

О нелинейных возмущениях правильной полигональной системы вихрей*

Е. Г. Борд

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет
630008, Россия, Новосибирск, ул. Ленинградская, 113
E-mail: ngasu2005@ngs.ru

Получено 12 ноября 2006 г.

В работе рассматривается развитие симметричных возмущений правильной полигональной системы вихрей. Показано, что решения, неустойчивые в соответствии с линейным критерием, возвращаются в окрестность начального положения за конечное время. Отдельно исследуется поведение системы восьми точечных вихрей. Показано, что в этом частном случае задача сводится к системе дифференциальных уравнений второго порядка. Предложено описание механизма возникновения пар вихрей в результате эволюции правильной полигональной системы.

Ключевые слова: полигональная система вихрей, локальная неустойчивость, нелинейный осциллятор.

E. G. Bord

On the nonlinear disturbances of vortex polygon

The evolution of the symmetrical disturbances of the vortex polygon is studied. The return of the unstable solution to their initial position is found. The case of eight vortices is considered separately. For this case second order differential equation system is found. The vortex pair realization is explained.

Keywords: vortex polygon, local instability, nonlinear oscillator.

Mathematical Subject Classifications: 76F20, 37E35

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Минобрнауки (РНП 2.1.1.471), Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки научных школ (проект НШ-964.2003.1).

1. Твердотельное вращение правильной полигональной системы вихрей

Задача устойчивости твердотельного вращения правильной полигональной системы точечных вихрей впервые исследована в [1]. Было показано, что вихревые системы с числом вихрей $N < 7$ устойчивы, а при $N > 7$ неустойчивы, для неустойчивых систем точечных вихрей были получены показатели Ляпунова. Устойчивость полигональной системы семи точечных вихрей была доказана в [2].

В работах [3–5] динамика систем точечных вихрей и систем вихрей с гауссовским распределением завихренности исследовалась численно. Локальная неустойчивость при этом описывалась функцией:

$$\Delta(t) = \frac{1}{NR} \left(\sum_{n=1}^N (z_n(t) - z_n^0(t))^2 \right)^{1/2},$$

где $z_n^0(t)$ точное решение, описывающее твердотельное вращение полигональной системы, $z_n(t)$ — решение, полученное численным интегрированием, R — радиус окружности, описанной вокруг N -угольника.

Возможной причиной неустойчивости является сингулярность поля завихренности точечных вихрей. В [5] получено обобщение критерия Хэвлока для систем с гауссовским распределением, в частности было показано, что увеличение дисперсии распределения приводит к увеличению устойчивости твердотельного вращения системы. Было показано, что вихревые системы остаются неустойчивыми при $N > 7$ в конечном диапазоне изменения дисперсии распределения. При этом зависимость показателей Ляпунова в неустойчивых системах от дисперсии распределения завихренности является непрерывной и в пределе нулевой дисперсии стремится к значениям показателей Ляпунова для системы точечных вихрей.

Локальная неустойчивость является необходимым условием стохастизации системы. Другим необходимым условием является ослабление корреляции с начальными данными. Результаты исследования зависимости решений от начальных возмущений, полученные в [3–4] позволяют сделать вывод, что ослабление корреляций определяется количеством вихрей в системе.

С другой стороны, известно, что в динамических системах хаотические траектории могут соседствовать с регулярными. Реализация регулярного режима при численном интегрировании уравнений динамики вихрей проявляется в сохранении корреляции решения с начальными данными за пределами интервала экспоненциального роста возмущений. Указания на существование решений с регулярным поведением в динамике правильной полигональной системы были получены в [6]. Авторы исследовали развитие синусоидальных начальных возмущений правильной полигональной системы точечных вихрей, при этом были обнаружены образования вихревых групп — пар и четверок вихрей. Целью настоящей работы является изучение механизма возникновения развитых возмущений правильной полигональной конфигурации, сопровождающихся образованием пар вихрей.

2. Симметричные возмущения начальных условий

Начальное положение вихрей в вершинах правильного N -угольника сохраняется при вращениях на углы $2\pi n/N$, $n = 0, \dots, N - 1$. Если число вихрей N допускает разложение в произведение целых множителей $N = KM$, начальную конфигурацию системы можно рассматривать как совокупность K групп по M вихрей в каждой. Такая начальная конфигурация допуска-

ет частные типы симметрии относительно поворотов на углы $2\pi m/M$, $m = 0, \dots, M - 1$. Вихри каждой из групп образуют правильный M -угольник, при этом взаимные положения вихрей, принадлежащих разным группам могут быть любыми. Движение вихревой системы описывается уравнениями:

$$\dot{z}_n = \frac{i\Gamma}{2\pi} \sum_{m=1, m \neq n}^N \frac{1 - \exp(-r_{mn}^2/\sigma^2)}{z_n - z_m}, n = 0, \dots, N - 1; \quad (2.1)$$

здесь $r_{mn}^2 = (z_n - z_m)\overline{(z_n - z_m)}$, Γ — максимальная интенсивность завихренности, σ — дисперсия завихренности отдельного вихря. Начальная конфигурация, соответствующая частному типу симметрии определяется следующим образом:

$$z_n(0) = R \exp(2\pi i n_k/N) \zeta_k^0; \quad (2.2)$$

$$\zeta_k^0 = 1 + \varepsilon, k = 0; \quad \zeta_k^0 = \sqrt{K/(K-1) - (1+\varepsilon)^2}, k = 1, \dots, K-1;$$

$$n_k = k + Km; k = 0, \dots, K-1; m = 0, \dots, M-1. \quad (2.3)$$

Если $\varepsilon = 0$, то вихри находятся в вершинах правильного N -угольника, невозмущенное решение в этом случае описывает твердотельное вращение вихревой системы: $z_n^0(t) = z_n(0) \exp(i\Omega_N t)$,

$$\Omega_N = \frac{\Gamma}{4\pi R^2} \left(N - 1 - \sum_{n=1}^{N-1} \exp\left(-2R^2 \frac{1 - \cos(2\pi n/N)}{\sigma^2}\right) \right).$$

Задача Коши (2.1-2.2) интегрировалась методом Рунге-Кутты 4-го порядка.

Первой неустойчивой системой, в которой следует ожидать развитие возмущений с частной симметрией, является система восьми вихрей. На рис. 1, 1а представлены зависимости $\Delta(t')$ и $\ln(|z_0(t')|)$, полученные при $N = 8$, $K = 2$, $\tilde{\sigma} = 0.33$. Здесь: $t' = t\Omega_N/2\pi$, $\tilde{\sigma} = \sigma/R\sqrt{2(1 - \cos(2\pi/N))}$. Кривые 1 получены при $\varepsilon = 10^{-2}$, кривые 2 при $\varepsilon = 8 \cdot 10^{-4}$, кривые 3 — $\varepsilon = 1.0 \cdot 10^{-4}$, кривые 4 — $\varepsilon = 6.25 \cdot 10^{-6}$. Решение задачи (2.1-2.2) полученное с $\varepsilon = 10^{-2}$ показано точками.

Сравнение рисунков 1 и 1а позволяет сделать вывод, что дестабилизация решения обусловлена нелинейными колебаниями решения. Поведение кривых на рис. 1а. позволяет видеть периодический характер решения. Максимальная амплитуда возмущений практически не зависит от амплитуды начальных возмущений. Усиление возмущений происходит экспоненциально, при этом инкременты нарастания возмущений определяются известными из [5] выражениями. Убывание возмущений является экспоненциальным, причем показатели экспоненты на участках роста и убывания близки по абсолютной величине. Участок убывания возмущений заканчивается, когда решение оказывается в непосредственной близости от начальной конфигурации. Частная симметрия решения сохраняется на всех этапах эволюции. На участках, в пределах которых решение близко к начальной конфигурации, функция $\Delta(t')$ меняется незначительно. На графике $\Delta(t')$ эти участки выглядят как «полки». Возникновение таких участков характерно для систем с различными начальными возмущениями.

Траектория относительного движения вихря $n = 0$ в плоскости, вращающейся с угловой скоростью Ω_N показана точками на рис. 2. Здесь также виден периодический характер возмущенного решения, участки усиления возмущений и участки возврата к начальной конфигурации. Детерминированное поведение неустойчивого решения уравнений (2.1), соответствующее частному типу симметричных возмущений начальных условий позволяет предположить, что этому типу симметрии соответствует некоторое регулярное частное решение.

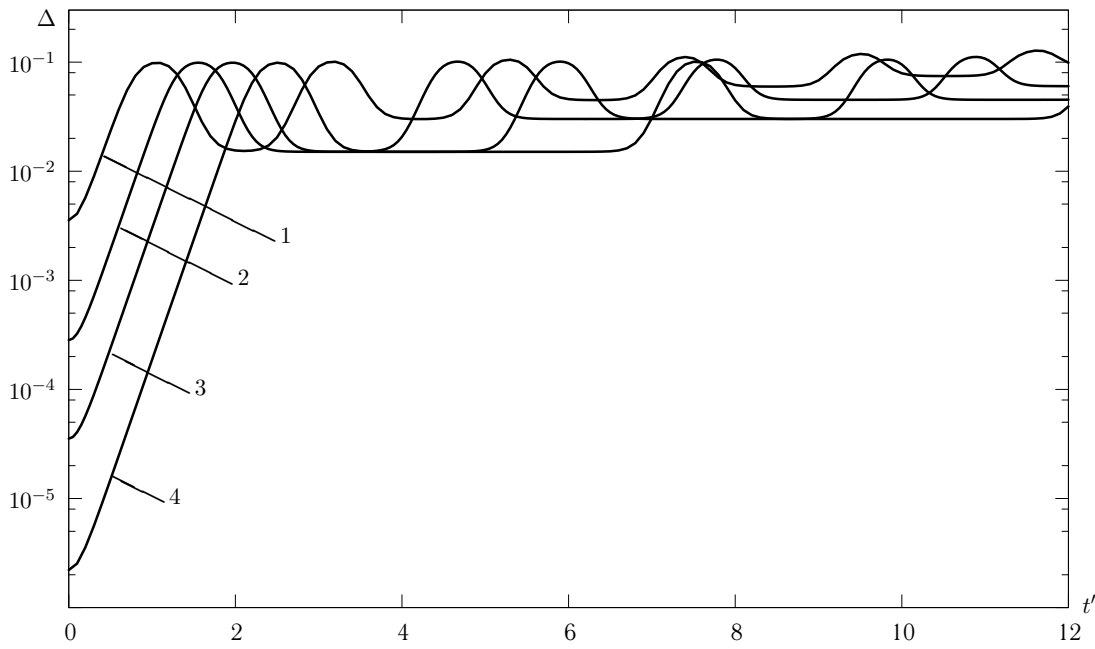


Рис. 1. Локальная неустойчивость решения с симметричными возмущениями начальных условий.

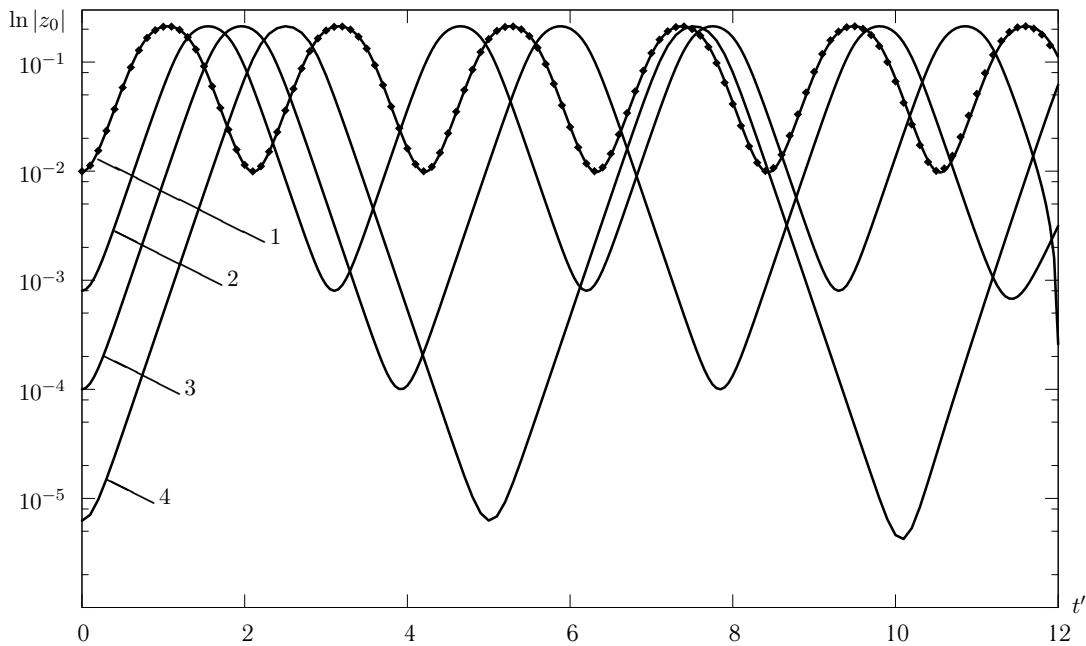


Рис. 1а. Нелинейные колебания модуля первой компоненты решения.

3. Динамика симметричных возмущений

Условию частной симметрии можно подчинить решение уравнений (2.1) не только в начальный момент, но и в любой момент времени. Для этого достаточно потребовать: $z_n(t) = R \exp(i\Omega_N t + 2\pi i n_k / N) \zeta_k(t)$, $k = 0, \dots, K - 1$, здесь n_k определено выражением (2.3).

Представление z_n через ζ_k сокращает число независимых параметров описания системы. Стационарные вращения таких вихревых конфигураций с различным распределением завихренности изучались в [7]. Линейная устойчивость двух взаимодействующих многоугольников, образованных вихрями с противоположными завихренностями исследована в [1].

Подстановка представления в уравнения (2.1) приводит к уравнениям

$$\dot{\zeta}_k = -i\Omega_N \zeta_k + i \frac{\Omega_M}{\zeta_k} + \frac{i\Gamma}{2\pi R^2} \sum_{g=0, g \neq k}^{K-1} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1 - e_{kn_g}}{\zeta_k - \bar{\zeta}_g e^{2\pi i(k-n_g)/N}}, \quad (3.1)$$

здесь $e_{kn_g} = \exp(-R^2 \wp_{kg}^2 / \sigma^2)$, $\wp_{kg}^2 = \varrho_k^2 + \varrho_g^2 - 2\varrho_k \varrho_g \cos(\vartheta_{kg})$, $\vartheta_{kg} = \vartheta_k - \vartheta_g + 2\pi((k-g)/N - m/M)$, $\varrho_k = |\zeta_k|$, $\vartheta_k = \arg(\zeta_k)$. Очевидно, любое решение $\zeta_k(t)$ уравнений (3.1) дает решение $z_n(t)$ уравнений (2.1). В частности, твердотельное вращение вихревой системы описывается решением: $\zeta_k(t) \equiv 1$. В переменных ϱ_k, ϑ_k уравнения (3.1) принимают вид:

$$\begin{aligned} \dot{\varrho}_k &= -\frac{\Gamma}{2\pi R^2} \sum_{g=0, g \neq k}^{K-1} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1 - e_{kn_g}}{\wp_{kg}^2} \varrho_g \sin \vartheta_{kg}, \\ \dot{\vartheta}_k &= -\Omega_N + \frac{\Omega_M}{\varrho_k^2} + \frac{\Gamma}{2\pi R^2} \sum_{g=0, g \neq k}^{K-1} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1 - e_{kn_g}}{\wp_{kg}^2} \left(1 - \frac{\varrho_g}{\varrho_k} \cos \vartheta_{kg}\right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Численное решение уравнений (3.2) с начальными условиями (2.2) при $\epsilon = 10^{-2}$ показано сплошной линией 1 на рис. 1, 1а. Относительная траектория решения в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью Ω_N показана сплошной линией 1 на рис. 2. Видно, что существует достаточно протяженный интервал интегрирования на котором численные решения полных уравнений (2.1) и уравнений (3.2) совпадают с высокой точностью. Следовательно можно ожидать, что наблюдаемые решения допускают упрощенное описание.

4. Развитие симметричных возмущений в системе восьми вихрей

Простейший из возможных случаев возникает при рассмотрении правильной полигональной системы восьми точечных вихрей. Система уравнений (2.1) имеет интеграл $I = \sum_{n=0}^{N-1} |z_n|^2$, откуда при $K = 2, M = 4$ для редуцированной системы следует интеграл:

$$\varrho_0^2 + \varrho_1^2 = 2. \quad (4.1)$$

Исключение неизвестной ϱ_1 приводит уравнения (3.2) к системе с неизвестными $\varrho_0, \vartheta_0, \vartheta_1$, в которой независимыми оказываются только два уравнения. Вследствие инвариантности уравнений (3.2) по отношению к поворотам, независимыми переменными должны быть модуль решения и угол, соответствующий разности фаз компонент решения: $\varphi = \vartheta_0 - \vartheta_1$. Можно показать, что из уравнений (3.2), записанных для системы точечных вихрей при $K = 2, M = 4$ следуют уравнения нелинейного осциллятора:

$$\begin{aligned} \frac{d\varrho_0^2}{dt} &= \frac{4\Gamma}{\pi R^2} \frac{\sin(4\varphi)}{\mathcal{D}}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\Gamma}{4\pi R^2} \frac{3(v^{-3} + v^2) + 11(v^{-2} + v) + 14(1 + v^{-1}) \cos(4\varphi)}{\varrho_0^2 \mathcal{D}}, \\ \mathcal{D} &= v^2 + v^{-2} + 2 \cos(4\varphi), \quad v = 1 - 2/\varrho_0^2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

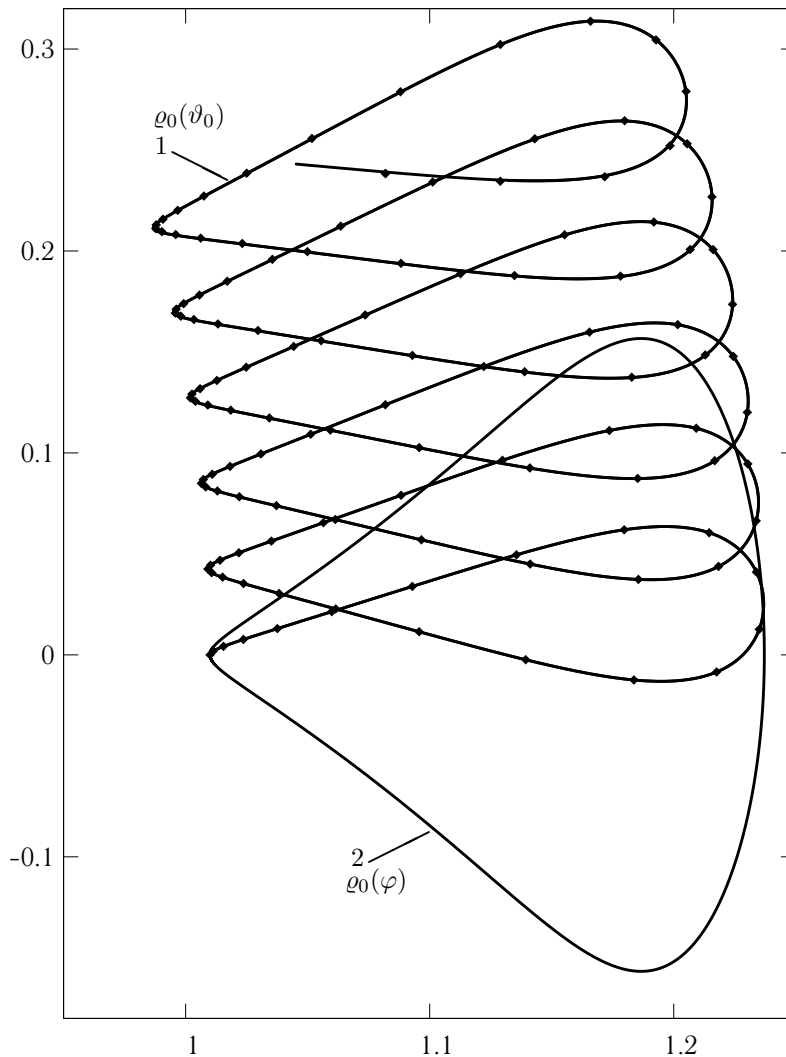


Рис. 2. Траектории возмущенного решения.

Видно, что в уравнения (4.2) неизвестная ϱ_0 входит только как ϱ_0^2 , что позволяет понизить степень рациональных функций в правой части уравнений (4.2). Замена переменных $(t, \varphi) \rightarrow (\varrho_0^2, \cos(4\varphi))$ приводит к линейному неоднородному уравнению первого порядка, определяющему форму траектории решения.

Уравнения (4.2) с начальными условиями $\varrho_0(0) = 1.01, \varphi(0) = 0$ интегрировались численно. Решение показано на рис. 3, За. Видно, что реализация режима усиления или ослабления возмущений определяется знаком фазы φ . Фаза решения является антисимметричной функцией времени. Вариация фазы ограничена.

Траектория системы (4.2) в фазовой плоскости (ϱ_0, φ) (кривая 2 на рис. 2) оказывается замкнутой. Из (4.1) следует, что максимумам ϱ_0 соответствуют минимумы ϱ_1 , моментам когда ϱ_0 достигает максимума, как видно и из уравнений (4.2) соответствует значение фазы $\varphi = 0$. Такие состояния при визуализации решения выглядят как моменты образования пар.

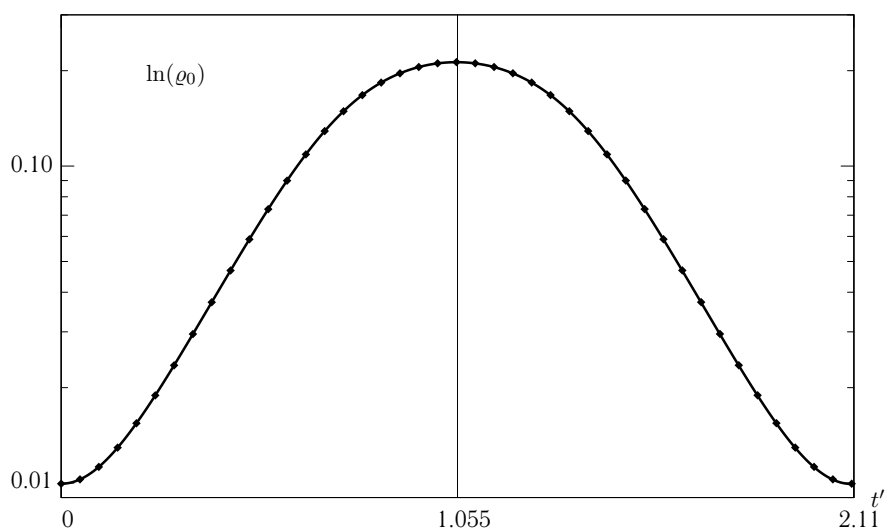


Рис. 3. Амплитуда решения в системе восьми точечных вихрей.

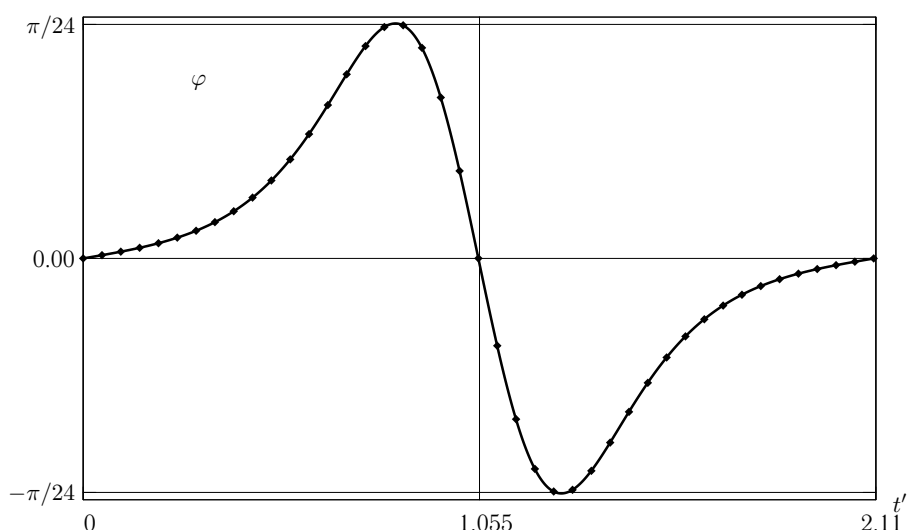


Рис. 3а. Фаза решения в системе восьми точечных вихрей.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что нелинейные колебания представляют собой особый режим развития неустойчивых возмущений твердотельного вращения правильной полигональной конфигурации вихрей. Представляется, что при реализации такого режима развития возмущений стохастизация системы связана со взаимодействием решений, соответствующих различным типам частной симметрии, описываемых уравнениями (3.2) при различных значениях K .

В заключение автор выражает благодарность профессору В. Я. Рудяку за полезные обсуждения и постоянное внимание к работе.

Список литературы

- [1] Havelock T. H. *The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation* // Philos. Magazine and J. Sci., 1931, V. 11, No. 70, p. 617–633.
- [2] Куракин Л. Г., Юдович В. И. *Устойчивость стационарного вращения правильного вихревого многоугольника*. В сб. «Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей» (ред. Борисов А. В., Мамаев И. С., Соколовский М. А.). НИЦ «РХД», 2003, 704 с.
- [3] Рудяк В. Я., Борд Е. Г., Кранчев Д. Ф. *Стохастические свойства системы точечных вихрей* // Письма в журн. техн. физики, 2004, т. 30, вып. 6, с. 20–24.
- [4] Рудяк В. Я., Борд Е. Г., Кранчев Д. Ф. *Динамический хаос в полигональной системе точечных вихрей* // Докл. АН высш. школы, 2004, Н. 2(3), с. 48–57.
- [5] Борд Е. Г., Кранчев Д. Ф. *Линейная устойчивость системы гауссовских вихрей* // Сиб. журн. индустр. матем., 2005, Т. VIII, Н. 3(23), с. 8–17.
- [6] Рудяк В. Я., Кранчев Д. Ф. *Обобщенная К-энтропия и энтропия Гиббса системы точечных вихрей* // Письма в журн. техн. физики, 2006, Т. 32, вып. 18, с. 58–64.
- [7] Lewis D., Ratiu T. *Rotating n-gon/kn-gon vortex configurations* // J. Nonlin. Sci., 1996, V. 6, p. 385–414.