УДК 517.9+531.01

Об эллиптических координатах на алгебре Ли $e(3)$*

А. В. Цыганов
Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Россия, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
e-mail: tsiganov@mph.phys.spbu.ru

Получено 28 октября 2006 г.

Построены эллиптические координаты на дуальном пространстве к алгебре Ли $e(3)$, которые при нулевом значении соответствующей функции Казимира совпадают с обычными эллиптическими координатами на кокасательном расслоении к двумерной сфере. Обсуждается вопрос о возможном применении данных координат в теории интегрируемых систем.

Ключевые слова: эллиптические координаты, интегрируемые системы, разделение переменных

A. V. Tsiganov

On elliptic coordinates on the Lie algebra $e(3)$

Elliptic coordinates on the dual space to the Lie algebra $e(3)$ are introduced. On the zero level of the Casimir function, these coordinates coincide with the standard elliptic coordinates on the cotangent bundle to the two-dimensional sphere. The possibility of use of these coordinates in the theory of integrable systems is discussed.

Keywords: elliptic coordinates, integrable systems, separation of variables
Mathematical Subject Classifications: 35A20, 39A10, 35A25

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06-01-00140).

Алгебра Ли $e(3) = so(3) \oplus \mathbb{R}^3$ группы движения евклидова пространства $E(3)$ является полупрямой суммой алгебры вращений $so(3)$ и абелевой алгебры сдвигов в $\mathbb{R}^3$. На многообразии $\mathscr{M} \simeq e^*(3)$ определим координаты $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ и $J = (J_1, J_2, J_3) \in so(3) \simeq \mathbb{R}^3$. Скобка Ли-Пуассона для линейных функций на $e^*(3)$, т.е. для элементов алгебры $e(3)$, совпадает со скобкой Ли в $e(3)$

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk} J_k, \quad \{J_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk} x_k, \quad \{x_i, x_j\} = 0\,, \tag{1}$$

где ε_{ijk} — полностью кососимметричный тензор. На произвольные гладкие функции эта скобка продолжается с помощью тождества Лейбница.

Скобка (1) вырождена и обладает двумя функциями Казимира

$$A = |x|^2 \equiv \sum_{j=1}^{n=3} x_j^2, \qquad B = \langle x, J \rangle \equiv \sum_{j=1}^{n=3} x_j J_j\,. \tag{2}$$

Орбиты коприсоединенного представления

$$\mathcal{O}_{ab} = \{x, J \,:\, A = a^2,\;\, B = b\}\,, \tag{3}$$

являются четырехмерными симплектическими многообразиями, которые топологически эквивалентны кокасательному расслоению $T^*\mathbb{S}^2$ к двумерной сфере $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3, |x| = a\}$ вложенной в $\mathbb{R}^3$.

Если $b = 0$, то существует симплектическое преобразование, которое отождествляет $T^*\mathbb{S}^2$ и $\mathcal{O}_{a0}$

$$\rho : (p, x) \to J = p \wedge x, \qquad J_i = \sum_{j,k=1}^{n=3} \varepsilon_{ijk}\, p_j\, x_k\,. \tag{4}$$

Здесь p — сопряженный вектору x вектор импульса в $T^*\mathbb{R}^3$, $\{p_i, x_j\} = \delta_{ij}$, а вложение сферы $\mathbb{S}^2$ в $\mathbb{R}^3$ приводит к существованию связи $\langle x, p \rangle = 0$.

Если $b \neq 0$, то симплектическая структура многообразия $\mathcal{O}_{ab}$ отличается от стандартной симплектической структуры на многообразии $T^*\mathbb{S}^2$ добавкой магнитного слагаемого, пропорционального b [1].

Целью данной работы является описание данного магнитного слагаемого с помощью стандартных эллиптических координат на сфере $\mathbb{S}^2$, т.е. описание поднятия эллиптических координат, определенных при $b = 0$, до координат Дарбу на многообразии $e^*(3)$ при $b \neq 0$.

Эллиптические координаты u_1, u_2 на сфере $\mathbb{S}^2$ определяются как корни уравнения (см. [2])

$$e(\lambda) = \sum_{j=1}^{3} \frac{x_j^2}{\lambda - \delta_j} = \frac{a^2(\lambda - u_1)(\lambda - u_2)}{\varphi(\lambda)} = 0, \tag{5}$$

где $\varphi(\lambda) = \prod_{j=1}^{3}(\lambda - \delta_j)$, а δ_j — параметры задающие область определения

$$\delta_1 < u_1 < \delta_2 < u_2 < \delta_3. \tag{6}$$

Используя скобки (1), можно легко доказать, что переменные

$$\pi_{1,2}^0 = h(u_{1,2}), \qquad h(\lambda) = \frac{1}{2a^2} \sum_{j=1}^{3} \frac{x_j\,(x \wedge J)_j}{\lambda - \delta_j} \tag{7}$$

и координаты $u_{1,2}$ удовлетворяют соотношениям

$$\{u_1,u_2\}=0,\qquad \{\pi_i^0,u_j\}=\delta_{i,j},\qquad \{\pi_1^0,\pi_2^0\}=\frac{ib}{4a}\,\frac{u_2-u_1}{\sqrt{\varphi(u_1)\varphi(u_2)}},\tag{8}$$

которые следуют из скобок Пуассона для производящих функций

$$\{e(\lambda),e(\mu)\}\,=0,\qquad \{e(\lambda),h(\mu)\}=-a^{-2}e(\lambda)\,e(\mu)-\frac{e(\lambda)-e(\mu)}{\lambda-\mu},$$

$$\{h(\lambda),h(\mu)\}\,=\,\frac{b}{4a^2}\frac{x_1x_2x_3(\lambda-\mu)(\delta_1-\delta_2)(\delta_2-\delta_3)(\delta_3-\delta_1)}{\varphi(\lambda)\,\varphi(\mu)}\,.$$

Из соотношений (8) следует известный факт, что при $b=0$ переменные $u_{1,2}$ и $\pi^0_{1,2}$ являются координатами Дарбу на многообразии $T^*\mathbb{S}\simeq\mathcal{O}_{a0}$.

Эллиптические координаты u_i и параметры δ_j определены с точностью до линейных преобразований $u_i\to\alpha u_i+\beta$ и $\delta_j\to\alpha\delta_j+\beta$, так что всегда можно положить

$$\delta_1=0,\qquad \delta_2=1,\qquad \delta_3=\mathtt{k}^2>1.$$

Используя (8) и это соглашение, можно доказать следующее

Предложение 1. *При $b\neq 0$ эллиптические координаты $u_{1,2}$ (5) и сопряженные им импульсы*

$$\pi_{1,2}=\pi^0_{1,2}-bf_{1,2},\qquad f_{1,2}=\frac{u_{1,2}}{2a\sqrt{\varphi(u_{1,2})}}\,F\left(\frac{\sqrt{\mathtt{k}^2-u_{2,1}}}{\mathtt{k}},\frac{\mathtt{k}}{\mathtt{k}^2-1}\right),\tag{9}$$

образуют полный набор координат Дарбу на многообразии $e^*(3)$

$$\{u_1,u_2\}=\{\pi_1,\pi_2\}=0,\qquad \{\pi_i,u_j\}=\delta_{i,j}\,.$$

Здесь $F(z,k)$ — неполный эллиптический интеграл первого рода, который является обратной функцией к эллиптической функции Якоби $sn(z,k)$ [3].

Так как функции $f_{1,2}$ зависят только от координат $u_{1,2}$ и не зависят от переменных $\pi^0_{1,2}$, то для доказательства данного предложения необходимо проверить только одно соотношение

$$\{\pi_1,\pi_2\}=\{\pi_1^0,\pi_2^0\}-b\{\pi_1^0,f_2\}+b\{\pi_2^0,f_1\}=\{\pi_1^0,\pi_2^0\}-b\left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1}-\frac{\partial f_1}{\partial u_2}\right)$$

$$=\{\pi_1^0,\pi_2^0\}-\frac{b}{2a}\left(\frac{u_2}{\sqrt{\varphi(u_2)}}\frac{\partial F\left(\frac{\sqrt{\mathtt{k}^2-u_1}}{\mathtt{k}},\frac{\mathtt{k}}{\mathtt{k}^2-1}\right)}{\partial u_1}-\frac{u_1}{\sqrt{\varphi(u_1)}}\frac{\partial F\left(\frac{\sqrt{\mathtt{k}^2-u_2}}{\mathtt{k}},\frac{\mathtt{k}}{\mathtt{k}^2-1}\right)}{\partial u_2}\right)=0\,.$$

Справедливость данного соотношения следует из соотношения (8) и свойств неполного эллиптического интеграла первого рода $F(z,k)$.

Импульсы $\pi_{1,2}$ (9) определены с точностью до канонических преобразований, например, вместо функций $f_{1,2}$ (9) можно использовать функции

$$\tilde f_i=\frac{(-1)^i}{2(u_1-u_2)}\frac{\sqrt{\varphi(u_1)\varphi(u_2)}}{\varphi(u_i)}\,,\qquad i=1,2.$$

В своей области определения (6) переменные $u_{1,2}$ (5) и $\pi_{1,2}$ (7-9) являются вещественными. Обратное преобразование $(u,\pi)\to(x,J)$ имеет вид

$$x_j = a\sqrt{\frac{(\delta_j-u_1)(\delta_j-u_2)}{(\delta_j-\delta_m)(\delta_j-\delta_n)}}\,,\qquad J_j = a^{-2}\Bigl(bx_j+(z\wedge x)_j\Bigr), \tag{10}$$

где $m\neq j\neq n$ и z — вектор с компонентами

$$z_j = \frac{2\,x_j}{u_1-u_2}\left(\frac{\varphi(u_1)(\pi_1+bf_1)}{\delta_j-u_1}-\frac{\varphi(u_2)(\pi_2+bf_2)}{\delta_j-u_2}\right).$$

Определенные соотношениями (5) и (7–9) эллиптические координаты на алгебре $e(3)$ могут быть различным образом использованы в теории интегрируемых систем, так же как и эллиптические координаты на римановых пространствах постоянной кривизны $\mathbb{R}^n$ и on $\mathbb{S}^n$ [2]. Например, подставляя выражения (10) в гамильтониан

$$H_{cl} = \frac12(J_1^2+J_2^2+J_3^2)+\frac12(\delta_1x_1^2+\delta_2x_2^2+\delta_3x_3^2),$$

отвечающий интегрируемому случаю Клебша в уравнениях Кирхгофа, мы получим этот гамильтониан в терминах эллиптических координат на $e^*(3)$

$$H_{cl} = \frac{2\Bigl(\varphi(u_1)(\pi_1+bf_1)^2-\varphi(u_2)(\pi_2+bf_2)^2\Bigr)}{u_1-u_2}-\frac{a^2(u_1+u_2-\sum\limits_{m=1}^{3}\delta_m)}{2}+\frac{b^2}{2a^2}\,. \tag{11}$$

Так как функции $f_{1,2}$ зависят и от u_1, и от u_2, то этот гамильтониан не принадлежит штеккелевскому семейству интегралов движения [4].

Тем не менее, если ввести матрицу Штеккеля

$$S = \begin{pmatrix} u_1 & u_2\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

квазиштеккелевский вектор s и обычный штеккелевский потенциал U

$$s_j = 2\varphi(u_j)\Bigl(\pi_j+bf_j(u_1,u_2)\Bigr)^2,\qquad U_j=\frac{a^2}{2}\left(u_j^2+u_j\sum_{m=1}^{3}a_m\right),$$

то гамильтониан H_{cl} (11) можно рассматривать как деформацию штеккелевского интеграла движения

$$I_1 = H_{cl}-\frac{b^2}{2a^2}=\sum_{j=1}^{2}\Bigl(S_{j1}^{-1}s_j+U_j\Bigr), \tag{12}$$

в которой компоненты вектора Штеккеля s_j зависят от одного импульса π_j и пары координат $u_{1,2}$, поэтому, $\{s_1,s_2\}\neq 0$. При $b=0$ интеграл движения I_1 принимает обычный штеккелевский вид в котором компоненты вектора Штеккеля s_j зависят только от одной пары координат Дарбу π_j^0 и u_j и, поэтому, $\{s_1,s_2\}|_{b=0}=0$.

Второй интеграл движения

$$I_2 = \delta_1J_1^2+\delta_2J_2^2+\delta_3J_3^2-\delta_2\delta_3x_1^2-\delta_1\delta_3x_2^2-\delta_1\delta_2x_3^2,$$

является более сложной деформацией стандартного штеккелевского интеграла

$$I_2 = 2\sum_{j=1}^{2}\Big(S_{j2}^{-1}\, s_j + U_j\Big) + \frac{b(\pi_1 + bf_1 - \pi_2 - bf_2)}{2a^2\{\pi_1^0, \pi_2^0\}} - \frac{b^2}{2a^4}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial U_j}{u_j}, \qquad (13)$$

в которой не только компоненты вектора Штеккеля s_j зависят от импульса π_j и пары координат $u_{1,2}$, но и появляются два дополнительных слагаемых пропорциональных b.

Легко видеть, что эллиптические координаты не являются переменными разделения в соответствующем интегралам движения $I_{1,2}$ уравнении Гамильтона-Якоби. Этот результат совпадает с результатами работ [6, 7], в которых для доказательства использовались скорости

$$\dot{u}_{1,2} = \frac{\mp 4\varphi(u_{1,2})(\pi_{1,2} + bf_{1,2})}{u_1 - u_2}$$

вместо импульсов $\pi_{1,2}$, и результатами работы [8], в которой эллиптические координаты $u_{1,2}$ названы «переменными Ковалевской». В работе [5] интегралы I_1 (12) и I_2 (13) названы квазиштеккелевскими интегралами специального вида.

Подставляя выражения (10) в интегралы движения для интегрируемых систем Кирхгофа и Стеклова—Ляпунова, можно получить другие семейства квазиштеккелевских интегралов. Так же как и для системы Клебша эллиптические координаты не являются переменными разделения в соответствующем этим системам уравнении Гамильтона-Якоби.

С другой стороны, подставляя построенные нами эллиптические координаты в штеккелевский интеграл вида

$$\widehat{H} = \sum_{j=1}^{2}\Big(S_{j1}^{-1} s_j + U_j\Big) + \frac{b^2}{2a^2}, \qquad \text{где} \qquad s_j = \varphi(u_j)\pi_j^2$$

можно получить интегрируемую деформацию системы Клебша, для которой функция Гамильтона

$$\widehat{H} = H_{cl} + \sum_{i=1}^{3} A_i(x)J_i + B(x)$$

является суммой гамильтониана для случая Клебша, линейного по моментам J_i слагаемого и потенциала $B(x)$. Здесь коэффициенты $A_i(x)$ и потенциал $B(x)$ являются эллиптическими функциями координат x_i, выражения для которых мы не приводим из-за их громоздкости. Соответствующую интегрируемую систему можно рассматривать как двигающееся в идеальной несжимаемой жидкости твердое тело в присутствии магнитного поля.

Аналогичным образом можно построить деформации систем Кирхгофа и Стеклова—Ляпунова, в которых будут так же присутствовать линейные по моментам J_i слагаемые.

Список литературы

[1] Новиков С.П., Шмельцер И. // Функц. анализ и его прил., 1981, т. 15, в. 3, с. 54–66.

[2] Kalnins E. G. *Separation of Variables for Riemannian Spaces of Constant Curvature*. Longman Scientific & Technical, Essex, 1986.

[3] Abramowitz M., Stegun I. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications Inc., New York, 1965, 1046 p.

[4] Цыганов А. В. *Интегрируемые системы в методе разделения переменных* // Рег. и хаот. дин., 2005, 384 с.

[5] Марихин В. Г., Соколов В. В. // Усп. мат. н., 2006, т. 60, в. 5, с. 175–176.

[6] Харламова Е. И. // Изв. Сиб. Отд. АН СССР, 1959, т. 6, с. 7–17.

[7] Komarov I. V., Tsiganov A. V. // J. Phys. A, 2005, V. 38, p. 2917–2927.

[8] Marikhin V. G., Sokolov V. V. // Reg. Chaot. Dyn, 2005, V. 10, No. 1, p. 59–70.