $\text{Re } a_1 = \text{Re } a_2$  будет содержать симметричный аттрактор.

Для идентификации выхода системы на симметричный аттрактор за приемлемое время счета, можно использовать следующий алгоритм. Перед началом задается предварительное значение порога синхронизации  $\sigma$  и обнуляется счетчик попаданий системы в область ниже порога. Мы брали в качестве предварительного значения  $\sigma = 10^{-3}$ . В процессе вычислений на каждом шаге ищется расстояние между первой и второй подсистемами по формуле

$$E = \sqrt{|a_2 - a_1|^2 + |b_2 - b_1|^2}. \tag{2.14}$$

Если это расстояние меньше порогового или равно ему, т. е.  $E \leq \sigma$ , то значение счетчика попаданий увеличивается на единицу, а порог сдвигается на более низкий уровень,  $\sigma = E$ . Синхронизация регистрируется, когда значение счетчика достигает достаточно большой величины, например 10. Если на очередном шаге расстояние ненамного превысило порог,  $\sigma < E \leq 10\sigma$ , то просто делается следующий шаг. В случае же, когда расстояние стало велико,  $E > 10\sigma$ , и при этом счетчик попаданий не равен нулю, т. е. это не переходный процесс и система уже побывала достаточно близко к аттрактору, вычисления прекращаются и регистрируется отсутствие синхронизации. Также отсутствие синхронизации регистрируется, если время счета превысило заданное максимальное значение. В наших вычислениях  $t_{\text{max}} = 2000T$ .

Эффект изрешечивания бассейна симметричного аттрактора для изучаемой системы (2.1) удается уверенно обнаружить только в очень малой окрестности точки синхронизации. На рис. 10 построена плоскость ридлинга (изрешечивания) при  $d = 0.173$ . Это немного меньше рассчитанного теоретически порога синхронизации  $d_{\text{syn}} = 0.17328\dots$ , тем не менее прямая проверка показывает, что система уже при таком  $d$  выходит на симметричный аттрактор. Несоот-

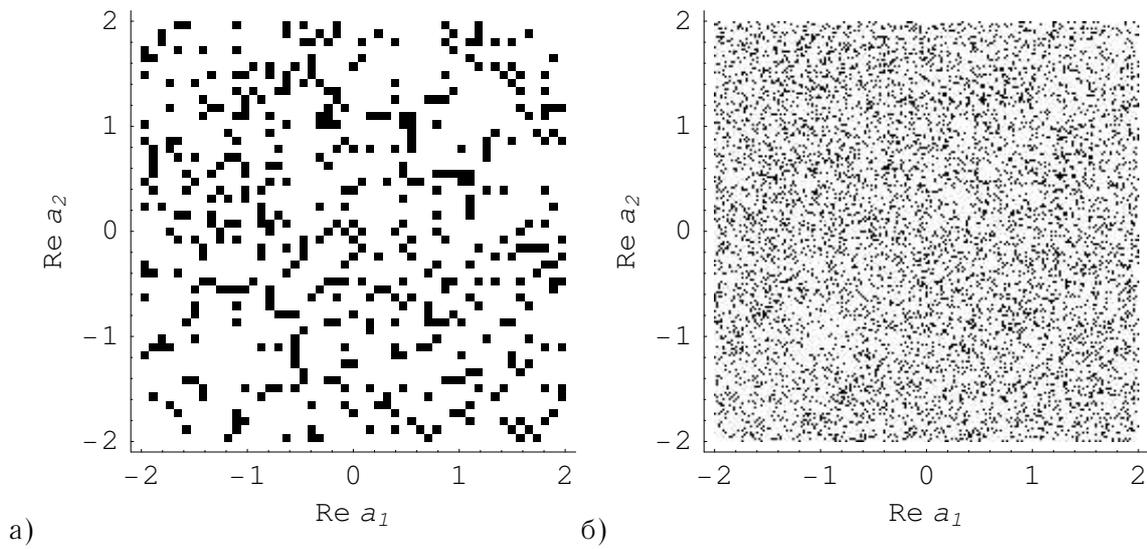


Рис. 10. Изрешеченный бассейн притяжения симметричного аттрактора системы (2.1), построенный с низким (а) и высоким (б) разрешением. Черные точки отмечают начальные значения, из которых система не выходит на симметричный аттрактор.  $A = 8$ ,  $T = 2$ ,  $\epsilon = 0.05$ ,  $d = 0.173$ .  $\text{Im } a_1(0) = \text{Im } a_2(0) = 0.37$ ,  $b_1(0) = b_2(0) = -0.05 + 0.07i$ .

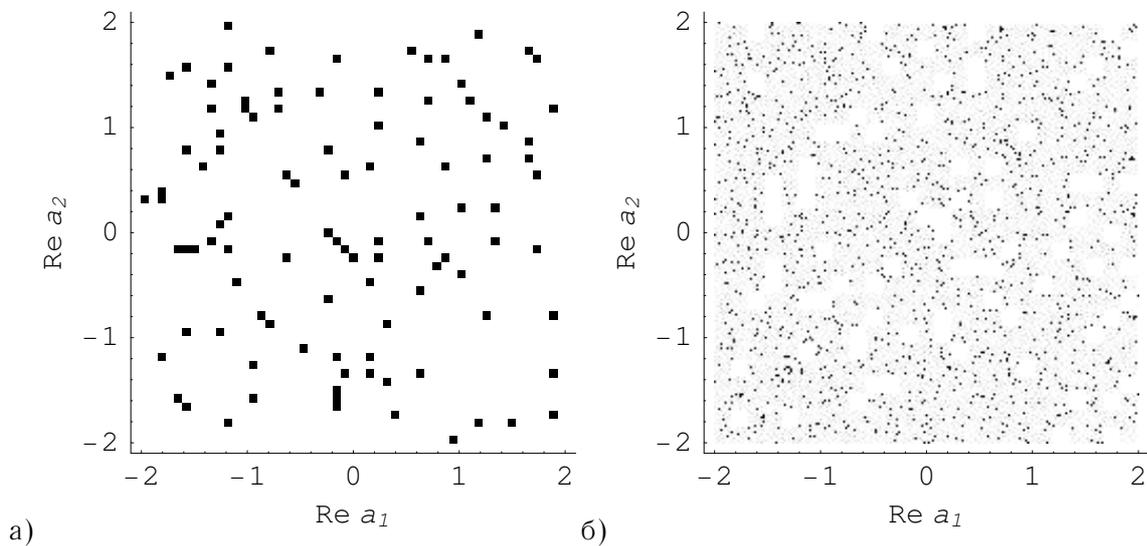


Рис. 11. Изрешеченный бассейн симметричного аттрактора при  $d = 0.174$ . Параметры — как на рис. 10. Количество черных точек, из которых система не попадает на симметричный аттрактор, на панели (б) на 80% меньше чем на рис. 10б.

ветствие объясняется тем, что при вычислении  $d_{\text{syn}}$  взято приближенное значение показателя Ляпунова  $\ln 2$ .

Из рис. 10 видно, что характерной чертой плоскости ридлинга для системы (2.1) является отсутствие сколько-нибудь крупных областей, точки которых не принадлежат бассейну аттрактора. На рис. 10а и 10б одна и та же плоскость показана с разным разрешением. При переходе к более высокому разрешению каждый структурный элемент распадается на несколько изолированных точек. Можно предполагать, что это продолжается и при дальнейшем увеличении разрешения. Такую структуру плоскости ридлинга можно объяснить весьма низкой плотностью вложенных в симметричный аттрактор инвариантных множеств, ответственных за возникновение изрешечивания. В свою очередь, это обусловлено гиперболической природой аттрактора.

Плоскость ридлинга на рис. 10 не симметрична относительно диагонали, хотя это свойство с очевидностью должно иметь место по причине идентичности синхронизирующихся подсистем. Отсутствие симметрии служит еще одним подтверждением предположения о том, что точки, изрешечивающие бассейн, являются изолированными, или по меньшей мере не образуют сколько-нибудь крупных областей. Действительно, уже небольшой численной погрешности, которая неизбежна при выборе двух стартовых точек по разные стороны диагонали, оказывается достаточно, чтобы из первой точки система выходила на аттрактора, а из другой нет.

На рис. 11 показана плоскость ридлинга при  $d = 0.174$ . Даже такое незначительное увеличение параметра связи существенно сказывается на степени изрешеченности бассейна. На плоскости имеется значительно меньше черных точек, из которых система не попадает на симметричный аттрактор. Плотность таких точек на рис. 11б на 80% меньше чем на рис. 10б. Это говорит о том, что несмотря на достаточно широкий интервал на рис. 9, внутри которого циклы с небольшими периодами приобретают поперечную устойчивость, циклы высоких периодов становятся устойчивыми достаточно близко к точке синхронизации.

Рассмотрим теперь эффект «пузырящегося» аттрактора (bubbling attractor), который также связан с наличием поперечно неустойчивых вложенных инвариантных множеств [1]. Пусть система находится в закритической области вблизи порога синхронизации. Выберем начальные условия так, чтобы система выходила на симметричный аттрактор. На рис. 12а показана ситуация, соответствующая этим требованиям. Здесь представлена зависимость логарифма расстояния между подсистемами  $E$  (2.14) от шага дискретного времени отображения Пуанкаре. Расстояние между подсистемами убывает и примерно при  $n = 8000$  выходит за разрядную сетку вещественных чисел двойной точности.

Сохраним прежние начальные условия и значения параметров, но по ходу решения будем добавлять к переменным небольшой шум. Под его воздействием система может быть переброшена в окрестность поперечно неустойчивого вложенного множества и это приведет к всплеску колебаний  $E$ . Через некоторое времени система возвратится к симметричному аттрактору и будет оставаться в его окрестности до тех пор, пока другое случайное воздействие не вызовет новый всплеск. Это иллюстрирует рис. 12б. Присутствие шума с амплитудой 0.001 вызывает всплески колебаний, амплитуда которых превышает амплитуду шума на три порядка.

Однако система достаточно редко оказывается в окрестности поперечно неустойчивого инвариантного множества. Интервалы между всплесками велики — порядка 15000 шагов дискретного времени. Это свидетельствует о весьма низкой плотности таких множеств.

Теперь немного увеличим значение параметра связи. Как видно из рис. 12в, это приводит к очень сильному уменьшению амплитуды всплесков — пики на этом рисунке на порядок ниже, чем на предыдущем. То есть, иными словами, также как и в случае с изрешечиванием, эффект пузырящегося аттрактора быстро исчезает при увеличении  $d$ .

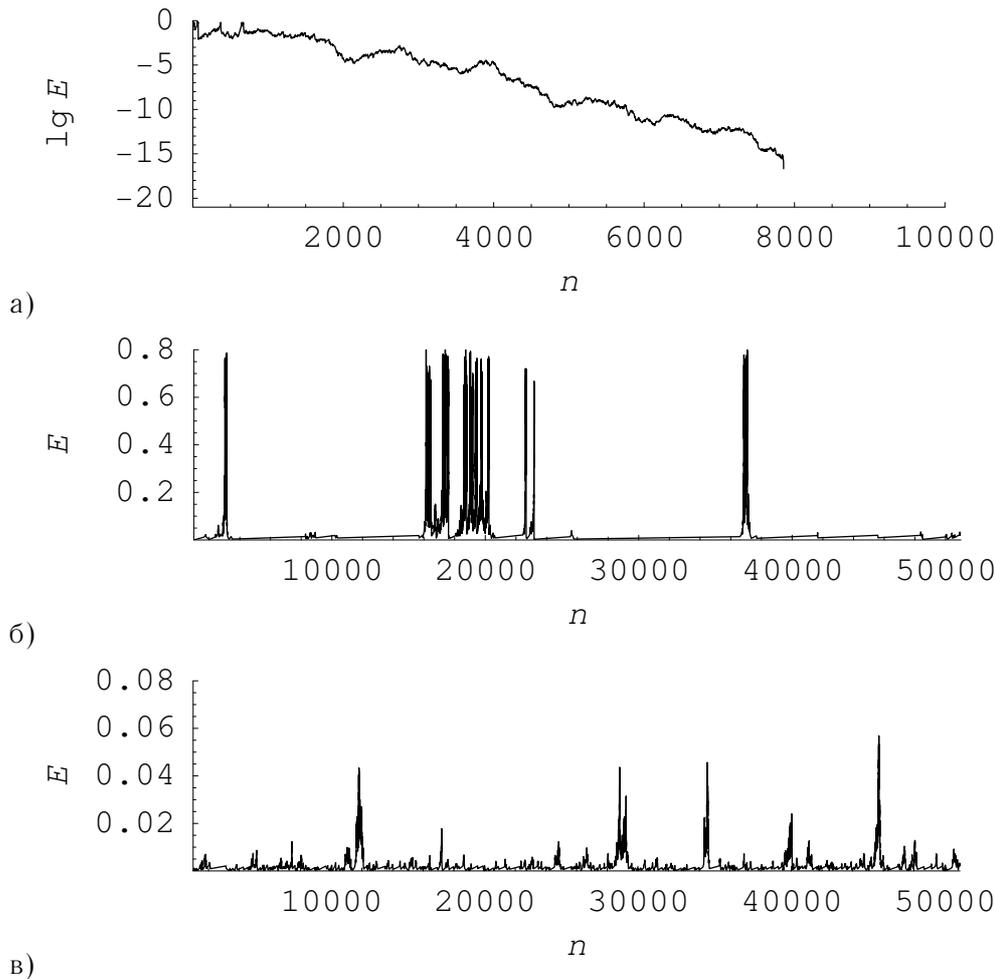


Рис. 12. Эффект «пузырящегося» аттрактора. По вертикальной оси — расстояние между подсистемами (2.14), по горизонтальной — шаг дискретного времени отображения Пуанкаре.  $A = 8$ ,  $T = 2$ ,  $\epsilon = 0.05$ . (а) Шум отсутствует,  $d = 0.173$ . При  $n \approx 8000$  расстояние между подсистемами выходит за разрядную сетку и логарифм расходится. (б) По ходу решения к каждой переменной добавляется шум с амплитудой 0.001. (в) Параметр связи увеличен до  $d = 0.174$ .

### 3. Структура многомерного аттрактора: случай слабой связи

Выше говорилось о том, что четырехмерный аттрактор отображения Пуанкаре парциальной системы (1.6) можно эффективно представить в проекции на плоскость, исключив из рассмотрения невозбужденные компоненты. Аналогичным образом можно поступить с восьмимерным аттрактором отображения Пуанкаре системы (2.1). Проецируя его в пространство возбужденных компонент, мы получаем четырехмерный объект, что значительно упрощает рассмотрение.

Отличительной чертой системы (2.1) является то, что обе ее подсистемы находятся под параметрическим воздействием одного и того же внешнего сигнала. Даже в отсутствие связи между подсистемами, т. е. при  $d = 0$ , благодаря принудительной модуляции параметров надкритичности, амплитуды  $|a_1|$  и  $|a_2|$  а также  $|b_1|$  и  $|b_2|$  совершают колебания с достаточно высокой степенью синхронности и мало отличаются друг от друга. Это не относится к фазам, так как за внешнее воздействие отвечает вариация вещественных коэффициентов в уравнениях. Фазы изменяются

независимо друг от друга, и, как отмечалось выше, демонстрируют хаотическую динамику. Это, в свою очередь, препятствует полной синхронизации амплитуд. За синхронизацию фаз отвечает параметр связи  $d$ . Когда он достигает критического значения  $d_{\text{syn}}$ , происходит полная синхронизация при которой динамические переменные первой и второй подсистем в каждый момент времени совпадают.

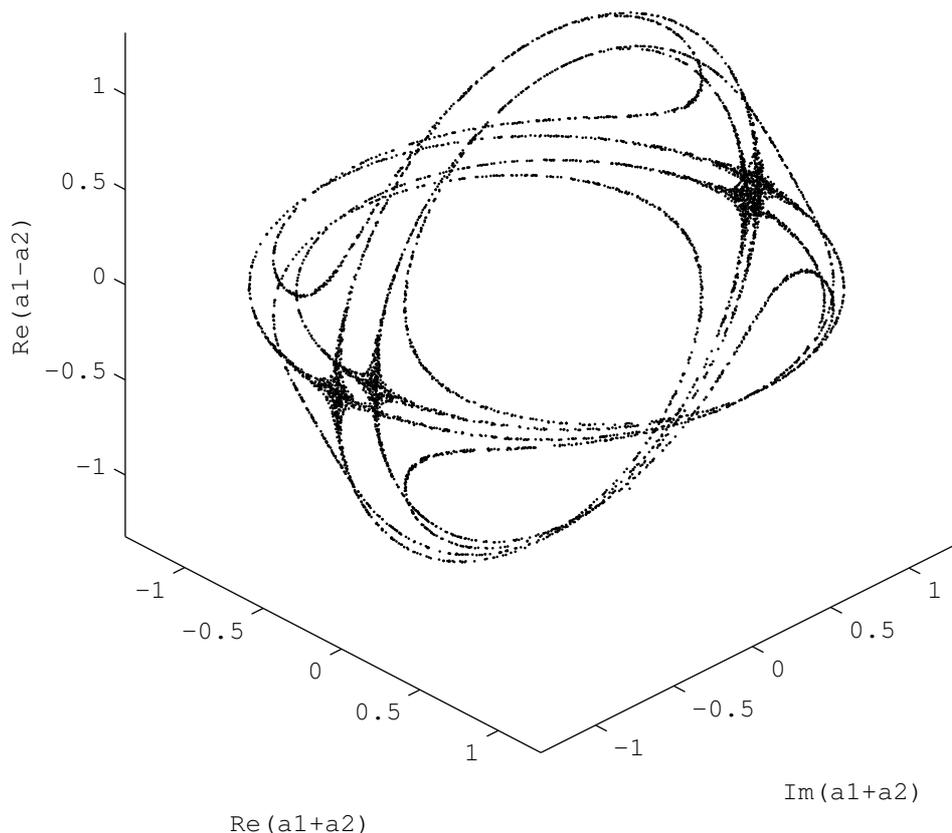


Рис. 13. Сечение четырехмерной проекции аттрактора системы (2.1) плоскостью  $\text{Im}(a_1 - a_2) = 0$ . Связь между подсистемами отсутствует,  $d = 0$ . Значения остальных параметров:  $A = 3$ ,  $T = 5$ ,  $\epsilon = 0.05$ .

Согласно результатам Бунимовича и Синая [15, 16], в системе связанных элементов, имеющих гиперболический аттрактор, при малой связи характер динамики должен оставаться близким к тому, какой имеет место в отсутствие связи. Поэтому обратимся сначала к обсуждению случая  $d = 0$ .

С использованием в качестве координат вещественных и мнимых частей симметричной и антисимметричной переменных  $a_1 + a_2$  и  $a_1 - a_2$ , соответственно, на рис. 13 построено сечение четырехмерной проекции аттрактора плоскостью  $\text{Im}(a_1 - a_2) = 0$ . Глобальная структура сечения имеет вид двух взаимно перпендикулярных наборов колец, пересекающихся вдоль одного из диаметров. На рис. 14а и б показана структура колец в проекциях на координатные плос-

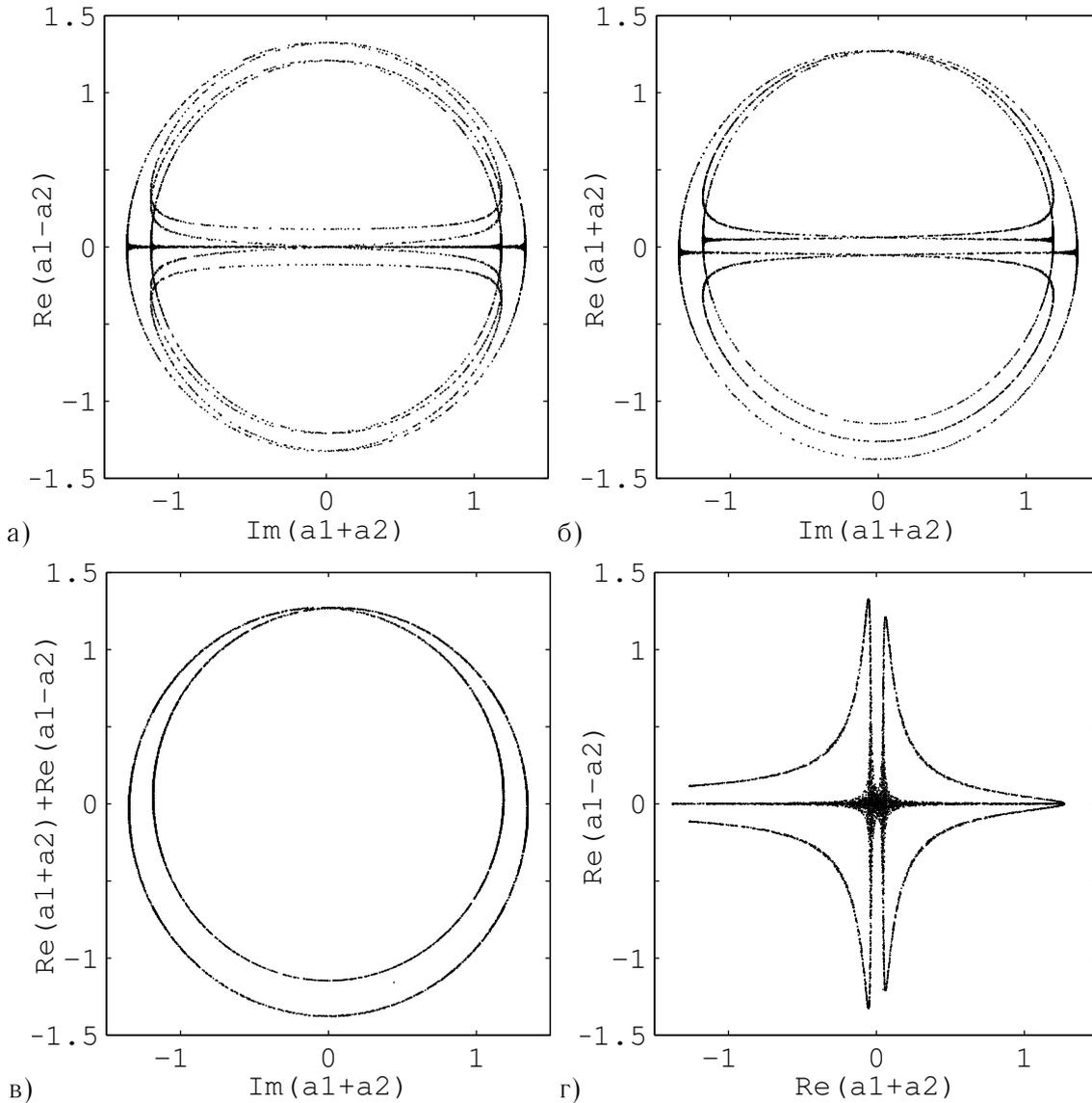


Рис. 14. Проекция объекта на рис. 13 на различные координатные плоскости.

кости (вид справа и сверху, соответственно). Устройство этих проекций напоминает двумерную проекцию аттрактора парциальной системы (1.6) (см. рис. 3). В поперечнике они имеют фрактальную структуру. Очевидно, что при отсутствии связи, подсистема демонстрирует динамику, идентичную парциальной системе (1.6). Это иллюстрируется на рис. 14в, где построена проекция сечения аттрактора на плоскость, образованную осью  $\text{Im}(a_1 + a_2)$  и диагональю  $\text{Re}(a_1 + a_2) + \text{Re}(a_1 - a_2)$ . Так как рис. 13 получен при  $\text{Im} a_1 = \text{Im} a_2$ , ясно, что рис. 14в представляет собой не что иное как проекцию аттрактора из восьмимерного пространства на комплексную плоскость компоненты  $a_1$ . Как и ожидалось, видимая структура множества на этом рисунке идентична аттрактору парциальной системы (рис. 3). В области пересечений колец на рис. 13 сформированы гиперболические структуры, что иллюстрирует проекция на рис. 14г. Горизонтальная линия на этом рисунке отвечает неустойчивому синхронному режиму  $a_1 = a_2$ . Кривые, по форме близкие к гиперболам, представляют траектории выхода из синхронного режима.

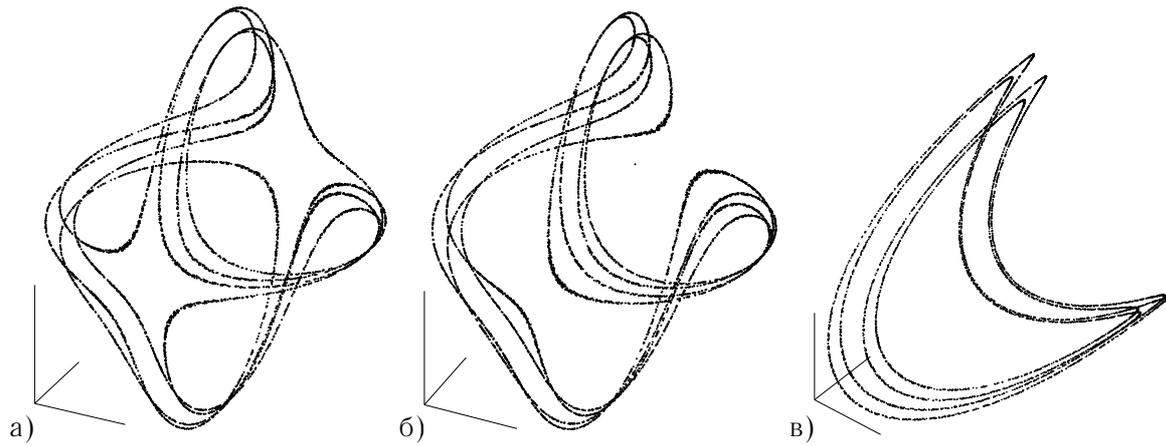


Рис. 15. Сечение четырехмерной проекции аттрактора плоскостями (а)  $\text{Im}(a_1 - a_2) = 0.05$ , (б)  $0.1$  и (в)  $0.8$ .

Обсудим теперь, как изменяется вид проекции аттрактора при смещении вдоль четвертой оси  $\text{Im}(a_1 - a_2)$ . На рис. 15а построено сечение немного сдвинутое от начала координат, а именно,  $\text{Im}(a_1 - a_2) = 0.05$ . Видно, что области пересечений колец трансформировались по сравнению с рис. 13. Симметричное инвариантное множество больше не попадает на рисунок, и в соответствии с этим сохранились только линии, связывающие вертикальные и горизонтальные кольца. При дальнейшем удалении от начала координат происходит размыкание гиперболических областей, см. рис. 15б. Сечение аттрактора теперь представляет собой одно сильно изогнутое кольцо с фрактальной поперечной структурой. При еще большем удалении от начала координат вдоль оси  $\text{Im}(a_1 - a_2)$  изгиб частично выравнивается, и сечение аттрактора приобретает вид, показанный на рис. 15в.

Мы обсудили сечения четырехмерной проекции аттрактора системы (2.1) при фиксированных значениях  $\text{Im}(a_1 - a_2)$ . Аналогичным образом можно построить сечения, фиксируя три другие переменные,  $\text{Re}(a_1 - a_2)$ ,  $\text{Im}(a_1 + a_2)$  и  $\text{Re}(a_1 + a_2)$ . Как было обнаружено, в этом случае получаются качественно подобные рисунки. Сечения в нуле имеют вид двух наборов взаимно перпендикулярных колец, пересекающихся вдоль одной из диагоналей. В полном четырехмерном пространстве имеется четыре таких набора, расположенных вблизи плоскостей

$$\text{Re}(a_1 - a_2) = 0, \quad \text{Im}(a_1 - a_2) = 0; \tag{3.1}$$

$$\text{Re}(a_1 - a_2) = 0, \quad \text{Im}(a_1 + a_2) = 0; \tag{3.2}$$

$$\text{Re}(a_1 + a_2) = 0, \quad \text{Im}(a_1 - a_2) = 0; \tag{3.3}$$

$$\text{Re}(a_1 + a_2) = 0, \quad \text{Im}(a_1 + a_2) = 0. \tag{3.4}$$

Условие (3.1) определяет, очевидно, симметричное инвариантное множество  $a_1 = a_2$ . В обсуждаемой сейчас ситуации отсутствия связи между подсистемами  $d = 0$  этому отвечает множество траекторий, проходящих сколь угодно близко к плоскости (3.1), что хорошо видно из рис. 14г. Указанные траектории здесь образуют тонкую горизонтальную линию, проходящую через начало координат.

Аналогичная ситуация имеет место для второй плоскости (3.2). Сечение аттрактора при  $\text{Im}(a_1 + a_2) = 0$  устроено так же как сечение на рис. 13 и поэтому соответствующий рисунок не приведен. Наличие траекторий, проходящих сколь угодно близко к плоскости (3.2), позволяет сделать вывод о существовании симметричного инвариантного множества на этой плоскости.

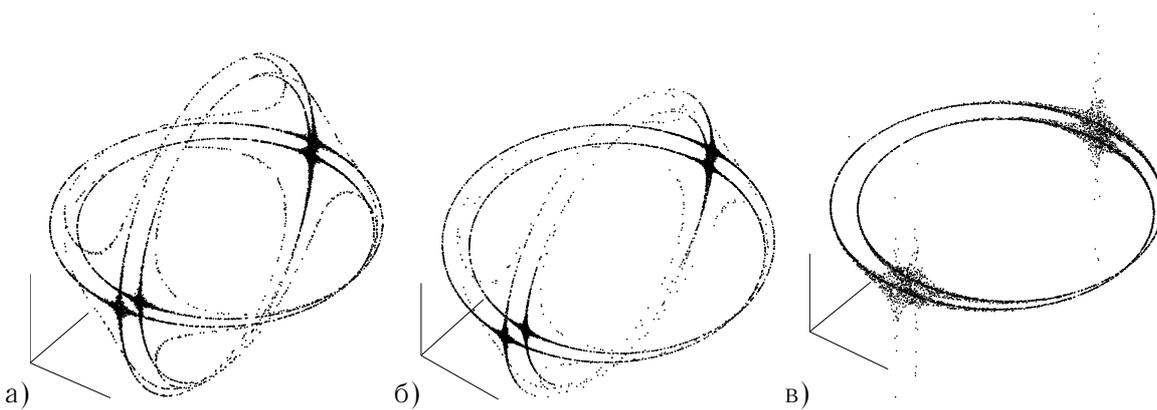


Рис. 16. Сечение четырехмерного аттрактора плоскостью  $\text{Im}(a_1 - a_2) = 0$  при наличии связи: (а)  $d = 0.04$ , (б)  $d = 0.06$ ,  $d = 0.069$ . ( $d_{\text{syn}} = 0.0693 \dots$ )

Можно предполагать, что соответствующий синхронный режим  $a_1 = a_2^*$ , можно реализовать, как аттрактор, установив между подсистемами (1.6) связь надлежащего вида.

Две оставшихся плоскости (3.3) и (3.4) не отвечают симметричным режимам. На рис. 13 плоскость (3.3) проходит вертикально. Как видно из этого рисунка и из рис. 14г, траектории отделены от плоскости, хотя и проходят достаточно близко к ней. Подобная ситуация имеет место и для плоскости (3.4). Можно заключить, что вблизи этих плоскостей проходят траектории, соответствующие разрушающим симметрию возмущениям.

Пусть теперь в уравнениях (2.1) между подсистемами включена связь  $d > 0$ . Из рис. 16а видно, что даже при достаточно большом значении  $d$  никаких заметных видоизменений структуры аттрактора не происходит. С приближением к точке синхронизации система чаще оказывается в окрестности расположенного горизонтально симметричного инвариантного множества (рис. 16б). Напротив, множество траекторий в вертикальной плоскости, отвечающих поперечным возмущениям, становится более разреженным. В еще большей степени это проявляется на третьей панели (рис. 16в). Здесь показана ситуация в непосредственной близости от точки синхронизации. Траектории, отвечающие уходу системы от симметричного многообразия, чрезвычайно разрежены. Отметим также очевидное и ожидаемое сходство структуры симметричного инвариантного множества с аттрактором парциальной системы (ср. с рис. 3).

Таким образом, глобальная структура аттрактора системы (2.1) не зависит существенно от  $d$ , но изменяется частота посещения системой различных его областей. По-видимому, это свойство следует интерпретировать как проявление структурной устойчивости аттрактора связанных систем.

Теперь рассмотрим аттрактор в пространстве фаз компонент  $a_1$  и  $a_2$ . На рис. 17а показаны точки на аттракторе отображения Пуанкаре в проекции на плоскость  $(\phi_1, \phi_2)$  при  $d = 0$ . Точки распределены по плоскости статистически однородно, что свидетельствует об отсутствии корреляций между фазами, каждая из которых демонстрирует хаотическую динамику. С ростом параметра  $d$  точки концентрируются в окрестности симметричного инвариантного множества, что видно на рис. 17б. При дальнейшем увеличении  $d$  точки все более сгущаются около линии  $\phi_1 = \phi_2$ , а при  $d = d_{\text{syn}} \approx 0.0693$  происходит синхронизация — все точки оказываются на этой линии.

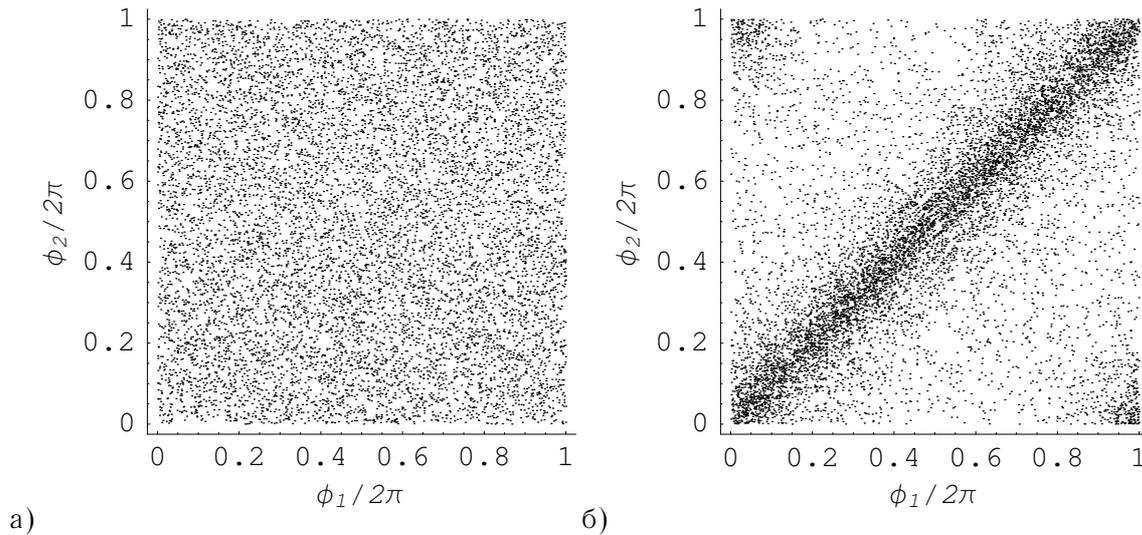


Рис. 17. Синхронизация на плоскости фаз. (а)  $d = 0$ , (б)  $d = 0.065$ .  $T = 5$ ,  $A = 3$ ,  $\epsilon = 0.05$ .

#### 4. Заключение

В данной статье мы исследовали амплитудные уравнения для системы двух связанных неавтономных осцилляторов Ван-дер-Поля, предложенной недавно [20] в качестве простой и легко реализуемой в физическом эксперименте [6] модели с гиперболическим хаотическим аттрактором. Исследование показало, что приближенное описание в рамках амплитудных уравнений дает хорошие результаты с точки зрения динамики на аттракторе и воспроизводит присущие исходной системе закономерности, обусловленные гиперболической природой хаоса. Это можно считать дополнительным свидетельством грубости исследуемого объекта.

Следующей целью работы было рассмотрение двух связанных элементов, каждый из которых демонстрирует гиперболический хаос. Как известно, переход к синхронному режиму в связанных системах с хаотической динамикой сопровождается такими явлениями, как изрешечивание бассейна симметричного аттрактора и «пузырящийся» аттрактор. Возникновение этих эффектов тесно связано с внутренним устройством хаотических аттракторов парциальных систем. Изучая проявления этих эффектов при синхронизации гиперболических аттракторов, можно судить об особенностях их устройства. Как оказалось, изрешечивание происходит таким образом, что точки, не принадлежащие бассейну, не образуют сколько-нибудь крупных структур и, по всей вероятности, являются изолированными. Они хаотически распределены в фазовом пространстве. Это можно объяснить низкой плотностью вложенных в симметричный аттрактор инвариантных множеств, которые отвечают за данный эффект. Эффект пузырящегося аттрактора, который также ассоциируется с наличием вложенных инвариантных множеств, проявляет себя на весьма больших интервалах времени. Это также свидетельствует о весьма низкой плотности вложенных инвариантных множеств. Характерно, что эффекты изрешечивания и пузырящегося аттрактора в системе связанных элементов с гиперболическими аттракторами реализуются только в узком диапазоне значений параметра связи.

Было также подробно изучено устройство аттрактора связанных систем в области малой связи. Несмотря на том, что полная размерность фазового пространства равна восьми, благодаря попеременному возбуждению компонент аттрактор можно эффективно изучать в четырехмерном пространстве. Было выявлено, что траектории сосредоточены около четырех перпендику-

лярных друг другу плоскостей, образуя на них кольцеобразные структуры с фрактальным поперечным устройством. Две из них отвечают синхронным режимам, а две другие содержат траектории, ассоциирующиеся с возмущениями, разрушающими симметрию. Так как оба осциллятора, образующих систему, находятся под воздействием одного и того же внешнего сигнала, нетривиальная структура аттрактора формируется даже в отсутствие связи. Включение слабой связи не влияет на глобальное устройство аттрактора. С ее увеличением меняется частота посещения системой различных областей аттрактора: система все чаще оказывается вблизи многообразия симметричных состояний. Сохранение глобальной структуры хаотического аттрактора при изменении величины связи можно интерпретировать как проявление его структурной устойчивости.

## Список литературы

- [1] Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е. *Синхронизация автоколебаний и колебаний, индуцированных шумом* // Радиотехника и электроника, 2002, т. 47, №2, с. 133–165.
- [2] Карлов Н. В., Кириченко Н. А. *Колебания, волны, структуры*. М.: Физматлит, 2001, 496 с.
- [3] Каток А. Б., Хасселблат Б. *Введение в современную теорию динамических систем* (пер. с англ.). М.: Факториал, 1999.
- [4] Кузнецов С. П. *Динамический хаос*. М.: Физматлит, 2001.
- [5] Кузнецов С. П., Сатаев И. Р. *Проверка условий гиперболичности хаотического аттрактора в системе связанных неавтономных осцилляторов Ван-дер-Поля* // Изв. вузов. ПНД, 2006, т. 14, №5, с. 3–29.
- [6] Кузнецов С. П., Селезнев Е. П. *Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла-Вильямса* // ЖЭТФ, 2006, т. 129, №2, с. 400–412.
- [7] Купцов П. В., Кузнецов С. П., Сатаев И. Р. *Гиперболический аттрактор типа Смейла - Вильямса в системе связанных неавтономных осцилляторов, представленных уравнениями для медленных амплитуд* // направлено в печать в журнал ЖТФ.
- [8] Ландау Л. Д. *К проблеме турбулентности* // ДАН СССР, 1944, т. 44, с. 339–342.
- [9] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Механика сплошных сред*. М.: Гостехиздат, 1954, 795 с.
- [10] Синай Я. Г. *Нелинейные волны*. М.: Наука, 1979, 192 с.
- [11] *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления* (под ред. Гамкрелидзе Р. В.). Т. 2 из «Итоги науки и техники». М.: Изд. ВИНТИ АН СССР, 1985.
- [12] Шустер Г. *Детерминированный хаос*. М.: Мир, 1988.
- [13] Afraimovich V., Hsu S.-B. *Lectures on chaotic dynamical systems* // American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Somerville, MA, 2003. — V. 28 of AMS/IP Studies in Advanced Mathematics
- [14] Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J. M. *Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems: a method for computing all of them*. Part I: Theory. Part II. Numerical applications// Meccanica, 1980, V. 15, p. 9–30.
- [15] Bunimovich L. A., Sinai Ya. G. *Spacetime chaos in coupled map lattices* // Nonlinearity, 1988, V. 1, p. 491–516.
- [16] Bunimovich L. A., Sinai Ya. G. *Theory and application of coupled map lattices*. John Wiley & Sons Ltd, 1993, p. 169–189.
- [17] Christiansen F., Rugh H. H. *Computing Lyapunov spectra with continuous Gram-Schmidt orthonormalization* // Nonlinearity, 1997, V. 10, p. 1063–1072.



- [18] Eckmann J.-P., Ruelle D. *Ergodic theory of chaos and strange attractors* // Rev. Mod. Phys., 1985, V. 57, No. 3, p. 617–654.
- [19] Heagy J. F., Platt N., Hammel S. M. *Characterization of on-off intermittency* // Phys. Rev. E, 1994, V. 49, p. 1140–1150.
- [20] Kuznetsov S. P. *Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale-Williams type* // Phys. Rev. Lett., 2005, V. 95, p. 144101.
- [21] Milnor J. *On the concept of attractor* // Commun. Math. Phys., 1985, V. 99, No. 2, p. 177–198.
- [22] Parker T. S., Chua L. O. *Practical numerical algorithms for chaotic systems*. Springer-Verlag, 1989.
- [23] Pikovsky A. S. *On the interaction of strange attractors* // Z. Phys. B — Condensed Matter, 1984, V. 55, p. 149–154.
- [24] Platt N., Spiegel E. A., Tresser C. *On-off intermittency: a mechanism for bursting* // Phys. Rev. Lett., 1993, V. 70, p. 279–282.
- [25] Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, 1992.