

Ю. А. Сагдеева, С. П. Копысов, А. К. Новиков

**ВВЕДЕНИЕ В МЕТОД КОНЕЧНЫХ
ЭЛЕМЕНТОВ**

ИЖЕВСК
2011

Министерство образования и науки Российской Федерации

ГОУВПО «Удмуртский государственный университет»

Математический факультет

Ю. А. Сагдеева, С. П. Копысов, А. К. Новиков

ВВЕДЕНИЕ В МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Методическое пособие

Ижевск

«Удмуртский университет»

2011

УДК 519.62(07)
ББК 22.193.22я7
С 138

Печатается по решению учебно-методического совета УдГУ

Ю. А. Сагдеева, С. П. Копысов, А. К. Новиков

С 138 Введение в метод конечных элементов: метод. пособие.

Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет». 2011. 44 с.

Методическое пособие предназначено магистрам первого курса математического факультета по направлению «Прикладная математика и информатика», изучающим годовой курс «Проекционно-сеточные методы». Теоретическая часть пособия охватывает разделы курса, читаемые в первом семестре, содержит примеры постановок задач и лабораторных работ.

УДК 517.9

ББК 22.161.6

© Ю. А. Сагдеева, С. П. Копысов, А. К. Новиков, 2011

© Изд-во «Удмуртский университет», 2011

Содержание

Предисловие	6
Основные обозначения и сокращения	3
1 Проекционный и вариационный подходы	4
2 Основные понятия МКЭ	8
3 Одномерный элемент с кусочно-линейными базисными функциями	10
4 Пример	12
5 Реализация МКЭ в одномерном случае	16
6 Линейный треугольный элемент	17
7 Аппроксимация векторных величин	20
8 Применение треугольных конечных элементов в задаче теплопроводности	21
9 Применение четырехугольных конечных элементов в задаче упругости	27
10 Примеры задач	34
11 Примеры заданий к лабораторным работам	35
Литература	39

Предисловие

Настоящее издание является частью учебно-методических разработок, проводимых на кафедре «Вычислительная механика». Цель издания — привести краткие сведения о методе конечных элементов, достаточные для решения задач, на примере ознакомить студентов с этапами решения методом конечных элементов, подготовить базу для выполнения лабораторных работ по курсу «Проекционно-сеточные методы».

В пособии приводятся основные идеи метода и способы их реализации. Оно предназначено для первоначального ознакомления с методом. Материал, представленный в пособии, традиционно входит в учебники и монографий по проекционно-сеточным методам. Однако в большинстве книг значительное внимание уделяется теоретическому обоснованию. Данное пособие носит практический характер. Имеющиеся в монографиях программы для метода конечных элементов в основном опираются на язык Фортран. Представленные в пособии алгоритмы для программной реализации метода не привязаны ни к одному из языков программирования.

Издание состоит из 11 разделов и списка литературы. В первом разделе кратко изложены проекционный и вариационный подходы к методу конечных элементов, далее рассматриваются основные понятия метода конечных элементов для одномерных и двумерных задач. Подробно показывается пример решения одномерного дифференциального уравнения методом Галеркина. В разделе шесть описывается линейный треугольный элемент и введена естественная система координат. Далее показано представление векторных величин в методе конечных элементов. Приведены алгоритмы для программирования метода конечных элементов для одномерных и двумерных (треугольный и четырехугольный) конечных элементов.

Пособие содержит образцы постановок лабораторных работ и практических заданий, выполняемых в ходе курса.

Методическое пособие может быть использовано при написании лабораторных, курсовых и дипломных работ по методу конечных элементов.

Основные обозначения и сокращения

K — глобальная матрица жесткости (матрица СЛАУ);
 k^e — элементная матрица;
 N_i — функция формы, базисная функция;
 u — неизвестная функция; перемещение;
 ϕ_i, ψ_i — базисные функции;
 L — линейный дифференциальный оператор;
 \bar{u} — приближенное решение;
 R — невязка;
 w_i — весовые функции;
 e — конечный элемент;
 V — область, на которой решается задача;
 Γ, S — граница области;
 $u_i = u(x_i, y_i, z_i)$ — значение функции в узле сетки;
 α_i — неизвестные коэффициенты в разложении $\bar{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i N_i$;
 J — матрица Якоби;
 L_i — L -координаты;
 T — температура;
 $\varepsilon = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy})^T$ — вектор деформаций в плоском случае;
 $\sigma = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})^T$ — вектор напряжений в плоском случае;
 $u = (u_x, u_y)$ — вектор перемещений.

МКЭ — метод конечных элементов;
КЭ — конечный элемент;
ЕСК — естественная система координат;
ЛСК — локальная система координат;
СЛАУ — система линейных алгебраических уравнений.

1 Проекционный и вариационный подходы

Под термином «метод конечных элементов» (МКЭ) подразумевается семейство методов, основанных на проекционных методах решения уравнений или вариационных методах минимизации функционалов. Более подробно вопросы теории и практики МКЭ можно найти в литературе, представленной в списке в конце пособия. Здесь же приведем ключевые моменты.

Проекционные методы. Основные понятия. Поставим задачу о приближенном решении дифференциального уравнения

$$F(u) = 0, \quad (1)$$

где оператор $F : E \rightarrow H$ и E, H — два бесконечномерных нормированных пространства. Пусть в пространствах E и H имеются базисы в следующем смысле: существуют последовательности $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$, такие что для любых $x \in E$ и $y \in H$ найдутся числовые последовательности $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, такие что $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n$, $y = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \psi_n$ (под суммой рядов понимается предел по нормам пространств E или H частичных сумм этих рядов). Введем последовательности конечномерных подпространств E_n и H_n , натянутых на первые n векторов, и обозначим через P_n и Q_n операторы проектирования на эти пространства ($E_n = P_n E$, $H_n = Q_n H$).

Суть проекционных методов состоит в замене уравнения (1) приближенным конечномерным уравнением

$$F_n(\bar{u}) = 0, \quad (2)$$

где $\bar{u} \in E_n$, $F_n : E_n \rightarrow H_n$, $F_n = Q_n F$. Выбор разных базисов ϕ_n , ψ_n и разных проекторов приводит к разным проекционным методам.

В *методе Галеркина-Петрова* решение уравнения (1) представляется в виде такой линейной комбинации n базисных функций пространства E_n : $\bar{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i$, что функция $F(\sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i)$ ортогональна функциям базиса ψ_1, \dots, ψ_n . Если бы функция $F(\bar{u})$ была ортогональна всем функциям базиса H , то в сепарабельных пространствах она должна была бы обращаться в нуль, и тогда функция \bar{u} была бы точным решением (1). Поскольку вместо бесконечного набора базисных функций мы ограничиваемся только n функциями ϕ_i и ψ_i полученное решение будет приближенным. Условия ортогональности $F(\sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i) \perp \psi_j$ представляют собой n уравнений относительно неизвестных $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Выражая из полученной системы числовые коэффициенты α_i найдем представление \bar{u} .

В методе *Галлеркина* пространства E_n и H_n совпадают, то есть $\phi_i = \psi_i$. Запишем общую схему метода Галлеркина построения приближенного решения уравнения $F(u) = f - Lu = 0$ или $Lu = f$:

1. Выбор базиса $\phi_i, i = \overline{1, n}$;
2. Приближенное решение ищется в виде $\bar{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i$;
3. Коэффициенты α_i определяются из решения СЛАУ, полученной из условия ортогональности $F(\bar{u}) = f - L\bar{u}$ к ϕ_1, \dots, ϕ_n

$$(f - L\bar{u}, \phi_i) = 0, \quad (L\bar{u}, \phi_i) = (f, \phi_i), \quad i = \overline{1, n}$$

$$\text{СЛАУ} \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j (L\phi_j, \phi_i) = (f, \phi_i), \quad i = \overline{1, n} \quad (3)$$

В литературе встречается другой, «инженерный» подход к проекционным методам.

Рассмотрим уравнение $Lu = f$ с граничными условиями $M(u) = g$. В *методе взвешенных невязок* решение аппроксимируется набором функций $N_i(x)$

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i N_i(x),$$

где α_i — неизвестные числовые параметры, $N_i(x)$ — линейно-независимые функции из полной последовательности (также требуют, чтобы эти функции удовлетворяли граничным условиям и были нужной степени гладкости).

Обозначим невязку уравнения через $R = f - L\bar{u}$. Поскольку решение \bar{u} приближенное, $R = f - L\bar{u} \neq 0$, а для точного решения $R = 0$. Стремится, чтобы ошибка равнялась нулю в среднем, полагая равными нулю интегралы, взятые от невязки с некоторыми весовыми функциями w_i

$$\int_V R w_i dV = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

то есть, чтобы равнялось нулю скалярное произведение в пространстве L_2

$$(R, w_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Таким образом, снова приходим к системе (3), в которой $\phi_i = w_i = N_i$. Выбирая разные весовые функции w_i будем получать разные проекционные методы.

Вариационные принципы. Во многих случаях задачу решения дифференциального уравнения можно заменить равносильной задачей об отыскании функции, сообщающей некоторому функционалу наименьшее или наибольшее значение. Задачи такого типа называются вариационными. Для некоторых физических задач более естественной является не дифференциальная постановка, а формулировка в виде вариационного принципа. Например, для получения равновесия механических систем требуется минимизация потенциальной энергии системы. Вариационный принцип обычно формулируется в виде задачи минимизации интеграла от некоторой функции. Естественный вариационный принцип существует не для всех задач, но очень часто для одной и той же задачи может быть сформулировано несколько вариационных принципов. Применение вариационных принципов порождает ослабленную формулировку, когда соответствующее дифференциальное уравнение выполняется не в каждой точке тела, а в среднем, то есть в некотором интегральном смысле.

Определение 1. Оператор $L : H \rightarrow H$ (H — гильбертово пространство) называется симметричным, если $(Lu, v) = (u, Lv)$, $u, v \in H$.

Определение 2. Симметричный оператор L называется положительно определенным, если существует константа $C > 0$ такая, что $(Lu, u) \geq C\|u\|^2$.

Определение 3. Пусть функционал $F : Y \rightarrow R$ и $\Phi(t) = F[y_0 + th]$ — функция вещественной переменной. Если существует производная

$$\Phi'(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt}F[y_0 + th]|_{t=0}, \quad \forall h \in Y,$$

то эта производная называется слабой вариацией или просто вариацией функционала F в точке y_0 и обозначается $\delta V(y_0, h)$.

Теорема 1 (необходимое условие экстремума). Пусть $y_0 \in Y$ — точка экстремума функционала $F(y)$ и существует слабая вариация $\delta F(y_0)$. Тогда $\delta F(y_0) = 0$.

Определение 4. Квадратичный функционал $F(u) = (Lu, u) - 2(u, f)$ для положительно определенного оператора L называется функционалом энергии.

Теорема 2. Чтобы элемент $u_0 \in D(L)$ из области определения оператора L доставлял минимум функционалу энергии необходимо и достаточно, чтобы этот элемент удовлетворял уравнению $Lu_0 = f$ (причем такой элемент будет единственным).

Таким образом, для определенного класса операторов задача минимизации функционала и задача решения уравнения $Lu = f$ эквивалентны. Может случиться, что оператор определен на недостаточно широком пространстве, в таком случае задача о минимизации функционала может не иметь решения, которое однако будет существовать, если оператор должным образом расширить. Для положительно определенного оператора всегда возможно такое расширение, при котором задача о минимуме функционала энергии имеет решение.

Для каждого положительно-определенного оператора можно ввести *энергетическое пространство*.

Определение 5. Пусть $L : H \rightarrow H$ положительно определенный оператор, действующий в полном гильбертовом пространстве H . Построим новое пространство с элементами из области определения оператора $D(L)$ и скалярным произведением $[u, v]_L = (Lu, v)$. Если оно окажется неполным, то дополним его. Дополненное пространство H_L называется *энергетическим*.

Минимум функционала далее будем искать в энергетическом пространстве.

Определение 6. Элемент из энергетического пространства $u_0 \in H_L$, доставляющий минимум функционала энергии, называется *обобщенным решением уравнения $Lu = f$* .

Метод Рунца минимизации функционала. Рассмотрим один из методов поиска приближенного решения задачи минимизации. Метод Рунца (Релея-Рунца) состоит в том, чтобы искать минимум функционала в вариационной задаче на конечномерном пространстве H_n . Элементы $v \in H_n$ называются *пробными функциями*. Аппроксимацией Рунца называется функция $u^h \in H_n$, минимизирующая F на подпространстве H_n

$$F(u^h) \leq F(v), \quad \forall v \in H_n.$$

Основные шаги метода Рунца:

1. Выбор пространства H_n и базиса $\phi_i, i = \overline{1, n}$;
2. Приближенное решение имеет вид $u^h = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i$;
3. Коэффициенты α_i находятся из условий минимизации функционала $F(u^h)$ по параметрам α_i , которые приводят к СЛАУ

$$\frac{\partial F(u^h)}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}$$

относительно коэффициентов α_i .

Аппроксимации, получаемые методами Рунца и Галеркина, тождественны, если оператор симметричен. Метод Галеркина может использоваться вне зависимости от того, можно ли найти вариационную формулировку, и, следовательно, имеет более широкую область применения.

Матрицы СЛАУ, получаемые в методе Галеркина и методе Рунца, оказываются заполненными, то есть большинство элементов этих матриц отличны от нуля. Решение систем с заполненными матрицами делает оба метода затратными. Поэтому желательно выбрать базисные функции таким образом, чтобы коэффициенты матрицы и правая часть системы легко вычислялись, а сама система была разреженной. Такой выбор базисных функций приводит к методу конечных элементов (МКЭ).

2 Основные понятия МКЭ

Метод конечных элементов — это численная процедура решения задач, сформулированных в виде дифференциального уравнения или вариационного принципа. Метод конечных элементов отличается от классических методов Рунца и Галеркина тем, что аппроксимирующая функция является линейной комбинацией непрерывных кусочно-гладких финитных функций. Финитные функции отличны от нуля только в заданном интервале. В МКЭ под такими интервалами подразумеваются конечные элементы, на которые разбивается область V .

Термин метод конечных элементов, в действительности, определяет широкий спектр вычислительных технологий в соответствии с некоторыми общими свойствами. Процесс конечно-элементного анализа включает определенную последовательность шагов. Перечислим эти шаги.

1. Дискретизация области: построение сетки, задание свойств (материала) элементов. Область, на которой решается задача, аппроксимируется (покрывается) непересекающимися подобластями простого типа, которые называются конечными элементами (КЭ). Множество элементов, на которые разбита область, называется конечно-элементной сеткой. Вершины КЭ называются узлами. Узлы предназначены для описания геометрии элемента и для задания компонент решения (неизвестная величина задается в узлах). Узлы могут быть внешними и внутренними. Внешние узлы лежат на границе КЭ и используются для соединения элементов друг с другом. Также узлы могут располагаться между угловыми узлами. КЭ может иметь и внутренние узлы, такие элементы обеспечивают более точное описание искомых функций. Компоненты решения в узле называются *степенями*

свободы. В зависимости от рассматриваемых задач число степеней свободы в узле различно. Например, если рассматривается задача теплопроводности, в каждой точке ищется одно значение температуры — одна степень свободы. А если рассматривается двумерная задача упругости относительно неизвестных перемещений, то число компонент будет равно двум, так как перемещение величина векторная $u = (u_x, u_y)$. В качестве степеней свободы могут фигурировать как узловые значения неизвестной функции, так и ее производные по пространственным координатам в узлах. Кроме того необходимо задать свойства материала, из которого изготовлена конструкция или КЭ. Например, для изотропных тел при решении задач теории упругости необходимо знать такие константы, как модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала, при решении задачи теплопроводности — коэффициент теплопроводности.

2. Выбор аппроксимирующих (базисных) функций. Чаще всего базисные функции выбираются в виде полиномов. Поэтому пространство, на котором ищется решение, является пространством кусочно-полиномиальных функций. Базисные функции могут иметь различный порядок: линейный, квадратичный, кубичный и т.д.

3. Формирование СЛАУ с учетом вкладов от элементов и узлов, введение граничных условий в систему уравнений. Например, если задача решается с помощью метода Галеркина (метода взвешенных невязок) формируются интегралы от произведения невязки на весовые функции, которые затем приравниваются к нулю. Если решается задача в вариационной постановке с помощью метода Рунта минимизации функционала, то СЛАУ получается после приравнивания к нулю производных функционала. Интегралы по области разбиваются на интегралы по элементам

$$\int_V w_l R dV = \sum_{e=1}^M \int_{V^e} w_l R dV,$$

вычисляются элементные матрицы и элементные векторы, из которых формируются глобальная матрица и вектор правых частей системы.

4. Решение системы уравнений.

5. Определение расчетных величин в элементах. Этими величинами обычно являются производные от неизвестной функции (например, деформации, напряжения, тепловые потоки, скорости).

Точное решение дифференциального уравнения при подстановке в это дифференциальное уравнение обращает его в тождество в каждой точке. Решение МКЭ предполагает, что приближенное решение \bar{u} будет удовлетворять дифференциальному уравнению в узлах сетки $\bar{u}(x_i) = u(x_i) = u_i$.

3 Одномерный элемент с кусочно-линейными базисными функциями

Рассмотрим как определяются кусочно-линейные базисные функций при решении одномерной задачи на отрезке $V = [a, b]$. Разобьем этот отрезок узлами x_1, \dots, x_n на конечные элементы $e_k = (x_k, x_{k+1})$, $k = 1, \dots, n-1$, $h_k = x_{k+1} - x_k$ — длина e_k (*шаг сетки*). Каждому внутреннему узлу x_i ставится в соответствие кусочно-линейная функция $N_i(x)$

$$N_i(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{i-1} \\ \frac{x-x_{i-1}}{h_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1}-x}{h_i}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & x \geq x_{i+1} \end{cases} \quad i = \overline{2, n-1}.$$

Для граничных узлов x_1, x_n базисные функции имеют вид

$$N_1(x) = \begin{cases} \frac{x_2-x}{h_1}, & x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0, & x \geq x_2 \end{cases}, \quad N_n(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{n-1}}{h_{n-1}}, & x_{n-1} \leq x \leq x_n \\ 0, & x \leq x_{n-1}. \end{cases}$$

Базисные функции на элементе также называются функциями формы. Например, на рис. 1 представлены функции формы на отрезке $[0, 1]$ для равномерной сетки из трех элементов. Аппроксимируемая функция представляется в виде $\bar{u} = \sum_i \alpha_i N_i(x)$, где коэффициенты α_i находятся из решения

СЛАУ (3).

Важнейшими являются следующие свойства функций форм:

1. Функция N_i равна единице в узле x_i и нулю во всех других узлах.
2. Функция N_i отлична от нуля только для элементов, содержащих узел x_i .

Выясним физический смысл коэффициентов α_i . Рассмотрим один конечный элемент $e = [x_i, x_j]$. На элементе e ненулевыми будут две базисные функции $N_i = \frac{x_j-x}{h_i}$ и $N_j = \frac{x-x_i}{h_i}$ (см. рис. 2, пунктиром показаны части функций, лежащих вне элемента), поэтому

$$\bar{u}^e = \alpha_i N_i + \alpha_j N_j = \alpha_i \frac{x_j - x}{h_i} + \alpha_j \frac{x - x_i}{h_i} = \frac{\alpha_i x_j - \alpha_j x_i}{h_i} + \frac{\alpha_j - \alpha_i}{h_i} x.$$

Решение должно удовлетворять уравнению в узлах, то есть $\bar{u}^e(x_i) = u_i$, $\bar{u}^e(x_j) = u_j$. Если подставить x_i и x_j в выражение для \bar{u}^e получим $\bar{u}^e(x_i) =$

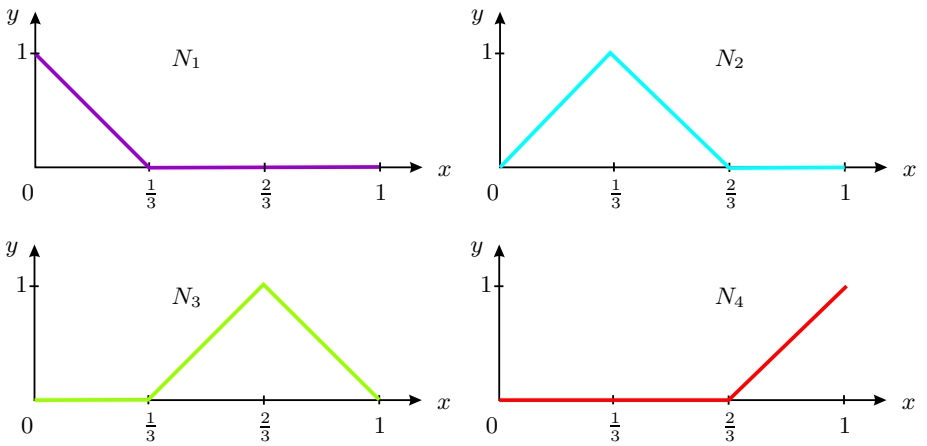


Рис. 1: Базисные функции N_i для области из трех элементов

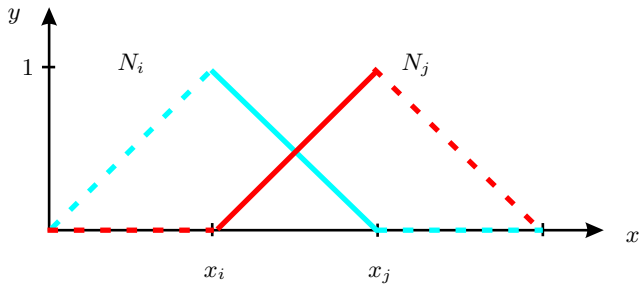


Рис. 2: Базисные функции N_i, N_j элементе $[x_i, x_j]$

$\alpha_i = u_i$, $\bar{u}^e(x_j) = \alpha_j = u_j$. То есть при таком выборе базисных функций, когда базисная функция равна единице в одном узле и нулю во всех других узлах, неизвестные коэффициенты α_i являются значениями функции в узлах $\alpha_i = u_i$, то есть $\bar{u} = \sum_i u_i N_i(x)$.

4 Пример

Решить уравнение методом конечных элементов на основе метода Галеркина

$$y'' + y = 1, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0.$$

Прежде всего запишем интегральную формулировку для данного уравнения с помощью метода взвешенных невязок, а именно метода Галеркина. Разбиваем отрезок на $n - 1$ элементов с числом узлов n . Число базисных функций равно n . Невязка

$$R = f - L\bar{y} = 1 - \frac{d^2\bar{y}}{dx^2} - \bar{y}.$$

Запишем сначала условие равенства нулю невязки в общей форме

$$\int_0^1 w_l R dx = \int_0^1 w_l \left(1 - \frac{d^2\bar{y}}{dx^2} - \bar{y}\right) dx = 0$$

и, интегрируя по частям, понизим порядок производной под знаком интеграла

$$\left(w_l \frac{d\bar{y}}{dx}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{dw_l}{dx} \frac{d\bar{y}}{dx} dx + \int_0^1 w_l \bar{y} dx - \int_0^1 w_l dx = 0.$$

Понижение порядка дифференцирования под знаком интеграла — обычная процедура за счет которой можно ослабить требования на гладкость базисных функций. После интегрирования по частям от функций требуется только непрерывность базисных и весовых функций.

В методе Галеркина весовая функция выбирается равной базисной $w_l = N_l$, $\bar{y} = \sum_{m=1}^n \alpha_m N_m$. В первом слагаемом заменять \bar{y} на сумму не будем (это слагаемое уйдет позже за счет граничных условий)

$$\int_0^1 \frac{dN_l}{dx} \frac{d\left(\sum_{m=1}^n \alpha_m N_m\right)}{dx} dx - \int_0^1 N_l \left(\sum_{m=1}^n \alpha_m N_m\right) dx =$$

$$= \left(N_l \frac{d\bar{y}}{dx} \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 N_l dx.$$

Кусочно-линейные базисные функции удовлетворяют требованию гладкости, так как они непрерывны. Слева выносим коэффициенты α_m за знак интеграла. Получим

$$\sum_{m=1}^n \alpha_m \left(\int_0^1 \frac{dN_l}{dx} \frac{dN_m}{dx} dx - \int_0^1 N_l N_m dx \right) = \left(N_l \frac{d\bar{y}}{dx} \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 N_l dx,$$

где $l = 1, 2, \dots, n$. Вводя обозначения

$$u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T = (y_1, \dots, y_n)^T,$$

$$k_{lm} = \int_0^1 \left(\frac{dN_l}{dx} \frac{dN_m}{dx} - N_l N_m \right) dx, \quad 1 \leq l, m \leq n,$$

$$f_l = \left(N_l \frac{d\bar{y}}{dx} \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 N_l dx, \quad 1 \leq l \leq n,$$

получим СЛАУ

$$Ku = f, \quad K = [k_{lm}], \quad f = [f_l].$$

Вспомним, что входящие в аппроксимирующие уравнения определенные интегралы могут быть получены простым суммированием их вклада по каждому элементу

$$\int_V w_l R dV = \sum_{e=1}^M \int_{V^e} w_l R dV.$$

Вклад интеграла по элементу e с узлами i и j можно вычислить в общей форме. Причем формула для однотипных элементов будет одна и та же.

На элементе $V^e = (x_i, x_j)$ отличными от нуля функциями будут только функции N_i, N_j (рис. 2), то есть, если $l \neq i, j$, то $N_l = 0$ на (x_i, x_j) . Оценим вклад произвольного элемента в сумме $k_{lm} = \sum_{e=1}^M k_{lm}^e$. Получим

$$k_{lm}^e = 0, \quad \text{если } l, m \neq i, j,$$

$$k_{ij}^e = k_{ji}^e = \int_{x_i}^{x_j} \left(\frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} - N_i N_j \right) dx,$$

$$k_{ii}^e = k_{jj}^e = \int_{x_i}^{x_j} \left(\left(\frac{dN_i}{dx} \right)^2 - (N_i)^2 \right) dx,$$

$$\begin{aligned}
N_i &= \frac{x_j - x}{h_i}, & N_j &= \frac{x - x_i}{h_i}, & \frac{dN_i}{dx} &= -1/h_i, & \frac{dN_j}{dx} &= 1/h_i. \\
\int_{V^e} \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx &= -\frac{1}{(h_i)^2} \int_{V^e} dx = -\frac{1}{h_i}, & \int_{V^e} \left(\frac{dN_i}{dx} \right)^2 dx &= \frac{1}{h_i}. \\
\int_{V^e} N_i N_j dx &= \int \frac{x_j - x}{h_i} \frac{x - x_i}{h_i} dx = \frac{h_i}{6}, & \int_{V^e} N_i N_i dx &= \frac{h_i}{3}, \\
k_{ii} = k_{jj} &= \frac{1}{h_i} - \frac{h_i}{3}, & k_{ij} = k_{ji} &= -\frac{1}{h_i} - \frac{h_i}{6}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Элементная матрица для элемента (x_i, x_j) имеет вид

$$K^e = \begin{pmatrix} 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \dots & & 0 \\ 0 & k_{ii} & k_{ij} & 0 \\ 0 & k_{ji} & k_{jj} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_i} - \frac{h_i}{3} & -\frac{1}{h_i} - \frac{h_i}{6} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h_i} - \frac{h_i}{6} & \frac{1}{h_i} - \frac{h_i}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислив компоненты матрицы элемента простым суммированием по всем элементам, получим матрицу K .

Процесс формирования глобальной матрицы системы K и глобального вектора правых частей в методе конечных элементов называется *ансамблированием (или сборкой)*. Матрицу системы принято называть *матрицей жесткости*.

Запишем вид системы, например, для трех элементов и четырех узлов. Предположим, что все элементы имеют равную длину ($h^e = h$), тогда матрица жесткости приобретает вид

$$K = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} - \frac{h}{3} & -\frac{1}{h} - \frac{h}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h} - \frac{h}{6} & 2\left(\frac{1}{h} - \frac{h}{3}\right) & -\frac{1}{h} - \frac{h}{6} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h} - \frac{h}{6} & 2\left(\frac{1}{h} - \frac{h}{3}\right) & -\frac{1}{h} - \frac{h}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{h} - \frac{h}{6} & \frac{1}{h} - \frac{h}{3} \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

Вычислим вклад элемента (x_i, x_j) в вектор правых частей $f_l = \sum_{e=1}^M f_l^e$ (отличными от нуля на элементе (x_i, x_j) будут вклады при $l = i, l = j$)

$$\int_{x_i}^{x_j} N_i dx = \int_{x_i}^{x_j} \frac{x_j - x}{h_i} dx = -\frac{1}{h_i} \frac{(x - x_j)^2}{2} \Big|_{x_i}^{x_j} = \frac{h_i}{2},$$

$$\int_{x_i}^{x_j} N_j dx = \int_{x_i}^{x_j} \frac{x - x_i}{h_i} dx = \frac{1}{h_i} \frac{(x - x_i)^2}{2} \Big|_{x_i}^{x_j} = \frac{h_i}{2}.$$

Заметим, что в точке 0 и 1 не равны нулю только базисные функции $N_1(0) = 1$ и $N_n(1) = 1$. Элементные векторы правых частей для первого элемента, для внутреннего элемента (x_i, x_j) ($x_i, x_j \neq a, b$), и для последнего элемента имеют вид (ненулевые значения стоят в позиции i, j)

$$f^1 = \begin{pmatrix} -\frac{d\bar{y}}{dx}(0) - \frac{h_1}{2} \\ -\frac{h_1}{2} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f^e = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ -\frac{h_i}{2} \\ -\frac{h_i}{2} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ -\frac{h_{n-1}}{2} \\ \frac{d\bar{y}}{dx}(1) - \frac{h_{n-1}}{2} \end{pmatrix}.$$

Для примера из трех элементов после сложения всех элементных векторов, получим глобальный вектор вида

$$f = \begin{pmatrix} -\frac{d\bar{y}}{dx}(0) - \frac{h_1}{2} \\ -\frac{h_1}{2} - \frac{h_2}{2} \\ -\frac{h_2}{2} - \frac{h_3}{2} \\ \frac{d\bar{y}}{dx}(1) - \frac{h_3}{2} \end{pmatrix}.$$

Значения производных в первом и последнем элементе вектора правых частей неизвестны, но далее вместо первого и последнего уравнений используем уравнения граничных условий $y(0) = y_1 = 1$, $y(1) = y_4 = 0$. Для симметричной матрицы системы условия Дирихле следует вносить следующим образом. Отметим, что до внесения граничных условий получаемая матрица системы вырождена.

Учет граничных условий Дирихле с сохранением симметрии матрицы системы.

Пусть в МКЭ получена СЛАУ $Ku = f$ с симметричной матрицей K и необходимо учесть условие Дирихле $u_s = t_0$. Преобразование системы уравнений представляет собой двухшаговую процедуру. Пусть, например, известно значение $u_5 = t_0$; преобразование сводится тогда к следующему:

1. Все коэффициенты пятой строки матрицы, за исключением диагонального, приравниваются к нулю $K_{5j} = 0$ при $j = \overline{1, n}$ и $j \neq 5$. Диагональный член приравнивается к единице $K_{55} = 1$. Пятая компонента f_5 вектора f заменяется на значение $u_5 = t_0$.

2. Из компонент вектора правых частей, кроме пятой компоненты, вычитается произведение пятого столбца матрицы на значение t , затем пя-

тый столбец матрицы (кроме диагонального элемента) обнуляется: $f_j = f_j - K_{j5}t$, $K_{j5} = 0$, $j = \overline{1, n}$, $j \neq 5$.

5 Реализация МКЭ в одномерном случае

Используемые данные: n — число узлов; $m = n - 1$ — число элементов; координаты узлов — массив $x = (x_i)$, $i = \overline{1, n}$; элементная матрица $k = (k_{ij})$ размера 2×2 ; элементный вектор правых частей $b = (b_i)$, $i = \overline{1, n}$; глобальная матрица жесткости $A = (a_{ij})$ размера $n \times n$; вектор правых частей $f = (f_i)$, $i = \overline{1, n}$; вектор решения $u = (u_i)$, $i = \overline{1, n}$; c , d — координаты начала и конца отрезка, на котором рассматривается уравнение; $u_s = t$ — граничное условие Дирихле.

Алгоритм

1. Вычисляем координаты узлов:
Шаг сетки $h = (d - c)/m$;
Для $i = 1, 2, \dots, n$ $x[i] = c + (i - 1)h$;
2. В цикле по элементам: Для $i = 1, 2, \dots, n - 1$
 - 2.1 Формируем элементную матрицу k . (Для примера из предыдущего параграфа используем формулы (4)).
 - 2.2 Проводим процесс сборки — формируем глобальную матрицу жесткости $a_{ii} = a_{ii} + k_{11}$, $a_{ii+1} = a_{ii+1} + k_{12}$, $a_{i+1i} = a_{i+1i} + k_{21}$, $a_{i+1i+1} = a_{i+1i+1} + k_{22}$.
 - 2.3 Формируем элементный вектор правых частей b .
 - 2.4 Проводим процесс сборки — формируем глобальный вектор правых частей $f_i = f_i + b_1$, $f_{i+1} = f_{i+1} + b_2$.
3. Вносим граничное условие Дирихле $u_s = t$ в матрицу и вектор правых частей
 - 3.1 $a_{ss} = 1$; $f_s = t$;
 - 3.2 Для $k = 1, \dots, n$, $k \neq s$

$$\left. \begin{aligned} &\{ a_{sk} = 0; \\ &f_k = f_k - a_{ks} \cdot t; \\ &a_{ks} = 0. \} \end{aligned} \right\}$$
4. Решаем систему $Au = f$.
5. Выводим результат.

6 Линеинный треугольный элемент

Линеинный треугольный элемент представляет собой треугольник с прямолинейными сторонами и тремя узлами i, j, k , по одному в каждой вершине (см. рис. 3). Выведем вид базисных функций треугольного линеинного элемента. При работе с узлами требуется определенная нумерация или направление обхода узлов элемента. Будем использовать направление против часовой стрелки. Узловые значения в элементе обозначим (u_i, u_j, u_k) . Координаты узлов соответственно равны $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k)$. Площадь треугольника равна A . Будем интерполировать неизвестную функцию $u(x, y)$ на элементе линеинной функцией, то есть

$$u^e(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y. \quad (5)$$

Интерполяция проводится так, чтобы значения точного решения и приближенного совпадали в узлах сетки, то есть

$$\begin{cases} u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i, \\ u_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j, \\ u_k = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k. \end{cases}$$

Эта система уравнений всегда имеет единственное решение, так как определитель системы равен двум площадям треугольника, то есть не равен нулю. Разрешив ее относительно α_i и подставив α_i в (5), получим

$$u^e = \frac{1}{2A}(u_i(x_j y_k - x_k y_j + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y) + u_j(x_k y_i - x_i y_k + (y_k - y_i)x + (x_i - x_k)y) + u_k(x_i y_j - x_j y_i + (y_i - y_j)x + (x_j - x_i)y).$$

Функции при коэффициентах u_i, u_j, u_k определяют линеинные функции формы данного элемента. С их помощью соотношение, определяющее элемент, записывается в виде

$$u^e = N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k, \text{ где } N_l = \frac{1}{2A}(a_l + b_l x + c_l y)$$

$$\begin{cases} a_i = x_j y_k - x_k y_j \\ b_i = y_j - y_k \\ c_i = x_k - x_j \end{cases} \quad \begin{cases} a_j = x_k y_i - y_k x_i \\ b_j = y_k - y_i \\ c_j = x_i - x_k \end{cases} \quad \begin{cases} a_k = x_i y_j - x_j y_i \\ b_k = y_i - y_j \\ c_k = x_j - x_i \end{cases} \quad (6)$$

Функция N_l равна единице в узле (x_l, y_l) и нулю в двух других узлах.

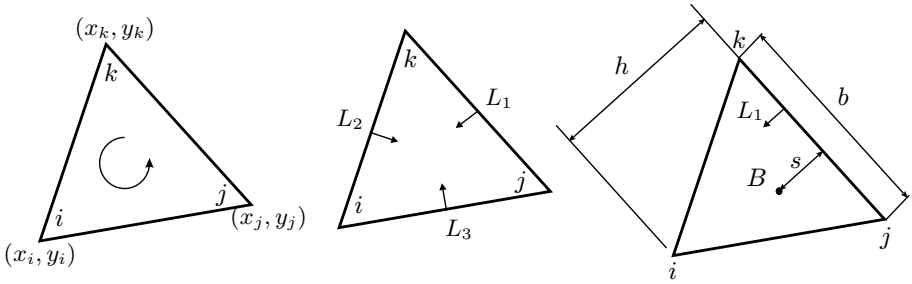


Рис. 3: Треугольный элемент и L -координаты

Если неизвестная функция аппроксимируется базисными функциями, линейными по x и y , то градиенты в направлениях x и y будут постоянны. Например,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} u_k, \quad \frac{\partial N_l}{\partial x} = \frac{b_l}{2A}, \quad l = i, j, k,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{l=i,j,k} \frac{b_l}{2A} u_l = \text{const}.$$

Естественная система координат (ЕСК). При вычислении элементных матриц жесткости или векторов правых частей приходится интегрировать функции формы или их частные производные по площади элемента. Интегрирование можно упростить, если записать интерполяционные соотношения в системе координат, связанной с элементом, то есть в локальной системе координат (ЛСК). Эту локальную систему координат называют *естественной*, если в узле элемента локальная координата принимает значения $0, \pm 1$.

В двумерном случае интеграл от функции, заданной в глобальной системе координат, может быть вычислен в ЛСК с помощью соотношения

$$\int_V f(x, y) dx dy = \int_{V^*} f(x(r, s), y(r, s)) \det |J| dr ds,$$

где V и V^* — соответственно старая и новая области интегрирования, $\det |J|$ — абсолютное значение определителя матрицы Якоби преобразования системы координат. Функция $f(x, y)$ в левой части равенства представляет собой функцию, выраженную в глобальной системе координат,

тогда как $f(x(r, s), y(r, s))$ соответствует функции, представленной в локальной системе координат $(x, y$ — глобальные (старые) координаты, r, s — локальные (новые) координаты). Матрица Якоби имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{pmatrix}.$$

Для треугольного элемента наиболее распространенной является *барицентрическая система координат* или *L-координаты*. Каждая координата представляет собой отношение расстояния от выбранной точки треугольника до одной из его сторон s к высоте h , опущенной на эту сторону из противоположащей вершины (рис. 3). Величины L_i изменяются в пределах от нуля до единицы.

L -координаты треугольника удовлетворяют соотношению

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1.$$

Уравнения этого типа следовало ожидать, потому что три координаты в двумерном случае не могут быть независимыми. Местоположение произвольной точки может быть полностью описано с помощью только двух координат.

L -координаты обладают следующими свойствами. Координатные переменные L_1, L_2 и L_3 представляют собой функции формы для треугольного элемента: $N_i = L_1, N_j = L_2, N_k = L_3$ ($L_i = 1$ в узле с номером i и равна 0 в узлах j и k).

Координаты произвольной точки C в декартовой системе выражаются через L -координаты следующим образом

$$x = L_1 x_i + L_2 x_j + L_3 x_k,$$

$$y = L_1 y_i + L_2 y_j + L_3 y_k.$$

Преимуществом использования L -координат является существование интегральных формул, которые упрощают вычисление интегралов вдоль сторон элемента и по его площади:

$$\int_{\ell} (L_1)^a (L_2)^b d\ell = \frac{a!b!}{(a+b+1)!} \ell,$$

$$\int_{S_{\Delta}} (L_1)^a (L_2)^b (L_3)^c dS = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2S,$$

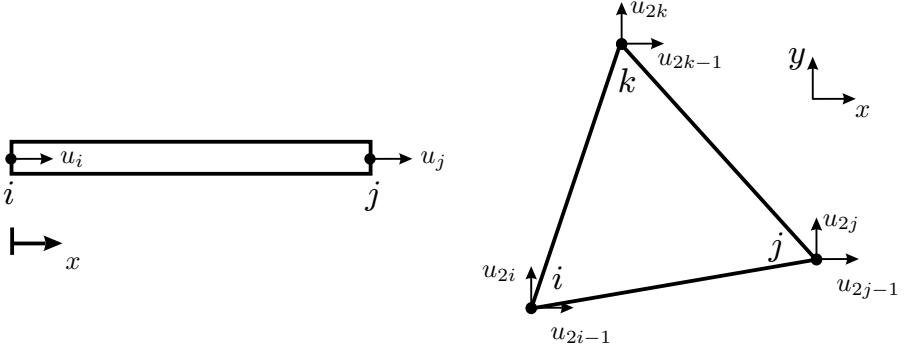


Рис. 4: Степени свободы векторных величин в узлах элементов

где S — площадь элемента. Использование этих соотношения может быть проиллюстрировано при вычислении интеграла вида

$$\int_{S_{\Delta}} N_i N_j dS = \int_{S_{\Delta}} (L_1)^1 (L_2)^1 (L_3)^0 dS = \frac{1!1!0!}{(1+1+0+2)!} 2S = \frac{2S}{4!} = S/12.$$

7 Аппроксимация векторных величин

До сих пор рассматривалась интерполяция скалярных величин, таких как, например, температура или давление. Скалярная величина представлялась как линейная комбинация функций форм

$$u^e = \sum u_i N_i.$$

Векторные величины (например, перемещение) принято разделять на компоненты или степени свободы. В зависимости от размерности задач каждый узел содержит одну, две или три неизвестных (рис. 4).

В одномерном случае представление векторов и скалярных величин совпадают

$$u^e = N_i u_i + N_j u_j = (N_i \ N_j) \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix}.$$

В двумерном случае отдельно аппроксимируются горизонтальная и вертикальная компоненты с помощью одних и тех же базисных функций. Перемещения вдоль осей x , y обозначим через u_x , u_y . Для треугольного

элемента

$$\begin{aligned} u_x &= N_i u_{2i-1} + N_j u_{2j-1} + N_k u_{2k-1}, \\ u_y &= N_i u_{2i} + N_j u_{2j} + N_k u_{2k}. \end{aligned}$$

или в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2i-1} \\ u_{2i} \\ u_{2j-1} \\ u_{2j} \\ u_{2k-1} \\ u_{2k} \end{pmatrix}.$$

8 Применение треугольных конечных элементов в задаче теплопроводности

Постановка задачи. Стационарное уравнение теплопроводности имеет вид

$$-\frac{\partial}{\partial x}(D_{xx} \frac{\partial T}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(D_{yy} \frac{\partial T}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial z}(D_{zz} \frac{\partial T}{\partial z}) + Q = 0, \quad (7)$$

где T — температура, D_{xx}, D_{yy}, D_{zz} — коэффициенты теплопроводности (Вт/(м град)), Q — плотность тепловых источников внутри тела (Вт/м³), эта величина считается положительной, если тепло подводится к телу.

Граничные условия могут быть трех типов:

1. На границе тела (или ее части) задана температура, которая может быть функцией координат

$$\Gamma_1 : T = \bar{T}(x). \quad (8)$$

2. На границе задан конвективный теплообмен. Конвективный теплообмен — процесс переноса тепла, происходящий в движущихся текучих средах (жидкостях либо газах) (теплообмен с окружающей средой). Конвективный теплообмен характеризуется величиной $h(T - T_\infty)$, h — коэффициент теплообмена Вт/(м² · град), T_∞ — температура окружающей среды.
3. На границе задан тепловой поток q (то есть извне подводится или отводится тепло). Тепловой поток q положителен, если тепло отводится от тела.

Граничные условия п. 2 и 3 записываются с помощью смешанного условия

$$\Gamma_2 : D_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} \cos \alpha + D_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} \cos \beta + D_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} \cos \gamma + h(T - T_\infty) + q = 0, \quad (9)$$

где $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности. Если конвективный обмен отсутствует, то есть отсутствует обмен тепла с окружающей средой и поток тепла равен нулю, условие на границе приобретает вид $\partial T / \partial n = 0$ — условие теплоизолированности границы.

Решение уравнения (7) с граничными условиями (8)–(9) эквивалентно отысканию минимума функционала

$$F(T) = \int_V (\nabla T)^T D \nabla T dV + 2 \int_{\Gamma_2} T q d\Gamma + \int_{\Gamma_2} h(T - T_\infty)^2 d\Gamma + 2 \int_V QT dV.$$

Разобьем область V на конечные элементы V_e , $e = \overline{1, m}$, и аппроксимируем решение T конечной суммой $T = \sum_{i=1}^n N_i T_i$, где n — число узлов, N_i — функции формы. Записывая условие минимума функционала $\frac{\partial F}{\partial T_i} = 0$, получим СЛАУ относительно узловых значений:

$$\sum_e k^e u = \sum_e f^e$$

или

$$Ku = F, \quad K = \sum_e k^e, \quad F = \sum_e f^e.$$

Элементная матрица системы имеет вид

$$k^e = \int_{V^e} (B^e)^T D^e B^e dV + \int_{\Gamma_2} h(N^e)^T N^e d\Gamma = k_1 + k_2, \quad (10)$$

$$f^e = - \int_{\Gamma_2} q(N^e)^T d\Gamma + \int_V Q(N^e)^T dV + \int_{\Gamma_2} h(N^e)^T T_\infty d\Gamma. \quad (11)$$

Рассмотрим треугольный элемент с тремя узлами i, j, k . Функции формы линейного треугольного элемента $N_s = \frac{1}{2A}(a_s + b_s x + c_s y)$, $s = i, j, k$, (где a_s, b_s, c_s определяются соотношением (6)). Температура на элементе определяется формулой

$$T^e = (N_i \quad N_j \quad N_k) \begin{pmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{pmatrix}.$$

Запишем матрицу градиентов от функций формы

$$B^e = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{pmatrix},$$

матрица свойств

$$D = \begin{pmatrix} D_{xx} & 0 \\ 0 & D_{yy} \end{pmatrix}.$$

Теперь можно вычислить матрицу теплопроводности элемента (10) (элементную матрицу жесткости). Первое слагаемое k_1 принимает вид

$$\int_{V^e} (B^e)^T D^e B^e dV = \frac{1}{4A^2} \int_{V^e} \begin{pmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{xx} & 0 \\ 0 & D_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{pmatrix} dV.$$

Предполагая толщину элемента единичной, заменим dV на dA . Верхний индекс e опускаем. Подынтегральное выражение постоянно и может быть вынесено за знак интеграла:

$$\int_{V^e} B^T D B dV = B^T D B \int_A dA = A B^T D B.$$

Вычисляя произведение матриц, имеем

$$k_1 = \frac{D_{xx}}{4A} \begin{pmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k \end{pmatrix} + \frac{D_{yy}}{4A} \begin{pmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k c_k \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Второй интеграл $\int_S h N^T N dS$ должен быть вычислен по поверхности

$$k_2 = \int_S h N^T N dS = h \int_S \begin{pmatrix} N_i N_i & N_i N_j & N_i N_k \\ N_j N_i & N_j N_j & N_j N_k \\ N_k N_i & N_k N_j & N_k N_k \end{pmatrix} dS. \quad (13)$$

Функции формы зависят от x и y , поэтому произведения вида $N_i N_j$ не могут быть вынесены за знак интеграла. Кроме того, значение интеграла зависит от того, на какой поверхности наблюдается конвективный теплообмен. Если, например, конвекции подвержена сторона между узлами i и j , то N_k равно нулю вдоль этой стороны и интеграл сводится к следующему выражению

$$\int_S h N^T N dS = h \int_S \begin{pmatrix} N_i N_i & N_i N_j & 0 \\ N_j N_i & N_j N_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dS. \quad (14)$$

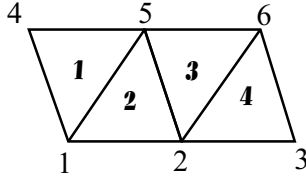


Рис. 5: Пример сетки из треугольных элементов. Перечислены номера узлов и номера элементов

номер элемента	узел i	узел j	узел k
1	1	5	4
2	1	2	5
3	2	6	5
4	2	3	6

Таблица 1: Списки узлов из которых состоит элемент (массив *elements*)

Если любая из двух других сторон подвержена конвекции, то расположение отличных от нуля членов в (13) будет иным, чем в (14).

Вычисление произведений от функций форм не представит труда, если применить L -координаты и интегральные формулы для них. Три интеграла в выражении для вектора нагрузки элемента также легко вычисляются, если воспользоваться L -координатами.

Программная реализация. *Используемые данные:* n — число узлов, m — число элементов; сетка (координаты узлов) $mesh[n][2]: mesh[i][1]$ — координата x_i , $mesh[i][2]$ — координата y_i , $i, j = \overline{1, n}$; массив $elements[m][3] = (node1, node2, node3)$ — список элементов (списки узлов из которых состоит элемент), для сетки на рисунке 5 массив *elements* имеет вид: $elements[1, 1] = 1$, $elements[1, 2] = 5$, $elements[1, 3] = 4$ (см. Табл. 8); элементная матрица k_{ij} размера 3×3 ; элементный вектор правых частей $b = (b_i)$, $i = \overline{1, 3}$; вектор правых частей $f = (f_i)$, $i = \overline{1, n}$; $u = (u_i)$, $i = \overline{1, n}$ — вектор решения, $u_s = t$ — граничное условие Дирихле, свойства материала — массив $material[m, 2]$ (первый индекс — номер элемента, второй индекс коэффициент теплопроводности D_{xx} , D_{yy}), так $material[1, 2]$ есть значение D_{yy} первого элемента, $material[20, 1]$ есть значение D_{xx} двадцатого элемента. Толщина элемента предполагается единичной.

Алгоритм

1. Считываем сетку, элементы, материал из файла — формируем массивы $mesh, material, elements$.
2. В цикле по элементам: для $i = 1$ до m
 - 2.1 Определяем номера узлов текущего элемента:
Для $j = 1$ до 3 $\{s_j = elements(i, j)\}$.
 s_1, s_2, s_3 — номера узлов текущего элемента.
 - 2.2 Формируем элементную матрицу $k = (k_{ij})$: k_{11}, \dots, k_{33} (формирование матрицы для задачи теплопроводности см. ниже).
 - 2.3 Проводим процесс сборки: формируем глобальную матрицу жесткости.
Для $j = 1$ до 3
Для $r = 1$ до 3 $\{a_{s_j, s_r} = a_{s_j, s_r} + k_{j, r}\}$.
 - 2.4 Формируем элементный вектор правых частей $b = b_i$.
 - 2.5 Проводим процесс сборки — формируем глобальный вектор правых частей
Для $j = 1$ до 3 $\{f_{s_j} = f_{s_j} + b_j\}$.
3. Вносим граничные условия Дирихле $u_s = t$ в матрицу и вектор правых частей
 - 3.1 $a_{ss} = 1; f_s = t;$
 - 3.2 Для $k = 1$ до $n, k \neq s$
 $\{ a_{sk} = 0;$
 $f_k = f_k - a_{ks} \cdot t;$
 $a_{ks} = 0. \}$
4. Решаем систему $Ku = f$.
5. Выводим результат u .
6. Определение расчетных величин в элементах.

Процедура формирования локальной матрицы жесткости для задачи теплопроводности (п.2.2 алгоритма, формулы (10), (11), (12), (14)).

1. Определяем координаты узлов текущего элемента
Для $i = 1$ до 3 $\{x_i = mesh[s_i, 1]; y_i = mesh[s_i, 2]\}$.

2. Формируем b_i, c_i :

$$b_1 = y_2 - y_3; b_2 = y_3 - y_1; b_3 = y_1 - y_2;$$

$$c_1 = x_3 - x_2; c_2 = x_1 - x_3; c_3 = x_2 - x_1.$$

3. Вычисляем площадь треугольника $A = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{pmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_1 y_2 - x_1 y_3 + x_3 y_1 - x_2 y_1)/2$.

4. Формируем матрицу k_1 по формуле (12).

5. Если на одной из сторон задан конвективный теплообмен, например на стороне 12, то вычисляем длину стороны L_{12} и матрицу

$$k_2 = \int_{S_{12}} hN^T N dS = \frac{hL_{12}}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Формируем матрицу $k = k_1 + k_2$.

7. Если на одной из границ задан тепловой поток, его надо учесть в правой части. Пусть например поток задан на стороне 23. Вычисляем длину стороны $L_{23} = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$. К вектору правых частей добавляем вектор

$$q \int_S \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} dS = \frac{qL_{23}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

8. Если на одной из границ задан конвективный теплообмен, его надо учесть в правой части. Пусть, например, теплообмен задан на стороне 13. Вычисляем длину стороны L_{13} . Тогда к вектору правых частей добавляем вектор

$$hT_\infty \int_S \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} dS = \frac{hT_\infty L_{13}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Определение расчетных величин в элементах (пункт 6). Если есть необходимость вычислить градиенты температур в узлах элементов

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}.$$

В цикле по элементам

1. Определяем координаты узлов текущего элемента и значения решений

$$\text{Для } i = 1 \text{ до } 3 \{x_i = \text{mesh}[s_i, 1]; y_i = \text{mesh}[s_i, 2]; T_i = u[s_i]\}.$$

2. Формируем b_i, c_i :

$$b_1 = y_2 - y_3; b_2 = y_3 - y_1; b_3 = y_1 - y_2;$$

$$c_1 = x_3 - x_2; c_2 = x_1 - x_3; c_3 = x_2 - x_1.$$

3. Вычисляем площадь треугольника $A = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{pmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2 + x_1y_2 - x_1y_3 + x_3y_1 - x_2y_1)/2$.

4. Вычисляем градиенты температур на всем элементе (они будут постоянны по элементу)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}.$$

Поскольку градиенты получаются кусочно-постоянными на элементах, можно провести сглаживание значений. Например, если один узел принадлежит четырем элементам, то значению в узле приписывают среднее по этим четырем элементам.

9 Применение четырехугольных конечных элементов в задаче упругости

Постановка плоской задачи теории упругости. Система разрешающих уравнений теории упругости относительно трех неизвестных полей перемещений $u = (u_x, u_y)^T$, деформаций $\varepsilon = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy})^T$ и напряжений $\sigma = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})^T$ состоит из трех групп уравнений: кинематических соотношений, определяющих уравнений и уравнений равновесия в области тела. При отсутствии начальных напряжений в теле эта система уравнений

для плоского случая может быть записана в следующем матричном виде

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}.$$

Записанная система трех матричных уравнений содержит вектор объемных сил с компонентами f_x , f_y , входящий в уравнение равновесия, матрицу упругих модулей с компонентами d_{ij} , связывающую напряжения и деформации в точке тела, а также две символические матрицы, состоящие из частных производных по пространственным координатам.

В матричном виде эта система уравнений имеет вид

$$\varepsilon = Bu, \quad \sigma = De, \quad B^T \sigma = f, \quad (15)$$

где $D = (d_{ij})$ — симметричная матрица упругих модулей, B — матрица, состоящая из частных производных, f — вектор объемных сил.

В задачах теории упругости различают плоско-напряженное и плоско-деформированное состояния. С вычислительной точки зрения эти состояния будут отличаться только матрицей упругих модулей

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{pmatrix},$$

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/(2(1-\nu)) \end{pmatrix},$$

где E — модуль Юнга материала, ν — коэффициент Пуассона.

Различают следующие *граничные условия*:

1. Кинематические граничные условия (условия Дирихле) $u|_{\Gamma_1} = \bar{u}$. Например, часть поверхности закреплена.

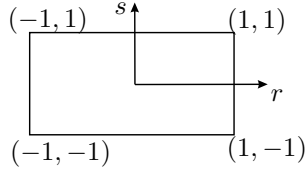


Рис. 6: Четырехугольный билинейный элемент в локальной системе координат

2. Силовые граничные условия (условия Неймана), когда на часть области действует сила. Действующие силы могут быть объемными $f = (f_x, f_y)$, поверхностными $p = (p_x, p_y)$ и сосредоточенными (узловыми) $G = (g_x, g_y)$.

Система (15) эквивалентна задаче минимизации полной потенциальной энергии тела и сводится к задаче минимизации функционала энергии.

Элементная матрица жесткости и элементный вектор правых частей для плоской задачи с единичной толщиной элемента имеют вид

$$k^e = \int_{S^e} B_N^T D B_N dS, \quad f^e = \int_{S^e} (N^e)^T \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} dS + \int_{\ell^e} (N^e)^T \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} d\ell, \quad (16)$$

где $B_N = BN$ — матрица производных от функций форм, S^e — площадь элемента, ℓ — ребро, на котором задана нагрузка.

Для *четырёхугольного билинейного элемента* (рис. 6) матрица B_N зависит от координат и ее нельзя вынести за знак интеграла, как в случае линейного треугольного элемента. Матрица системы имеет вид

$$Ku = f, \quad K = \sum_e k^e, \quad f = \sum_e f^e + G,$$

где G — вектор узловых сил.

Запишем формулу (16) для билинейных прямоугольных элементов. Для вычисления интегралов в (16) используем квадратурные формулы Гаусса

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \simeq \sum_{i=1}^s W_i f(t_i).$$

Узлы t_1, t_2, \dots, t_s и коэффициенты W_1, W_2, \dots, W_s подобраны так, что формула интегрирования точна для всех многочленов степени $2s - 1$. Тогда

элементная матрица (16) для билинейного элемента с использованием двух точек интегрирования для каждой координаты записывается в виде

$$\begin{aligned}
 k^e &= \int_{S^e} B_N^T D B_N dS = \\
 &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 W_i W_j B_N^T(r_i, s_j) D B_N(r_i, s_j) \det |J(r_i, s_j)|, \\
 B_N &= B \cdot N^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Производные функций форм получают с помощью матриц Якоби

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_s}{\partial x} \\ \frac{\partial N_s}{\partial y} \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_s}{\partial r} \\ \frac{\partial N_s}{\partial s} \end{pmatrix},$$

где матрица Якоби вычисляется исходя из соотношений $x = \sum_k N_k x_k$, $y = \sum_k N_k y_k$

$$J(r_i, s_j) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_k x_k \frac{\partial N_k}{\partial r}(r_i, s_j) & \sum_k y_k \frac{\partial N_k}{\partial r}(r_i, s_j) \\ \sum_k x_k \frac{\partial N_k}{\partial s}(r_i, s_j) & \sum_i y_i \frac{\partial N_i}{\partial s}(r_i, s_j) \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Рассмотрим вычисление интегралов вида $\int_{\ell} N^T \cdot p \, d\ell$, которые присутствуют в правой части уравнения (16). Пусть в качестве стороны интегрирования выступает сторона 2-3 прямоугольника. Эта сторона соответствует значению локальной координаты $r = 1$. Соответственно, функции формы будут иметь вид

$$\begin{aligned}
 N_1 &= (1-r)(1-s)/4 = 0, \\
 N_2 &= (1+r)(1-s)/4 = (1-s)/2, \\
 N_3 &= (1+r)(1+s)/4 = (1+s)/2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_4 &= (1-r)(1+s)/4 = 0, \\
\int_{\ell} N^T \cdot p \, dl &= \int_{-1}^1 N^T |\det(J)| ds = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 N^T \cdot p \, ds = \\
&= \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1-s & 0 \\ 0 & 1-s \\ 1+s & 0 \\ 0 & 1+s \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} ds = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_x(1-s) \\ p_y(1-s) \\ p_x(1+s) \\ p_y(1+s) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ds = \frac{\ell}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_x \\ p_y \\ p_x \\ p_y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (18)
\end{aligned}$$

Основные шаги программы. *Используемые данные:* n — число узлов; m — число элементов; массив $mesh[n][2] = (x_i, y_j)$ — сетка (координаты узлов) $i, j = \overline{1, n}$; массив $elements[m][4] = (node1, node2, node3, node4)$ — список элементов (список узлов из которых состоит элемент); элементная матрица k_{ij} размера 8×8 ; элементный вектор правых частей $b = (b_i)$, $i = \overline{1, 8}$; вектор правых частей $f = (f_i)$, $i = \overline{1, 2n}$; $orderGauss$ — порядок квадратуры; $quadrGauss$ — массив размера $orderGauss$, содержащий точки интегрирования; $weights$ — массив размера $orderGauss$, содержащий веса для точек интегрирования; $u = (u_i)$, $i = \overline{1, 2n}$ — вектор решения; $u_s = t$ — граничное условие Дирихле; свойства материала — массив $material[m, 2]$ (первый индекс — номер элемента, второй индекс — материал: модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν ; например, $material[1, 1]$ содержит значение E первого элемента, $material[20, 2]$ — содержит значение ν двадцатого элемента).

Алгоритм

1. Считываем сетку, элементы, материал из файла — формируем массивы $mesh$, $material$, $elements$.
2. В цикле по элементам: для $i = 1$ до m

2.1 Определяем номера узлов текущего элемента: s_1, s_2, s_3, s_4 . Для каждого узла число переменных равно двум. Введем массив с номерами переменных $numbers[8]$

Для $j = 1$ до 4 {

$$s_j = elements(i, j);$$

$$numbers[2j - 1] = 2s_j - 1;$$

$$numbers[2j] = 2s_j. }$$

- 2.2 Формируем элементную матрицу k и элементный вектор правых частей b (процедуру формирования см. ниже).
- 2.3 Проводим процесс сборки: формируем глобальную матрицу жесткости
 - Для $j = 1$ до 8
 - Для $l = 1$ до 8

$$a[numbers[j], numbers[l]] = a[numbers[j], numbers[l]] + k_{j,l}.$$
- 2.4 Формируем глобальный вектор правых частей
 - Для $j = 1$ до 8 $f_{numbers[j]} = f_{numbers[j]} + b_j.$
3. Вносим граничные условия Дирихле $u_s = t$ в матрицу и вектор правых частей
 - 3.1 $a_{ss} = 1; f_s = t;$
 - 3.2 Для $k = 1 \dots n, k \neq s$

$$\left. \begin{aligned} a_{sk} &= 0; \\ f_k &= f_k - a_{ks} \cdot t; \\ a_{ks} &= 0. \end{aligned} \right\}$$
4. Решаем систему $Au = f.$
5. Выводим результат.
6. Определение расчетных величин в элементах..

Процедура формирования локальной матрицы жесткости и вектора правой части для задачи упругости (n. 2.2) $k = \int_V B_N^T D B_N^T dV.$

1. Определяем координаты узлов текущего элемента
 - Для $i = 1$ до 4 $\{x_i = mesh[s_i, 1]; y_i = mesh[s_i, 2].\}$
2. Определяем матрицу материала D текущего элемента – в зависимости от того, какое состояние плоско деформированное или плоско напряженное.
3. В цикле по всем точкам интегрирования
 - Для $i = 1$ до $orderGauss$
 - Для $j = 1$ до $orderGauss$
 - 3.1 $r0 = quadrGauss[i]; s0 = quadrGauss[j];$
 - 3.2 Вычисляем матрицу Якоби J в точке $(r0, s0)$ по формуле (17)
 - 3.3 Вычисляем определитель матрицы Якоби $\det J.$

3.4 Вычисляем обратную матрицу Якоби $invJ$.

3.5 Вводим два массива для производных функций форм в ЛСК $dNr[4] = \frac{\partial N_i}{\partial r}$, $dNs[4] = \frac{\partial N_i}{\partial s}$ и вычисляем производные в точке $r0, s0$

$$\begin{aligned} dNr[1] &= (s - 1)/4; & dNs[1] &= (r - 1)/4; \\ dNr[2] &= (1 - s)/4; & dNs[2] &= (-r - 1)/4; \\ dNr[3] &= (s + 1)/4; & dNs[3] &= (r + 1)/4; \\ dNr[4] &= (-s - 1)/4; & dNs[4] &= (1 - r)/4. \end{aligned}$$

3.6 Вводим два массива для производных функций форм в глобальной СК $dNx[4] = \frac{\partial N_i}{\partial x}$, $dNy[4] = \frac{\partial N_i}{\partial y}$ и вычисляем производные в точке $r0, s0$

$$\begin{aligned} &\text{Для } k=1 \text{ до } 4 \{ \\ dNx[k] &= InvJ(1, 1)(dNr)[k] + InvJ(1, 2)(dNs)[k]; \\ dNy[k] &= InvJ(2, 1)(dNr)[k] + InvJ(2, 2)(dNs)[k]. \} \end{aligned}$$

3.7 В точке $r0, s0$ вычисляем матрицу $B_N = B \cdot N =$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} dNx[1] & 0 & \dots & dNx[4] & 0 \\ 0 & dNy[1] & & 0 & dNy[4] \\ dNy[1] & dNx[1] & \dots & dNy[4] & dNx[4] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3.8 Вычисляем локальную матрицу жесткости

$$k = k + \det(J)weights[j]B_N^T DB_N.$$

3.9 Если заданы поверхностные, объемные и узловые силы соответствующие интегралы также надо внести в элементный вектор правых частей согласно формуле (18).

Определение расчетных величин в элементах (п. 6). Для вычисления напряжения и деформации в узлах элементов

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = B_N u = B_N \begin{pmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ \vdots \\ u_{x4} \\ u_{y4} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix}.$$

В цикле по элементам:

1. Определяем координаты узлов текущего элемента
Для $i = 1$ до 4 $\{x_i = mesh[s_i, 1]; y_i = mesh[s_i, 2]. \}$
2. Определяем значения решений в узлах элемента
Для $i = 1$ до 8 $\{t_i = u[numbers[i]]\}$.
3. В цикле по узлам элемента
 - 3.1 Формируем B_N для текущего узла (п. 3.2-3.7). Отличие от вычисления B_N для матрицы жесткости состоит в том, что раньше якобиан и производные вычислялись в точках квадратур Гаусса, а теперь они вычисляются в узлах элемента.
 - 3.2 Вычисляем деформацию в узле как произведение матрицы B_N на вектор t : $\varepsilon_{loc} = \frac{1}{ne} B_N t$, где ne — число элементов, которым принадлежит данный узел. Напряжение $\sigma_{loc} = D\varepsilon_{loc}$.
 - 3.3 К глобальному вектору деформаций ε и напряжений σ добавляем узловую деформацию и напряжение для текущего узла $\varepsilon = \varepsilon + \varepsilon_{loc}$, $\sigma = \sigma + \sigma_{loc}$.

10 Примеры задач

1. Решить методом Рунге уравнение $y'' - x = 1$, $y(0) = y(1) = 0$ с базисными функциями $\phi_1(x) = x(x-1)$ и $\phi_2(x) = x^2(x-1)$. Найти точное решение, сравнить графически.

2. Пусть известна величина давления p в узловых точках элемента $p_i = 40\text{Н/см}^2$, $p_j = 34\text{Н/см}^2$, $p_k = 46\text{Н/см}^2$. Координаты узлов $i(0, 0)$, $j(4, 0.5)$, $k(2, 5)$. Найти значение давления в точке $B(2, 1.5)$.

3. Заданы узловые перемещения для двумерного треугольного элемента: $u_{2i-1} = 2$ мм, $u_{2i} = 4$ мм, $u_{2j-1} = 4$ мм, $u_{2j} = 5$ мм, $u_{2k-1} = -1$ мм, $u_{2k} = -1$ мм. Определите компоненты перемещения в точке $(10, 10)$. Координаты узлов (в миллиметрах) указаны в круглых скобках $i(0, 0)$, $j(20, -5)$, $k(8, 20)$.

4. Вычислите интеграл

$$\int_{l_{ij}} \begin{pmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{pmatrix} (N_i \quad N_j \quad N_k) dl,$$

где l_{ij} — длина стороны линейного треугольника между узлами i и j , а N_i , N_j и N_k — функции формы.

5. Координаты узлов треугольного элемента $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(3, 3)$. Записать координаты точек A , B , C , и точки $D(3, 0)$ в L -координатах.

6. Пусть МКЭ сформирована следующая система уравнений

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Известно, что $u_3 = 4$. Записать систему после внесения граничного условия (сохранить симметрию матрицы).

11 Примеры заданий к лабораторным работам

Все отчеты должны содержать условия задачи, краткую теоретическую часть, краткий алгоритм, результаты работы программы и выводы.

Лабораторная работа №1. ОДНОМЕРНЫЙ МКЭ.

Решить дифференциальное уравнение методом конечных элементов (с линейными базисными функциями), разбивая область на n и $2n$ элементов (сетка равномерная); $n = 5 + N$; N — номер варианта.

Уравнения: четные варианты: $y'' - 2Ny = 1$ $y(0) = 0$, $y'(1) = N$; нечетные варианты: $y'' + 2Ny = 0$ $y(0) = 0$, $y'(1) = N$.

В отчете привести переход от дифференциальной постановки к интегральной, а также вывод элементной матрицы жесткости и элементного вектора правой части, записать общий вид глобальной матрицы системы и вывод точного решения. Вывести в отчете полученную конечно-элементную СЛАУ для n элементов. Нарисовать на одной диаграмме графики решения на двух сетках и точного решения. Для сетки с n элементами вывести решения в виде таблицы со столбцами: номер узла, координата узла, точное решение, решение МКЭ (сетка n элементов), решение МКЭ (сетка $2n$ элементов), абсолютная погрешность решения в узлах сетки. Вывести среднеквадратическую ошибку для двух сеток.

Лабораторная работа №2. ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ.

Рассматривается двумерная задача о стационарном распространении тепла на областях (по вариантам, см. рис. 7).

Вариант 1. Пластина: $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$. Толщину принять равной единице. Материал: коэффициент теплопроводности $D_{xx} = D_{yy} = 10$. На границах 1 и 3 поверхность пластины теплоизолирована. На границе 2 поддерживается постоянная температура $T = 20$ град. На границе 4 поддерживается постоянная температура $T = 10$ град.

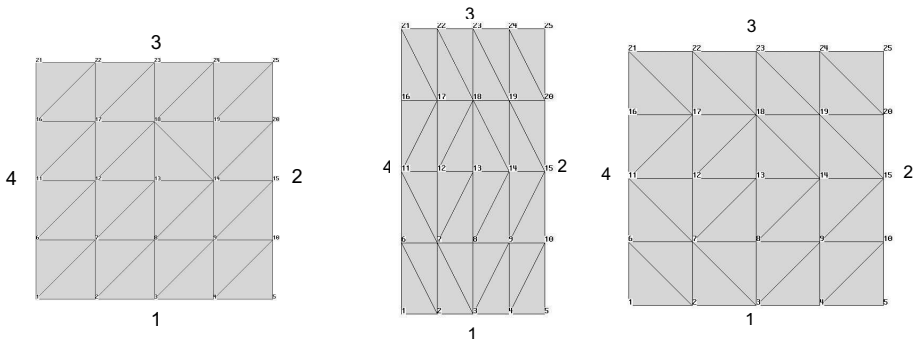


Рис. 7: Сетки для задачи теплопроводности

Вариант 2. Пластина: $x \in [0, 1], y \in [0, 2]$. Толщину принять единичной. Материал: коэффициент теплопроводности $D_{xx} = D_{yy} = 15$. На границах 1 и 3 поверхность пластины теплоизолирована. На границе 2 задан теплообмен с окружающей средой с коэффициентом теплообмена $h = 10$, температура окружающей среды $T_\infty = 20$ град. На границе 4 поддерживается постоянная температура $T = 5$ град.

Результаты работы программы (температуру) вывести в текстовый файл solution.res в следующем виде:

```
N узла    Температура
1         t1
2         t2 ...
```

Лабораторная работа №3. ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.

Рассматривается двумерная задача теории упругости (плоско-напряженное состояние) для пластины: $x \in [0, 1], y \in [0, 1]$. Толщина пластины равна единице. Определить перемещения $u = (u_x, u_y)$ в узлах сетки, определить деформации и напряжения в элементах и узлах элементов и вывести их в файл.

Вариант 1. Материал пластины: модуль Юнга $E = 10^6$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$. При $x = 0$ пластина жестко закреплена ($u_x = u_y = 0$). На поверхности $x = 1$ на пластину действует растягивающая поверхностная сила $p_x = 22000 \text{ Н/м}^2$.

Вариант 2. Внутри пластины включение квадратной формы. Материал матрицы: модуль Юнга $E = 5 \cdot 10^6$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.25$. Материал включения: модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^7$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.25$. При $x = 0$ пластина закреплена по направлению y : $u_y = 0$. При $y = 0$ пластина закреплена по направлению x : $u_x = 0$. На поверхности

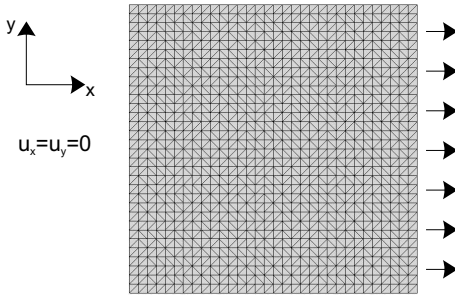


Рис. 8: Сетка для Варианта 1

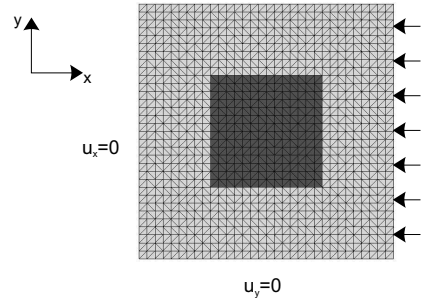


Рис. 9: Сетка для Варианта 2

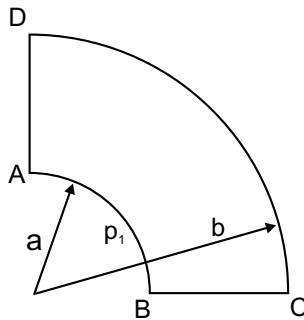


Рис. 10: Задача Ламе

$x = 1$ на пластину действует сжимающая поверхностная сила $p_x = -8 \cdot 10^4$ Н/м².

Лабораторная работа №4. ЗАДАЧА ЛАМЕ (Задача Ламе о толсто-стенной трубе под действием давления.)

Пусть имеется труба, длину которой мы можем считать такой большой, что можно не обращать внимания на явления, происходящие у концов трубы. Труба находится под действием равномерного внутреннего давления p_1 и равномерного внешнего давления p_0 , внешний радиус трубы обозначим через b , а внутренний радиус трубы через a , причем предполагается, что $a \ll b$.

Ось z направим по оси трубы. Ввиду большой длины трубы и равномерного распределения давления, мы можем рассматривать задачу Ламе, как двумерную задачу (плоско-деформированное состояние). Известно анали-

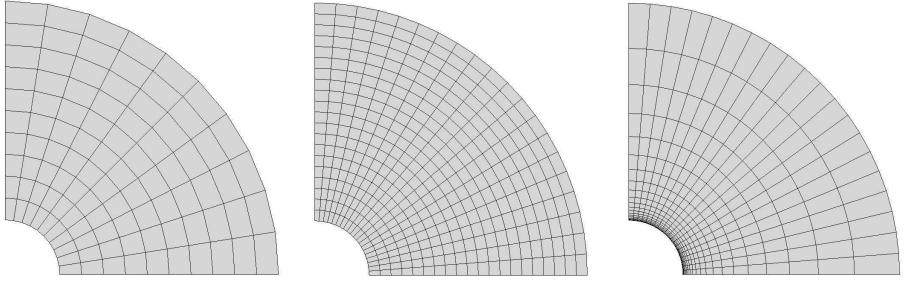


Рис. 11: Сетки для задачи Ламе

тическое решение (известны перемещения и напряжения) задачи Ламе в цилиндрических координатах. Перемещение

$$u_r = Ar + \frac{B}{r}, \quad A = \frac{p_1 a^2 - p_0 b^2}{2(\lambda + \mu)(b^2 - a^2)}, \quad B = \frac{(p_1 - p_0)a^2 b^2}{2\mu(b^2 - a^2)},$$

где λ, μ — константа Ламе и модуль сдвига

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Напряжения в случае $p_0 = 0$ имеют вид

$$\sigma_{rr} = A_1 + \frac{B_1}{r^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = A_1 - \frac{B_1}{r^2}, \quad A_1 = p_1 \frac{a^2}{b^2 - a^2}, \quad B_1 = -p_1 \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2},$$

где $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$ — радиальные и кольцевые напряжения. Напряжения в декартовой и цилиндрической системе координат связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{rr} \cos^2 \theta + \sigma_{\theta\theta} \sin^2 \theta, \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{rr} \sin^2 \theta + \sigma_{\theta\theta} \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

Задание. Решить задачу Ламе для сетки из четырехугольных элементов для данных $E = 1, \nu = 0.3, p = 10^{-2}E, a = 0.2\text{м}, b = 1\text{м}$. Полагаем модуль Юнга величиной нормированной и безразмерной. Задачу решить для трех сеток (рис. 11): а) равномерная сетка с числом элементов $N = 100$, б) мелкая равномерная сетка с числом элементов $N = 400$, в) мелкая сетка со сгущением к центру с числом элементов $N = 400$. Использовать формулы численного интегрирования (квадратуры Гаусса) 2-го порядка. Сравнить перемещения и напряжения с точным на линии $y = 0$ (построить графики перемещений и напряжений).

Литература

- [1] *Seegerlin L.* Applied finite element analysis. — Second edition. — John Wiley and sons, 1984. — 427 pp.
- [2] *Szabo B., Babushka I.* Finite Element Analysis. — New York: John Wiley and Sons, 1991. — 368 pp.
- [3] *Zienkiewicz O. C., Taylor R.* The finite element method. — Fifth edition. — Butterworth-Heinemann, 2000.
- [4] *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975. — 542 с.
- [5] *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимации. — М.: Мир, 1986. — 318 с.
- [6] *Коннор Д., Бреббиа К.* Метод конечных элементов в механике жидкости. — Л.: Судостроение, 1979. — 264 с.
- [7] *Марчук Г. И., Агошков В. И.* Введение в проекционно-сеточные методы. — М.: Наука, 1981. — 416 с.
- [8] *Митчелл Э., Уэйт Р.* Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. — М.: Мир, 1981. — 504 с.
- [9] *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. — М.: Физматгиз, 1970. — 512 с.
- [10] *Норри Д., де Фриз Ж.* Введение в метод конечных элементов. — М.: Мир, 1981. — 304 с.
- [11] *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. — М.: Мир, 1979. — 392 с.
- [12] *Стренг Г., Фикс Д.* Теория метода конечных элементов. — М.: Мир, 1977. — 349 с.
- [13] *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. — М.: Мир, 1991. — 504 с.
- [14] *Шабров Н. Н.* Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей. — Л.: Машиностроение, 1983. — 212 с.

**Юлия Альбертовна Сагдеева, Сергей Петрович Копысов,
Александр Константинович Новиков**

ВВЕДЕНИЕ В МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
Методическое пособие

Подписано в печать 18.03.11. Формат 60 × 84 1/16.

Печать офсетная. Усл.печ.л. 2,75. Уч.-изд.л. 2,76.

Заказ № . Тираж 30 экз.

Издательство «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4.